ZOFIA KOGUT

Potencjały cylindrycznie i sferycznie niezmienniczych pól Yanga-Millsa

WSTĘP

Interpretacja klasycznych pól cechowania jako koneksji na wiązce głównej [1] pozwala pełniej zrozumieć geometryczną strukturę tych pól. W szczególności prowadzi do poprawnego sformułowania pojęcia symetrii pola wobec przekształceń. Mianowicie niech ω będzie formą koneksji na wiązce głównej $P(M, G)$, a f automorfizmem tej wiązki tzn. $f:P \to P$, f przeprowadza włókno we włókno: $f(pg) = f(p)f_0(g)$, gdzie $f_0:G \to G$, $p \in P$, $g \in G$ f jest bijekcją a f_0 izomorfizmem oraz f indukuje odwzorowanie $\hat{f}:M \to M$ i spełnia warunek $\pi \circ f = \hat{f} \circ \pi$ gdzie $\pi :P \to M$ rzutowanie na bazę. Koneksję nazywamy niezmienniczą wobec automorfizmu f, jeśli jej forma w każdym punkcie $p \in P$ spełnia warunek

$$f^{*}\omega = \omega \qquad (1)$$

gdzie $f^{*}\omega$ - przeciwobraz formy koneksji w odwzorowaniu f.

Przekształceniami "symetrii" nazywamy G-automorfizmy wiązki głównej, tzn. takie automorfizmy, że $f_0 = Id_G$. Ponieważ potencjały pola A^a_μ Yanga-Millsa odpowiadają lokalnej formie koneksji, czyli formie koneksji [2] zrzutowanej na bazę poprzez dowolnie wybrane lokalne cięcie $s:U \to P$ nad otwartym zbiorem $U \subset M$, $\omega_s := s^{*}\omega = A^a_\mu \, dx^\mu T_a$ [2], to warunek niezmienniczości koneksji (1) wobec G-automorfizmów wiązki należy sformułować w języku form lokalnych. Niech s będzie cięciem $(s: U \ni x \to s(x) \in P)$, a f G-automorfizmem $P(M, G)$ indukującym odwzorowanie $\hat{f}:M \to M$, wówczas dla s i f określona jest G-znaczna funkcja na M $\varrho_s(f, x) = \varrho(x)$: $:U \ni x \to \varrho(x) \in G$, taka, że

$$f(s(x))\varrho(x) = s(\hat{f}(x)) \tag{2}$$

i warunek niezmienniczości koneksji (1) można zapisać w postaci [3]

$$(\hat{f}^{*}\omega_{s})(x) = \mathrm{Ad}\varrho(x)^{-1}\circ\omega_{s}(x) + \varrho(x)^{-1}d\varrho(x) \tag{3}$$

KONSTRUKCJA K-NIEZMIENNICZEJ KONEKSJI P(M,G)

W fizyce, pod nazwą przekształceń symetrii rozumiemy przekształcenia rozmaitości, na której pola są określone. Ponieważ pola Yanga-Millsa utożsamiamy z lokalnymi formami koneksji, to tym samym są one określone na bazie M, a nie na przestrzeni wiązki P, wobec czego konstrukcję symetrycznych pól Yanga-Millsa należy oprzeć na odwzorowaniach $\hat{f}$ a nie f. Takie postawienie problemu prowadzi do niejednoznaczności w określeniu f. Mianowicie jednemu $\hat{f}$ odpowiada wiele automorfizmów wiązki f_α takich, że $\pi\circ f_\alpha = \hat{f}\circ\pi$, działających w sposób identyczny na bazie. Z drugiej strony koneksje niezmiennicze wobec różnych f_α mogą być fizycznie równoważne, tzn. ich formy lokalne można przeprowadzić w siebie stosując przekształcenie cechowania. Konstrukcja, która pozwala na wyznaczenie istotnie różnych niezmienniczych koneksji jest następująca [4].

Niech K będzie grupą Liego, szukamy K-niezmienniczej koneksji wiązki P(M, G). Niech grupa K działa tranzytywnie na podrozmaitości $N\subset M$. Przez K_{ξ_0} oznaczamy grupę izotropii punktu $\xi_0\in N$, K_{ξ_0} jest podgrupą grupy K. Wówczas możemy traktować K jako wiązkę główną o bazie N i grupie struktury K_{ξ_0} [1]. Niech $\varkappa(\xi)$ będzie cięciem wiązki $K(N, K_{\xi_0})$ o następujących własnościach:

$$\varkappa(\xi_0) = e_K \quad \mathrm{i} \quad j_a\circ\varkappa(\xi) = \varkappa(\hat{f}a\,\xi) \tag{4}$$

gdzie $a\in K_{\xi_0}$, $\hat{f}_a: N\to N$ działanie a na N oraz j_a - wewnętrzny automorfizm grupy K : $j_a\circ\varkappa(\xi) = a\,\varkappa(\xi)\,a^{-1}$. Odwzorowania $\hat{f}_k$ tworzą grupę dyfeomorfizmów rozmaitości N. Utożsamiamy M z $N\times M'$ przez odpowiedni wybór współrzędnych w M, tzn. $M \ni x = (\xi,\eta)$ $\xi \in N$, $\eta \in M'$, przy czym $\hat{f}_k x := (\hat{f}_k \xi, \eta)$. Niech wskaźnik α oznacza pewne "podniesienie" f_k^α przekształcenia bazy $\hat{f}_k$, $k \in K$ do wiązki. Przy określonych α i $\varkappa$ można zdefiniować jednoznacznie cięcie $s = s_{\alpha,\varkappa}$ wiązki $P(M, G)$ o ustalonej wartości $u(\eta) := s(\xi_0, \eta)$ w punkcie $x_0 = (\xi_0, \eta)$

$$s(x) := f^\alpha_{\varkappa(\xi)} u(\eta) \qquad \forall x \in M : \quad x = (\xi,\eta)$$

Działanie dowolnego automorfizmu f_k^α na cięcie $s(x)$ jest dane odwzorowaniem $\lambda_\alpha = \lambda : K_{\xi_0} \times N \to G$

$$f_k^\alpha \; s(x) = s(\hat{f}_k x)\lambda(a^\varkappa (k,\xi);\eta)$$

gdzie $a^\varkappa (k,\xi) \in K_{\xi_0}$ jest określone jednoznacznie równością

$$k\varkappa(\xi) = \varkappa(\hat{f}_k \xi)a^\varkappa (k,\xi). \tag{5}$$

Wówczas warunek niezmienniczości (3) ma postać

$$(\hat{f}_k^* \omega_s)(x) : \mathrm{Ad}\, \lambda(k,x) \circ \omega_s(x) + \lambda(k,x) d\,\lambda(k,x)^{-1} \tag{6}$$

gdzie $\lambda(k,x) := \lambda(a^\varkappa(k,\xi),\eta)$, $x = (\xi,\eta)$.

Użycie istotnie różnych odwzorowań λ tzn. takich, których nie można przeprowadzić w siebie, stosując automorfizm wewnętrzny $\lambda \to j_{g(\eta)} \circ \lambda$ $(g(\eta) : M' \ni \eta \to G)$, pozwala przy pomocy warunku (6) wyznaczyć równoważne wobec transformacji cechowania K-niezmiennicze koneksje. Odwzorowania λ, które można przeprowadzić w siebie poprzez j_g są równoważne wobec transformacji cechowania, gdyż można ich zmianę kompensować zmianą "początkowej" wartości cięcia s : $u(\eta) \to u_g(\eta) = u(\eta)g(\eta)$.

SO(3)-NIEZMIENNICZE KONEKSJE WIĄZKI P(M,SU(n))

Grupę SO(3) jako rozmaitość można "rozwłóknić" przez podgrupę SO(2). Wówczas otrzymujemy wiązkę $SO(3)(S^2, SO(2))$. Grupa SO(2) utożsamiona z podgrupą obrotów wokół osi z $\{R_3(\psi)\}$ stanowi grupę izotropii bieguna północnego sfery $\theta = 0$ ($\xi = (\theta, \varphi)$). Jako cięcie wiązki SO(3) spełniające warunki (4) wybieramy

$$\varkappa(\theta,\varphi) = R_3(\varphi)R_2(\theta)R_3(-\varphi)$$

gdzie $R_i(\alpha)$ oznacza macierz obrotu o kąt α wokół osi x^i $(i = 1,2,3)$. Aby znaleźć nierównoważne wobec transformacji cechowania formy SO(3) - niezmienniczych koneksji, stosując warunek (6), należy znać funkcje $\lambda(\psi,\eta)$ prowadzące do takich koneksji.

Odwzorowanie $\lambda : SO(2) \times M' \to SU(n)$ musi być: homomorficznym odwzorowaniem grupy SO(2) w SU(n) przy dowolnym, ustalonym $\eta \in M'$, jednoznaczne oraz ciągłe w zmiennych ψ i η. Najogólniejsza postać tej funkcji jest

$$\lambda(\psi,\eta) = e^{-i\Phi(\psi,\eta)E(\eta)}$$

gdzie $E(\eta)$ należy do algebry Liego SU(n), czyli jest hermitowską macierzą bezśladową. Ponieważ funkcje λ, które można przeprowadzić w siebie przez wewnętrzny automorfizm grupy SU(n) dają równoważne wobec transformacji cechowania koneksje, a z drugiej strony zachodzi

$$j_g(e^{i\alpha X}) = e^{i\alpha gXg^{-1}},$$

to istotnie różne są takie funkcje λ, których generatory $E(\eta)$ nie dadzą przeprowadzić się w siebie poprzez unitarną transformację podobieństwa (gXg^{-1}). Każdy generator $E(\eta)$, który jest macierzą hermitowską, można zgodnie ze znanym twierdzeniem z algebry sprowadzić do macierzy diagonalnej przez transformację unitarną, wystarczy więc rozważać postać

$$E(\eta) = \mathrm{diag}(\alpha_1(\eta), \alpha_2(\eta), \dots \alpha_n(\eta)).$$

Odwzorowanie λ powinno być homomorficznym odwzorowaniem $SO(2) \to SU(n)$, co wskutek abelowości SO(2) pociąga za sobą, że $\Phi(\psi,\eta) = \psi\chi(\eta)$.

Oznaczając $E'(\eta) = E(\eta)\chi(\eta)$ otrzymujemy $\lambda(\psi,\eta) = e^{-i\psi E'(\eta)}$. Ponieważ λ winno być jednoznaczną funkcją na SO(2) musi spełniać warunek $\lambda(0,\eta) = \lambda(2\pi,\eta) = I_G$, co ze względu na żądanie ciągłości w zmiennej η prowadzi do wniosku, że jedynymi możliwymi elementami przekątnej są $\alpha_i'(\eta)$ - stałe liczby całkowite. Wobec tego

$$\lambda(\psi,\eta) = \mathrm{diag}(e^{-ik_1\psi}, e^{-ik_2\psi}, \ldots, e^{-ik_n\psi})$$

gdzie $k_n \in Z$.

Korzystając z twierdzenia z algebry [5], które mówi, że aby macierze były podobne, potrzeba i wystarcza, żeby ich czynniki niezmiennicze były identyczne oraz z tego, że $E'(\eta)$ są diagonalne łatwo dowieść, że dwie różne macierze $E'(\eta)$ są podobne wtedy i tylko wtedy, jeśli można je przeprowadzić w siebie przez dowolną permutację elementów przekątnych. Co za tym idzie, odpowiadające im λ prowadzące do nierównoważnych wobec transformacji cechowania koneksji są generowane przez bezśladowe macierze hermitowskie, diagonalne o elementach całkowitych, których nie można przeprowadzić w siebie przez permutację tych elementów.

SO(3)-NIEZMIENNICZE POLA YANGA-MILLSA Z GRUPĄ STRUKTURY SU(2)

W przypadku grupy struktury SU(2) stwierdzenia poprzedniego rozdziału prowadzą do wniosku, że najogólniejszy homomorfizm λ ma postać

$$\lambda(\psi) = e^{-i\psi \begin{bmatrix} n & \\ & -n \end{bmatrix}} \qquad n \in N$$

Jeśli wybierzemy bazę algebry SU(2) w postaci antyhermitowskich macierzy $T_a = \frac{1}{2i}\sigma_a$, unormowanych według $\mathrm{Tr}(T_a T_b) = -\frac{1}{2}\delta_{ab}$ i spełniających relację komutacji $[T_a,T_b] = \varepsilon_{abc}T_c$, to $\lambda(\psi) = e^{2n\psi T_3}$. W celu obliczenia SO(3)-niezmienniczej koneksji zastosujemy warunek niezmienniczości (6) dwukrotnie. Po pierwsze, działamy lewostronnie na punkt

$x_0 = (t,r,0,0)$ dowolnym elementem grupy izotropii $a = R_3(\psi)$. Wówczas z (5) wynika, że $a^{\varkappa}(a,x) = a, \forall x$ i warunek (6) ma postać

$$(\hat{f}_a^* \omega_s)(x_0) = \mathrm{Ad}\, \lambda(\psi) \circ \omega_s(x_0) \tag{7}$$

gdzie $\lambda(\psi) = e^{2n\psi T_3}$. Podstawiając $\omega_s = A_\mu^a\, dx^\mu T_a$ i porównując wyrazy przy tych samych różniczkach dx^μ i generatorach T_a, otrzymujemy w punkcie x_0 koneksję następującej postaci:

$$\text{dla } n = 0 \qquad \omega_s = A_0^a(r,t)T_a dt + A_1^a(r,t)T_a dr$$

$$\text{dla } n > 0 \qquad \omega_s = A_0(r,t)T_3 dt + A_1(r,t)T_3 dr$$

gdzie $A^a_{0,1}$ i $A_{0,1}$ - dowolne funkcje zmiennych r i t.

Drugim etapem znajdowania koneksji w dowolnym punkcie $x = (t,r,\theta,\varphi)$ jest działanie lewostronne elementem $k = \varkappa(\theta,\varphi)^{-1}$ na punkt x. Zgodnie z (5)

$$\varkappa(\theta,\varphi)^{-1}\varkappa(\tilde{\theta},\tilde{\varphi}) = \varkappa(\theta',\varphi')a^{\varkappa}(\theta,\varphi;\tilde{\theta},\tilde{\varphi})$$

gdzie $a^{\varkappa}(\theta,\varphi;\tilde{\theta},\tilde{\varphi}) = R_3(\alpha)$ i

$$\alpha = \frac{1}{i}\ln \frac{\cos\frac{\tilde{\theta}}{2}\cos\frac{\theta}{2} + e^{i(\varphi-\tilde{\varphi})}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\tilde{\theta}}{2}}{\cos\frac{\tilde{\theta}}{2}\cos\frac{\theta}{2} + e^{i(\tilde{\varphi}-\varphi)}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\tilde{\theta}}{2}}.$$

Warunek (6) ma wówczas postać

$$(\hat{f}^*_{\varkappa^{-1}(\theta,\varphi)}\, \omega_s)(x) = \omega_s(x) + \lambda(\alpha)d\lambda(-\alpha). \tag{8}$$

Korzystając z niego otrzymujemy:

$$\text{dla } n = 0: \qquad \omega_s = A_0^a(r,t)T_a dt + A_1^a(r,t)T_a dr$$

dla $n>0$: $\omega_s = A_0(r,t)T_3dt + A_1(r,t)T_3dr + 2n(\cos\theta - 1)T_3d\varphi$.

Jeśli jako bazę M przyjąć przestrzeń euklidesową E^4 i obliczyć działanie

$$S:=\frac{1}{4}\int d^4x\sqrt{\det g_{\mu\nu}}\,F^a_{\mu\nu}\,F^a_{\sigma\tau}\,g^{\mu\sigma}\,g^{\nu\tau} \tag{9}$$

dla pierwszego typu koneksji ($n = 0$), to przyjmuje ono postać

$$S = \pi\int_{-\infty}^{+\infty}dt\int_0^{\infty}r^2dr\ \mathrm{Tr}(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta})\qquad \alpha,\beta = 0,1$$

gdzie

$$F^a_{01}:=\partial_tA^a_1-\partial_rA^a_0+A^b_0A^c_1\,\varepsilon_{bca}$$

Jak wynika z powyższej formuły SO(3) - symetryczne pola (przy tak wybranym "podniesieniu") są polami cechowania z grupą struktury SU(2) na zredukowanej do dwu wymiarów (r,t) przestrzeni bazy z tensorem metrycznym $g_{\alpha\beta} = \frac{1}{r^2}\delta_{\alpha\beta}$. Interpretacja drugiego rozwiązania jest oczywista, jeśli za bazę przyjmiemy przestrzeń Minkowskiego i utożsamimy T_3 z generatorem grupy U(1). Wówczas potencjał A^a_μ jest sumą sferycznie symetrycznego pola elektrycznego o natężeniu $F_{tr} = \partial_tA_1 - \partial_rA_0$ i pola magnetycznego wytworzonego przez monopol o ładunku 2n.

U w a g a:

Analogiczne rozważania prowadzone dla pola Yanga-Millsa z grupą struktury SO(3) dają trzy typy rozwiązań. Jeśli bazę algebry SO(3) przyjmiemy w postaci:

$$R_1 = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix};\qquad R_2 = \begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{bmatrix};\qquad R_3 = \begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

gdzie R_i są generatorami obrotów wokół i-tej osi, to SO(3) - niezmiennicze koneksje na wiązce P(M,SO(3)) mają postać:

dla n = 0 $\omega_s = A_o^i(r,t)R_i dt + A_1^i(r,t)R_i dr$

dla n = 1 $\omega_{\tilde{s}} = A_o(r,t)R_3 dt + A_1(r,t)R_3 dr + \Phi_1(r,t)R_1 d\theta + \Phi_2(r,t)R_2 d\theta$

$$- \Phi_2(r,t)\sin\theta\, R_1 d\varphi + \Phi_2(r,t)\sin\theta\, R_2 d\varphi + \cos\theta\, R_3 d\varphi$$

(dla tego przypadku koneksja napisana jest na cięciu $\tilde{s}(x) = s(x)R_z(\varphi)$, przy którym przyjmuje bardziej przejrzystą postać)

dla n > 1 $\omega_s = A_o(r,t)R_3 dt + A_1(r,t)R_3 dr + n(\cos\theta - 1)R_3 d\varphi$

Rozwiązanie typu drugiego (przy n = 1) było otrzymane przez Forgacsa i Montona [6] dla wiązki P(M,SO(3)) i postulowane wcześniej przez Wittena [7] dla wiązki z grupą struktury SU(2). Ponieważ Witten swą definicję symetrii oparł na algebrach Liego grup symetrii (patrz również [8]) i struktury, to ze względu na izomorfizm algebr SU(2) i SO(3) jego definicja symetrii nie rozróżnia grup SU(2) i SO(3). W ramach przyjętej przez nas definicji niezmienniczości opartej na rozważaniach grupowych drugi typ koneksji nie obowiązuje dla grupy struktury SU(2).

SO(3) - NIEZMIENNICZE KONEKSJE NA WIĄZCE P(M,SU(3))

Z rozważań rozdziału III wynika, że najogólniejszą postacią odwzorowania λ przy grupie struktury SU(3) jest

$$\lambda(\psi) = \begin{bmatrix} e^{-il\psi} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-im\psi} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i(l+m)\psi} \end{bmatrix}$$

gdzie $l, m \in Z$.

Przyjmijmy bazę algebry Liego grupy SU(3) w postaci antyhermitowskich, bezśladowych macierzy T_a, unormowanych $Tr(T_aT_b) = -\frac{1}{2}\delta_{ab}$, a,b=1,2,...,8

$$T_1 = \frac{1}{2i}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad T_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad T_3 = \frac{1}{2i}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad T_4 = \frac{1}{2i}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_5 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad T_6 = \frac{1}{2i}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad T_7 = \frac{1}{2i}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad T_8 = \frac{1}{2\sqrt{3}i}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Wtedy $\lambda(\psi) = e^{2\psi[(l-m)T_3+m\sqrt{3}\,T_8]}$ i rachunki prowadzone analogicznie jak w poprzednim rozdziale prowadzą do pięciu typów koneksji przy określonych wartościach liczb l i m.

A: l=m=0

$$\omega_s = A_0^a(r,t)T_a dt + A_1^a(r,t)T_a dr$$

B: l=1, m=0

$$\omega_s = \{A_0(r,t)T_3 + B_0(r,t)T_8\}\,dt + \{A_1(r,t)T_3 + B_1(r,t)T_8\}\,dr +$$

$$\{\Phi_1(r,t)T_1 + \Phi_2(r,t)T_2 + \psi_1(r,t)T_6 + \psi_2(r,t)T_7\}\,d\theta +$$

$$\{-\Phi_2(r,t)\sin\theta T_1 + \Phi_1(r,t)\sin\theta T_2 + 2\cos\,T_3 - \psi_2(r,t)\sin\theta T_6 + \psi_1(r,t)\sin\theta T_7\}\,d\varphi$$

C: l=m

$$\omega_s = \{A_0(r,t)T_1 + B_0(r,t)T_2 + C_0(r,t)T_3 + D_0(r,t)T_8\}\,dt +$$

$$\{A_1(r,t)T_1 + B_1(r,t)T_2 + C_1(r,t)T_3 + D_1(r,t)T_8\}\,dr +$$

$$2\sqrt{3}\,m\cos\theta\,T_8\,d\varphi$$

D: l=m+1

$$\omega_{\bar{s}} = \{A_o(r,t)T_3 + B_o(r,t)T_8\}dt + \{A_1(r,t)T_3 + B_1(r,t)T_8\}dr +$$

$$\{\Phi_1(r,t)T_1 - \Phi_2(r,t)T_2\}d\theta + \{\Phi_2(r,t)\sin\theta T_1 + \Phi_1(r,t)\sin\theta T_2 +$$

$$2\cos\theta T_3 + 2m\sqrt{3}\cos\theta T_8\}d\varphi$$

E: l>m+1

$$\omega_{\bar{s}} = \{A_o(r,t)T_3 + B_o(r,t)T_8\}dt + \{A_1(r,t)T_3 + B_1(r,t)T_8\}dr +$$

$$\{2(l-m)\cos\theta\, T_3 + 2\sqrt{3}\, m \cos\theta\, T_8\}\, d\varphi$$

Jeśli jako bazę przyjmiemy przestrzeń euklidesową E^4, to wyznaczając działanie (9) dla poszczególnych typów rozwiązań dochodzimy do następujących wniosków. W każdym przypadku następuje redukcja wymiarów do dwu (r,t). W typie A na zredukowanej przestrzeni mamy do czynienia z czystym polem cechowania o grupie struktury SU(3). Rozwiązanie B zostało wcześniej znalezione przez Baisa i Weldona [9] i można je interpretować jako dwa abelowe pola Yanga-Millsa związane z potencjałami $A_{0,1}$ i $B_{0,1}$ oddziałujące z "polami Higgsa" $\Phi_{1,2}(r,t)$ i $\Psi_{1,2}(r,t)$. Podobnie jest w rozwiązaniu D, gdzie pola $A_{0,1}(r,t)$ $B_{0,1}(r,t)$ oddziałują z "polami Higgsa" $\Phi_{1,2}$. W przypadku C grupa struktury redukuje się do SU(2)xU(1). Z grupą SU(2) związane są pola A(r,t), B(r,t) i $\frac{1}{2}C(r,t)$, natomiast pozostała część abelowa wiąże się z potencjałem $D'(r,t) = \frac{\sqrt{3}}{2}C(r,t) + D(r,t)$ sferycznie symetrycznego pola elektrycznego z monopolami magnetycznymi. W ostatnim rozwiązaniu można interpretować pola A(r,t) i B(r,t) jako sferycznie symetryczne pola typu elektrycznego związane z dwoma rodzajami ładunków elektrycznych i dwoma rodzajami monopoli magnetycznych.

Utożsamijmy działanie pary jednostkowych kwaternionów (u_1, u_2) $u_{1,2} \in U(1,\mathbb{H})$ na przestrzeń kwaternionów $x \in \mathbb{H}$ z działaniem grupy SO(4) na E^4, przy czym $x = x^0\lambda_0 + \vec{x}\cdot\vec{\lambda}$ jest utożsamiony z punktem przestrzeni E^4. Działanie to jest określone przez odwzorowanie $T(u_1,u_2) : \mathbb{H}\to\mathbb{H}$ takie, że $T(u_1,u_2)(x) := u_1 x \bar{u}_2$. (Dokładniej mamy tu do czynienia z homomorfizmem $SU(2)_L \times SU(2)_R \to SO(4)$, którego jądro jest dwuelementowe $\{(1,1),(-1,-1)\}$). Grupę izotropii punktu $x_0 = x^0\lambda_0$ stanowi zbiór par (u,u) jako podgrupa izomorficzna z dwukrotnym nakryciem grupy SO(3). Rozważmy wiązkę SO(4) $(S^3, SO(3))$ i określmy cięcie $\varkappa : S^3 \to SO(4)$, parametryzując punkty sfery S^3 kątami (ψ, θ, φ) w ten sposób, że

$$\varkappa : \quad S^3 \ni (\psi, \theta, \varphi) \to (1, w) \in SO(4)$$

gdzie $w = e^{\psi \vec{e}(\theta,\varphi)\vec{\lambda}}$ zaś $\vec{e}(\theta,\varphi) = \hat{i}\cos\varphi\sin\theta + \hat{j}\sin\varphi\sin\theta + \hat{k}\cos\theta$. Każdy element $(u_1,u_2) \in SO(4)$ można przedstawić w postaci $(u_1,u_2) = (1, u_2\bar{u}_1)(u_1,u_1)$ gdzie $(1,u_2\bar{u}_1) \in \varkappa$ i $(u_1,u_1) \in SO(3)$. Tak określone cięcie $\varkappa$ spełnia warunek (4) i ma wartość $I_{SO(4)}$ w punkcie $\xi_0 \in S^3$ odpowiadającym biegunowi północnemu S^3, $\psi = 0$. Łatwo przekonać się, że przy tak wybranym cięciu $a^{\varkappa}(k,\xi)$ nie zależy od ξ dla dowolnego $k \in K$ (patrz rozdział II), wobec czego również dowolnie określone λ jako funkcja $a^{\varkappa}$ nie zależy od kątów ψ, θ, φ i może zależeć wyłącznie od ϱ gdzie $\varrho^2 = x\bar{x} = \sum_{\mu=0}^{3}(x^{\mu})^2$. Odwzorowanie λ jest homomorfizmem $SU(2) \to SU(2)$, są możliwe dwa istotnie różne

$$\lambda_1 : (u_1,u_1) \to I_{SU(2)}$$

$$\lambda_2 : (u_1,u_1) \to \hat{u}_1 \in SU(2)$$

tzn. jeśli $u_1 = e^{\psi\vec{e}(\theta,\varphi)\vec{\lambda}}$ to $\hat{u}_1 = e^{2\psi\vec{e}(\theta,\varphi)\vec{T}}$ gdzie $T_a = \frac{\sigma^a}{2i}$ $(a=1,2,3)$.

Prowadząc obliczenia analogicznie jak w rozdziale IV otrzymujemy następujące niezmiennicze koneksje:

dla $\lambda = \lambda_1$

$$\omega_s = A^a(\varrho)T_a(x^0dx^0 - x^i dx^i)$$

dla $\lambda = \lambda_2$

$$\omega_s = A(\varrho)\,\eta^a_{\mu\nu}\,x^\mu dx^\nu T_a \qquad (10)$$

gdzie $\eta^a_{\mu\nu} = -\eta^a_{\nu\mu}$, $\eta^a_{0i} = \delta^a_i$, $\eta^a_{ij} = \varepsilon^{ija}$ $\mu,\nu = 0,1,2,3$, $i,j=1,2,3$ oraz $A = A(\varrho)$ i $A^a = A^a(\varrho)$ - funkcje niezmiennika grupy SO(4). Jeśli od koneksji (10) zażądamy, aby dodatkowo spełniała warunek samodualności $F = {}^*F$ to otrzymamy warunek na funkcję $A(\varrho)$:

$$\frac{1}{\varrho}\frac{d}{dg}A(\varrho) = A^2(\varrho)$$

Wobec tego koneksja ω jest samodualna, jeśli

$$A(\varrho) = -\frac{2}{\varrho^2 + C^2}$$

gdzie C - stała całkowania. Forma koneksji samodualnej dla $\lambda = \lambda_2$ ma więc postać

$$A^a(x) = \frac{-2\eta^a_{\nu\mu}x^\nu}{\varrho^2 + C^2}$$

i przedstawia potencjał instantonu położonego w początku układu.

UWAGI KOŃCOWE

Zastosowana w pracy metoda konstrukcji [4] potencjałów niezmienniczych pól Yanga-Millsa pozwoliła znaleźć nowe cylindrycznie symetryczne pola z grupą cechowania SU(2), SO(3), SU(3). W przypadku grup SU(2) i SO(3) są to rozwiązania dla n = 0, ponieważ rozwiązania przy n 0 dla tych grup struktury uzyskano wcześniej [6,7,8], a w szczególnym wypadku zerowania się funkcji A i Φ spełniają one warunki nałożone przez H. Loosa [10, a także 11]. Spośród zaprezentowanych w pracy pięciu typów koneksji SO(3)-niezmienniczych z grupą cechowania SU(3) tylko jedną (B) znaleziono wcześniej. Dla symetrii SO(4) nie prowadzono dotychczas żadnych rozważań dotyczących kształtu potencjału niezmienniczego wobec tej grupy. Tym niemniej było znane rozwiązanie jednoinstantonowe, które jest SO(4) - symetryczne i rozwiązanie to zostało otrzymane jako jedyna samodualna koneksja przy λ będącym tożsamościowym odwzorowaniem grupy SU(2) w siebie. Pod względem rachunkowym metoda konstrukcji jest prosta i może być łatwo użyta do otrzymania rozwiązań z innymi grupami symetrii.

Pragnę wyrazić podziękowanie doc.dr hab. J. Olszewskiemu za pomoc w przygotowaniu oraz ostatecznej redakcji pracy.

LITERATURA

1. Kobayashi S., Nomizu K., Foundations of differential geometry, New York, vol. 1.
2. Daniel Viallet M.C., The geometric setting of gauge theories of the Yang-Mills type. LPTHE preprint 79/09 Paris.
3. Harnad J., Shnider S., Luc Vinet. J.Math.Phys. 20 (5) 1979.
4. Olszewski J., artykuł w tym samym numerze.
5. Gelfand I.M., Wykłady z algebry liniowej. PWN 1971.
6. Forgacs P., Manton N.S., Comm.Math. Phys. 72, 1980.
7. Witten E., Phys.REV.Lett. 38, 1977.
8. Jacki R., w:Invariance, symmetry and periodicity in gauge theories, Schladming (1980).
9. Bais F.A., Weldon H.A., Phys.Rev. D 18 (2) 1978.
10. Loos H.G., Nucl.Phys. 72, 1965.
11. Maciejko R., J.Math.Phys. 19 (2) 1978.

SUMMARY

A general definition of symmerties of gauge fields is proposed and a method developed for constructing symmetric fields for an arbitrary gauge group. This method was used to find SU(2) (and SU(3)) Yang-Mills fields invariant under the transformation group SO(3) and SU(2) gauge fields with SO(4) symmetry.

РЕЗЮМЕ

В работе предлагается метод конструкции полей Янга-Миллся, обладающих заданной симметрией. Получены потенциалы полей со сферической и цилиндрической симметриями для теорий с калибровочными группами SU (2) и SU (3).