

*Antoni Chronowski***Propozycja wykładu na temat argumentu głównego liczb zespolonych***

Abstract. This article deals with some theorems on the principal argument of complex numbers. This paper is a framework of the lecture on the argument of complex numbers. Moreover, it presents some remarks on the formula which is used in the computer programme DERIVE and in the graphing calculators of type TI to calculate the arguments of complex numbers.

W podstawowej literaturze z algebry i analizy matematycznej (np. Gleichgewicht, 2000; Leja, 2006; Mostowski, Stark, 1970), w której rozważane są zagadnienia poświęcone liczbom zespolonym, nie ma kompleksowego opracowania pojęcia argumentu liczb zespolonych. Z moich doświadczeń wynika, że studiujący teorię liczb zespolonych mają trudności w ustaleniu argumentu głównego liczb zespolonych, szczególnie wtedy, gdy zachodzi potrzeba wykorzystania w tym celu funkcji cyklometrycznych.

W tym artykule opracowane są twierdzenia pozwalające wyrazić argument główny liczb zespolonych za pomocą funkcji cyklometrycznych. Wyjaśniony i udowodniony jest również wzór (twierdzenie) stosowany w programie komputerowym DERIVE i kalkulatorach graficznych typu TI do obliczania argumentów głównych liczb zespolonych.

Artykuł jest propozycją wykładu o argumencie głównym liczb zespolonych w ramach tematyki: „Ciało liczb zespolonych”.

1. Argument główny liczby zespolonej

Symbolem \mathbb{R} oznaczamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych.

W tym artykule będziemy korzystać z funkcji cyklometrycznych:

$$\arcsin x, x \in [-1, 1],$$

$$\arccos x, x \in [-1, 1],$$

$$\operatorname{arctg} x, x \in \mathbb{R},$$

$$\operatorname{arcctg} x, x \in \mathbb{R},$$

*A proposal of a lecture on the principal argument of complex numbers

jako funkcji odwrotnych do funkcji trygonometrycznych:

$$\sin x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$\cos x, x \in [0, \pi],$$

$$\operatorname{tg} x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\operatorname{ctg} x, x \in (0, \pi).$$

W literaturze matematycznej (np. Gleichgewicht, 2000; Leja, 2006), w rozdziałach dotyczących liczb zespolonych można spotkać dwie różne definicje argumentu głównego liczby zespolonej:

DEFINICJA 1.1

Argumentem głównym niezerowej liczby zespolonej $z = a + bi$ nazywamy liczbę rzeczywistą $\varphi \in [0, 2\pi)$ taką, że

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{i} \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

DEFINICJA 1.2

Argumentem głównym niezerowej liczby zespolonej $z = a + bi$ nazywamy liczbę rzeczywistą $\psi \in (-\pi, \pi]$ taką, że

$$\cos \psi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{i} \quad \sin \psi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Argument główny niezerowej liczby zespolonej z oznaczamy symbolem $\arg z$.

Najpierw podamy i udowodnimy twierdzenia o argumentach głównych liczb zespolonych w sensie definicji 1.1.

TWIERDZENIE 1.3

Jeżeli $z = a + bi$ jest niezerową liczbą zespoloną, to argument główny $\varphi \in [0, 2\pi)$ liczby zespolonej z wyznaczony jest za pomocą następujących warunków:

- (a) $\varphi = \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, gdy $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$;
- (b) $\varphi = \pi - \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, gdy $\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \frac{3}{2}\pi$;
- (c) $\varphi = 2\pi + \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, gdy $\frac{3}{2}\pi < \varphi < 2\pi$.

Dowód. Z określenia argumentu głównego niezerowej liczby zespolonej wynika, że

$$\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

- (a) Niech $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Wówczas

$$\varphi = \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

- (b) Niech $\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \frac{3}{2}\pi$. Wówczas

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi - \pi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Wobec tego

$$\sin(\varphi - \pi) = -\sin(\pi - \varphi) = -\sin \varphi = \frac{-b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

czyli

$$\sin(\varphi - \pi) = \frac{-b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Zatem

$$\varphi - \pi = \arcsin \frac{-b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Ponieważ funkcja arcsin jest nieparzysta, więc

$$\varphi = \pi - \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

(c) Niech $\frac{3}{2}\pi < \varphi < 2\pi$. Wówczas

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi - 2\pi < 0.$$

Wobec tego

$$\varphi - 2\pi = \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

czyli

$$\varphi = 2\pi + \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

TWIERDZENIE 1.4

Jeżeli $z = a + bi$ jest niezerową liczbą zespoloną, to argument główny $\varphi \in [0, 2\pi)$ liczby zespolonej z wyznaczony jest za pomocą następujących warunków:

- (a) $\varphi = \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, gdy $0 \leq \varphi \leq \pi$;
- (b) $\varphi = 2\pi - \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, gdy $\pi < \varphi < 2\pi$.

Dowód. Z określenia argumentu głównego niezerowej liczby zespolonej wynika, że

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

(a) Niech $0 \leq \varphi \leq \pi$. Wówczas

$$\varphi = \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

(b) Niech $\pi < \varphi < 2\pi$. Wówczas

$$0 < \varphi - \pi < \pi.$$

Wobec tego

$$\cos(\varphi - \pi) = \cos(\pi - \varphi) = -\cos \varphi = \frac{-a}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

[44]

Antoni Chronowski

czyli

$$\cos(\varphi - \pi) = \frac{-a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Zatem

$$\varphi - \pi = \arccos \frac{-a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Ponieważ $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$, więc

$$\varphi = 2\pi - \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

TWIERDZENIE 1.5

Jeżeli $z = a + bi$ jest niezerową liczbą zespoloną, to argument główny $\varphi \in [0, 2\pi)$ liczby zespolonej z wyznaczony jest za pomocą następujących warunków:

$$(A) \text{ Jeżeli } a = 0, \text{ to } \varphi = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{gdy } b > 0, \\ \frac{3}{2}\pi, & \text{gdy } b < 0; \end{cases}$$

(B) *Jeżeli $a \neq 0$, to:*

- (a) $\varphi = \arctg \frac{b}{a}$, *gdy* $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$;
- (b) $\varphi = \pi + \arctg \frac{b}{a}$, *gdy* $\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3}{2}\pi$;
- (c) $\varphi = 2\pi + \arctg \frac{b}{a}$, *gdy* $\frac{3}{2}\pi < \varphi < 2\pi$.

Dowód. Dowód warunku (A) jest oczywisty.

Udowodnimy warunek (B). Z określenia argumentu głównego niezerowej liczby zespolonej wynika, że

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}.$$

(a) Jeżeli $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, to

$$\varphi = \arctg \frac{b}{a}.$$

(b) Niech $\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3}{2}\pi$. Wówczas

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi - \pi < \frac{\pi}{2}.$$

Wobec tego

$$\operatorname{tg}(\varphi - \pi) = \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a},$$

a więc

$$\varphi - \pi = \arctg \frac{b}{a},$$

czyli

$$\varphi = \pi + \arctg \frac{b}{a}.$$

(c) Niech $\frac{3}{2}\pi < \varphi < 2\pi$. Wówczas

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi - 2\pi < 0.$$

Wobec tego

$$\operatorname{tg}(\varphi - 2\pi) = \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a},$$

a więc

$$\varphi - 2\pi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a},$$

czyli

$$\varphi = 2\pi + \operatorname{arctg} \frac{b}{a}.$$

TWIERDZENIE 1.6

Jeżeli $z = a + bi$ jest niezerową liczbą zespoloną, to argument główny $\varphi \in [0, 2\pi)$ liczby zespolonej z wyznaczony jest za pomocą następujących warunków:

$$(A) \text{ Jeżeli } b = 0, \text{ to } \varphi = \begin{cases} 0, & \text{gdy } a > 0, \\ \pi, & \text{gdy } a < 0; \end{cases}$$

(B) Jeżeli $b \neq 0$, to:

$$(a) \varphi = \operatorname{arctg} \frac{a}{b}, \text{ gdy } 0 < \varphi < \pi;$$

$$(b) \varphi = \pi + \operatorname{arctg} \frac{a}{b}, \text{ gdy } \pi < \varphi < 2\pi.$$

Dowód. Dowód warunku (A) jest oczywisty.

Udowodnimy warunek (B). Z określenia argumentu głównego niezerowej liczby zespolonej wynika, że

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{a}{b}.$$

(a) Jeżeli $0 < \varphi < \pi$, to

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{a}{b}.$$

(b) Niech $\pi < \varphi < 2\pi$. Wówczas

$$0 < \varphi - \pi < \pi.$$

Wobec tego

$$\operatorname{ctg}(\varphi - \pi) = \operatorname{ctg} \varphi = \frac{a}{b},$$

a więc

$$\varphi - \pi = \operatorname{arctg} \frac{a}{b},$$

czyli

$$\varphi = \pi + \operatorname{arctg} \frac{a}{b}.$$

Następnie podamy twierdzenia o argumentach głównych, w sensie definicji 1.2, liczb zespolonych. Pomijamy dowody tych twierdzeń, gdyż są analogiczne do dowodów poprzednich twierdzeń.

TWIERDZENIE 1.7

Jeżeli $z = a + bi$ jest niezerową liczbą zespoloną, to argument główny $\psi \in (-\pi, \pi]$ liczby zespolonej z wyznaczony jest za pomocą następujących warunków:

- (a) $\psi = \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, gdy $-\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$;
- (b) $\psi = \pi - \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, gdy $\frac{\pi}{2} < \psi \leq \pi$;
- (c) $\psi = -\pi - \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, gdy $-\pi < \psi < -\frac{\pi}{2}$.

TWIERDZENIE 1.8

Jeżeli $z = a + bi$ jest niezerową liczbą zespoloną, to argument główny $\psi \in (-\pi, \pi]$ liczby zespolonej z wyznaczony jest za pomocą następujących warunków:

- (a) $\psi = \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, gdy $0 \leq \psi \leq \pi$;
- (b) $\psi = -\arccos \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, gdy $-\pi < \psi < 0$.

TWIERDZENIE 1.9

Jeżeli $z = a + bi$ jest niezerową liczbą zespoloną, to argument główny $\psi \in (-\pi, \pi]$ liczby zespolonej z wyznaczony jest za pomocą następujących warunków:

- (A) Jeżeli $a = 0$, to $\psi = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{gdy } b > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{gdy } b < 0; \end{cases}$
- (B) Jeżeli $a \neq 0$, to:
 - (a) $\psi = \arctg \frac{b}{a}$, gdy $-\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}$;
 - (b) $\psi = \pi + \arctg \frac{b}{a}$, gdy $\frac{\pi}{2} < \psi \leq \pi$;
 - (c) $\psi = -\pi + \arctg \frac{b}{a}$, gdy $-\pi < \psi < -\frac{\pi}{2}$.

TWIERDZENIE 1.10

Jeżeli $z = a + bi$ jest niezerową liczbą zespoloną, to argument główny $\psi \in (-\pi, \pi]$ liczby zespolonej z wyznaczony jest za pomocą następujących warunków:

- (A) Jeżeli $b = 0$, to $\psi = \begin{cases} 0, & \text{gdy } a > 0, \\ \pi, & \text{gdy } a < 0; \end{cases}$
- (B) Jeżeli $b \neq 0$, to:
 - (a) $\psi = \text{arcctg} \frac{a}{b}$, gdy $0 < \psi < \pi$;
 - (b) $\psi = -\pi + \text{arcctg} \frac{a}{b}$, gdy $-\pi < \psi < 0$.

2. Obliczanie argumentu głównego liczby zespolonej za pomocą programu komputerowego DERIVE lub kalkulatorów graficznych typu TI

DERIVE

Funkcja standardowa PHASE (z) w programie DERIVE lub opcja `angle` w kalkulatorach graficznych typu TI (np. TI-92) podają wartość argumentu ψ liczby zespolonej $z = a + bi$, gdzie $b \neq 0$, w postaci wzoru, który w symbolice stosowanej

w polskiej literaturze matematycznej można zapisać następująco:

$$\psi = -\operatorname{arctg} \frac{a}{b} + \operatorname{sgn}(b) \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Poniższe twierdzenie i jego dowód wyjaśniają sposób obliczania argumentu liczby zespolonej za pomocą podanego wzoru.

TWIERDZENIE 2.1

Jeżeli $z = a + bi$ jest niezerową liczbą zespoloną, to argument główny $\psi \in (-\pi, \pi]$ liczby zespolonej z wyznaczony jest za pomocą następujących warunków:

- (a) *Jeżeli $b = 0$, to $\psi = \begin{cases} 0, & \text{gdy } a > 0, \\ \pi, & \text{gdy } a < 0; \end{cases}$*
 (b) *Jeżeli $b \neq 0$, to*

$$\psi = -\operatorname{arctg} \frac{a}{b} + \operatorname{sgn}(b) \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Dowód. Dowód warunku (a) jest oczywisty.

W dowodzie warunku (b) wykorzystamy równość:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} \quad (1)$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Ponieważ $b \neq 0$, więc $0 < \psi < \pi$ lub $-\pi < \psi < 0$. Zakładamy najpierw, że $0 < \psi < \pi$. Wówczas $b > 0$, czyli $\operatorname{sgn}(b) = 1$. Z warunku (a) w twierdzeniu 1.10 wynika, że

$$\psi = \operatorname{arcctg} \frac{a}{b}.$$

Ponieważ $\operatorname{arcctg} \frac{a}{b} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{a}{b}$ na mocy równości (1), więc

$$\psi = -\operatorname{arctg} \frac{a}{b} + \frac{\pi}{2},$$

czyli

$$\psi = -\operatorname{arctg} \frac{a}{b} + \operatorname{sgn}(b) \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Następnie zakładamy, że $-\pi < \psi < 0$. Wówczas $b < 0$, czyli $\operatorname{sgn}(b) = -1$. Z warunku (b) w twierdzeniu 1.10 wynika, że

$$\psi = -\pi + \operatorname{arcctg} \frac{a}{b}.$$

Stosując równość (1), otrzymujemy:

$$\psi = -\operatorname{arctg} \frac{a}{b} - \frac{\pi}{2},$$

czyli

$$\psi = -\operatorname{arctg} \frac{a}{b} + \operatorname{sgn}(b) \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Literatura

Gleichgewicht, B.: 2000, *Algebra*, PWN, Warszawa.

Leja, F.: 2006, *Funkcje zespolone*, PWN, Warszawa.

Mostowski, W., Stark, M.: 1970, *Elementy algebry wyzszej*, PWN, Warszawa.

*Institut Matematyki
Uniwersytet Pedagogiczny
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
e-mail: chron@up.krakow.pl*