FOLIA 82

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia III (2010)

Maciej Major, Barbara Nawolska

Matematyzacja, modelowanie, model*

Abstract. The article presents conclusions concerning mathematization, which is a very vital mathematical activity, as well as conclusions concerning modelling and a model, including a mathematical model. Mathematical models are products of mathematization in certain real situations and they are used by people with different mathematical experience, not necessarily by mathematicians. They are used to describe a variety of phenomena, practically from all spheres of human activity. A very special type of mathematical models are the so-called probabilistic models of random experiments. The final part of our work concerns the means of constructing such models.

> *...tworzona przez nas matematyka wyraża pewne prawidłowości, które od nas nie zależą i to właśnie tym prawidłowościom (zapewne tylko niektórym z nich) odpowiada konstrukcja świata. Ponieważ jednak do tych prawidłowości mamy dostęp tylko przez tworzone przez nas struktury matematyczne, możemy twierdzić, że struktura świata odpowiada pewnym „naszym strukturom matematycznym".*
>
> ks. Michał Heller (2006a, s. 80)

Wstęp

W artykule zostaną zaprezentowane uwagi na temat matematyzacji, która jest bardzo istotną aktywnością matematyczną, a także uwagi na temat modelowania i modelu, a w tym modelu matematycznego. Modele matematyczne są produktem matematyzacji pewnych rzeczywistych sytuacji i są wykorzystywane przez osoby o różnym doświadczeniu matematycznym, niekoniecznie matematyków. Służą opisywaniu różnorodnych zjawisk, praktycznie ze wszystkich dziedzin ludzkiej aktywności. Można więc stwierdzić, że modele matematyczne pełnią funkcje „usługowe". Szczególnym typem matematycznych modeli są tak zwane modele probabilistyczne doświadczeń losowych. Zagadnieniu ich konstruowania zostanie poświęcona ostatnia część pracy.

Potrzeba kształtowania umiejętności modelowania zjawisk otaczającej nas rzeczywistości przyczyniła się do tego, iż na zagadnienia te zwraca się uwagę podczas

*Mathematization, modelling, model

matematycznego kształcenia uczniów i studentów. Zauważmy, że dydaktycy matematyki w różny sposób formułują cele nauczania przedmiotu, określając je bardzo szczegółowo albo dość ogólnie np.: (Krygowska, 1981, 1986, s. 25-26; Turnau, 1990, s. 28-37). Sformułowania celów zależą zarówno od poziomu kształcenia, dla którego są przeznaczone, a także od podstaw programowych. Jednocześnie, jak pisze S. Kucharczyk (1998): *Ucząc matematyki (niezależnie od poziomu edukacji), trzeba dostrzegać co najmniej 3 jej wartości:*

1. *wyrabianie umiejętności poprawnych wnioskowań, ścisłego opisywania faktów i ich rozumienia;*
2. *rozwijanie twórczej wyobraźni (geometrycznej, arytmetycznej, algebraicznej, kombinatorycznej itd.);*
3. *kształtowanie samodzielnych postaw w rozwiązywaniu zadań.*

Do podstawowych zadań, jakie stawia się nauczaniu matematyki, zalicza się kształtowanie umiejętności posługiwania się metodami matematycznymi, w zakresie materiału objętego programem nauczania, a także zapoznanie uczących się z zastosowaniem tych metod w innych dziedzinach, zwłaszcza w naukach przyrodniczych i technice.

Dobitnie wyraziła to Z. Krygowska (1986, s. 26), stwierdzając, że: *znaczenie uczenia się matematyki w ramach ogólnego kształcenia polega między innymi na intelektualizacji postaw i zachowań szerokich warstw społeczeństwa, rozwijanej przez kontakt młodego umysłu na etapie szkolnym z elementami nauki tak podstawowej* [matematyki] *dla ludzkiej kultury.*

Jak zaznaczają J. Filip i T. Rams: *Matematyka jest bardzo ważnym elementem kultury, dlatego młode pokolenie musi ją przyswajać, skonstruować „od nowa". Zmusza go do tego m.in. konieczność coraz szerszych zastosowań matematyki.*

Wzrost znaczenia matematyki, jaki obserwuje się w ostatnich dziesięcioleciach wynika przede wszystkim z doniosłości jej zastosowań. Praktyczna przydatność matematyki polega głównie na tym, że:

a) matematyka umożliwia bardzo dokładny opis zjawisk,

b) matematyka pozwala na przewidywanie nowych zjawisk, ułatwia nowe odkrycia (Filip, Rams, 2000, s. 20-21).

Celem nauczania matematyki jest nie tylko poznawanie przez uczniów treści określonych programem nauczania, ale przede wszystkim kształtowanie właściwej postawy intelektualnej uczącego się. Jak pisze Z. Krygowska: *chcemy bowiem uczyć dziś nie tylko matematyki, chcemy kształcić poprzez matematykę* (1977).

G. Choquet (1963) stwierdza, że: *Wszelkie myślenie matematyczne składa się z cyklów, większych lub mniejszych; w każdym z nich można wyróżnić z grubsza biorąc następujące stadia; obserwacja, matematyzacja, dedukcja, zastosowanie. Te cztery stadia są bardzo istotne, w szczególności nie uwzględniające ich, czysto dedukcyjne nauczanie byłoby jałowe i krzywdziłoby ucznia.*

Zdaniem H. Freudenthala, koncepcję „matematyki dla wszystkich" należy ukierunkowywać na umiejętności matematyzowania (por. Freudenthal, 1977). Z poglądem tym koresponduje zdanie G. Trelińskiego, który stwierdza, że: *dla nauczania matematyki praktyczne zapoznanie uczniów z procesem matematyzacji jest bardzo ważne.* Autor dodaje, że *błędy tu popełnione mają głębokie konsekwencje* (zob. Treliński, 1982, s. 39).

1. Matematyzacja i modelowanie

Proces matematyzacji jawi się jako jeden z istotnych składników matematycznego myślenia (por. Choquet, 1963). Pierwsze próby matematyzacji są tak stare, jak stara jest matematyka, która powstawała jako narzędzie opisu świata realnego. Udokumentowane próby matematyzacji związane z mierzeniem takich wielkości jak długość, pole czy objętość sięgają czasów starożytnej Grecji. Udane próby matematyzacji działalności rachunkowej datować można już na koniec średniowiecza, a towarzyszy ona twórczej działalności człowieka do dnia dzisiejszego (por. Opial, 1979). Matematyzacja nie jest więc aktem jednorazowym ale procesem, przy czym z jej rozwojem zmieniała się i zmienia nadal sama matematyka. *Proces matematyzacji* (...) *w szerokim słowa znaczeniu, nakłada się na proces kształtowania samej matematyki, która niezależnie od tego, że bierze w matematyzacji główny udział, rozwija się na zasadach jakiejś swojej wewnętrznej logiki, w pewnej mierze od tego procesu zależnej, ale także i w dużym stopniu niezależnej* (Opial, 1979).

Procesowi matematyzacji towarzyszą różne trudności. Główną przeszkodą, zdaniem H. Steinera (1986, s. 179-181), jest to, że *problemy nie są stawiane, czy wybierane przez matematyzującego matematyka, lecz przychodzą do niego z zewnątrz, tzn. z niematematycznych praktycznych lub teoretycznych dziedzin wiedzy i doświadczenia.* (...) *Jeżeli ma powstać model matematyczny sytuacji, umożliwiający sformułowanie jednego lub więcej problemów w precyzyjnej terminologii w języku modelu, to pierwszym zadaniem matematyzującego matematyka, a zarazem jego pierwszą trudnością, jest zrozumienie tych ludzi i ich kłopotów. Stąd wynika, że matematycy będą musieli dyskutować swoje idee także z ekspertami w danej dziedzinie i podawać interpretacje ograniczonych modelem sformułowań sytuacji i odnoszących się do niej problemów.*

Warto w tym miejscu wspomnieć, że słowo „matematyzacja" ma szerokie i różnorodne znaczenie, a terminy *matematyzacja i budowanie modeli matematycznych pojawiły się w latach sześćdziesiątych, w związku z nowym podejściem do problemów w takich dziedzinach, jak np. nauki społeczne* (Steiner, 1986, s. 177). W związku z tym faktem zaistniała naturalna potrzeba zdefiniowania pojęcia *matematyzacji.* W zależności od tego, kto i co matematyzował, pojawiły się różne określenia tego procesu.

Przez *matematyzację* H. Freudenthal (1977, s. 44) rozumie *porządkowanie rzeczywistości wtedy, gdy odbywa się ono za pomocą matematycznych środków.* Zaznaczyć tu należy, że *rzeczywistość* jest tu rozumiana dość szeroko, włącza się w nią także samą matematykę.

Podobnie ten termin rozumie S. Turnau (1985, s. 71-72), określając matematyzację jako *opisywanie sytuacji konkretnej za pomocą pojęć matematycznych* otrzymany zaś w wyniku matematyzacji opis – *modelem matematycznym tej sytuacji.*

Nieco inną definicję matematyzacji podaje G. Treliński (1996), który stwierdza, że: *matematyzacja to niededukcyjne rozumowanie, które prowadzi do opisu układu stosunków w pewnej sytuacji (konkretnej, wyobrażonej lub abstrakcyjnej), za pomocą języka matematyki.* Zauważmy, że położony jest tu nacisk na rozumowanie nie będące procesem dedukcyjnym.

Takie rozumienie matematyzacji, jakie prezentują H. Freudenthal, S. Turnau czy G. Treliński, jest zgodne z rozumieniem tego pojęcia przez Z. Krygowską. Niemniej Z. Krygowska (1977, s. 48) rozumie to pojęcie szerzej, uwzględniając w nim nie tylko 1° *konstrukcję matematycznego schematu dla jakiegoś układu stosunków, ujętego przez analizę rzeczywistej, wyobrażonej lub już abstrakcyjnej sytuacji, lub sprecyzowanego w innej dziedzinie pojęć np. w innej nauce*, ale także 2° *konstrukcję jeszcze na wpół poglądowego schematu myślowego, który w dalszym ciągu nauki mógłby być przekształcony i włączony do pełnego schematu matematycznego.*

W każdej z przedstawionych powyżej definicji matematyzacji stwierdza się, że jest ona matematycznym opisem złożonych stosunków realnego świata. Nie wyjaśnia się jednak, w jaki sposób ten opis powstaje ani czym się charakteryzuje. Więcej informacji na ten temat można odnaleźć w pracy D. Wheelera (1986). Autor dokonuje próby przybliżenia pojęcia matematyzacji poprzez podanie pewnych cech (zdolności) niezbędnych do jej realizacji (przeprowadzenia). Wymienia[1]:

– *zdolność postrzegania zależności, idealizowania ich w twory czysto myślowe i operowania na nich w myśli, w celu wytworzenia nowych zależności. To jest zdolność interioryzacji, działań lub spostrzeżeń po to, aby zadać sobie pytanie „Co by było gdyby...?”,*

– *zdolność dokonywania przekształceń – od działań do spostrzeżeń, od spostrzeżeń do wyobrażeń, od wyobrażeń do pojęć, jak również wewnątrz każdej z tych kategorii – zmieniania układu odniesienia, skupienia na nowo uwagi na zaniedbanych cechach sytuacji, przerabianie problemów;*

– *zdolność do koordynowania i kontrastowania rzeczywistości i wyobrażeń, syntezowania systemów spostrzeżeń, wyobrażeń, opisów, języka i symboliki. Kiedy te działania zastosuje się do czystych związków, oderwanych od specyficznych przykładów, ich produkty będą wówczas matematyką* (zob. Wheeler, 1986, s. 110).

Przedstawione ważne cechy procesu matematyzacji uświadamiają złożoność i duży stopień komplikacji tego procesu, w którym ważne są umiejętności idealizowania, abstrahowania, schematyzowania, interioryzowania, weryfikowania uzyskanych konstrukcji myślowych. W tym procesie istotna jest umiejętność kodowania i dekodowania informacji oraz zdolność do syntetyzowania i integrowania wszystkich wymienionych działań.

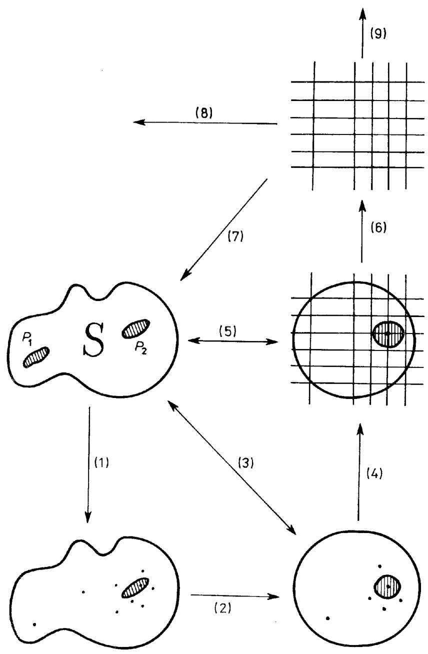
W tej samej pracy D. Wheeler (1986, s. 110-111) dokonuje próby syntetycznego ujęcia złożonego procesu matematyzacji stwierdzając, że jest ona *działaniem tworzenia równoważności przez przekształcenie.* Zwraca on także uwagę na fakt, że *matematyzacja jest procesem, którego inicjowanie leży w zasięgu możliwości i zdolności każdego. Składniki tego procesu są znane, a działają dzięki umiejętnościom, które każdy człowiek powinien mieć (ponieważ w gruncie rzeczy zastosowanie tych umiejętności można znaleźć np. w procesie uczenia się mowy).*

Przedstawiona przez D. Wheelera obszerna charakterystyka procesu matematyzacji, aczkolwiek podaje jej istotne cechy (niezbędne do jej realizacji zdolności i umiejętności), nie podaje jednak bezpośrednich recept, w jaki sposób można ją realizować. Te zaś można odnaleźć w propozycji H. Steinera (1986, s. 179-184), który podaje ikoniczno-słowny przepis, jak tę matematyzację realizować w kolejnych krokach. W jego przepisie proces matematyzacji ma jakby cechy schematu

[1]cytując swoją wypowiedź z artykułu *Humanizacja edukacji matematycznej*, zamieszczonego w *Mathematics Teaching* w roku 1975

blokowego. Istotną rolę w tym procesie odgrywa „sprzężenie zwrotne" do kontekstu początkowego.

Zdaniem autora, punktem wyjścia dla procesu matematyzacji jest dana sytuacja S i jeden lub więcej problemów P_1, P_2, ... związanych z tą sytuacją.



Rysunek 1.

<u>*KROK 1.*</u> *Oswojenie z sytuacją, szczególnie w „otoczeniu" danych problemów; obserwacja, zbieranie informacji i danych, być może koncentracja na jednym lub małej liczbie wybranych problemów.* (...)

<u>*KROK 2.*</u> *Analiza informacji i danych; początek schematyzacji i upraszczanie sytuacji w powiązaniu z pojęciami matematycznymi w podejściu już to o charakterze pragmatycznym inżynierskim, już to skłaniającym się bardziej ku konstrukcjom teoretycznym.* (...)

<u>*KROK 3.*</u> *Powrót przez sprzężenie zwrotne do kontekstu początkowego; interpretacja względem sytuacji; dalszy ciąg sterowanej obserwacji i dalsze zbieranie informacji z perspektywy „myśli przewodnich" i hipotez.* (...)

<u>*KROK 4.*</u> *Rozpoczęcie rozwijania schematu w kierunku bardziej wypracowanego modelu; faza bardziej teoretycznej pracy; reprezentacja jednego lub kilku wybranych problemów w języku modelu; lokalna organizacja logiczna; próby rozwiązywania problemów.*

<u>*KROK 5.*</u> *Patrz krok 3. Ponadto: interpretacja pierwszych wyników (dekodowanie) ich krytyczna ocena względem sytuacji; ewentualne dalsze wypracowywanie teorii ewentualnie wraz z poprawkami schematyzacji lub poszczególnych składowych modelu; być może rozpoczęcie pracy całkowicie od nowa z alternatywną ideą modelu i metod.*

<u>KROK 6.</u> *Stawianie i badanie dalszych problemów; rozszerzanie modelu i dalsze jego wypracowywanie; globalna organizacja logiczna; bardziej abstrakcyjne sformułowanie teorii, włączenie do bardziej ogólnych teorii matematycznych.*

<u>KROK 7.</u> *Interpretacja rozszerzonego modelu lub teorii w rozważanej sytuacji; w szczególności zastosowanie nowych wyników do sytuacji.*

<u>KROK 8.</u> *Interpretacja i zastosowanie uogólnionego modelu czy teorii w innych dziedzinach, różnych od danej na początku, wewnątrz matematyki lub poza nią.*

<u>KROK 9.</u> *Ocena całego procesu i weryfikacja jego wyników; dyskusja modeli alternatywnych; ewentualnie odkrycie podstawowych braków czy ważnych przypadków, które nie pasują do pojęć modelu lub nawet prowadzą do paradoksów; próby rozwinięcia poprawionej lub nawet całkowicie nowej schematyzacji, która może prowadzić do nowych modeli i teorii obejmujących zarówno dawną, jak i nową sytuację i związane z nią problemy.*

Ponadto pierwsze trzy kroki przedstawionych etapów matematyzacji H. Steiner uzupełnia komentarzami, z których najistotniejszy wydaje się komentarz do kroku 3. Autor decyzję powrotu w kroku 3 do sytuacji wyjściowej S uzależnia od konkretnego problemu. W pewnych sytuacjach, zdaniem autora, krok ten można całkowicie pominąć.

Podany przez H. Steinera opis procesu matematyzacji jest dość obszerny. Autor stara się opisać niejako w sposób algorytmiczny bardzo trudny, złożony i niejednoznaczny proces budowania i oceny przydatności modeli matematycznych. Zauważmy, że omawiany przepis koresponduje z koncepcją heurystycznej strategii rozwiązywania problemów autorstwa G. Polyi (1993). Krok 1 omawianej konstrukcji jest tożsamy z wyodrębnioną przez G. Polyę pierwszą fazą rozwiązywania problemów. Pozostałe kroki strategii polyowskiej realizowane mogą być tu wielokrotnie, np. „rzut oka wstecz" może być realizowany w krokach 3, 5 oraz 9. W ujęciu H. Steinera proces matematyzacji jest więc traktowany jako problem do rozwiązania.

Analiza podanych definicji skłania m.in. do refleksji, że poszczególne określenia terminu *matematyzacja* kładą nacisk na różne jej aspekty. Warto zwrócić uwagę, że omawiany termin, niezależnie od interpretacji, jest rozumiany jako aspekt ludzkiej aktywności (matematycznej). Fakt ten potwierdza wypowiedź Z. Semadeniego (2003, s. 112), którego zdaniem termin *matematyzacja* może być rozumiany trojako:

Najczęściej spotykane ujęcie – to określanie tym słowem każdego przejścia od jakiegoś konkretnego, niematematycznego zagadnienia *pochodzącego z szeroko rozumianej rzeczywistości do jego w y r a ź n i e o k r e ś l o n e g o, adekwatnego* modelu matematycznego.

Drugie możliwe podejście – to traktowanie matematyzowania jako ludzkiej a k t y w n o ś c i, polegającej na o p i s y w a n i u (lub na próbach opisu) i a n a l i z o w a n i u związków między wyróżnionymi elementami rzeczywistości *z użyciem matematyki, ale b e z w y k o r z y s t y w a n i a j a k i e g o ś jasno o k r e ś l o n e g o m o d e l u.*

W pewnych sytuacjach chodzi o matematyzację w ramach gotowego już fragmentu matematyki, dokonaną przez eksperta, znającego dobrze odpowiedni fragment matematyki, a jej celem jest r o z w i ą z a n i e jakiegoś problemu, potrzebnego np. inżynierom.

W pracy (Behnke, Hammersley, Krygowska, Pollak, 1968), która jest protokołem z dyskusji na temat istoty matematyzacji, S. Sobolev wyróżnia trzy poziomy matematyzacji odpowiadające poziomom zastosowania matematyki.

Pierwszy z nich kierowany jest do zawodowych matematyków, którzy *powinni posuwać naukę do przodu.* Chodzi tu o tworzenie różnych teorii matematycznych, dla których w danej chwili nie musimy umieć wskazać zjawisk, które one modelują. Przytacza się tu przykład zastosowania geometrii nieeuklidesowej do opisu teorii względności.

Drugi poziom adresowany do inżynierów, fizyków, a także matematyków, to tworzenie modeli, *które nigdy nie są dokładne, ale są usprawiedliwione odczuciem wynikającym z doświadczeń.* (...) *W wielu przypadkach rachunek zastępuje się przez doświadczenia, łatwiejsze i bardziej efektywne na tym poziomie niż rachunek matematyczny.*

Trzeci poziom to tworzenie *modelu dokładnego* dla sytuacji pozamatematycznej. Zdaniem S. Soboleva, jest to być może najtrudniejsze. Ten ostatni typ uważany jest za najważniejszy, gdy mówimy o kształceniu przez matematykę.

Analiza przedstawionych określeń wskazuje na złożoność terminu *matematyzacja* oraz na fakt, że umiejętność matematyzowania jest *uniwersalną ludzką zdolnością*, podobnie jak posługiwanie się językiem i rysunkiem, a jednocześnie matematyzacja, rozumiana jako aktywność, nie jest aktywnością elementarną i wymaga twórczego myślenia (por. Treliński, 1982).

Obecnie coraz częściej zamiast o *matematyzacji* mówi się o *modelowaniu*[2].

Zdaniem Z. Semadeniego: *Chodzi w zasadzie o to samo, różnica polega na innym rozłożeniu akcentów* (...) 1° *przy modelowaniu chodzi z reguły o konkretny problem lub jakiś zespół problemów, a nie o matematyzację całej dziedziny wiedzy,* 2° *przy modelowaniu większy nacisk kładzie się na obejmowanie całego procesu prowadzącego od pierwotnej sytuacji z rzeczywistości do modelu oraz na konieczność powrotu do wyjściowego problemu,* 3° *przy modelowaniu szczególnie ważna jest dziś rola komputerów* (Semadeni, 2003, s. 112-113).

I. Białynicki-Birula i I. Białynicka-Birula (2002) zwracają uwagę na fakt, że w modelowaniu rzeczywistości możemy wyodrębnić trzy fazy: *Pierwsza faza ta najtrudniejsza, bo nie poddająca się żadnym precyzyjnym regułom, to* ***dobór modelu*** *do danego fragmentu, czy też do pewnych aspektów rzeczywistości. Druga faza to* ***stworzenie algorytmu****, według którego model będzie działał. Przez algorytm rozumiemy tu zbiór reguł postępowania, których systematyczne stosowanie prowadzi zawsze do rozwiązania problemu. Faza trzecia, dużo łatwiejsza, choć często żmudna i czasochłonna, to sprawdzenie różnych hipotez badawczych i* ***wyciągnięcie wniosków****. Oczywiście, o wartości każdego modelu decyduje na końcu zgodność uzyskanych za jego pomocą wniosków z rzeczywistością, którą miał on opisać.* Ci sami autorzy zwracają także uwagę na różnicę między modelowaniem i tworzeniem teorii opisywanych zjawisk. Stwierdzają: *Granica jest nieostra. Niektóre teorie są tylko prostymi modelami, zaś niektóre modele zasługują na miano pełnej*

[2]W *Encyklopedii szkolnej PWN. Matematyka, Fizyka, Chemia* (2006) czytamy: *Modelowanie – doświadczalna lub mat. metoda badania złożonych układów, zjawisk i procesów* (...) *na podstawie tworzenia ich modeli* (...). *M. matematyczne polega na tworzeniu modeli mat. i wykorzystywaniu aparatu mat. do ich analizy.*

teorii. Wydaje nam się, że różnica jednak istnieje i polega na tym, iż przy budowaniu ***teorii*** *staramy się uwzględniać wszystkie znane nam czynniki, mające wpływ na przebieg badanych zjawisk. Przy budowie teorii dążymy do doskonałości. Natomiast przy konstruowaniu modelu celowo rezygnujemy z pełnego opisu, aby uzyskać jak najprostszy schemat, w którym staramy się uwzględniać tylko niektóre wybrane cechy zjawisk. Bardzo często pomocny jest w tym rachunek prawdopodobieństwa.* (...) *Pozwala on bowiem zastąpić pełną wiedzę o badanym zjawisku przez wiedzę, którą umownie można nazwać wiedzą średnią. W ten sposób uzyskujemy przybliżone, najbardziej prawdopodobne wyniki, które często są najlepszymi wynikami, na jakie nas stać, bo pełna wiedza jest praktycznie niedostępna* (Białynicki-Birula, Białynicka-Birula, 2002).

Problemy związane z modelowaniem są przedmiotem zainteresowań wielu osób, zarówno matematyków-teoretyków, dydaktyków matematyki, ale także przedstawicieli praktycznie wszystkich nauk (począwszy od budownictwa, biologii, medycyny, a skończywszy na historii). Publikacji związanych z samym *modelem* i *modelowaniem* jest wiele i mają one różny charakter. Dotychczas zwróciliśmy uwagę tylko na kilka z nich, gdyż nie sposób omówić tu wszystkich artykułów i książek poświęconych tym zagadnieniom.

Znaczenie terminu model

Z pojęciem *modelowania* w oczywisty sposób łączy się termin *model.* Przeanalizujmy, jak we współczesnej literaturze rozumie się to słowo. Istotną uwagę czyni Z. Semadeni (2003, s. 141), który stwierdza – za Freudenthalem i Bocheńskim – że: *Ważne jest uświadomienie sobie, że słowo to* [model] *ma wiele różnych znaczeń, nieraz p r z e c i w s t a w n y c h (Freudenthal, 1991, s. 33; Bocheński 1992, s. 144)*[3].

W Encyklopedii popularnej PWN (1980) czytamy, że: *Model,* [to] *układ fiz. (m. fiz.) lub opis mat. (m. mat.) o własnościach zbliżonych do własności obiektu modelowanego.* Określenie to nie wyjaśnia istoty modelu. Termin *model* nie jest łatwy do precyzyjnego zdefiniowania. W naukach przyrodniczych podejmuje się liczne próby określenia jego znaczenia. M. Bartkiewicz (1994) stwierdza: *Nie sposób je* [definicje] *wszystkie omawiać, warto jednak zwrócić uwagę na najbardziej charakterystyczne. I tak: według A. Anzenbachera:* ***w języku potocznym rozumiemy przez model kopię jakiegoś przedmiotu już istniejącego (np. latające modele samolotów) lub wzór, według którego jakiś przedmiot ma być wykonany (np. model budowanego kościoła). W nauce model jest to konstrukcja, która w wiadomym uproszczeniu oddaje właściwości pewnego zjawiska naturalnego i pozwala na dedukcyjne wyprowadzenie i sądy, które można sprawdzić doświadczalnie***[4]*. Model jest tu więc pomocą w myśleniu; upraszczając dane zjawisko czyni je wyobrażalnym, przejrzystym; przykładem – model atomu Bohra. Współcześnie mówi się o modelowym charakterze*

[3] Freudenthal, H.: 1991, *Revisiting Mathematical Education. China Lectures*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht;
Bocheński, J. M.: 1992, *Współczesne metody myślenia*, Wydawnictwo W drodze, Poznań.

[4] Anzenbacher, A.: 1987, *Wprowadzenie do filozofii*, Kraków.

teorii empirycznych w ogóle. ***Rozumie się przez to co następuje: redukcja tematyczna i abstrakcja metodyczna, w jakich teorie empiryczne skonstruowane, pozwalają w gruncie rzeczy na zbudowanie jedynie modelu natury, a więc na przedstawienie pewnego aspektu rzeczywistości w sensie uproszczenia. Pod względem filozoficznym obowiązuje wobec wszelkich konstrukcji modelowych w teoriach empirycznych ostrzeżenie, aby nie mylić modeli z tym, co one naśladują, tzn. „nie ontologizować ich”***[5]***.*** (...) *Ostatnio wiele mówi się o modelach matematycznych. Zdaniem J. M. Bocheńskiego nie chodzi tu o nowy pogląd, ale o nowe słowo –* ***bo owe modele to po prostu zdania wyjaśniające, napisane w języku matematycznym. Słowo model w logice używa się wręcz w przeciwnym znaczeniu. Tam rzeczywistość (reprezentowana przez klasę stałych) jest modelem teorii matematyczno-logicznej, a nie odwrotnie***[6]*.*

Zauważmy, że w proponowanych definicjach zwraca się uwagę na fakt, że w modelu chodzi o uproszczony obraz rzeczywistości, tzn. obraz pozbawiony pewnych cech, uznanych w danej sytuacji za drugorzędne.

T. Grabińska (1994), dokonując próby zdefiniowania słowa *model*, pisze: *W literaturze metodologicznej, a także poświęconej szczegółowym rozważaniom fizykalnym termin* ***model*** *używany jest w różnych znaczeniach, często zamiennie z terminami* ***teoria*** *czy* ***interpretacja****.* W tej samej pracy T. Grabińska zwraca uwagę na fakt, że: *rozumienie bowiem terminu model, jego relacji do teorii czy (lub) interpretacji nie tyle jest zrelatywizowane do klasyfikacji, ale (jak często w przypadku klasyfikacji w metodologii bywa) w dużej mierze zależy od przyjętego stanowiska teoriopoznawczego.*

Pojęcie modelu odniesione do teorii aksjomatycznej, takiej jak teoria logiczna lub matematyczna, albo odniesione do języka sformalizowanego, oznacza odwzorowanie zbioru zdań (teorii, języka) w układ, w którym wszystkie zdania zbioru są prawdziwe. Teoria aksjomatyczna lub język sformalizowany mogą więc mieć wiele modeli, które często w takich razach nazywa się ***interpretacjami****.*

Autorka zwraca też uwagę na fakt, że model danej teorii występuje często jako tak zwany *model semantyczny*: *Jest on układem indywiduów, klas, relacji lub funkcji, które są przyporządkowane odpowiednim danym teorii, w postaci denotacji terminów stałych lub wartości zmiennych w taki sposób, aby zinterpretowane aksjomaty teorii były spełnione. Model w sensie semantycznym jest więc korelatem pewnego języka. Modele semantyczne ograniczają się jednak do struktur abstrakcyjnych, w odróżnieniu od zasięgu teorii, który jest określony przez układ empiryczny.*

Ponadto T. Grabińska podkreśla rolę modelu w badaniu teorii aksjomatycznych: *Badaniem modeli teorii aksjomatycznych zajmuje się teoria modeli. Logiczny i sformalizowany aparat teorii modeli umożliwił zbadanie ogólnych problemów teorii, jak np. definiowalność pojęć, niesprzeczność i zupełność teorii, niezależność aksjomatów, a także związki między teoriami matematycznymi. Niektórzy uważają, że teoria modeli umożliwia także wnikanie w język systemów dedukcyjnych i określenie relacji między pojęciami syntaktycznymi a semantycznymi.*

[5] Bertalanfy. L.: 1965, Zur Geschichte theoretischer Modelle in der Biologie, *Studium Generale* **5**, 290.

[6] Bocheński, J.: 1989, *Współczesne metody myślenia*, Poznań.

Na trudności związane ze zdefiniowaniem słowa *model* zwraca także uwagę K. Tempczyk (1994), pisząc: *Zakres pojęcia* ***model*** *jest trudny do sprecyzowania, nawet w nauce, ze względu na wieloznaczność tego terminu. Zwykle modelami nazywamy pewne wytwory umysłu lub rąk człowieka, które odtwarzają lub naśladują pewne obiekty i zjawiska materialne.*

Ponadto K. Tempczyk (ibidem) zwraca uwagę na jeszcze inne, bardzo istotne, znaczenia słowa *model* wiążące się z zagadnieniem *modelowania*: *W nauce i technice mówi się czasami o modelowaniu, gdy własności jednego układu odtwarzamy za pomocą innego układu, który pod względem badanych cech jest identyczny z pierwszym. Na przykład pewne układy elektryczne i mechaniczne opisuje się za pomocą tego samego równania różniczkowego. W równaniu tym występują zadane parametry, które w pierwszym przypadku mają sens elektryczny (opór, indukcyjność i pojemność). Opierając się na tej formalnej identyczności własności obu rodzajów układów można jedne zastępować drugimi, tworząc mechaniczne modele procesów elektrycznych i przeciwnie. W tym sensie, w jakim rozumie się tutaj słowo model, można podobnie mówić o modelach w matematyce, gdy za pomocą zadanej bazy rekonstruujemy wszystkie składniki przestrzeni. Baza to jakby obiekty, którymi dysponujemy i za których pomocą chcemy skonstruować wszystkie pozostałe składniki całego zbioru.*

R. F. Barton (1974, s. 13) zwraca uwagę na fakt, że do tworzenia modeli niezbędny jest pewien zasób wiadomości i umiejętności: *Aby utworzyć model, musimy coś wiedzieć o interesującym nas systemie przedmiotowym*[7]*. Wiedza, z której korzystamy, przy tworzeniu modelu, może składać się z powszechnie uznanych praw lub zasad dotyczących systemów przedmiotowych, będących przedmiotem badań. (...) Model jest konkretnym, interpretacyjnym wyrazem teorii albo jednej lub kilku hipotez (...) przez określenie „interpretacyjny” rozumiemy, że modele nie są tworem natury – są zbudowane przez człowieka. (...) W każdym jednak przypadku zakładamy, że tłem dla konkretyzacji przy budowie modelu jest istniejąca pierwotnie teoria.*

I. Białynicki-Birula i I. Białynicka-Birula (2002) zwracają uwagę na możliwość potraktowania modelu jak pewnej struktury (matematycznej), będącej parą obiektów: zbioru elementów rzeczywistości i reguł nimi rządzących. Stwierdzają oni, że: *Zbiór elementów rzeczywistości, przyjętych jako istotne dla danego zagadnienia, oraz reguł, które nimi rządzą, będziemy nazywali* ***modelem****. Wybór tych elementów oraz określenie reguł ich działania jest istotą* ***modelowania****. Trafność tego wyboru oceniamy przez porównanie wyników uzyskanych przy użyciu modelu z rzeczywistością*[8]*.*

Zauważmy, że pomimo dużej różnorodności w określaniu znaczenia terminu model wszystkie definicje łączą pewne wspólne charakterystyczne cechy. Mówi się więc o upraszczaniu rzeczywistości i pozostawianiu tylko jej istotnych cech.

[7] *system, który chcemy poznać, przedmiot badania czy doświadczenia, np. rzeczywistość*

[8] Autorzy w swej pracy wyjaśniają, w jaki sposób należy ocenić trafność wyboru modelu: *Celem nauki jest opisywanie, tłumaczenie i przewidywanie otaczającego nas świata. Rzeczywistość jest jednak zbyt złożona na to, by można ją było opisać dokładnie, bez stosowania uproszczeń i przybliżeń. Dlatego, gdy pragniemy opisać wybrane zjawisko, bierzemy pod uwagę jedynie te elementy rzeczywistości, o których sądzimy, że mają na to zjawisko istotny wpływ* (Białynicki-Birula, Białynicka-Birula, 2002).

Fakt ten podkreśla W. Kula[9], stwierdzając, że: *konstruowanie modelu jest zadaniem delikatnym i prawie zawsze dyskusyjnym. Wymaga wyabstrahowania jednych elementów, a pominięcia innych* (za Bartkiewicz, 1994).

M. Bartkiewicz (1994) dokonuje zestawienia poglądów na temat istoty upraszczania rzeczywistości przy konstrukcji modelu. Zauważa, że: *Autorzy definiujący pojęcie modelu zwracali uwagę na te same charakterystyczne jego cechy. Mówili oni bądź o* ***upraszczaniu*** *przez model obrazu rzeczywistości, bądź też o takim upraszczaniu, które eliminuje tylko cechy uboczne, pozostawiając w tym uproszczonym obrazie (modelu) cechy istotne. Owe* ***cechy istotne*** *Todd*[10] *określa mianem* ***crucial aspects****, Clarce*[11] *–* ***essential factors****, Nowak nazywa je czynnikami istotnymi, Braudel*[12] *i Kula*[13] *natomiast piszą o* ***schemacie uproszczonym i abstrahowaniu*** *jednych elementów, a pomijaniu innych.*

Z tymi poglądami koresponduje zdanie T. Grabińskiej, która zwraca uwagę na istotne kategorie myślowe niezbędne przy konstrukcji modelu. W pracy (1994) czytamy: *Metodą zabiegów przygotowawczych, która prowadzi do zbudowania modelu jest* ***abstrakcja****. Polega ona na wyróżnieniu przedmiotów oderwanych, skonceptualizowanych, przedstawionych w postaci pojęć cech i relacji, kategorii.* (...) *Porównaniu obiektu empirycznego z modelowym służy* ***analogia****. Jest ona wyrażona jako relacja podobieństwa (analogia pozytywna) lub różnic (analogia negatywna) za pomocą wnioskowania o pewnej cesze przedmiotu, na podstawie jego podobieństwa (różnicy) do innych przedmiotów mających tę cechę. Jeśli te inne przedmioty mają swoje modele, to badany przedmiot jest ustawiony, za pośrednictwem analogii, w perspektywie znanych modeli. Ponadto, oprócz analogii pozytywnych i negatywnych występują analogie neutralne wtedy, gdy nie są znane te pierwsze, model zaś jest zbudowany. Wyróżnienie (wyabstrahowanie) istotnych cech nie wystarczy, jeśli cechy te nie dadzą się przyporządkować pojęciom teoretycznym, a więc jeśli nie poddadzą się* ***idealizacji*** *(ze względu na teorie modelu). Z drugiej strony cel modelowania wyznacza idealizację innego rodzaju (ze względu na modelowane zjawisko), polegającą na zaniedbaniu tych innych nieistotnych cech lub określeniu ich wartości granicznych. Idealizacja więc jest w istocie częścią modelu. Odpowiada za określenie pewnych zależności dla nie zachodzących warunków doskonałych (ze względu na cel modelowania i charakterystyki teorii modelujących).*

W literaturze można także odnaleźć próby określenia formalnej definicji modelu jako struktury bardziej złożonej, niż miało to miejsce w propozycji I. Białynickiego-Biruli i I. Białynickiej-Biruli (2002). Na przykład R. Wójcicki[14] (za Zeidler, 1994), utożsamia *adekwatny model deskrypcyjny, budowany za pomocą aparatu konceptualnego danej teorii (...) z układem $E = \langle p, \Xi, J, \Xi^*, \nabla \rangle$, gdzie p jest konkretnym jednostkowym obiektem empirycznym (systemem empirycznym lub przypadkiem określonego zjawiska empirycznego, Ξ – zbiorem stwierdzeń dotyczących*

[9] Kula, W.: 1962, *Teoria ekonomiczna ustroju feudalnego. Próba modelu*, Warszawa.

[10] Todd, W.: 1972, History as applied science, *A Philosophical Study*, Detroit.

[11] Clarce, D.: 1972, *Models and paradigms in contemporary archeology*, D.L. Clarce (ed.), London.

[12] Braudel, F.: 1992, *Kultura materialna, gospodarka i kapitalizm XV-XVIII wieku. Struktury codzienności, t. 1*, Warszawa.

[13] Kula, W.: 1962, *Teoria ekonomiczna ustroju feudalnego. Próba modelu*, Warszawa.

[14] Wójcicki, R., *Teorie w nauce*, Warszawa 1991.

E, J – funkcją kodu interpretacyjnego umożliwiającą przekład dowolnego zdania ze zbioru Ξ na zdanie dotyczące p, Ξ^* – rzeczywistym zakresem stosowalności E do p, a ∇ zbiorem procedur umożliwiających efektywne rozstrzygnięcie dowolnego zdania λ należącego do Ξ. Dla tak określonego modelu deskrypcyjnego został podany warunek adekwatności stwierdzający, iż dla dowolnego zdania λ, należącego do Ξ^* spełniona jest równoważność: λ wtedy i tylko wtedy, gdy $J(\lambda)$. Zakłada się również, że wszystkie zdania należące do $J(\Xi^*)$ są rozstrzygalne.

***Modelem obiektu p nazywa się każdy obiekt E pomyślany jako model p, który spełnia wszystkie wymogi modelu adekwatnego, prócz być może wymogu adekwatności [13], s. 77*[15]**. P. Zeidler (1994) zauważa, że: *We współczesnych zmatematyzowanych naukach empirycznych pod pojęciem modelu deskrypcyjnego rozumie się układ równań matematycznych oraz warunków niezbędnych do ich rozwiązania. Oczywiście, obiekt p (np. zjawisko empiryczne) może być konceptualizowany za pomocą różnych aparatów matematycznych, co sprawia, iż mogą istnieć alternatywne modele deskrypcyjne tego samego obiektu.*

Ze względu na możliwość istnienia wielu alternatywnych modeli tego samego obiektu nie można poprzestać na powyższej definicji modelu. Powinna ona zostać uzupełniona kolejnymi warunkami. Propozycję takich warunków podaje R. Wójcicki: *Pierwszy z nich stwierdza, że wraz z E został określony praktycznie nieograniczenie liczny, zbiór F taki, że E należy do F, a każdy z elementów F (alternatywnych modeli) spełnia warunki nałożone na E prócz być może warunku adekwatności. Drugi warunek ustala, iż dla każdego modelu należącego do F określone jest prawdopodobieństwo tego, że jest on modelem adekwatnym do obiektu p* (za Zeidler, 1994).

Wcześniejsze rozważania wskazują zarówno na wiele możliwych interpretacji znaczenia terminu *model*, jak i na istnienie modeli różnego rodzaju, przy czym w niektórych sytuacjach mamy do czynienia z ich podziałem, w innych zaś z klasyfikacją modeli.

W Encyklopedii popularnej PWN (1980) znajdujemy następujące typy modeli:

- *Model nominalny, metod., układ założeń przyjmowany w danej nauce, w celu ułatwienia (lub umożliwienia) rozwiązania pewnego problemu badawczego.*
- *Model realny, metod., przedmiot lub układ przedmiotów (zdarzeń sytuacji) spełniających założenia danej teorii (m. r. teorii); układ przedmiotów (zdarzeń, sytuacji) dostatecznie podobny do układu badanego, ale prostszy i łatwiej dostępny badaniom (m. r. układu).*
- *Model teoretyczny, metod., konstrukcja hipotetyczna odwzorowująca dany rodzaj rzeczywistości w sposób uproszczony, sprowadzający jej cechy do związków najistotniejszych, budowana w celach heurystycznych.*

Z kolei T. Grabińska (1994) wyróżnia tylko dwa typy modeli: *nominalne* oraz *realne* (*materialne*). Jej zdaniem model nominalny to *przedstawienie obiektu rzeczywistego w postaci układu symboli lub upraszczających założeń*, model zaś realny (materialny) *jest przedmiotem lub zjawiskiem, które wyobrażają obiekt modelowany. (...) Taki modelowy przedmiot jest uproszczeniem modelowanego obiektu*

[15] ibidem

ze względu na liczbę elementów składowych, relacji między nimi, skalę wielkości, stopień wyabstrahowania obiektu modelowanego ze środowiska.

Model realny jest, zdaniem autorki, *wtórny wobec modelu nominalnego dlatego, że bez uprzedniego teoretycznego wyobrażenia modelowanego obiektu, niemożliwe byłoby zbudowanie przedmiotu modelowanego* (...). *Relację modelu realnego do nominalnego określa się jako* ***realizację*** *lub* ***interpretację****.*

Porównując określenia encyklopedyczne z przedstawionymi przez T. Grabińską, zauważamy, że model teoretyczny jest w istocie modelem nominalnym. Potwierdzeniem tego spostrzeżenia jest kolejna wypowiedź T. Grabińskiej: *Jeżeli* ***model nominalny*** *jest wyrażony w postaci pewnych pomyślanych symboli teoretycznych i relacji, to zwykło się go nazywać* ***teoretycznym****.*

Innego podziału modeli (określanych jako *idealizacja matematyczna*) dokonują R. Hooke i D. Shaffer (1969, s. 18-25), wyróżniając *modele przyczynowe* i *modele opisowe.* Ich zdaniem, model przyczynowy *to taki model, który usiłuje skopiować fizyczne czynniki wpływające na badane zjawisko.* (...) *żaden model przyczynowy nie jest doskonałą reprezentacją sytuacji fizycznej, którą usiłuje naśladować (czy, jak mówimy, symulować). Modele są sporządzane przez człowieka; mogą one być użyteczne, pomysłowe, a nawet genialne, ale zawsze są jedynie niedoskonałym obrazem wydarzeń, które odzwierciedlają.* Natomiast model opisowy *to taki model, który podaje adekwatny opis badanego zjawiska, ale nie usiłuje opisywać jego przyczyn. Najważniejszymi modelami opisowymi są modele teorii prawdopodobieństwa* (Hooke, Shaffer, 1969, s. 18).

Pozostaje jeszcze zastanowić się nad potrzebą konstruowania modeli i ich użytecznością.

L. Gårding (1993) zwraca uwagę na fakt, że: *W naukach ścisłych wartość modelu jest sprawdzana poprzez analizę logiczną i doświadczenie. Dlatego konieczne jest bardzo wyraźne rozróżnienie między modelem i tą częścią zewnętrznego świata, który ów model ma przedstawiać.* Tym samym zwraca on uwagę na to, że ze względu na uproszczenia, model nigdy nie jest wiernym odzwierciedleniem rzeczywistości, nie możemy zatem utożsamiać modelu z rzeczywistością. Ten sam pogląd prezentuje K. Tempczyk (1994), zauważając, że: *matematyczne modele procesów zachodzących w przyrodzie są przybliżone, a ich efektywność zależy od stopnia tego przybliżenia. Nie można, opierając się na modelu, wyciągać wniosków wykraczających poza to, co w nim zawarto.* Pomimo tych niedogodności jesteśmy skazani na konstruowanie modeli, gdyż, zdaniem K. Tempczyka, nie ma *innej drogi rozwoju nauki, ponieważ nie można uchwycić i dokładnie opisać całego bogactwa otaczającego nas świata przyrodniczego i społecznego. Z tego powodu w filozofii nauki uważa się, że tworzenie modeli jest podstawowym zadaniem nauki.*

2. Model matematyczny

W dalszej części pracy podamy uwagi dotyczące modeli matematycznych, którym w dotychczasowych rozważaniach nie poświęcono zbyt dużo uwagi.

Jak już wspomniano wcześniej, opis otrzymany w wyniku matematyzacji pewnej sytuacji określamy terminem *model matematyczny.*

Modele matematyczne według Słownika języka polskiego (1982) to: *zależno-*

ści opisujące wyidealizowane zjawiska fizyczne lub ekonomiczne, przyrządy matematyczne służące do rozwiązywania albo do ilustrowania tych zależności, także: interpretacje różnych pojęć i teorii matematycznych.

Podobną definicję znajdujemy w Popularnej encyklopedii powszechnej (1999): *model matematyczny – opis zależności przyczynowo-skutkowych pomiędzy wielkościami (fiz., chem., biol. itp.) charakteryzującymi badany obiekt, wyrażony (przy założonym stopniu uproszczenia) w formie sformalizowanego zapisu matematycznego, zwykle w postaci równania (równań).*

J. von Neuman i O. Morgenstern (za Steiner, 1986) stwierdzają, że: *Modele te* [geometryczno-matematyczne] *są konstrukcjami teoretycznymi o precyzyjnej, wyczerpującej i niezbyt skomplikowanej definicji i muszą być podobne do rzeczywistości pod tym względem, który jest istotny dla aktualnych badań. Podsumowując szczegółowo: definicja powinna być precyzyjna i wyczerpująca, tak aby stosowanie metod matematycznych było możliwe. Konstrukcja nie powinna być niepotrzebnie skomplikowana, aby to ujęcie matematyczne mogło wyjść poza banalny formalizm i dać kompletne rezultaty numeryczne. Warunek podobieństwa do rzeczywistości jest konieczny, by cała operacja miała wartość. Podobieństwo to musi być zwykle ograniczone do kilku rysów uznanych za aktualnie istotne, gdyż, w przeciwnym przypadku, powyższe warunki byłyby wzajemnie ze sobą sprzeczne*[16].

Analizując przytoczone określenia modelu matematycznego, zauważamy, że w każdym z nich *model matematyczny* jest *modelem* w sensie określeń prezentowanych w poprzednim rozdziale. Jedyną różnicę stanowi język tego modelu. Jest to język matematyki (sformalizowany zapis matematyczny).

Fakt ten zauważa T. Grabińska (1994), stwierdzając, że *model matematyczny* jest szczególnym typem modelu nominalnego, którego język jest zaczerpnięty z teorii matematycznej. Ponadto dla omówienia istoty modelu matematycznego autorka przywołuje pracę Mary Hesse[17], w której wyróżnia się ***model matematyczny*** *w inny sposób. Zamiennie nazywa* [się] *go* ***półformalnym****. Wyraża on określoną treść matematyczną niektórych aksjomatów (np. w języku teorii prawdopodobieństwa lub geometrii) lub jest interpretacją wszystkich lub niektórych stałych i zmiennych pozalogicznych teorii (np. odpowiednio – częstości lub stosunków czasoprzestrzennych)* (za Grabińska, 1994).

W tej samej pracy T. Grabińska powołuje się również na poglądy M. Blacka dotyczące funkcji modeli półformalnych: *Black*[18]*, twierdzi, że takie półformalne modele nie mają mocy eksplanacyjnej i nie pełnią funkcji poznawczych. Ich znaczenie jest ściśle instrumentalne i nadają się przede wszystkim do porządkowania materiału empirycznego, systematyzacji faktów (jak np. w psychologicznych teoriach uczenia). Mogą mieć także moc predyktywną, gdy poza tzw. analogią formalną występuje w nich także analogia materialna (jak np. w grach losowych).*

Jak już wspomniano, T. Grabińska traktuje model matematyczny jako model teoretyczny (nominalny z językiem matematyki). Z tym poglądem nie jest zgodna koncepcja J. Miśka, zdaniem którego: *Model matematyczny (...) nie jest tożsamy z modelem teoretycznym. Model matematyczny to powierzchowne przed-*

[16]von Neuman, J. Morgenster, O.: 1975, *Theory of Games and Economic Behavior*, New York.

[17]Por. Hesse M. B.: 1963, *Models and analogies in science*, London.

[18]Por. Black M.: 1962 Models and metaphors, New York.

stawienie zjawiska lub obiektu za pomocą wybranych terminów i relacji matematycznych (najczęściej geometrii i statystyki), w którym wiedza empiryczna (wyrażona przez analogię materialną) nie odgrywa dużej roli. Model teoretyczny ma zaś wartość poznawczą, ponieważ jest sformułowany w języku teorii empirycznej, a ta jest skoordynowana z rzeczywistością przedmiotową (za Grabińska, 1994).

Dotychczasowe rozważania wskazują na to, iż określenie *model matematyczny*, podobnie jak termin *model*, może być i jest różnie rozumiane. Na możliwe jego interpretacje zwraca uwagę też J. Jaroń, stwierdzając: *Terminu „model matematyczny" można używać w co najmniej trojakim sensie, przy czym matematyk albo logik używa go w zupełnie innym, można rzec, diametralnie różnym sensie od technika, ekonomisty czy przyrodnika* (...) *Paradoksalny jest może fakt, że w ujęciu matematyka słowo:* ***model*** *ma znaczenie w gruncie rzeczy bardzo zbliżone do jego znaczenia potocznego, gdy mówi się o modelu budynku, samolotu, samochodu czy sukni. Model jest konkretnym wcieleniem abstrakcyjnej idei* (...) *Drugi sposób rozumienia terminu* ***model matematyczny*** *wiąże się z konstruowaniem modelu dla realnej sytuacji technicznej, ekonomicznej lub przyrodniczej w dziedzinie abstrakcyjnej, tworząc według słów autorów książki*[19] *jej idealizację lub – zdaniem recenzenta poprawniej:* ***jej schemat abstrakcyjny***. (...) *Trzeci wreszcie sposób używania terminu* ***model matematyczny*** *wiąże się z zastosowaniem elektronicznych maszyn matematycznych cyfrowych względnie analogowych* (Jaroń, 1970).

Na wielorakość rozumienia terminu *model matematyczny* zwraca także uwagę Z. Semadeni (2003, s. 141). Wyróżnia on trzy typy sytuacji, w których mówi się o modelach matematycznych: *Typ zależy od tego, jakie jest odniesienie danej sytuacji do rzeczywistości i do matematyki. Otóż gdy mówimy, że jakieś M jest modelem dla jakiegoś X, w grę wchodzą trzy możliwości:*

Typ I: M jest częścią rzeczywistości, a X częścią matematyki.

Typ II: Zarówno M jak i X są częściami matematyki.

Typ III: X jest częścią rzeczywistości, a M jest częścią matematyki.

Pomimo występujących różnic w rozumieniu i definiowaniu terminu *model matematyczny* wspólnym czynnikiem jest upraszczanie (rzeczywistości lub matematyki), co prowadzi do łatwiejszych matematycznie zagadnień, dających rozwiązać się efektywnie narzędziami matematycznymi. Tworząc matematyczne modele sytuacji z życia codziennego, należy dokładnie rozważyć, jakie czynniki można zaniedbać, aby uzyskane rezultaty pozostawały w zgodzie z naszymi oczekiwaniami. Jednocześnie upraszczanie jest niezbędne ze względu na ograniczenia tkwiące w samej matematyce.

Koniecznie należy tu wspomnieć o opracowanej i po raz pierwszy zastosowanej przez Stanisława Ulama tak zwanej metodzie Monte Carlo, która jest wykorzystywana do matematycznego modelowania bardzo złożonych procesów. Dzięki zastosowaniu tej metody można przewidzieć bądź opracować analitycznie wyniki tych złożonych procesów. Metoda ta stosowana jest np. do rozwiązywania zagadnień związanych z planowaniem i organizacją gospodarki (problemy zapasów czy lokalizacji – alokacji – zasobów), z rozszerzaniem się epidemii choroby, z rozpraszaniem neutronów w reaktorze atomowym, ze zderzeniami fotonów z elektronami itd.

[19] Chodzi tu o książkę: (Hooke, Shaffer, 1969).

Ponadto służy do rozwiązywania niektórych równań różniczkowych i całkowych, gdy rozwiązywanie bezpośrednimi metodami prowadzi do zbyt żmudnych obliczeń oraz do obliczania pól, objętości itp. Można zatem stwierdzić, że Metoda Monte Carlo to narzędzie rozwiązywania zadań numerycznych za pomocą odpowiednio organizowanych eksperymentów statystycznych.

W procesie stosowania metody Monte Carlo można wyodrębnić następujące etapy:

1. konstrukcja schematu symulacyjnego;
2. ustalenie sposobu jego symulacji (np. za pomocą tablic cyfr losowych);
3. ustalenie odpowiednich statystyk jako estymatorów poszukiwanych parametrów bądź rozkładów;
4. zebranie i opracowanie danych statystycznych;
5. znalezienie wartości odpowiednich statystyk dla uzyskanej próbki;
6. interpretacja uzyskanych wyników (por. Płocki, 2005b, s. 509-510).

3. Zagadnienie modelu w rachunku prawdopodobieństwa

3.1. Uwagi wstępne

Teoria prawdopodobieństwa, zwana też rachunkiem prawdopodobieństwa lub probabilistyką, jest działem matematyki zajmującym się *zdarzeniami losowymi*, czyli takimi, których wyniku nie da się z góry przewidzieć, a jednocześnie dającymi się powtarzać w takich samych warunkach. Przedmiotem współczesnego rachunku prawdopodobieństwa jest konstruowanie i badanie *przestrzeni probabilistycznych.* Na wstępie podamy definicję przestrzeni probabilistycznej (por. Kubik, 1980, s. 31-38).

Definicja 1
Niech Ω będzie dowolnym, co najmniej dwuelementowym zbiorem, a $\mathcal{Z}$ — niepustą rodziną podzbiorów zbioru Ω, spełniającą układ aksjomatów:

(s1) jeśli $A \in \mathcal{Z}$, to $(\Omega \setminus A) \in \mathcal{Z}$ dla każdego $A \in \mathcal{Z}$,

(s2) jeśli $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{Z}$, to $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{Z}$.

Rozważmy funkcję $P : \mathcal{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$, spełniającą układ aksjomatów:

(P1) dla każdego $A \in \mathcal{Z}$ jest $P(A) \geqslant 0$,

(P2) $P(\Omega) = 1$,

(P3) jeżeli $A_1, A_2, \ldots \in \Omega$ oraz dla każdej pary wskaźników j, k $(j \neq k)$ zachodzi $A_j \cap A_k = \emptyset$, to $P\left(\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

Trójkę $(\Omega, \mathcal{Z}, P)$ nazywamy *przestrzenią probabilistyczną*, a funkcję P – *prawdopodobieństwem.*

Niepusta rodzina $\mathcal{Z}$ spełniająca układ aksjomatów (s1) i (s2) jest σ-ciałem podzbiorów i nazywa się *rodziną zdarzeń*, a jej elementy – *zdarzeniami.* Funkcję P, spełniającą układ aksjomatów (P1), (P2) i (P3) nazywamy *prawdopodobieństwem*, a liczbę $P(A)$ – *prawdopodobieństwem zdarzenia* A.

Przestrzeń probabilistyczna jest obiektem matematycznym, który można tworzyć niezależnie od jakichkolwiek korzeni i praktycznych zastosowań tego pojęcia. Powyżej zacytowana definicja przestrzeni probabilistycznej nie wskazuje, w jaki sposób takie przestrzenie można konstruować. Pozwala jedynie weryfikować, czy zadana trójka $(\Omega, \mathcal{Z}, P)$ jest przestrzenią probabilistyczną. Z punktu widzenia naszej pracy ten fakt jest pewną wadą tej definicji. Wadę tę można w pewnym zakresie usunąć. W dalszej części pracy zaproponujemy inną definicję przestrzeni probabilistycznej. Niestety zakres jej stosowalności jest ograniczony tylko do sytuacji, gdy zbiór Ω jest zbiorem co najwyżej przeliczalnym.

Na wstępie zauważmy, że prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1
Jeżeli zdarzenie A jest co najmniej dwuelementowym i co najwyżej przeliczalnym podzbiorem zbioru Ω, to

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}).$$

Załóżmy, że Ω jest zbiorem co najwyżej przeliczalnym. W tej sytuacji zdarzeniem w przestrzeni $(\Omega, \mathcal{Z}, P)$ jest każdy podzbiór zbioru Ω, a zatem $\mathcal{Z} = 2^{\Omega}$. Jest więc $\Omega = \{\omega_j \colon j \in J\}$, gdzie $J = 1, 2, \ldots, n$, bądź $J = 1, 2, 3, \ldots$. Określmy funkcję $p\colon \Omega \to \mathbb{R}$ wzorem

$$p(\omega_j) := P(\{\omega_j\})$$

dla $\omega_j \in \Omega$.

Zauważmy, że funkcja p spełnia dwa warunki:

(r1) $p(\omega) \geqslant 0$ dla każdego $\omega \in \Omega$,

(r2) $\displaystyle\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$.

Przyjmijmy następującą definicję (por. Płocki, 2005b, s. 17):

Definicja 2
Każdą funkcję p, z niepustego i co najwyżej przeliczalnego zbioru Ω w zbiór $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych spełniającą warunki (r1) i (r2) nazywamy *rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze* Ω. Parę (Ω, p) nazywamy *ziarnistą* albo *dyskretną przestrzenią probabilistyczną*

Z przeprowadzonych rozważań wynika, że jeśli zbiór Ω jest co najwyżej przeliczalny, to za pomocą trójki $(\Omega, \mathcal{Z}, P)$ określiliśmy parę (Ω, p).

Niech teraz (Ω, p) będzie przestrzenią probabilistyczną ziarnistą. Rozważmy funkcję $P\colon 2^{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ określoną następująco:

$$P(A) = \begin{cases} 0, \text{ gdy } A = \emptyset, \\ p(\omega), \text{ gdy } A = \{\omega\}, \\ \sum\limits_{\omega \in A} p(\omega), \text{ gdy } A \text{ jest zbiorem co najmniej dwuelementowym.} \end{cases}$$

Można łatwo wykazać prawdziwość następującego twierdzenia.

Twierdzenie 2
Funkcja P jest prawdopodobieństwem w sensie aksjomatycznej definicji prawdopodobieństwa.

Za pomocą pary (Ω, p) określiliśmy zatem trójkę $(\Omega, \mathcal{Z}, P)$, gdzie $\mathcal{Z} = 2^{\Omega}$.

Przeprowadzone rozumowania pozwalają sformułować następujące twierdzenie (por. Płocki, 2005b).

Twierdzenie 3
Jeśli Ω jest zbiorem co najwyżej przeliczalnym, to określenie przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{Z}, P)$ w sensie definicji aksjomatycznej jest równoważne z określeniem na zbiorze Ω rozkładu prawdopodobieństwa p, a tym samym pary (Ω, p), która jest ziarnistą przestrzenią probabilistyczną.

3.2. Model probabilistyczny doświadczenia losowego

Dalszą część pracy poświęcimy zagadnieniu *modelu probabilistycznego doświadczenia losowego.* Przez *doświadczenie losowe* będziemy rozumieć (tak jak większość autorów prac z rachunku prawdopodobieństwa) eksperyment fizyczny dający się powtarzać, o przebiegu i wyniku którego decyduje wyłącznie przypadek. Przykładami doświadczeń losowych są: rzut monetą, rzut kostką do gry, losowanie numeru w grach liczbowych, losowanie liczby za pomocą rulety, losowanie kuli z urny o dwu kulach białych i jednej czarnej itp.

W pracach poświęconych modelowaniu, czy też modelom matematycznym wskazuje się na szczególny typ modeli zwanych *modelami probabilistycznymi.* Na zagadnienie modelu probabilistycznego zwracają uwagę np. R. Hooke i D. Shaffer w swej pracy (1969, s. 18). Analizując modele opisowe, zwracają oni uwagę na fakt, że: *Model opisowy to taki model, który podaje adekwatny opis badanego zjawiska, ale nie usiłuje opisywać jego przyczyn. Najważniejszymi modelami opisowymi są modele teorii prawdopodobieństwa.* W tej samej pracy (Hooke, Shaffer, 1969, s. 25) autorzy charakteryzują model probabilistyczny jako taki *model, którego opis zawiera pewne elementy związane z przypadkiem. Jest to coś pośredniego między opisowym modelem empirycznym, w którym zadawalamy się jedynie obserwowaniem, nie próbując niczego wyjaśnić, a modelem przyczynowym, w którym chcemy wyjaśnić wszystko.* Także M. Heller (2006b, s. 61) zwraca uwagę na specyficzną rolę rachunku prawdopodobieństwa w opisywaniu rzeczywistości, stwierdzając, że *matematykę stosujemy do świata za pośrednictwem teorii fizycznych, natomiast rachunek prawdopodobieństwa, a więc teoria czysto matematyczna, wyjaśnia coś, co zachodzi w świecie, a zatem niejako przejmuje zadanie fizyki.*

Rachunek prawdopodobieństwa traktowany jako matematyczna teoria opisująca rzeczywistość nie może się zatem obejść bez pojęcia modelu. Jednocześnie pojęcie modelu probabilistycznego nie jest zbyt powszechnie prezentowane w akademickich podręcznikach z rachunku prawdopodobieństwa. Niewielu autorów kursów probabilistyki w ogóle zwraca na nie uwagę. Co prawda, jeśli rachunek prawdopodobieństwa traktować wyłącznie jako teorię miary zawężoną do miary unormowanej, to pojęcie modelu probabilistycznego doświadczenia losowego nie jest w ogóle potrzebne. Nie powinno się jednak zapominać o historycznych korzeniach rachunku prawdopodobieństwa, który swoje początki miał w grach losowych. Analiza doświadczeń losowych w nich przeprowadzanych prowadziła do konstrukcji modeli. Rachunek prawdopodobieństwa pojmowany jako gałąź matematyki pozwalająca opisywać zjawiska niedeterministyczne otaczającej nas rzeczywistości w sposób nierozerwalny związany jest z budowaniem modeli matematycznych.

Również dzisiaj próbując opisywać otaczającą nas rzeczywistość, konstruujemy probabilistyczne modele nie tylko różnych doświadczeń i schematów losowych (np. schemat Ehrenfestów jako model przepływu temperatur), ale i złożonych procesów stochastycznych. Warto tu wspomnieć o probabilistycznej naturze wielu zjawisk fizycznych w skali mikroskopowej (mechanika kwantowa).

Niechęć autorów podręczników do wprowadzania pojęcia modelu probabilistycznego można tłumaczyć tym, że nie jest to pojęcie ściśle matematyczne i jednocześnie odwołujące się do rzeczywistości. Brak formalnego określania pojęcia modelu probabilistycznego doświadczenia losowego, można też tłumaczyć tym, iż nie da się na gruncie matematyki zweryfikować, czy dany model jest zgodny z doświadczeniem losowym, a więc czy właściwie opisuje rzeczywistość.

Niektórzy autorzy podręczników np. (Krzyśko, 2000, s. 9-10; Zubrzycki, 1970, s. 9-13) charakteryzując zbiór Ω (przestrzeń zdarzeń elementarnych) będący pojęciem pierwotnym teorii prawdopodobieństwa, „przemycają” pewne informacje na temat modelu probabilistycznego. M. Krzyśko (2000, s. 9) stwierdza: *W zagadnieniach praktycznych zbiór Ω składa się ze wszystkich możliwych wyników ω eksperymentu lub obserwacji.* Następnie na kilku przykładach pokazuje, w jaki sposób tworzyć zbiór Ω (dla rzutu monetą $\Omega = \{O, R\}$; dla rzutu kostką $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, gdzie ω_k jest zdarzeniem elementarnym polegającym na wyrzuceniu k-oczek; dla strzelania do tarczy $\Omega = \{(u, v) \colon -\infty < u < \infty,\ -\infty < v < \infty\}$, gdzie u, v są liczbami rzeczywistymi).

S. Zubrzycki (1970), oprócz rzutu monetą i kostką rozważa jeszcze *wiek małżonków* oraz *czas czekania na tramwaj*, kursujący co 5 minut. W pierwszym przypadku zbiorem *możliwych wyników* jest zbiór (x, y) tych wszystkich punktów płaszczyzny, dla których $x > 16$ i $y > 16$, w drugim – wszystkie liczby z przedziału $[0, 5)$.

Jak już wspomniano wcześniej, jeśli rachunek prawdopodobieństwa chcemy wykorzystywać do opisywania rzeczywistości, to nie możemy obejść się bez pojęcia modelu.

W pracy M. Hellera (2006a, s. 61-67) czytamy: *matematyk, chcąc zastosować rachunek prawdopodobieństwa do świata* (...)*, najpierw konstruuje model probabili-*

styczny sytuacji, którą chce matematycznie modelować. Definiuje więc przestrzeń probabilistyczną, która reprezentuje ogół możliwych wyników i na tej przestrzeni określa tzw. funkcję rozkładu prawdopodobieństwa, która mówi, jak często w przestrzeni probabilistycznej pojawiają się różne zdarzenia przy wielokrotnym powtarzaniu doświadczenia. Obie te definicje muszą być tak dobrane, ażeby „opisywały" modelowaną sytuację zgodnie z intuicją i – oczywiście – tak ażeby były spełnione aksjomaty wymagane przez rachunek prawdopodobieństwa. Trafność całej konstrukcji potwierdza lub falsyfikuje zgodność otrzymywanych teoretycznie przewidywań z rzeczywiście przeprowadzanymi doświadczeniami. Rachunku prawdopodobieństwa nie stosuje się więc bezpośrednio do świata, lecz za pośrednictwem modelu probabilistycznego.

Z powyższym stwierdzeniem koresponduje wypowiedź L. T. Kubika (1980, s. 43), autora popularnego w latach 80. podręcznika akademickiego z rachunku prawdopodobieństwa. Autor dostrzega potrzebę konstrukcji modelu probabilistycznego i zwraca uwagę na fakt, że nie jest to zadanie łatwe, stwierdzając: *Konstruując model probabilistyczny danego doświadczenia losowego musimy (...) wybrać odpowiednią przestrzeń zdarzeń elementarnych* Ω *i na* Ω *określić rozkład prawdopodobieństwa* P *(w sposób zgodny z aksjomatami), przy tym tak, aby był spełniony (...) postulat empiryczny*[20]. *Wybór odpowiedniej przestrzeni jest na ogół sprawą dość prostą. Trudniejszy bywa na ogół wybór odpowiedniego rozkładu prawdopodobieństwa* P.

Warto zwrócić uwagę na fakt, że nie wskazano tu żadnych recept konstrukcji modelu probabilistycznego doświadczenia losowego bądź weryfikacji, czy dana przestrzeń probabilistyczna jest modelem danego doświadczenia.

W popularnych obecnie podręcznikach z rachunku prawdopodobieństwa autorstwa J. Jakubowskiego i R. Sztencela autorzy podjęli próbę sprecyzowania pojęcia modelu probabilistycznego. W książce (Jakubowski, Sztencel, 2002) pierwszy rozdział zatytułowany jest „Probabilistyczny model doświadczenia". Zawarto tu określenie pojęcia *matematyczny model doświadczenia losowego.* Przybliżając to pojęcie, autorzy najpierw ukazują, w jaki sposób należy skonstruować model doświadczenia losowego. Konstrukcja ta rozpoczyna się od wyznaczenia zbioru możliwych wyników doświadczenia losowego. Czytamy tu, że: *Zbiór zawierający wszystkie możliwe wyniki doświadczenia nazywamy* ***zbiorem zdarzeń elementarnych*** *i zazwyczaj oznaczamy literą* Ω. *Należy jednak pamiętać, że przy wyborze zbioru zdarzeń elementarnych możliwa jest pewna dowolność.* [Zbiór] (...) Ω *jest listą zawierającą wszystkie możliwe wyniki. Wykluczają się one wzajemnie, zaś w każdym doświadczeniu realizuje się dokładnie jeden wynik, czyli zdarzenie elementarne. Różne punkty widzenia na doświadczenie mogą prowadzić do różnych zbiorów zdarzeń elementarnych.* W dalszej części tego rozdziału autorzy wprowadzają – najpierw intuicyjnie, a następnie aksjomatycznie – tak zwaną *liczbową charakterystykę stopnia możliwości zajścia zdarzenia z* σ*-ciała zdarzeń*, którą nazywają prawdopodobieństwem.

[20]Chodzi tu o własność, aby dla każdego zdarzenia A związanego z doświadczeniem losowym prawdopodobieństwo $P(A)$ było takie, aby *w długich seriach* n *powtórzeń w praktycznie identycznych warunkach rozpatrywanego doświadczenia losowego zachodziła równość* $v_n(A) = P(A)$. Symbol $v_n(A)$ oznacza częstość zdarzenia A w n powtórzeniach doświadczenia (zob. Kubik, 1980, s. 43).

Dalej czytamy, że: *matematyczny model doświadczenia losowego to trójka*

$$(\Omega, \mathcal{F}, P),$$

gdzie P jest prawdopodobieństwem określonym na pewnym σ-ciele $\mathcal{F}$ podzbiorów zbioru zdarzeń elementarnych Ω. Tę trójkę nazywamy ***przestrzenią probabilistyczną****.*

W innej książce (2002) tych samych autorów odnajdujemy nieco ogólniej sformułowaną definicję probabilistycznego modelu doświadczenia. Autorzy stwierdzają, podobnie jak ma to miejsce we wcześniej omawianej pozycji, że *matematyczny model doświadczenia losowego to trójka*

$$(\Omega, \mathcal{F}, P),$$

gdzie P jest przeliczalnie addytywną i nieujemną miarą unormowaną, określoną na pewnym σ-ciele podzbiorów zbioru zdarzeń elementarnych Ω. Tę trójkę nazywamy ***przestrzenią probabilistyczną****.*

W tym ujęciu przestrzeń probabilistyczna nierozerwalnie łączy się z matematycznym modelem doświadczenia losowego (modelem probabilistycznym), a więc z jakimś doświadczeniem losowym. Pojawia się tu problem, czy dla każdej *a priori* zadanej trójki $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ spełniającej stosowne postulaty można wskazać jakieś doświadczenie losowe, którego jest ona matematycznym modelem, a więc czy każdą taką trójkę można nazwać przestrzenią probabilistyczną? Częściową odpowiedź na to pytanie – pozytywną w przypadku, gdy zbiór Ω jest co najwyżej przeliczalny – można znaleźć w pracy (Płocki, 2005a); będzie mowa o tym w dalszej części tego rozdziału.

Nieco inne określenie modelu probabilistycznego odnajdujemy w pracach A. Płockiego. W jego koncepcji (zob. np.: Płocki, 2005a; Płocki, 2005b; Płocki, 2004) model probabilistyczny jest tu określany tylko dla tych sytuacji, gdy zbiór Ω jest co najwyżej przeliczalny. Istotą tej filozofii określania modelu jest przyjęcie na samym początku, a więc przed wprowadzaniem pojęcia doświadczenia losowego definicji przestrzeni probabilistycznej ziarnistej jako obiektu *stricto sensu* matematycznego. Przestrzeń probabilistyczna ziarnista jest tu definiowana jako para (Ω, p), gdzie Ω jest dowolnym niepustym (lub co najmniej dwu elementowym) zbiorem, zaś funkcja p jest rozkładem prawdopodobieństwa na tym zbiorze (zob. definicja ze strony 157). Dopiero po ukształtowaniu pojęcia przestrzeni probabilistycznej ziarnistej autor wprowadza pojęcie modelu probabilistycznego.

W książce (Płocki, 2004) czytamy: *przestrzeń probabilistyczna (Ω, p) jest* ***modelem probabilistycznym****, albo krótko* ***modelem*** *doświadczenia losowego jeśli*
– Ω jest zbiorem wszystkich wyników doświadczenia losowego δ oraz
– funkcja p przypisuje każdemu wynikowi prawdopodobieństwo, z jakim doświadczenie δ może zakończyć się tym wynikiem[21].

Zwróćmy uwagę na fakt, że powyższe stwierdzenie nie ma rangi matematycznej definicji, gdyż nie o matematyczne pojęcie tu chodzi.

W tej samej pozycji odnajdujemy też definicję *klasycznego modelu probabilistycznego.* Czytamy tu, że: *Modelem probabilistycznym doświadczenia losowego*

[21] W innych swych publikacjach autor używa też zapisu $(\Omega_\delta, p_\delta)$, wskazującego na doświadczenie δ.

jest klasyczna przestrzeń probabilistyczna wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wyniki tego doświadczenia są jednakowo prawdopodobne. Mówimy wówczas, że doświadczenie ma ***klasyczny model probabilistyczny****.*

Więcej informacji na temat sposobu konstrukcji modelu probabilistycznego znajdujemy w innej pracy tego samego autora. Oprócz wspomnianej już definicji, czytamy tu: *Przed wykonaniem doświadczenia δ (czyli a priori) można dla każdego wyniku próbować ocenić prawdopodobieństwo, z jakim doświadczenie zakończy się tym wynikiem. Dla każdego wyniku będziemy określać liczbę wyrażającą stopień pewności (a więc szanse), że doświadczenie δ zakończy się tym wynikiem. Mowa tu więc o funkcji p_δ ze zbioru Ω_δ w zbiór $\mathbb{R}$ i takiej, że liczba $p_\delta(\omega)$ jest prawdopodobieństwem wyniku ω* (Płocki, 2005b, s. 29-30). W tej samej pracy odnajdujemy również informacje, w jaki sposób można określać zbiór wartości funkcji p_δ (...). *Podstawą do ocen wartości funkcji p_δ będą na ogół pewne symetrie lub proporcje, innym razem pewne miary (długość, pole, czas, masa), czasem będą to dane empiryczne. Symetrie i proporcje, a czasem także miary, dotyczyć będą przyrządów losujących, za pomocą których przeprowadza się doświadczenie δ. W przypadku każdego ziarnistego doświadczenia losowego wspomniana funkcja p_δ jest rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze Ω_δ jego wyników. Tak określona para $(\Omega_\delta, p_\delta)$ jest zatem ziarnistą przestrzenią probabilistyczną.*

Para $(\Omega_\delta, p_\delta)$, o której tu mowa, opisuje doświadczenie losowe na gruncie matematyki, bo za pomocą obiektów matematycznych (zbiór i funkcja) jest ona niejako „bankiem informacji" o tym doświadczeniu (Płocki, 2005b, s. 30).

Tworzenie modeli doświadczeń losowych jest fazą matematyzacji w procesie rozwiązywania wielu zagadnień, których rozwiązań poszukujemy na gruncie rachunku prawdopodobieństwa. Jest to przedmiotem zainteresowania dydaktyków probabilistyki. A. Płocki zwraca uwagę na fakt, że: *Użycie do przedstawienia wyniku doświadczenia losowego takich matematycznych obiektów, jak różnego typu funkcje, punkty prostej czy płaszczyzny, zbiory, bądź liczby a przede wszystkim sam proces kodowania środkami matematycznymi pewnych informacji nadają temu etapowi modelowania doświadczenia losowego charakter działalności matematycznej* (Płocki, 2005, s. 32).

W innej pracy tego samego autora opisany jest ważny etap procesu tworzenia modelu probabilistycznego realnej sytuacji, jakim jest *schemat symulacyjny. W trakcie uproszczeń, abstrahowania od nieistotnych z probabilistycznego stanowiska aspektów, wyjściowe zjawisko (doświadczenie) losowe jawi się jako schemat urnowy, bądź jako losowe rozmieszczenie kul w szufladach, czy elementów na ponumerowanych miejscach, a więc jako doświadczenie, które można realizować za pomocą monet, talii kart, czy kostek. Schematyzacja prowadzi do innego konkretnego doświadczenia o już wyraźnych cechach matematycznych. To konkretne doświadczenie nazywamy „schematem symulacyjnym"* (Płocki, 2005b, s. 255).

W tej samej pracy odnajdujemy też opis typowych przejść od doświadczenia losowego do jego modelu probabilistycznego. Są to:

– *Droga bezpośrednia a priori*; model powstaje na drodze prostej idealizacji przyrządu losującego.

– *Droga złożona a priori*; matematyczne aspekty stanowiące podstawę matematyzacji trzeba dopiero odkrywać.

– *Droga a priori via schemat symulacyjny*; dla wyjściowego doświadczenia konstruujemy sposób jego symulacji za pomocą przyrządów losujących o wyraźnych symetriach czy proporcjach.

– *Droga bezpośrednia a posteriori*; model probabilistyczny uzyskiwany na drodze estymacji.

– *Droga bezpośrednia a posteriori via schemat symulacyjny*; model probabilistyczny uzyskiwany na drodze estymacji, z etapem pośrednim, którym jest pewien schemat symulacyjny (por. Płocki, 2005b, s. 258-260).

Z przedstawionych rozważań wynika, że A. Płocki, w przeciwieństwie do J. Jakubowskiego i R. Sztencla, bardzo wyraźnie odróżnia przestrzeń probabilistyczną od modelu probabilistycznego doświadczenia losowego. Przestrzeń probabilistyczna jest tu pojęciem matematycznym i takim, które nie musi kojarzyć się z jakimś doświadczeniem losowym. Zgodnie z filozofią A. Płockiego (2005, s. 36): *Przestrzenie probabilistyczne przypominają gotowe „garnitury". Teoria probabilistyczna zajmuje się ich tworzeniem, tj. ich „szyciem", niezależnie od tego czy są one modelami jakichś doświadczeń losowych, czy nie. Dla konkretnego doświadczenia losowego będziemy z tej kolekcji wybierać „garnitur właściwy", „pasujący" do tego doświadczenia. Ale najczęściej będziemy dla konkretnego doświadczenia ten „pasujący garnitur" tworzyć, „szyć na miarę".*

A. Płocki wskazuje też na związek ziarnistej przestrzeni probabilistycznej z modelem pewnych szczególnych doświadczeń losowych. W pracy (2005a, s. 14-15) wskazuje na fakty, że:

– każdą skończoną przestrzeń probabilistyczną (Ω, p), w której funkcja p przyjmuje wartości wymierne, możemy interpretować jako model losowania kuli z pewnej urny;

– każdą skończoną przestrzeń probabilistyczną można interpretować jako model losowania sektora za pomocą pewnej ruletki.

Mamy tu więc do czynienia z utożsamieniem skończonej przestrzeni probabilistycznej z modelem losowania kuli z urny lub modelem losowania sektora ruletki. Utożsamienie, o którym mowa, jest uzasadniane następującą konstrukcją:

Załóżmy, że (Ω, p) jest przestrzenią probabilistyczną, że $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s\}$ i że wartości funkcji p są wymierne. Niech $p(\omega_j) = \frac{k_j}{m}$ dla $j = 1, 2, 3, \ldots, s$. Rozważmy urnę U, w której jest m kul i k_j kul ma etykietę w_j, gdzie $j = 1, 2, 3, \ldots, s$. Wynikiem losowania kuli z urny U jest etykieta wylosowanej kuli. Przestrzeń probabilistyczna (Ω, p) jest modelem takiego losowania.

Jeśli rozkład prawdopodobieństwa p na zbiorze $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s\}$ jest funkcją o wartościach rzeczywistych, to przestrzeń probabilistyczna (Ω, p) jest modelem losowania sektora za pomocą ruletki R, której tarcza podzielona jest na s sektorów z etykietami $\omega_1, \omega_2, \ldots, \ldots \omega_s$ przy czym

$$p(\omega_j) = \frac{\textit{miara kąta sektora z etykietą } w_j}{\textit{miara kąta pełnego}} \textit{ dla } j = 1, 2, \ldots, s.$$

Przestrzeń probabilistyczna może być konstruowana także dla konkretnego doświadczenia losowego jako jego model probabilistyczny. Na ten fakt zwraca uwagę A. Płocki (2005b, s. 35-36), pisząc, że: *Konstrukcja owej przestrzeni probabilistycznej stanowi **fazę matematyzacji** w procesie rozwiązywania pozamatematycznych* *problemów na gruncie rachunku prawdopodobieństwa. Jeśli chcemy, aby taka przestrzeń była użyteczna w przewidywaniu przyszłych zdarzeń lub przy formułowaniu właściwych wniosków na podstawie faktu, że niektóre zdarzenia już zaszły, to powinna być ona „zgodna" z tą sytuacją, powinna być więc modelem probabilistycznym.*

Z powyższym poglądem koresponduje zdanie P. Zeidlera (1994), który stwierdza, że: *model teoretyczny jest konfrontowany z wynikami pomiarów dokonywanych na obiekcie fizycznym, które można nazwać* ***światem doświadczenia****. Konfrontacja ta jest możliwa wówczas, gdy wyniki pomiarów są interpretowane na gruncie teorii, która zarazem nadaje sens empiryczny modelowi teoretycznemu. To właśnie funkcja kodu interpretacyjnego umożliwia przekład wypowiedzi o modelu na wypowiedzi o świecie doświadczenia. Określenie adekwatności empirycznej modelu lub chociażby stopnia jego empirycznego potwierdzenia, to stwierdzenie jego zgodności ze światem doświadczenia.*

Zgodność modelu probabilistycznego z realną sytuacją *w wielu przypadkach rozstrzygamy „a priori", gdy wynika ona z oczywistych symetrii, proporcji lub innych matematycznych cech przyrządu losującego. W innych sytuacjach tę zgodność weryfikujemy metodami statystycznymi* (Major, Nawolska, 1999, s. 38). Tej zgodności nie da się ani rozstrzygać, ani dekretować na gruncie matematyki.

Na koniec zwróćmy uwagę na fakt, że *konstrukcja modelu probabilistycznego jest ważnym etapem procesu stosowania pojęć i metod stochastycznych do rozwiązywania problemów pozamatematycznych, a więc jest integralną częścią procesu stosowania matematyki* (por. Major, Nawolska, 1999, s. 38).

Warto tu zaznaczyć, że prace A. Płockiego związane z popularyzacją matematyzacji w rachunku prawdopodobieństwa i statystyce matematycznej miały duży wpływ na rozwój dydaktyki stochastyki, a tym samym na sposób kształcenia nauczycieli matematyki i sposób prezentowania treści stochastycznych w podręcznikach szkolnych.

W historii probabilistyki rozwiązywanie problemów dotyczących pewnych doświadczeń losowych w oderwaniu od ich probabilistycznych modeli lub przy przyjęciu nieadekwatnych modeli było źródłem wielu paradoksów. Uzyskiwane wyniki liczbowe pozostawały w sprzeczności z wiedzą, na temat badanych doświadczeń, pozyskiwaną na drodze obserwacji. Można tu wspomnieć o znanym paradoksie kawalera de'Mere, paradoksie d'Alamberta, czy też o klasycznym problemie trzech komód (sekretarzyk Bertranda).

Umiejętność tworzenia modeli probabilistycznych jest szczególnie ważna, gdyż rozwiązywanie każdego zadania z rachunku prawdopodobieństwa, w którym jest mowa o pewnym doświadczeniu losowym, musi rozpoczynać się od konstrukcji probabilistycznego modelu tego doświadczenia. Konstrukcję modelu probabilistycznego doświadczenia losowego można traktować jako twórczą aktywność matematyczną.

Literatura

Bartkiewicz, M.: 1994, Próby zastosowania analiz modelowych w historii, w: T. Grabińska, M. Zabierowski (red.), *Model i interpretacja, seria: Cosmos-Logos*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław.

Barton, R. F.: 1974, *Wprowadzenie do symulacji i gier*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa.

Behnke, H., Hammersley, J. M., Krygowska, A., Pollak, H.: 1968, Panel discussion, *Educational Studies in Mathematics* **1**, 61-79.

Białynicki-Birula, I., Białynicka-Birula, I.: 2002, *Modelowanie rzeczywistości. Od gry w życie Conwaya przez żuka Mandelbrota do maszyny Turinga*, Prószyński i Spółka, Warszawa.

Choquet, G.: 1963, Analiza i Bourbaki, *Wiadomości Matematyczne* **VII**, 99-120.

Encyklopedia popularna PWN: 1980, PWN, Warszawa.

Encyklopedia szkolna PWN: 2006, PWN, Warszawa.

Filip, J., Rams, T.: 2000, *Dziecko w świecie matematyki*, Oficyna Wydawnicza „Impuls", Kraków.

Freudenthal, H.: 1977, *Mathematik als Pädagogische Aufgabe*, Ernest Klett Verlag, Stuttgart.

Grabińska, T.: 1994, O modelach zjawisk i rzeczy, w: T. Grabińska, M. Zabierowski (red.), *Model i interpretacja, seria: Cosmos-Logos*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław.

Gårding, L.: 1993, *Spotkanie z matematyką*, PWN, Warszawa.

Heller, M.: 2006a, *Filozofia i wszechświat. Wybór pism*, UNIVERSITAS, Kraków.

Heller, M.: 2006b, Geneza prawdopodobieństwa, *Zagadnienia Filozoficzne w Nauce* **XXXVIII**, 61-74.

Hooke, R., Shaffer, D.: 1969, *Modele matematyczne a rzeczywistość*, PWN, Warszawa.

Jakubowski, J., Sztencel, R.: 2002, *Rachunek prawdopodobieństwa dla (prawie) każdego*, SCRIPT, Warszawa.

Jaroń, J.: 1970, Rzeczywistość, model i matematyka, *Matematyka* **4**, 254-255.

Krygowska, Z.: 1977, *Zarys dydaktyki matematyki, cz. 1*, WSiP, Warszawa.

Krygowska, Z.: 1981, *Koncepcje powszechnego matematycznego kształcenia w reformach programów szkolnych lat 1960-1980*, Wydawnictwo Naukowe WSP w Krakowie, Kraków.

Krygowska, Z.: 1986, Elementy aktywności matematycznej, które powinny odgrywać znaczącą rolę w matematyce dla wszystkich, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **6**, 25-41.

Krzyśko, M.: 2000, *Wykłady z teorii prawdopodobieństwa*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa.

Kubik, L. T.: 1980, *Rachunek prawdopodobieństwa. Podręcznik dla kierunków nauczycielskich studiów matematycznych*, PWN, Warszawa.

Kucharczyk, S.: 1998, Wokół zadania matematycznego, w: B. Rabijewska (red.), *Materiały do zajęć z dydaktyki matematyki*, Wydawnictwo Uniwersytetu Wrocławskiego, Wrocław, 25-54.

Major, M., Nawolska, B.: 1999, *Matematyzacja, dedukcja, rachunki i interpretacja w zadaniach stochastycznych*, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków.

Opial, Z.: 1979, Matematyzacja działalności ludzkiej, *Wiadomości Matematyczne* **XXI**, 138-148.

Płocki, A.: 2004, *Rachunek prawdopodobieństwa w zadaniach i problemach*, Wydawnictwo dla Szkoły, Wilkowice.

Płocki, A.: 2005a, *Dydaktyka stochastyki. Rachunek prawdopodobieństwa, kombinatoryka i statystyka matematyczna jako nowy element kształcenia matematycznego*, Wydawnictwo Naukowe NOVUM, Płock.

Płocki, A.: 2005b, *Stochastyka 1. Rachunek prawdopodobieństwa, kombinatoryka i statystyka matematyczna jako matematyka „in statu nascendi"*, Wydawnictwo Naukowe NOVUM, Płock.

Polya, G.: 1993, *Jak to rozwiązać?*, PWN, Warszawa.

Popularna encyklopedia powszechna: 1999, Wydawnictwo Pinex, Warszawa.

Semadeni, Z.: 2003, Spłaszczanie się hierarchii pojęć, horyzontalne i wertykalne składowe matematyzacji i wieloznaczność terminu „model", *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **25**, 111-150.

Słownik języka polskiego, tom drugi: 1982, PWN, Warszawa.

Steiner, H. G.: 1986, Proces matematyzacji i społeczny wymiar matematyki – rozważania epistemologiczne i dydaktyczne, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **6**, 175-238.

Tempczyk, K.: 1994, Modelowanie w matematyce, w: T. Grabińska, M. Zabierowski (red.), *Model i interpretacja, seria: Cosmos-Logos*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław.

Treliński, G.: 1982, *Stosowanie matematyki jako problem dydaktyki matematyki*, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków.

Treliński, G.: 1996, *Matematyzacja w nauczaniu*, WOM, Kielce.

Turnau, S.: 1985, Zadania tekstowe i nauczanie stosowania pojęć matematycznych, w: Z. Semadeni (red.), *Nauczanie początkowe matematyki, Podręcznik dla nauczyciela, tom 3*, Wydawnictwa Szkole i Pedagogiczne, Warszawa.

Turnau, S.: 1990, *Wykłady o nauczaniu matematyki*, PWN, Warszawa.

Wheeler, D.: 1986, Matematyzacja jako podstawowa orientacja w nauczaniu „matematyki dla wszystkich", *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **6**, 103-112.

Zeidler, P.: 1994, O pewnych trudnościach realistycznej interpretacji modeli teoretycznych, w: T. Grabińska, M. Zabierowski (red.), *Model i interpretacja, seria: Cosmos-Logos*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław.

Zubrzycki, S.: 1970, *Wykłady z rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej*, PWN, Warszawa.

Instytut Matematyki
Uniwersytet Pedagogiczny
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
e-mail: mmajor@up.krakow.pl

Instytut Pedagogiki Przedszkolnej i Szkolnej
Uniwersytet Pedagogiczny
ul. Ingardena 4
PL-30-060 Kraków
e-mail: bnawol@vp.pl