FOLIA 82

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia III (2010)

Zbigniew Powązka

Przyczynek do badań nad przygotowaniem absolwentów szkół ponadgimnazjalnych do studiowania matematyki na Uniwersytecie Pedagogicznym w Krakowie*

Abstract. In this paper we describe mathematical preparation of students commencing mathematical studies at the Pedagogical University in the academic year 2005/06. We discuss interests and motivations to study (paragraph 3). The research also focuses on the knowledge students believe to have (paragraph 4). Their knowledge is verified while solving some standard mathematical tasks by students.

Wstęp

W latach 2003/04 oraz 2006/07 podczas zajęć z analizy matematycznej na roku pierwszym na kierunku matematyka na ówczesnej Akademii Pedagogicznej, a na obecnym Uniwersytecie Pedagogicznym w Krakowie przeprowadzone były badania dotyczące przygotowania studentów do studiowania matematyki.

Wybór osób zaczynających studia w latach 2003/04 i 2006/07 do przeprowadzenia badania nie był przypadkowy. W roku 2003 przyszli na uczelnię absolwenci szkół średnich jeszcze z czteroletniego liceum, które zostało zreformowane. Natomiast w roku 2006 poddani badaniom byli absolwenci, którzy ukończyli już trzyletnią szkołę ponadgimnazjalną.

Tematyka ta została podjęta z uwagi na fakt, że po pierwsze analiza matematyczna jest jednym z podstawowych przedmiotów na wszystkich kierunkach studiów, na których wykładana jest matematyka. Po drugie zmieniające się programy nauczania tego przedmiotu w szkołach ponadgimnazjalnych oraz zmniejszający się zakres treści matematycznych w standardach maturalnych, przede wszystkim na poziomie podstawowym, ale także na rozszerzonym, powodują, że przyszli studenci mają coraz mniejsze umiejętności matematyczne. Stawia to nowe wyzwania wykładowcom analizy matematycznej, jak również innych działów matematyki, którzy z jednej strony muszą uzupełniać treści znane dotychczas młodzieży ze szkoły średniej, a z drugiej powinni zrealizować niemały program wykładu.

Dlatego w prowadzonych badaniach szukano odpowiedzi na następujące pytania:

---

*A contribution to the study on preparation of the graduates of upper secondary schools for mathematical studies at the Pedagogical University in Cracow

1) Czy absolwenci szkół ponadgimnazjalnych, podejmujący studia matematyczne na naszej uczelni, mają wystarczające motywacje i zainteresowania przedmiotem nauczania?
2) Czy dysponują niezbędnymi do studiowania wiadomościami z tego przedmiotu, wyniesionymi ze szkoły ponadgimnazjalnej?
3) Czy posiadają niezbędne umiejętności, takie jak umiejętność czytania ze zrozumieniem tekstu zadania, umiejętność logicznego myślenia, stosowania definicji i twierdzeń do rozwiązywania zadań i problemów, posługiwania się rysunkiem oraz symbolami literowymi?

Uzyskanie choćby częściowych odpowiedzi na powyższe pytania badawcze może być pożyteczne przy ocenie wyniesionego ze szkoły ponadgimnazjalnej przygotowania do studiowania matematyki. Informacje te są również pomocne nauczycielom akademickim do prowadzenia skutecznej działalności dydaktycznej.

Opis badań, wnioski i hipotezy badawcze z roku 2003/04 zostały opublikowane w pracy (Powązka, 2006). W obecnej pracy przedstawiono wyniki badań z roku akademickiego 2006/07.

Badania tego typu prowadzone były w różnych krajach. Ich autorzy podejmowali próby poszukiwania efektywnych sposobów wprowadzania studentów w zagadnienia matematyki wyższej, a w szczególności w tematykę analizy matematycznej. Odnotujmy w tym miejscu prace naukowców amerykańskich (np.: Burton, 1977; Mahavier, 1999; Parker, 1992), angielskich (np.: Even, 1990; Even, 1993; Sfard, 1991; Tall, Vinner, 1981), słowackich (np.: Fulier, 2001; Fulier, Gunčaga, 2006; Gunčaga, 2001; Gunčaga, 2008) oraz wyniki wspólnych badań naukowców słowackich i czeskich (Gunčaga, Fulier, Eisenmann, 2008).

1. Omówienie narzędzi badawczych

W tej części pracy zaprezentujemy narzędzia badawcze zastosowane do obserwacji wiedzy deklaratywnej, jak również pewnych podstawowych umiejętności matematycznych osób biorących udział w badaniach.

Narzędziami badawczymi były: obserwacja naturalna postaw studentów w czasie zajęć, obserwacja indywidualna podczas rozmów z wybranymi studentami oraz analiza wytworów ich działania wykonana na podstawie prac pisemnych w różnych momentach procesu dydaktycznego i ankiety sondażowej dotyczącej ważnych, moim zdaniem, zagadnień mających wpływ na proces kształtowania się w świadomości studentów pojęć matematycznych. Należą do nich:

– przygotowanie do studiowania matematyki wyniesione ze szkoły ponadgimnazjalnej,
– zainteresowanie matematyką i motywacje do jej studiowania,
– trudności w rozumieniu podstawowych pojęć matematycznych,
– trudności w posługiwaniu się językiem matematycznym, a w szczególności symbolami literowymi.

Pełny tekst zastosowanej ankiety znajduje się w Aneksie na końcu pracy. Składała się z 10 poleceń. Polecenia: 1, 3, 5 ankiety miały na celu ustalenie, z jakich szkół przychodzili kandydaci na pierwszy rok studiów matematycznych, jakie były ich motywacje wyboru studiów na naszej uczelni oraz które z treści z analizy matematycznej, znanych im ze szkoły ponadgimnazjalnej, zaciekawiły ich najbardziej.

Polecenia: 2 i 4 dotyczyły wiedzy deklaratywnej studentów.

Sprawdzeniu umiejętności zredagowania przez uczestniczących w badaniach znanych im definicji i twierdzeń służyły polecenia: 6 i 7. Weryfikacja podstawowych umiejętności rachunkowych związanych z rozwiązywaniem nierówności wymiernych, jak też równań i nierówności z wartością bezwzględną oraz posługiwania się symboliką literową była celem poleceń: 7, 8, 10.

Ważną umiejętnością jest interpretacja geometryczna podanych informacji zapisanych językiem słów i symboli matematycznych. Pytanie 9 ankiety dotyczyło badania tej umiejętności.

2. Uwagi o badanych studentach, ich motywacjach do studiowania i zainteresowaniach treściami analizy matematycznej

Zauważmy najpierw, że do naszej uczelni rekrutowana jest młodzież pochodząca przede wszystkim z województwa małopolskiego i województw sąsiednich. W roku 2006 rekrutowani byli kandydaci na dwie specjalności: matematykę z informatyką i matematykę z rewalidacją. Na pierwszy rok studiów przyjęto łącznie 137 studentów, przy czym 96% tej liczby to absolwenci liceów ogólnokształcących lub profilowanych.

W badaniach ankietowych uczestniczyło 119 osób, które dla celów analizy wyników zostały podzielone na cztery grupy. Do grupy pierwszej (Gr. I) zaliczono 37 absolwentów liceów ogólnokształcących z klas matematycznych lub matematyczno-fizycznych. Grupę drugą (Gr. II) utworzono z 56 osób z klas matematyczno-informatycznych. Grupę trzecią (Gr. III) stanowiło 15 absolwentów z klas o profilu ogólnym, a grupę czwartą (Gr. IV) 11 maturzystów z techników, najczęściej ekonomicznych, oraz z liceów z klas o profilu humanistycznym. Odpowiedzi studentów dotyczące motywacji studiowania matematyki na naszej uczelni można podzielić na następujące grupy:

a) **Sama matematyka.** Zaliczam do nich zainteresowania wywołane różnymi problemami matematycznymi, jak również zaskakującymi i interesującymi sposobami ich rozwiązywania oraz fascynację logiczną budową przedmiotu. Część respondentów deklarowała zainteresowanie rozwiązywaniem zadań, zwłaszcza takich, które sprawiały im trudność.

b) **Nauczanie matematyki na poziomie szkolnym.** Wymienić tu należy stwierdzenie studentów (14 osób), że matematyka nie stwarzała im trudności lub umieli ją lepiej niż inne przedmioty. Odnotujmy także takie stwierdzenie: *Chcę studiować matematykę, ponieważ dobrze wypadła mi matura z tego przedmiotu na poziomie podstawowym.* Analiza odpowiedzi ankiety pokazała aktualność stwierdzenia Z. Krygowskiej (1977, s. 3), że *uczeń tworzy sobie* *taką koncepcję matematyki, jaka mu się ukazuje przez pryzmat rozwiązywanych przez niego zadań.* Ankietowani (32 osoby) deklarowali, że bardzo lubią matematykę, ale nie zawsze uzasadniali, z jakich powodów. Pojawiło się również wyjaśnienie w pewnym sensie negatywne: *nie lubię innych przedmiotów, lubię matematykę.*

c) **Plany odnośnie do przyszłej działalności zawodowej.** Wśród ankietowanych było 26 osób, które wybrały studia na uczelni pedagogicznej, gdyż chcą w przyszłości uczyć matematyki. Powoływali się niekiedy na wzorce swych nauczycieli lub rodziców. Wśród nich znalazły się osoby, które przyznawały się do pomocy młodszym od siebie w uczeniu się matematyki. Byli jednak i tacy, którzy wiązali z wybranym kierunkiem studiów nadzieję na dobrą pracę poza szkołą.

d) **Osobowość studenta.** Wymienimy tu kilka stwierdzeń świadczących o pewnej dojrzałości ich autorów. Zaliczam do nich między innymi deklarowaną chęć rozwijania swoich umiejętności matematycznych, chęć sprawdzenia własnych możliwości i wiadomości oraz stwierdzenie o ścisłości własnego umysłu. Jeden z respondentów napisał: *Od najmłodszych lat byłem miłośnikiem matematyki. Nie sprawiała mi ona większych problemów. Zawsze chciałem poszerzyć zakres mojej wiedzy i doświadczenie.* Obok tych wypowiedzi znalazły się i takie, które deklarowały realizację marzeń o studiowaniu matematyki, jak również pewnego buntu w stosunku do podstawowej umiejętności, jaką jest czytanie. Student napisał: *nie lubię czytać i uczyć się z książek, a w matematyce tego nie trzeba robić.* Odnotujmy też wypowiedź respondentki, świadczącą o niepewności o losy jej studiów: *Kierowałam się tym, że lubiłam matematykę w szkole średniej, ale nie wiem jak to będzie na studiach, wydaje mi się, że nie będzie tak kolorowo.*

Pedagogika uczy, że wiodącą rolę w rozwijaniu uzdolnień człowieka odgrywają zainteresowania (Szewczuk, 1993):

> *O tym, jakie uzdolnienia rozwiną się u jednostki, decyduje całokształt wpływów jej otoczenia społecznego. Wiodącą rolę odgrywają tutaj zainteresowania. One koncentrują jej aktywność na określonych kierunkach działalności, angażują jej osobowość, a w procesie samej działalności rozwijają się jej zdolności ogólne związane ściśle z treścią działalności i poprzez to konstytuujące jej uzdolnienia.*

Wynika stąd zasadność pytania o zainteresowania studentów. W odpowiedzi na to pytanie ankietowani podali najbardziej interesujące ich treści omawianego przedmiotu (tabela 1).

Analizując dane zamieszczone w tabeli 1 należy zauważyć, że 51% absolwentów z klas matematyczno-fizycznych i 41% absolwentow z klas matematyczno-informatycznych do zagadnień, które najbardziej ich zainteresowały, zaliczyło pochodną funkcji (19 osób z 37 i 23 osoby z 56, poz. 1 z tej tabeli). Drugą grupę zagadnień budzących zainteresowania tych studentów stanowiły: pojęcie funkcji, funkcja logarytmiczna, wartość bezwzględna, funkcja wykładnicza i ciągi liczbowe (poz. 2, 3, 5, 6, 7 w omawianej tabeli). W pierwszej grupie badanych (Gr. 1) każdy z tych tematów zainteresował średnio 23% badanych, a w grupie drugiej (Gr. II) porównywalnie – 22% respondentów. Wszystkie te zagadnienia, z wyjątkiem ciągłości funkcji, należą do kanonu zadań maturalnych. Są to interesujące zagadnienia matematyczne związane z pewnymi algorytmami. Zachodzi pytanie, co zadecydowało o wyborze tych tematów: pojęcia czy rachunki? W wyniku naturalnej obserwacji badanych podczas zajęć można sformułować hipotezę, że zagadnienia wymagające operowania pojęciami w ciekawszych rozumowaniach nie cieszyły się, jak widać, większym zainteresowaniem ankietowanych studentów. Fakt ten potwierdzają, obok danych z tabeli 1, również dalsze rozważania w tej pracy oraz wyniki innych badań. Pokazują one, że posługiwanie się podstawowymi pojęciami analizy matematycznej sprawiało studentom spore trudności (Major, Powązka, 2006; Powązka, 2007a; Powązka, 2007b; Powązka, 2009).

Tabela 1. Zagadnienia matematyczne interesujące studentów

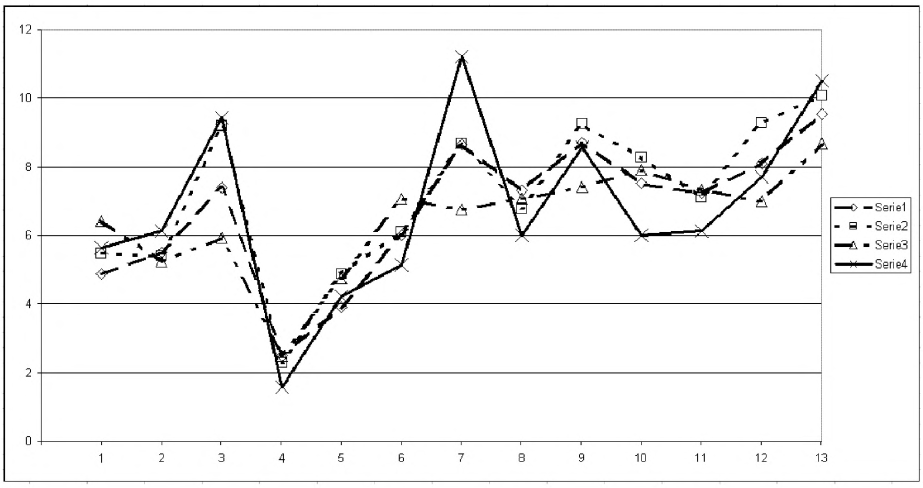
Lp.	Zagadnienie	Gr. I	Gr. II	Gr. III	Gr. IV
1	Pochodna funkcji	19	23	1	4
2	Funkcja	10	16	4	4
3	Funkcja logarytmiczna	10	12	4	2
4	Ciągłość funkcji	10	6	2	5
5	Wartość bezwzględna	9	12	2	2
6	Ciągi liczbowe	7	11	0	0
7	Funkcja wykładnicza	7	12	4	2
8	Granica funkcji	5	6	0	2
9	Badanie funkcji	2	3	2	0
10	Indukcja	2	13	1	1
11	Funkcja odwrotna	2	0	0	0
12	Różnowartościowość	2	2	3	0
13	Zbiory ograniczone i nieograniczone	1	3	0	0
14	Funkcja kwadratowa	1	1	0	0
15	Obraz zbioru	0	1	0	0

3. Omówienie wyników badań wiedzy deklaratywnej studentów z analizy matematycznej na początku ich studiów

W tej części pracy omówimy odpowiedzi studentów na pytania 2 i 4 ankiety sondażowej.

W podstawie programowej obowiązującej w latach 2004-2006 zmniejszono zakres wielu działów matematyki, które dotychczas były opracowywane w szkole średniej. Wiadomo, że w niektórych szkołach, zwłaszcza w klasach matematycznych, obowiązywały programy autorskie. Z tego powodu zapytano studentów o preferencje wybranych zagadnień lub działów z matematyki, nazwanej tu umownie szkolną, których znajomość jest potrzebna w studiowaniu różnych przedmiotów matematycznych. Uzyskane wyniki przedstawia rysunek 1.

Na tym rysunku na osi poziomej oznaczono liczbami od 1 do 13 nazwy zagadnień z tabeli 6 (zob. Aneks). Na osi pionowej zaznaczono średnią liczbę punktów, jakie przypisywali studenci poszczególnym działom z zachowaniem zasady, że im mniejsza liczba, tym bardziej ulubione jest zagadnienie przez ankietowanych.



Rysunek 1. Ulubione zagadnienia matematyki.

W układzie współrzędnych na rysunku 1 zaznaczono cztery wykresy prezentujące odpowiedzi studentów, którzy zdawali maturę w roku 2006 odpowiednio w każdej z czterech grup: absolwenci z klas matematycznych lub matematyczno-fizycznych (seria 1), z klas o profilu matematyczno-informatycznym (seria 2), z klas o profilu ogólnym (seria 3), z techników ekonomicznych lub z klas licealnych o profilu humanistycznym (seria 4).

Okazało się, że studenci w każdej grupie za jednakowo lubiane uznali zagadnienia o numerach: 4, 5, 6, 9. Zauważmy bowiem, że wykresy na rysunku 1 w przedziale $[4, 6]$ oraz w punkcie o pierwszej współrzędnej równej 9 niewiele różnią się od siebie.

Nieco większe różnice w preferencjach poszczególnych grup badanych obserwujemy w pozycjach: 1, 2, 10, 11, 12, 13. Natomiast największe rozbieżności pojawiły się przy zagadnieniach 3 i 7 z tej tabeli. Spróbujmy zastanowić się nad przyczynami takiej sytuacji.

Zagadnienia o numerach: 4, 5, 6, 7, 8 i 9, to typowe działy rachunkowe związane z ćwiczeniem umiejętności stosowania odpowiednich algorytmów. Najbardziej ulubione przez wszystkich respondentów były równania oraz nierówności pierwszego lub drugiego stopnia z jedną niewiadomą, a następnie równania i nierówności z wartością bezwzględną. Wyniki uzyskane w poszczególnych grupach są nieco zróżnicowane, ale jest to zrozumiałe, gdyż w różnych typach klas materiał ten mógł być opracowywany na różnym poziomie. Zapewne ankietowani mieli tu na myśli proste zadania bez dyskutowania równań i nierówności z parametrem. Jak wskazują bowiem badania prowadzone w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Pedagogicznego w Krakowie (Czaplińska, 2003; Major, 2006a; Major, 2006b), z tego typu równaniami ci sami respondenci mieli duże trudności.

Odnotujmy również i to, że widoczna na rysunku 1 wyraźna różnica w temacie 7 – równań i nierówności wykładniczych i logarytmicznych dotyczy przede wszystkim młodzieży z klas humanistycznych lub techników, która tych treści nie miała na lekcjach i wybierając się na studia matematyczne, zapewne opracowywała je samodzielnie. Natomiast absolwenci z klas o profilu ogólnym poznawali jedynie proste przykłady tych równań oraz nierówności i zapewne dlatego uznali ten materiał za w miarę nietrudny.

Liczbą 3 oznaczono na omawianym rysunku badanie funkcji z wykorzystaniem rachunku różniczkowego. Materiał ten pozostał jedynie w klasach matematycznych i zapoznają się z nim osoby, które pragną zdawać maturę z matematyki na poziomie rozszerzonym. Nic też dziwnego, że absolwenci klas o profilu humanistycznym lub absolwenci techników ekonomicznych nie preferowali tych treści. Pewnym zaskoczeniem jest fakt, że uznali je za trudne absolwenci klas matematyczno-informatycznych, którzy do obliczania pochodnych i badania wykresów funkcji powinni byli używać komputera. Być może dali w ten sposób do zrozumienia, że gdyby musieli coś policzyć bez tego narzędzia, to mieliby z tym trudności.

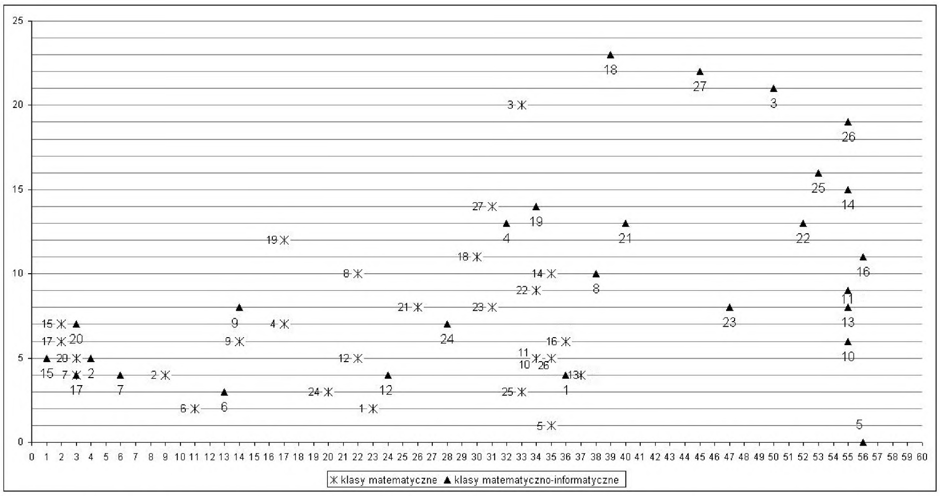
Z rysunku 1 wynika, że z wyjątkiem tematu 3, nie ma istotnych różnic w preferencjach badanych zagadnień między absolwentami klas matematycznych lub matematyczno-fizycznych a absolwentami klas o profilu matematyczno-informatycznym (łamane obrazujące wyniki serii 1 i 2 w zasadzie nie odchylają się od siebie).

W omawianych badaniach studenci zgodnie uznali za materiał trudny zbieżność ciągów, geometrię analityczną, planimetrię, stereometrię i rachunek prawdopodobieństwa.

Należy odnotować, że w analizowanych wynikach badań wszystkie grupy zgodnie typowały rachunek prawdopodobieństwa za najmniej lubiany. Jest tak zapewne dlatego, że ankietowani studenci nie dostrzegali specyfiki pojęć probabilistycznych i bogactwa zawartej w nich matematyki (Major, 2006c; Major, 2007).

Odpowiadając w ankiecie na pytanie 4, studenci ujawnili, które z pojęć matematycznych występujących w wykładzie analizy były im już znane ze szkoły ponadgimnazjalnej oraz które pojęcia sprawiły im trudności. W celu uzyskania tych informacji przedstawiono uczestnikom badań listę 27 zagadnień (tabela 7 w pytaniu 4) wchodzących w tematykę wykładu. Badani mieli zaznaczyć krzyżykiem w trzeciej kolumnie tej tabeli pojęcia znane im ze szkoły ponadgimnazjalnej, a w czwartej kolumnie tej tabeli w taki sam sposób te, które sprawiły im trudność. Zbierając wyniki ze wszystkich ankiet, każdemu z haseł od 1 do 27 przyporządkowano parę liczb. Pierwsza z nich oznacza liczbę osób z badanej grupy, które poznały to pojęcie w szkole ponadgimnazjalnej, a druga – liczbę osób z tej grupy, która miała trudności z tym hasłem. Otrzymane w ten sposób wyniki umieszczone w układzie współrzędnych utworzyły dla każdej z czterech grup badanych swoistą mapę wiadomości z analizy matematycznej. Na osi poziomej tego układu zaznaczono dane dotyczące znajomości pojęcia w rozważanej grupie badanych, a na osi pionowej dane o trudnościach, jakie to pojęcie sprawiło badanym.

Poniżej prezentujemy mapę wiadomości z analizy matematycznej absolwentów klas matematycznych lub matematyczno-fizycznych i absolwentów klas matematyczno-informatycznych z roku 2006/07 biorących udział w badaniach. W celu porównania wyników obie mapy umieszczono w jednym układzie współrzędnych, przy czym odpowiedzi absolwentów z grupy I oznaczają liczby zaznaczone z lewej strony gwiazdek, a odpowiedzi absolwentów z grupy II liczby znajdujące się pod czarnymi trójkącikami.



Rysunek 2. Mapa wiadomości z analizy matematycznej absolwentów klas matematycznych i matematyczno-informatycznych.

Z programów nauczania w różnych typach klas szkoły ponadgimnazjalnej wynika, że przygotowanie do studiowania analizy matematycznej absolwentów klas o profilu ogólnym, humanistycznym lub technikum jest dużo mniejsze od absolwentów klas matematycznych. Z uwagi na zbyt małą liczbę respondentów z tych dwu grup nie będziemy analizować otrzymanych wyników badań w tych grupach.

Absolwenci klas matematycznych i matematyczno-fizycznych wskazali na 12 tematów z przedstawionej w pytaniu 4 listy, które były im znane ze szkoły ponadgimnazjalnej. Były to zagadnienia: 3, 5, 10, 11, 14, 16, 18, 22, 23, 25, 26, 27 (tabela 7). Należy zauważyć, że zagadnień tych jest mniej niż pojawiło się w podobnych badaniach z roku 2003/04 (Powązka, 2006). Nie jest to zaskoczeniem, ponieważ zmienione zostały standardy nauczania matematyki, co w konsekwencji spowodowało zmniejszenie liczby pojęć i twierdzeń z analizy matematycznej omawianych w szkołach ponadgimnazjalnych.

Zmniejszyła się też, w porównaniu z rokiem 2003/04, liczba tematów uznanych przez badanych za łatwe. W roku 2006/07 były nimi tematy: 1, 5, 6, 24 (tabela 7). Zauważmy, że wśród tych tematów, które nie sprawiały badanym większych trudności znalazły się takie, którym towarzyszą nieskomplikowane procedury algorytmiczne. Prawdopodobnie właśnie z tego powodu były postrzegane jako nietrudne.

Do treści trudnych ankietowani studenci zaliczyli zagadnienia: 2, 3, 6, 15, 17, 19, 20, 27 (tabela 7). Wszystkie te hasła nie znajdują się już w programie szkoły ponadgimnazjalnej, respondenci mogli je zatem spotkać jedynie na zajęciach kółek matematycznych lub podczas samodzielnej lektury.

Bardzo podobna jest mapa wiadomości z analizy matematycznej absolwentów klas matematyczno-informatycznych (czarne trójkąciki na rysunku 2) do mapy tych wiadomości dla absolwentów klas matematycznych i matematyczno-fizycznych (gwiazdki na rysunku 2). Zwraca uwagę fakt, że absolwenci tych klas zgodnie uznali twierdzenie o indukcji jako znane, ale sprawiające trudności. Fakt ten nie dziwi z uwagi na złożoną strukturę logiczną tego twierdzenia.

Ważne dla analizy matematycznej są pojęcia wartości bezwzględnej i funkcji wykładniczej (11, 13, tabela 7). W badaniach z roku 2003/04 studenci uznali te pojęcia za łatwe (Powązka, 2006), choć nie potwierdzają tej opinii badania J. Major (2006a; 2006b) oraz J. Major i Z. Powązki (2006) dotyczące wartości bezwzględnej. Natomiast ankietowani w roku 2006/07 zaliczyli te pojęcia do średnio trudnych.

Odnotujmy na koniec tej części pracy, że podobnie jak w odpowiedziach na pytanie 2, absolwenci klas matematyczno-informatycznych, odpowiadając na pytanie 4, zaliczyli badanie funkcji (zagadnienie 27, tabela 7) do trudnych zagadnień.

4. Analiza wyników badań dotyczących znajomości wybranych pojęć i twierdzeń matematycznych

W omawianej ankiecie znalazło się 5 pytań badających stopień opanowania wiedzy matematycznej wyniesionej ze szkoły ponadgimnazjalnej. Były to pytania 6-10 (zob. Aneks). Dotyczyły one znajomości definicji oraz twierdzeń, umiejętności zapisu symbolicznego prostych wyrażeń wraz z interpretacją geometryczną ich treści i rozwiązania kilku równań i nierówności. W tej części pracy przedstawimy uzyskane wyniki.

Jednym z ważnych aspektów matematycznej aktywności jest definiowanie, interpretowanie i racjonalne stosowanie definicji (Krygowska, 1986). Badania J. Major i M. Majora (2009) ujawniły, że studenci nie zawsze rozumieją budowę i znaczenie definicji pojęcia matematycznego. Z tego powodu zapewne powstają różne nieporozumienia i błędy. Charakterystyka rodzajów błędów popełnianych przy definiowaniu lub stosowaniu definicji znajduje się w książce H. Siwek (2005, s. 82-85).

W pytaniu 6 ankiety poproszono studentów o podanie definicji trzech pojęć, które sprawiły im najmniej trudności w dotychczasowej edukacji. Na 119 badanych 41 osób nie udzieliło odpowiedzi na to pytanie. W tej liczbie są też takie odpowiedzi, w których podano tylko same nazwy pojęć bez stosownych określeń. Pozostali respondenci nie zawsze podawali określenia trzech pojęć. Zaskoczeniem były następujące pojedyncze wypowiedzi absolwentów klas matematycznych lub matematyczno-informatycznych:

- *Nie uczyliśmy się definicji na pamięć (2 osoby).*
- *Nie pamiętam definicji (3 osoby).*

Prezentowane tu wypowiedzi są wprawdzie w mniejszości, ale z uwagi na fakt, że prawie połowa ankietowanych (41 osób) nie odpowiedziała na to pytanie, ujawniają sposób postrzegania przez uczniów matematyki w szkole ponadgimnazjalnej. Można zaryzykować stwierdzenie, że ograniczają oni swoją znajomość matematyki do umiejętności rozwiązywania pewnych typów zadań, a nie interesuje ich głębsze rozumienie jej treści. Być może na takie uczenie się ma wpływ forma sprawdzania wiadomości na egzaminach po gimnazjum i maturze, w których o sukcesie decyduje w dużej mierze trening w rozwiązywaniu wielu podobnych zestawów zadań. Analiza otrzymanych odpowiedzi pozwoliła na stworzenie zbioru pojęć, których definicje, zdaniem studentów, nie sprawiły im większych trudności. Dane te zamieszczono w poniższej tabeli.

Tabela 2. Pojęcia zaproponowane przez studentów

Lp.	Nazwa pojęcia	Gr. I	Gr. II	Gr. III	Gr. IV	Razem
1	Wartość bezwzględna	11	14	3	4	32
2	Funkcja	11	22	2	9	44
3	Różnowartościowość	8	11	3	3	25
4	Funkcja wykładnicza	1	2	0	1	4
5	Funkcja logarytmiczna	4	0	0	1	5
6	Funkcja odwrotna	3	2	0	0	5
7	Ciąg arytmetyczny	2	2	0	0	4
8	Ciąg geometryczny	2	2	0	0	4
9	Ciąg liczbowy	0	2	1	0	3
10	Pochodna funkcji	1	0	0	1	2
11	Zbiory ograniczone	0	1	0	1	2

Z danych podanych w tabeli 2 wynika, że absolwenci klas matematycznych i matematyczno-informatycznych (grupy I i II) podali więcej pojęć niż badani z grup III i IV. Fakt ten mógłby napawać optymizmem, gdyby wszystkie podane definicje były poprawne. Tak się jednak nie stało. Uzyskane odpowiedzi można podzielić na kilka grup.

Do pierwszej grupy zaliczamy pojęcia, których definicje zostały napisane poprawnie. W tej grupie znalazła się tylko większość sformułowań pojęcia funkcji, wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej lub różnowartościowości funkcji. Warto odnotować, że studenci podali dwie różne definicje wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej: wielonormową i metryczną (odległość liczby rzeczywistej od 0).

Do grupy drugiej zaliczamy sformułowania z brakami formalnymi (brak niezbędnych kwantyfikatorów, spójników logicznych, nazw zbiorów, na których określona jest lub przyjmuje wartości funkcja, brak założeń). W tej grupie znalazły się niektóre definicje pojęć: różnowartościowości funkcji, ciągu arytmetycznego lub geometrycznego, funkcji logarytmicznej, logarytmu. Oto przykład określenia logarytmu:

- $\log_a b = c$ *można zapisać, że to jest* $b = a^c$.

W trzeciej grupie znalazły się definicje za wąskie, np. definicja wartości bezwzględnej jedynie dla liczb dodatnich lub jedynie dla liczb ujemnych. Przykładem takiej definicji jest również następujące określenie pojęcia funkcji:

- *Funkcja – przyporządkowanie wartościom ze zbioru A tylko jednego argumentu ze zbioru B.*

Wypowiedź ta określa funkcję stałą, a nie dowolną funkcję. Ponadto pomylone zostały nazwy elementów dziedziny i zbioru wartości. Błąd w tej wypowiedzi polega na złej kolejności kwantyfikatorów dużego i małego.

Do grupy czwartej zaliczamy tzw. definicje za szerokie. Oto przykłady takich wypowiedzi:

- *Funkcja to przyporządkowanie dla jednego argumentu dokładnie jednej wartości.*

- *Różnowartościowość funkcji występuje wtedy, gdy jednemu argumentowi przyporządkowana jest tylko jedna wartość i na odwrót.*

W obu cytowanych stwierdzeniach postuluje się zachodzenie stosownej własności przyporządkowania tylko w jednym punkcie, a nie w całej dziedzinie.

Grupę piątą stanowią wypowiedzi, które nie są definicjami pojęcia, ale zawierają pewne elementy jego obrazu (Bugajska-Jaszczołt, Treliński, 2002; Major, 2006a). Oto kilka przykładów takich stwierdzeń:

- *Wartość bezwzględna przyjmuje tylko wartość dodatnią.*
- *Wartość bezwzględna liczby ujemnej jest liczbą dodatnią.*
- *Funkcja jest parzysta, gdy jest symetryczna względem osi OY.*

Szóstą grupę tworzą takie wypowiedzi, w których zamiast pojęcia podano jedynie jego symbol, mając zapewne przekonanie, że sam symbol bez dodatkowych objaśnień jest definicją pojęcia. Przykładami takich wypowiedzi są:

- $y = a^x$, $a \in \mathbb{R}$,
- $y = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Do grupy siódmej zaliczone zostały wypowiedzi błędne lub całkowicie błędne, świadczące o niezrozumieniu przez ich autorów używanych pojęć:

- *Funkcja wykładnicza – $y = x^a$.*
- *Funkcja jest ciągła, gdy jej wartości wzrastają przy wzroście argumentów.*
- *Funkcja odwrotna jest funkcja typu $\frac{1}{x}$ dla funkcji x.*
- *Indukcja – sposób dowodzenia twierdzeń zaczynający się od tezy, założenia, a kończący się na dowodzie.*

Analizując odpowiedzi badanych na pytanie 7 ankiety dotyczące znajomości twierdzeń, należy odnotować fakt, że aż 91 osób nie zacytowało żadnego twierdzenia znanego im z wcześniejszego etapu edukacji.

Wśród otrzymanych wypowiedzi pojawiło się zamiast twierdzeń kilka definicji pojęć, np. określenie funkcji lub wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej. Może to oznaczać, że ich autorzy nie odróżniają definicji od twierdzenia.

W jednej z ankiet podano jeden z aksjomatów geometrii. Ponieważ w obecnym nauczaniu nie akcentuje się aksjomatyki tego działu, więc stwierdzenie to zostało zaliczone do odpowiedzi poprawnych. Obok nich pojawiły się wypowiedzi, które po doprecyzowaniu założeń są zdaniami prawdziwymi. Oto kilka takich przykładów:

- *Jeżeli funkcja ma asymptotę poziomą, to nie ma asymptoty ukośnej.*
- *Jeżeli funkcja jest ciągła, to ma granicę.*
- $\frac{a}{b} < 0 \Leftrightarrow ab < 0$.

Zacytujmy jeszcze kilka stwierdzeń podanych przez ankietowanych, które są zdaniami prawdziwymi:

- *Jeżeli ciąg jest arytmetyczny, to* $a_1 + a_3 = 2a_2$.
- *Funkcja jest ciągła, jeżeli jest różniczkowalna.*
- *Aby istniała funkcja odwrotna do danej, to dana funkcja musi być różnowartościowa.*
- $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c, \quad a > 0,\, b > 0,\, c > 0,\, a \neq 1.$

Badanie wykazało, że ankietowani w większości nie potrafili poprawnie sformułować twierdzeń, które chcieli zacytować. Obserwując tych studentów przez kolejne lata studiów, można stwierdzić, że wielu z nich potrafiło nadrobić braki swego przygotowania do studiów. Wymagało to jednak z ich strony bardzo dużego nakładu pracy.

Ważną umiejętnością przy studiowaniu matematyki jest posługiwanie się symbolami literowymi. Pojawiają się one w prawie wszystkich definicjach i twierdzeniach każdego z działów matematyki. S. Turnau w swej książce (1990, s. 159) zauważa:

> *O znaczeniu liter w tekście algebraicznym decyduje więc kontekst, faza rozumowania, subiektywna interpretacja, ale także zwyczaje odnoszące się do rodzaju użytych liter. Słowa te można odnieść także do symboliki literowej używanej w innych działach matematyki w tym również w analizie matematycznej.*

Jak pokazują wyniki badań prowadzonych w latach 1993 i 2000-2005 (Kusion, 1993; Zaręba, 2001; Zaręba, 2003; Zaręba, 2004), uczniowie na różnych poziomach edukacji szkolnej mają spore trudności w rozumieniu i stosowaniu symboli literowych. Wydaje się interesujące zbadanie tego zagadnienia w grupie studentów pierwszego roku matematyki studiów nauczycielskich. Oni bowiem jako przyszli nauczyciele będą musieli zmierzyć się z tym zagadnieniem w swej praktyce zawodowej. Celowi temu miały służyć polecenia 8 i 9 ankiety sondażowej.

W poleceniu 8a) oczekiwano zapisu $a < 0$ i $|a| > 7$, natomiast w 8b) tego pytania zapisu $k < 0$ i $\frac{1}{k} < k$. Uzyskane odpowiedzi w poleceniu 8a) prezentuje tabela 3.

Analizując informacje zamieszczone w tabeli 3, odnotujmy fakt, że tylko 8% uczestników badań nie podjęło próby odpowiedzi w poleceniu 8a) (poz. 20), a 34% badanych odpowiedziało poprawnie (poz. 1, 5). Natomiast 29% respondentów wyznaczyło poprawnie zbiór elementów spełniających podany warunek, ale nie zapisało symbolicznie podanego wyrażenia (poz. 2-4, 6, 7), przy czym zapis w poz. 7 różni się od przyjętych konwencji zapisu nierówności równoczesnych. Pozostałe odpowiedzi są błędne. Ujawniły one trudności z posługiwaniem się pojęciem wartości bezwzględnej oraz odległości w zbiorze liczb rzeczywistych. Wśród błędów popełnionych przez studentów były takie, które wynikały z kojarzenia symbolu literowego z dodatniością liczby, którą reprezentuje.

Tabela 3. Zestawienie odpowiedzi w poleceniu 8a) ankiety

Lp.	Rodzaj odpowiedzi	Gr. I	Gr. II	Gr. III	Gr. IV	Razem
1	$a < 0$ i $\|a\| > 7$	13	13	10	4	40
2	$a < -7$	4	9	0	4	17
3	$a \in (-\infty, -7)$	0	5	2	1	8
4	$a < -7$ i $a < 0$	2	6	2	0	10
5	a liczba ujemna i $\|a - 0\| > 7$	1	0	0	0	1
6	$a + 7 < 0$ gdy $a < 0$	0	1	0	0	1
7	$-7 > a < 0$ lub $0 > a < -7$	0	3	0	0	3
8	$-a > \|7\|$	0	1	0	0	1
9	$\|a\| > 7$	2	4	0	0	6
10	$-\|a\| > 7$	3	0	0	0	3
11	$\|-a\| > 7$	2	3	0	0	5
12	$a < 0$ i $\|a - 7\| > 0$	0	1	0	1	2
13	$a < 0$ i $\|a\| < 7$	0	1	0	0	1
14	$-7 < a < 0$	1	1	1	0	3
15	$a < 0$	1	3	0	1	5
16	$-\|a\| > \|x + 7\|$	1	0	0	0	1
17	$a \leqslant -8$	1	0	0	0	1
18	$a < 0 \wedge a < -7 \wedge a < 7$	1	0	0	0	1
19	$a \in (-\infty, 7)$	1	0	0	0	1
20	brak	4	5	0	0	9
	razem	37	56	15	11	119

Symboliczny zapis wypowiedzi 8b) sprawił badanym większe trudności niż przy poleceniu 8a). Uzyskane wyniki dla wyrażenia 8b) prezentuje tabela 4. Próby zapisu nie podjęło 16% respondentów (poz. 12), a 29% uczestniczących w badaniach udzieliło poprawnej odpowiedzi (poz. 1, 2). Jedynie 3 osoby próbowały rozwiązywać stosowną nierówność, ale niestety błędnie (poz. 3, 4).

Tabela 4. Zestawienie odpowiedzi w poleceniu 8b) ankiety

Lp.	Rodzaj odpowiedzi	Gr. I	Gr. II	Gr. III	Gr. IV	Razem
1	$k < 0$ i $\frac{1}{k} < k$	10	9	6	2	27
2	$\frac{1}{k} < k < 0$	0	3	0	4	7
3	$k \in (-1, 0)$	0	1	0	0	1
4	$k < 0$ i $\frac{1}{k} < k \Rightarrow 1 < k^2$	2	0	0	0	2
5	k liczba dodatnia i $\frac{1}{k} < -k$	1	0	0	0	1
6	$\frac{1}{k} < -k$	17	27	6	4	54
7	$\frac{1}{k} < -k$ i $k < 0$	0	2	0	0	2
8	$\frac{1}{k} < -k < 0$	0	2	0	0	2
9	$\frac{1}{k} < -\|k\|$	4	1	0	0	5
10	$\frac{1}{k} < \|-k\|$	1	0	0	0	1
11	$\frac{1}{k} < \|k\|$	0	0	2	0	2
12	brak	2	11	1	1	15
	razem	37	56	15	11	119

Odnotujmy również, że w odpowiedzi na polecenie 8b) jeszcze wyraźniej ujawnił się sygnalizowany powyżej fakt kojarzenia litery z dodatniością liczby, którą ona reprezentuje (poz. 5-11). Błędy tego typu popełniło 54% ankietowanych studentów.

Problem kojarzenia symbolu literowego ze znakiem liczby był już opisywany w dydaktyce matematyki. Zwracała na niego uwagę L. Zaręba (2004, s. 162) w swej pracy doktorskiej przy analizie trudności i rodzajów błędów popełnianych przez uczniów podczas operowania wyrażeniami algebraicznymi i symbolem literowym. Wśród różnego typu błędów wymienia opisane już przez Z. Krygowską błędy wynikające z braku rozumienia znaku $-$ *jako znaku liczby przeciwnej do danej* (Krygowska, 1955). Okazuje się, że błąd ten nie jest łatwy do wyeliminowania, skoro pojawia się tak wyraźnie u studentów rozpoczynających studia matematyczne.

W poleceniu 9 ankiety sondażowej poproszono respondentów o przedstawienie na osi liczbowej treści wyrażeń 8a) i 8b). Wyniki okazały się jeszcze bardziej zaskakujące z uwagi na dużą liczbę braków odpowiedzi (por. tabela 5). Z danych prezentowanych w tej tabeli wynika, że prawie 75% uczestniczących w badaniu nie podjęło próby interpretacji geometrycznej podanego przez siebie warunku. Zachodzi naturalne pytanie o przyczynę tego zjawiska. Prawdopodobnie tkwi ona w technice nauczania na niższych poziomach edukacji. Możliwe, że badani nie posługiwali się rysunkiem w celu prezentacji warunków pojawiających się podczas rozwiązywania różnego typu nierówności lub nie kojarzyli wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej z odległością tej liczby od początku osi liczbowej.

Niespełna 19% uczestniczących w badaniach popełniło błędy w swoich rysunkach odnoszących się do warunku 8b). Zdecydowana większość tych błędów polegała na nieuwzględnianiu założenia $k < 0$. Jest zatem wysoce prawdopodobne, iż wielu z badanych nie przyswoiło w pełni faktu, że litera może oznaczać dowolną liczbę rzeczywistą, a znak minus przed literą nie oznacza liczby ujemnej, ale liczbę przeciwną.

Tabela 5. Zestawienie odpowiedzi w poleceniu 9 ankiety

Lp.	Rodzaj odpowiedzi	Gr. I	Gr. II	Gr. III	Gr. IV	Razem
1	poprawny rysunek	2	2	3	1	8
2	błędny rysunek	10	7	2	3	22
3	brak rysunku	25	47	10	7	89
	razem	37	56	15	11	119

Na zakończenie ankiety, w poleceniu 10 zaproponowano studentom rozwiązanie jednego równania z wartością bezwzględną i dwu nierówności, znanych ze szkoły ponadgimnazjalnej. Celem tego polecenia było zbadanie, w jakim stopniu studenci radzą sobie z problemami niezbyt skomplikowanymi rachunkowo, ale wymagającymi konsekwentnego stosowania potrzebnych definicji i twierdzeń.

Dla rozwiązania równania $|2x + 1| = x$ (polecenie 10a) wystarczy zauważyć, że $x \geqslant 0$, skąd wynika $2x + 1 > 0$. Na podstawie definicji wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej, rozważane równanie przyjmuje zatem postać $2x + 1 = x$, czyli $x = -1$, co przeczy założeniu o nieujemności liczby x. Wynika stąd, że rozważane równanie nie ma rozwiązania.

Okazało się, że tylko 11 osób (prawie 9% badanych) rozwiązało to równanie poprawnie, ale nie odnotowano rozwiązania metodą opisaną powyżej. Ten sposób postępowania, oparty na wykorzystywaniu własności wartości bezwzględnej, nie jest powszechnie stosowany w nauczaniu szkolnym, a jak wynika z badań J. Major, uczniowie odnoszą się do niego z rezerwą, lub wręcz uznają go za błędny (Major, Powązka, 2006; Major, Powązka, 2009).

Być może jest to jakaś forma zdegenerowanego formalizmu w stosowaniu definicji wartości bezwzględnej polegająca na korzystaniu z następującego schematu postępowania: jeżeli masz rozwiązać równanie (nierówność) z wartością bezwzględną, to zapisz je (ją) w postaci alternatywy równań (nierówności), korzystając z dwunormowej definicji wartości bezwzględnej i rozwiąż każdy z otrzymanych przypadków. W schemacie tym zabrakło istotnego ogniwa, tzn. weryfikacji rozwiązania z rozważanymi przypadkami. Opisany powyżej sposób rozwiązania omawianego równania pokazuje, że ta strategia nie zawsze jest optymalna do uzyskania rozwiązania. Bardziej skuteczny może być sposób polegający na korzystaniu z własności danego pojęcia.

Przy rozwiązywaniu nierówności $\frac{3}{x} > x + 1$ (polecenie 10b) można zastosować jedną z trzech strategii:

1. Po założeniu $x \neq 0$, przekształcić nierówność do postaci $\frac{3}{x} - x - 1 > 0$, a po sprowadzeniu do wspólnego mianownika zapisać otrzymaną nierówność w postaci $x(3 - x^2 - x) > 0$.
2. Po założeniu $x \neq 0$, pomnożyć nierówność przez x^2 i przekształcić do postaci $x(3 - x^2 - x) > 0$.
3. Po założeniu $x \neq 0$, rozważyć dwa przypadki: $x > 0$ lub $x < 0$. Wtedy po pomnożeniu w każdym z przypadków przez x, rozwiązać alternatywę warunków: $3 - x^2 - x > 0$ i $x > 0$ lub $3 - x^2 - x < 0$ i $x < 0$.

Prawie wszyscy badani (112 osób) podjęli próbę rozwiązania tej nierówności, ale tylko 26 osób rozwiązało ją poprawnie. Z pozostałych 28 osób rozpoczynało przekształcenia jedną z podanych strategii, ale szybko się wycofywali, gdy należało dyskutować przypadki. Być może spowodował to fakt, że pierwiastkami wielomianu $-x^2 - x + 3$ są liczby niewymierne.

Ponadto 22 osoby rozwiązały jedynie równanie stowarzyszone z daną nierównością. Jest tak zapewne dlatego, że rozwiązywanie równań jest dla uczących się łatwiejsze od rozwiązywania nierówności stowarzyszonych z tymi równaniami. To najprawdopodobniej z tego powodu do najczęstszych błędów merytorycznych należało mnożenie nierówności stronami przez x bez żadnych założeń oraz zmiany kierunku nierówności. Takie postępowanie prowadziło do błędnie wyznaczonych przedziałów.

Najłatwiejszą dla studentów okazała się nierówność $|x - 2| < 4$ (polecenie 10c), którą poprawnie rozwiązało 91 osób. Najczęstszą jednak metodą było dyskutowanie przypadków dotyczących znaku wyrażenia $x - 2$, zamiast korzystania z odpowiedniego twierdzenia o własności wartości bezwzględnej.

5. Wnioski i hipotezy badawcze

Wyniki przeprowadzonych badań pozwalają na sformułowanie pewnych stwierdzeń dotyczących pytań badawczych (paragraf 1). Mogą one stanowić punkt wyjścia do dalszych badań.

Na podstawie analizy postaw studentów rozpoczynających studia matematyczne na naszej uczelni można zaryzykować następującą odpowiedź na pierwsze pytanie badawcze. W większości studenci posiadają zainteresowania i motywacje do studiowania matematyki. Wydaje się jednak, że są to przede wszystkim motywacje do zdobycia zawodu nauczyciela matematyki (paragraf 3). Zainteresowania studentów w dużym stopniu dotyczyły zagadnień związanych z elementami analizy matematycznej (tabela 1). Jak się potem okazało, to właśnie ten przedmiot stwarzał im podczas studiów spore trudności związane ze zrozumieniem poznawanych pojęć (Powązka, 2006; Powązka, 2007a). Od prowadzących zajęcia na pierwszym roku w dużej mierze zależy, na ile te zainteresowania zostaną rozbudzone i czy wystarczą, aby zachęcić studentów do pokonania różnych trudności w studiowaniu matematyki i pogłębiania własnej wiedzy.

Odpowiadając na drugie pytanie badawcze, należy stwierdzić, że wiedza matematyczna kandydatów na studia nie zawsze z ich winy nie jest taka, jakiej oczekują prowadzący zajęcia na pierwszym roku. Badania ujawniły rozbieżność między wiedzą deklaratywną studentów (paragraf 4) a ich rzeczywistymi umiejętnościami (paragraf 5). Chcąc nadążyć za tempem wykładu lub ćwiczeń, muszą nadrabiać na ogół samodzielnie zaległości. Bywa tak, że bardzo szybko tracą kontakt z wykładowcą, zniechęcają się i odchodzą z uczelni.

Jednocześnie realizacja standardów wykształcenia ogólnego w zakresie matematyki wymaga możliwie szybkiego wejścia w materiał abstrakcyjny, który powinien mieć jednak podbudowę w konkretnych modelach, w wielu przypadkach którymi studenci nie dysponują.

Jedną z dróg wyjścia jest organizowanie przez uczelnie zajęć wyrównawczych lub kursów przygotowawczych do studiów matematycznych, w czasie których można by uzupełniać materiał niezbędny do realizacji programu nauczania. Druga możliwość tkwi w reformie programowej uwzględniającej konieczność uzupełniania materiału ze szkoły ponadgimnazjalnej.

Odnośnie do trzeciego pytania badawczego uzyskane wyniki ujawniły trudności studiujących w posługiwaniu się językiem matematycznym. Nieznajomość definicji i twierdzeń, powierzchowne używanie pojęć, mechaniczne stosowanie algorytmów i błędy w rozumieniu symboli literowych (paragraf 5) to istotne przeszkody w rozumieniu wykładów i ćwiczeń.

Na trudności z używaniem symboli literowych zwracała już uwagę L. Zaręba w stosunku do młodzieży gimnazjalnej. W swej pracy (2003) stwierdziła:

> Uwzględniając obecne trendy w nauczaniu matematyki a jednocześnie jej abstrakcyjną naturę, warto zwrócić uwagę na aktywność uogólniania, aktywność, której efekt można wyrażać stosując symbol literowy.

Okazało się jednak, tak w jej, jak i w moich badaniach, że poprawne posługiwanie się symbolami literowymi było trudne nawet dla studentów pierwszego roku matematyki. W cytowanej już pracy znajdujemy następującą diagnozę przyczyn tego zjawiska:

> Przyczyny tego rodzaju błędów tkwią być może w tym, iż przedmiotem zainteresowania tradycyjnego nauczania matematyki są najczęściej treści pojęciowe, takie jak na przykład figury geometryczne, przekształcenia oraz ich własności. To na nich skupia głównie uwagę nauczyciel kształtując je i opracowując. „Liter (zmiennych) po prostu się używa" (Konior, 1996, s. 74) i traktuje się je tak, jakby były już w posiadaniu uczniów i ich alfabetu. Dlatego organizując proces nauczania skierowany na rozwijanie umiejętności uogólniania warto byłoby znać także możliwości uczniów w zakresie stosowania symbolu literowego.
>
> (Zaręba, 2003, s. 152)

Rozpoczynający studia matematyczne mają zapewne większe doświadczenia w stosowaniu liter w swych rozumowaniach, mimo to, jak pokazuje analiza odpowiedzi na polecenia 8a) i 8b), napotykają w tym działaniu na pewne trudności podobne do trudności gimnazjalistów. Warto, aby prowadzący ćwiczenia do wykładów z przedmiotów matematycznych, świadomi tej diagnozy zwracali uwagę na właściwe posługiwanie się przez studentów symbolami literowymi.

Badania ujawniły również trudności w operowaniu pojęciami matematycznymi podczas rozwiązywania zadań. Większość badanych próbowała stosować znane im algorytmy i nie szukała innych możliwości (por. paragraf 5 oraz Major, Powązka, 2006; 2009). Taka postawa uczących się matematyki jest obserwowana na różnych poziomach edukacji tak w Polsce, jak i w innych krajach. Od studentów matematyki, mających być jej nauczycielami, oczekuje się jednak głębszego rozumienia pojęć matematycznych, których będą uczyć w przyszłości. Fakt ten powinien być brany pod uwagę w programach nauczycielskich studiów matematycznych. Jest on również wyzwaniem dla prowadzących zajęcia z dydaktyki matematyki.

Literatura

Bugajska-Jaszczołt, B., Treliński, G.: 2002, Badanie rozumienia pojęć matematycznych w szkole średniej i wyższej (na przykładzie granicy funkcji i kresu zbioru ograniczonego), *XVI Szkoła Dydaktyków Matematyki*, CD–ROM.

Burton, J. F.: 1977, The moore method, *American Mathematical Monthly* **84**, 273-277.

Czaplińska, J.: 2003, Trudności w stosowaniu pojęć analitycznych przez absolwentów szkół średnich podczas rozwiązywania zadania egzaminacyjnego, *Disputationes Scientificae Univ. Catholicae in Ružomberok* **3**(3), 3-10.

Even, R.: 1990, Subject matter knowledge for teaching and the case of functions, *Educational Studies in Mathematics* **6**, 521-554.

Even, R.: 1993, Subject matter knowledge and pedagogical content knowledge: Prospective secondary teachers and the function concept, *Journal for Research in Mathematics Education* **24**, 94-116.

Fulier, J.: 2001, *Funkcje a funkčné myslenie vo vyučovaní matematickej analýzy*, Univerzita Konštantína Filozofa, Faculta Prírodnydh Vied, Nitra.

Fulier, J., Gunčaga, J.: 2006, Modul matematickiej analýzy v kurze dálšeho vzdelévania učitel'ov, *Matematika v škole dnes a zajtra, Zbornik 6. ročnika konferencie s medzinárodnou účast'ou*, Ružomberok, 66-74.

Gunčaga, J.: 2001, Limitné procesy v školskoj matematike. Rozprawa doktorska obroniona w 2001 roku na Uniwersytecie w Nitrze, http://fedu.ku.sk/~guncaga/publikaci/DizWeb.pdf, data dostępu: 1 XII 2010 r.

Gunčaga, J.: 2008, *Matematická analýza 1*, Katolícka Univerzita v Ružomberku, Pedagogicka Fakulta, Ružomberok.

Gunčaga, J., Fulier, J., Eisenmann, P.: 2008, *Modernizácia a inovácia vyučovania matematickej analýzy*, Katolícka Univerzita v Ružomberku, Pedagogicka Fakulta, Ružomberok.

Konior, J.: 1996, O pojęciu zmiennej w szkolnym nauczaniu matematyki, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **18**, 71-102.

Krygowska, Z.: 1955, O poprawne rozumienie przez uczniów symbolu literowego w nauce algebry, *Matematyka* **4**, 21-32.

Krygowska, Z.: 1977, *Zarys dydaktyki matematyki, cz. 3*, WSiP, Warszawa.

Krygowska, Z.: 1986, Elementy aktywności matematycznej, które powinny odgrywać znaczącą rolę w matematyce dla wszystkich, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **6**, 25-41.

Kusion, L.: 1993, *Symbol literowy w nauczaniu matematyki*, Niepublikowana praca magisterska wykonana w Instytucie Matematyki AP pod kierunkiem prof. H. Siwek, Kraków.

Mahavier, W. S.: 1999, What is the moore method?, *Primus* **9**, 339-254.

Major, J.: 2006a, Rola zadań i problemów w kształtowaniu pojęć matematycznych na przykładzie bezwzględnej wartości liczby rzeczywistej, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **29**, 297-310.

Major, J.: 2006b, Uwagi na temat obrazu wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej u studentów III roku matematyki, *Matematika v škole dnes a zajtra, Zbornik 6, ročnika konferencie s medzinárodnou účast'ou*, Ružomberok, 171-176.

Major, J., Major, M.: 2009, Remarks on definitions and the process of defining mathematical concepts, w: M. Billich, M. Papčo, Z. Takáč (red.), *Teaching Mathematics. Innovation, new trends*, Catholic University in Ružomberok, Faculty of Education, 187-192.

Major, J., Powązka, Z.: 2006, Uwagi dotyczące pojęcia wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej, *Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **I**, 163-185.

Major, J., Powązka, Z.: 2009, From research on student difficulties in using the properties of functions while solving equations and inequalities, w: M. Billich (red.), *Mathematica III*, Catholic University in Ružomberok, Faculty of Education, 69-76.

Major, M.: 2006c, Uwagi na temat wiedzy studentów III roku matematyki w zakresie szkolnych treści rachunku prawdopodobieństwa, *Matematika v škole dnes a zajtra, Zbornik 6, ročnika konferencie s medzinárodnou účast'ou*, Ružomberok, 176-180.

Major, M.: 2007, Vedomosti študentov 3 ročníka matematiky v oblasti elementárnych školských úloh z počtu pravdepodobnosti, *Matematika v škole dnes a zajtra, Zbornik 7, ročnika konferencie s medzinárodnou účast'ou*, Ružomberok, 201-205.

Parker, G. E.: 1992, Getting more from Moore, *Primus* **2**, 235-246.

Powązka, Z.: 2006, Z badań nad wprowadzaniem podstawowych treści analizy matematycznej podczas zajęć na I roku studiów matematycznych, *Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **I**, 229-295.

Powązka, Z.: 2007a, Príklady chýb v porozumení základných pojmov matematickej analýzy skúmaných u študentov učitel'stva matematiky, *Acta Mathematica* **10**, 177-182.

Powązka, Z.: 2007b, Problémy študentov matematiky s pochopenim poimov určitý a neurčitý integrál, *Matematika v škole dnes a zajtra, Zbornik 7, ročnika konferencie s medzinárodnou účast'ou*, Ružomberok, 257-262.

Powązka, Z.: 2009, O fałszywych przekonaniach obserwowanych na zajęciach z analizy matematycznej, *Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **II**, 213-223.

Sfard, A.: 1991, On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin, *Educational Studies in Mathematics* **22**, 1-36.

Siwek, H.: 2005, *Dydaktyka matematyki. Teoria i zastosowania w matematyce szkolnej*, WSiP, Warszawa.

Szewczuk, W.: 1993, Zdolności – uzdolnienia, w: W. Pomykało (red.), *Encyklopedia pedagogiczna*, Fundacja „Innowacja", Warszawa, 991-996.

Tall, D., Vinner, S.: 1981, Concept image and concept definition mathematics with particular reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics* **12**, 151-169.

Turnau, S.: 1990, *Wykłady o nauczaniu matematyki*, PWN, Warszawa.

Zaręba, L.: 2001, Dojrzałość do stosowania symbolu literowego w procesie uogólniania u uczniów w średnim wieku szkolnym, *Rocznik Komisji Nauk Pedagogicznych* **LIV**, 91-117.

Zaręba, L.: 2003, Z badań nad procesem uogólniania i stosowaniem w nim symbolu literowego przez uczniów w wieku 10-14 lat, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **25**, 151-182.

Zaręba, L.: 2004, Proces uogólniania w matematyce i stosowanie w nim symbolu literowego u uczniów w wieku 13-14 lat. Rozprawa doktorska (praca niepublikowana) obroniona w 2004 roku na Akademii Pedagogicznej w Krakowie.

Aneks

Ankieta sondażowa dotycząca wiadomości matematycznych wyniesionych ze szkół ponadgimnazjalnych

1. Wskaż właściwy typ szkoły, do której uczęszczałeś, zakreślając stosowną odpowiedź:

a) liceum ogólnokształcące, klasa o profilu ......

b) liceum profilowane, profil ......

c) technikum, profil ......

2. Ustaw w kolejności od 1 do 13 wymienione w tabeli zagadnienia (działy) matematyczne, które sprawiały Ci najmniejsze trudności w szkole ponadgimnazjalnej (1 oznacza zagadnienie najłatwiejsze, a 13 zagadnienie najtrudniejsze). Jeżeli jakiś temat nie był realizowany, proszę zaznaczyć go cyfrą 0.

Tabela 6. Odpowiedź na pytanie 2.

Lp.	Temat	liczba punktów
1	Elementy logiki	
2	Funkcje (badanie własności bez pomocy pochodnej)	
3	Badanie funkcji przy pomocy pochodnej	
4	Równania i nierówności liniowe i kwadratowe	
5	Równania i nierówności wielomianowe i wymierne	
6	Równania i nierówności z wartością bezwzględną	
7	Równania i nierówności wykładnicze, logarytmiczne i trygonometryczne	
8	Ciągi liczbowe	
9	Badanie granic ciągów liczbowych	
10	Geometria analityczna	
11	Geometria płaska (planimetria)	
12	Stereometria	
13	Rachunek prawdopodobieństwa	

3. Napisz w kilku słowach, jaka była Twoja motywacja do wyboru kierunku studiów.

4. W tabeli 7 podano najważniejsze pojęcia, które pojawią się na wykładzie z analizy matematycznej w pierwszym roku studiów. W kolumnach tej tabeli zaznacz znakiem „×” odpowiedzi na pytania A, B.

A) Które z treści kształcenia z zakresu analizy matematycznej są Ci znane ze szkoły ponadgimnazjalnej?

B) Jakie treści matematyczne (pojęcia lub twierdzenia) z analizy matematycznej sprawiły Ci najwięcej trudności?

Tabela 7. Odpowiedzi na pytanie 4.

Lp.	Treści matematyczne	Pytanie A	Pytanie B
1	Zbiory ograniczone i nieograniczone		
2	Kresy zbioru		
3	Twierdzenie o indukcji		
4	Ciągłość zbioru liczb rzeczywistych		
5	Funkcja		
6	Obraz zbioru		
7	Przeciwobraz zbioru		
8	Ograniczoność i nieograniczoność funkcji		
9	Składanie funkcji		
10	Różnowartościowość funkcji		
11	Wartość bezwzględna		
12	Funkcja odwrotna		
13	Funkcja wykładnicza		
14	Funkcja logarytmiczna		
15	Funkcje cyklometryczne		
16	Ciągi liczbowe		
17	Podciąg ciągu		
18	Zbieżność ciągu do granicy skończonej		
19	Granice niewłaściwe		
20	Ciągi Cauchy'ego i ich własności		
21	Granica dolna i górna ciągu		
22	Granica funkcji w punkcie		
23	Granice jednostronne funkcji w punkcie		
24	Symbole nieoznaczone		
25	Ciągłość funkcji		
26	Pochodna funkcji		
27	Zastosowanie pochodnej do badania funkcji		

5. Wskaż, które pojęcia matematyczne, zamieszczone w tabeli 7 i poznane na zajęciach w szkole ponadgimnazjalnej, zaciekawiły Cię najbardziej.

6. Podaj definicje trzech pojęć z tabeli 7, które nie sprawiły Ci trudności.

7. Sformułuj znane Ci ze szkoły ponadgimnazjalnej dwa twierdzenia dotyczące pojęć podanych w tabeli 7.

8. Zapisz symbolicznie warunek:

a) Liczba a jest ujemna i jej odległość od liczby zero jest większa od 7.

b) Liczba $\frac{1}{k}$ jest mniejsza od ujemnej liczby k.

9. Zilustruj na osi liczbowej zbiór liczb spełniających warunki z zadania 8.

10. Rozwiąż równania i nierówności:

a) $|2x + 1| = x$,

b) $\frac{3}{x} > x + 1$,

c) $|x - 2| < 4$.

Instytut Matematyki
Uniwersytet Pedagogiczny
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
e-mail: powazka@ap.krakow.pl