

Krystyna Kuźniar, Maciej Zajęc, Łukasz Chudyba

Wybrane zagadnienia całkowania przebiegów drgań

Analiza dynamiczna wielu zjawisk, w tym również wpływu drgań typu parasejsmicznego na budynki, bardzo często bazuje na wynikach pomiarów drgań. Z różnych przyczyn, z których najczęstszą są trudności natury ekonomicznej, nie zawsze badania eksperymentalne są kompleksowe. Przykładowo, „aparatura czuwająca” do ciągłego monitoringu drgań wzbudzanych wstrząsami górniczymi w najbardziej aktywnym sejsmicznie regionie górniczym w Polsce – Legnicko-Głogowskim Okręgu Miedziowym – pozwala na rejestrację przebiegów przyśpieszeń drgań. Bardzo często jednak do praktycznej oceny skutków działań dynamicznych na konstrukcje bardziej przydatne są np. przebiegi prędkości lub przemieszczeń drgań. Powstaje więc problem wykorzystania zarejestrowanych *in situ* przebiegów przyśpieszeń drgań do wyznaczenia na ich podstawie przebiegów prędkości drgań i dalej – przebiegów przemieszczeń drgań.

W niniejszej pracy pokazano wyniki teoretycznej analizy wpływu wyboru metody całkowania oraz uwzględnienia wstępnego przetwarzania przebiegu drgań w zakresie tzw. usuwania trendu (usuwania tła, korekty linii bazowej) na dokładność uzyskanych wyników. Dokonano weryfikacji rozważanego podejścia z użyciem pomierzonych rzeczywistych przebiegów drgań wywołanych wstrząsami pochodzenia górniczego.

Zagadnienie początkowe Cauchy’ego

Niech dane będzie równanie różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu w postaci:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1)$$

z warunkiem początkowym $y(x_0) = y_0$.

Tak sformułowane zadanie od strony matematycznej nosi nazwę zagadnienia początkowego Cauchy’ego [5]. W przypadku, gdy postać funkcji $f(x, y)$ jest stosunkowo prosta, równanie (1) można rozwiązać analitycznie, stosując np. metodę rozdzielania zmiennych.

W praktyce jednak prawa strona równania (1) jest zwykle na tyle złożona lub podana w postaci dyskretnej, że w celu uzyskania rozwiązania konieczne jest zastosowanie jednej z wielu metod numerycznych do analizy problemów początkowych.

Metody te pozwalają na wyznaczenie zbioru wartości dyskretnej funkcji niewiadomej $y = y(x)$, począwszy od danego punktu początkowego x_0 . Zbiór par (x_n, y_n) wyznacza się z następujących zależności dla węzłów równoodległych ($x_{n+1} - x_n = x_n - x_{n-1} = h = \text{const.}$):

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h = x_0 + n \cdot h \\ y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t, y) dt = y_n + \Delta y_n, \quad y_0 = y(x_0) \end{cases} \quad (2)$$

Całkę, którą w (2) oznaczono przez Δy_n można obliczyć numerycznie na różne sposoby [1, 6, 7]. W zależności od zastosowanego podejścia, metody numeryczne do rozwiązywania zadań początkowych dzieli się na jednokrokowe i wielokrokowe. W metodach jednokropowych wartość delty Δy_n zależy tylko od jednego kroku wstecz: $\Delta y_n = \Delta y_n(f_n)$, $f_n \equiv f(x_n, y_n)$. Natomiast w metodach wielokropowych wartość delty zależy od kilku kolejnych kroków wstecz: $\Delta y_n = \Delta y_n(f_n, f_{n-1}, f_{n-2}, \dots)$.

Innej klasyfikacji rozważanych metod numerycznych można dokonać, biorąc pod uwagę tzw. jawność metody. Przedstawione wyżej zależności dla Δy_n dotyczą metod jawnych (otwartych, ekstrapolacyjnych) – wartość y_{n+1} liczona jest na podstawie znanych wartości funkcji danych lub obliczonych wcześniej w poprzednich krokach – $\Delta y_n = \Delta y_n(f_n, f_{n-1}, f_{n-2}, \dots)$. Natomiast inną grupę metod stanowią bardzo dokładne metody niejawne (zamknięte, interpolacyjne), gdzie wartość y_{n+1} zależna jest od siebie samej poprzez deltę $\Delta y_n = \Delta y_n(f_{n+1}, f_n, f_{n-1}, \dots)$. Oblicza się ją, stosując metody iteracyjne, startujące ze wstępnego określenia wartości $y_{n+1}^{(0)}$ znanego z metody jedno- lub wielokrokowej otwartej.

W niniejszej pracy skupiono się na metodach jednokropowych jawnych. Pierwszą z nich i jednocześnie najprostszą, jest metoda Eulera. Według tej metody kolejne wartości poszukiwanej funkcji $y(x)$ wyznacza się według wzoru [1, 6, 7]:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n) \quad n = 0, 1, \dots, \quad (3)$$

gdzie: $y_{n+1} = y(x_{n+1})$, h – odległość między węzłami x_n, x_{n+1} . Człon $h \cdot f(x_n, y_n)$ jest przyrostem funkcji y na długości h , co w tym przypadku oznacza numerycznie obliczenie całki (2) za pomocą metody prostokątów (stała funkcja podcałkowa). Równanie (3) można również interpretować jako rozwinięcie funkcji $y(x)$ w szereg Taylora (gdzie y_n – dokładna wartość funkcji) wokół punktu x_n , z uwzględnieniem wyrazów do rzędu pierwszego włącznie. Pozwala to na określenie lokalnego błędu rozwiązania będącego resztą z obciążenia rozpatrywanego szeregu R_n . Poprawienie otrzymywanych wyników może odbywać się poprzez zmniejszenie kroku całkowania h , ale tylko do pewnej wielkości granicznej, której przekroczenie powoduje nagle wzrost błędu zaokrągleń i niestabilność metody.

Kolejne dwie rozważane metody jednokropowe noszą nazwę metody Runge-Kutty II i IV rzędu [1, 6, 7]. Rząd metody wynika ze stopnia wielomianu interpolującego funkcję podcałkową $f(x, y)$ w równaniu (2). Może być także wiązany z liczbą zatrzymanych członów szeregu Taylora w rozwinięciu funkcji $y(x)$, do których

porównywane są następnie człony rozwiązania przybliżonego w celu wyznaczenia poszukiwanych współczynników.

Metody Runge-Kutty II i IV rzędu mogą być opisane odpowiednimi wzorami:

– metoda Runge-Kutty II rzędu (zwana również metodą Heuna):

$$K_1 = h \cdot f(x_n, y_n) \quad K_2 = h \cdot f(x_n + h, y_n + K_1) \quad y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(K_1 + K_2) \quad (5)$$

– metoda Runge-Kutty IV rzędu:

$$\begin{aligned} K_1 &= hf(x_n, y_n) \\ K_2 &= hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}K_1\right) \\ K_3 &= hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}K_2\right) \\ K_4 &= hf(x_n + h, y_n + K_3) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \end{aligned} \quad (6)$$

Należy zauważyć, że we wzorach (6) występuje punkt pośredni $(x_n + \frac{h}{2})$ oraz odpowiadająca temu argumentowi wartość funkcji $f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}K_1)$. Gdy analizowany problem opisuje ciągła funkcja f , wartość ta jest łatwa do wyznaczenia. W przypadku danych dyskretnych, wielkość tę można aproksymować np. parabolą lub funkcją typu spline.

W celu oceny przydatności i dokładności rozważanych metod przetestowano je, całkując teoretyczny (modelowy) przebieg drgań opisany funkcją $y'(x) = \cos(x)$ dla $x \in [0, 2\pi]$, z warunkiem początkowym $y(0) = 0$. Przyjęto krok $h = 0,2$. Rozwiązaniem ścisłym (analitycznym) tego problemu jest funkcja $y(x) = \sin(x)$. Obliczenia przeprowadzono przy użyciu własnego programu komputerowego w środowisku Matlab [4].

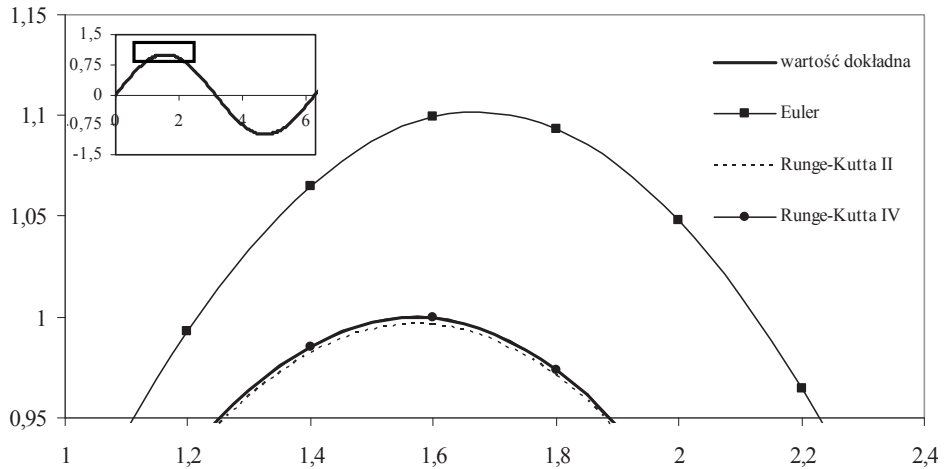
Na rys. 1 przedstawiono uzyskane wyniki analizy numerycznej z użyciem metody Eulera, metody Runge – Kutty II rzędu i metody Runge – Kutty IV rzędu na wybranym odcinku oczekiwanej funkcji $y(x) = \sin(x)$.

Zgodnie z przewidywaniami, najlepsze wyniki uzyskano metodą najwyższego rzędu, tj. Runge-Kutty IV rzędu. Punkty pośrednie w tej metodzie otrzymano poprzez aproksymację splinem kubicznym. Porównywalne rezultaty otrzymano, stosując metodę Runge-Kutty II rzędu.

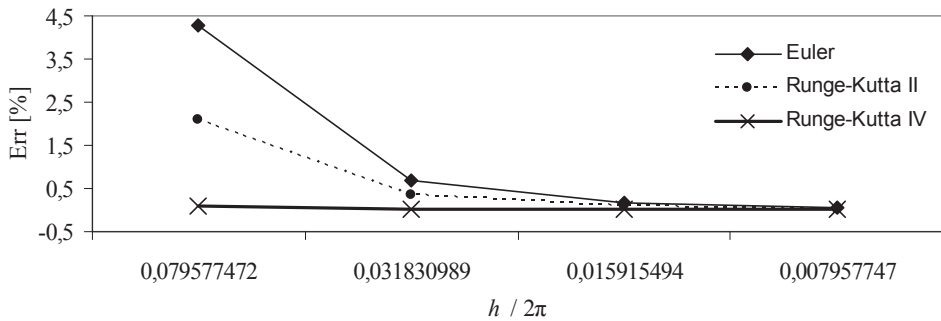
Dodatkowo na rys. 2 przedstawiono zbieżność testowanych metod całkowania w zależności od stosunku $h/2\pi$, którą określano za pomocą błędu względnego:

$$\text{Err} = \max \left| \frac{y^{\text{ścisły}} - y^{\text{num}}}{y^{\text{ścisły}}} \cdot 100\% \right| \quad (7)$$

gdzie: $y^{\text{ścisły}}$ i y^{num} – odpowiednio wartość rozwiązania ścisłego i numerycznego.



Rys. 1. Porównanie rozwiązań testowego równania różniczkowego wybranymi metodami numerycznymi



Rys. 2. Zbieżność do rozwiązania ścisłego przy użyciu testowanych metod numerycznych

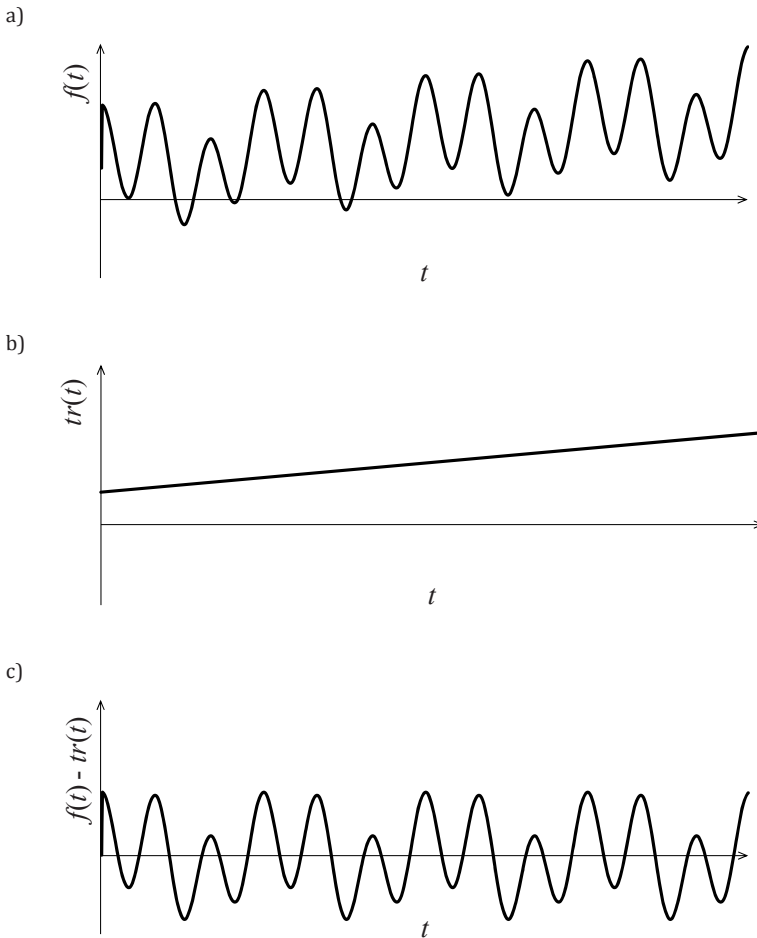
Z wyników pokazanych na rys. 2 widać, że metoda Runge-Kutty 4 rzędu jest skuteczna i dokładna nawet przy dużych odległościach międzywęzłowych h . Przykładowo, dla kroku $h = 0,5$ błąd względny Err w przypadku użycia tej metody jest ponad 8-krotnie mniejszy niż metody Eulera.

Długość kroku h można dobierać iteracyjnie, podobnie jak w przypadku całkowania numerycznego znanej funkcji. Należy wtedy obliczyć wartość rozwiązania y_{n+1} za pomocą jednego kroku dla danego h i za pomocą dwóch kroków dla $\frac{h}{2}$. Porównanie tych dwóch wartości pozwoli stwierdzić, czy krok całkowania jest wystarczająco mały. Jeżeli nie, to należy znów go zmniejszyć i powtórzyć analizę dokładności obliczeń.

Całkowanie rzeczywistych zarejestrowanych przebiegów drgań

Charakter pomierzonych rzeczywistych sygnałów, np. przebiegów drgań, wywołuje konieczność ich wstępnej obróbki. Przetwarzanie wstępne odgrywa zasadniczą rolę przy doprowadzaniu sygnału do postaci dogodnej z punktu widzenia dalszej analizy, w tym również jego całkowania [3]. Przetwarzanie wstępne obejmuje m.in. tzw. usuwanie trendu (usuwanie tła, korektę linii bazowej).

Usuwanie trendu ($t\lambda$) jest jednym z ważniejszych etapów przetwarzania sygnałów [2, 8]. Należy zmodyfikować sygnał (przebieg drgań) w taki sposób, aby na wykresie uzyskać jako tło poziomą linię prostą. Jeżeli trend nie zostanie wyeliminowany z sygnału, to mogą wystąpić znaczne zniekształcenia w jego dalszej analizie. W celu usunięcia trendu sygnału należy dokonać specjalnej korekty, tzw. korekty linii bazowej. Do usunięcia trendu liniowego, jak również trendu o charakterze wielomianu wyższego stopnia, może być stosowana np. metoda najmniejszych kwadratów. Na rys. 3 pokazano ideę korekty linii bazowej (odejmowania $t\lambda$) przykładowo w przypadku usuwania trendu liniowego.

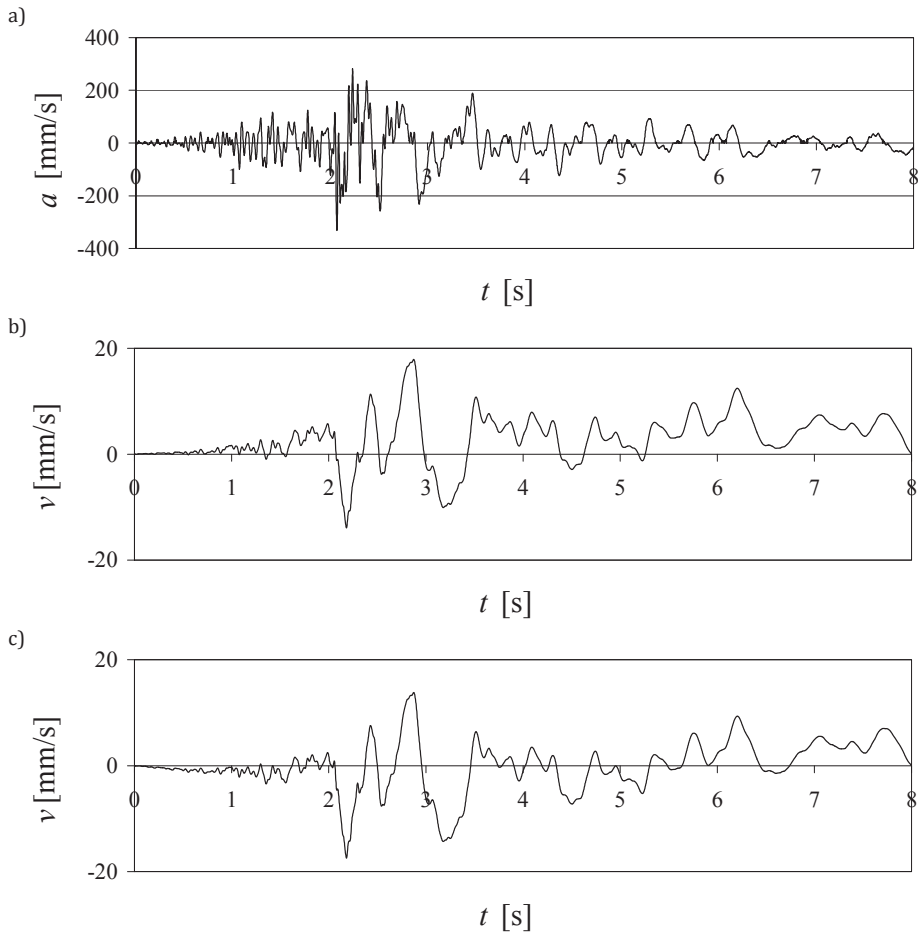


Rys. 3. Ilustracja korekty linii bazowej: a) sygnał przed usunięciem $t\lambda$, b) wygenerowany trend, c) sygnał po usunięciu trendu

Po określeniu (wykryciu) charakteru i wyeliminowaniu trendu z obserwacji pomiarowych, całkowania rzeczywistych przebiegów drgań dokonywano metodą Runge-Kutty IV rzędu uwzględnieniem korekty linii bazowej. Używano odpowiednio zmodyfikowanego własnego programu komputerowego w środowisku Matlab [4].

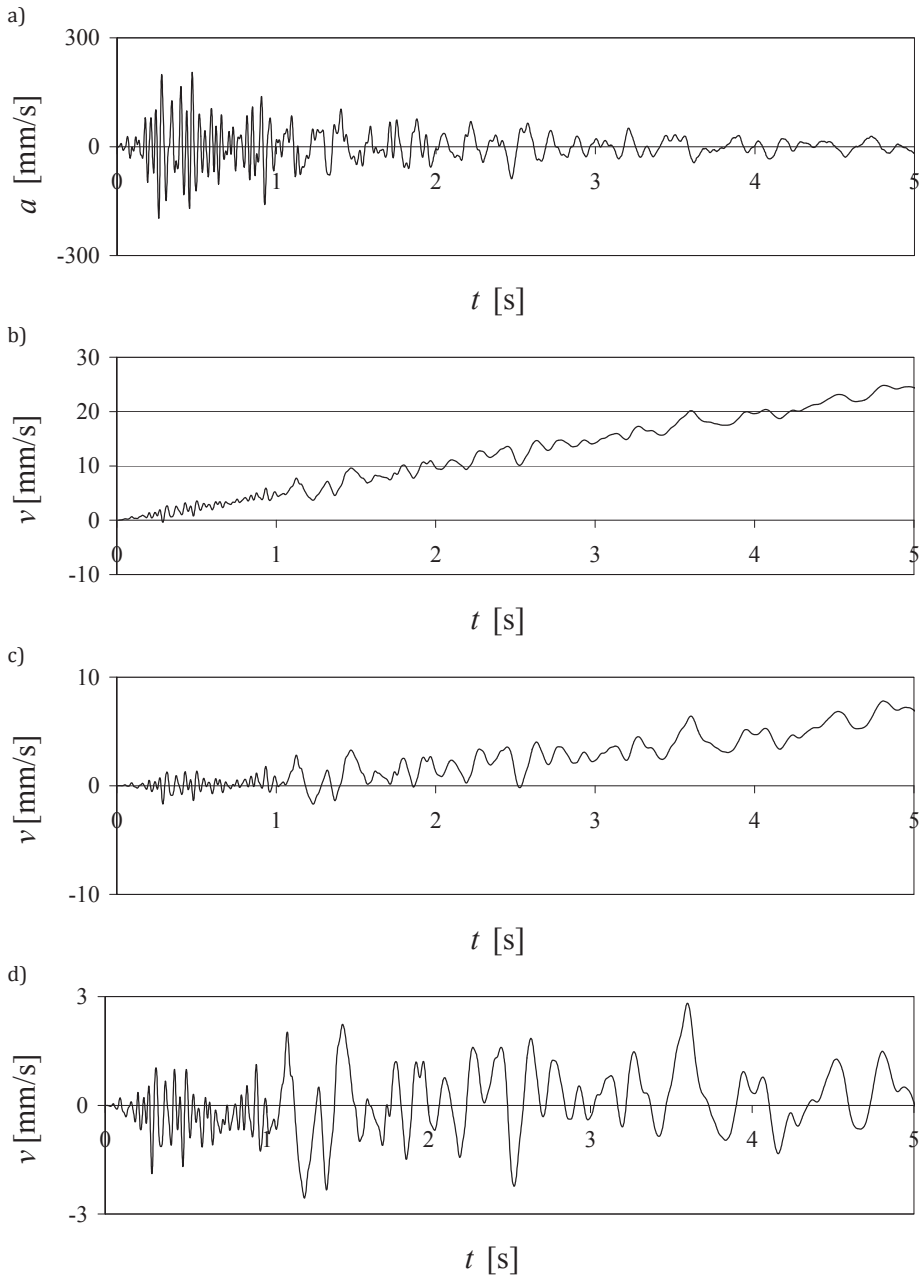
Przedstawione podejście praktycznie wykorzystano do wyznaczania przebiegów prędkości drgań na podstawie zarejestrowanych przebiegów przyśpieszeń drgań wzbudzanych wstrząsami górniczymi w jednym z najbardziej aktywnych sejsmicznie regionów górniczych w Polsce.

Na rys. 4 pokazano przykładowy zarejestrowany przebieg przyśpieszeń drgań gruntu od wstrząsu górniczego, który jest wynikiem eksploatacji podziemnej wraz z wyliczonym na jego podstawie przebiegiem prędkości drgań w przypadku, gdy niezbędna korekta linii bazowej była niewielka, a określony charakter trendu – liniowy.

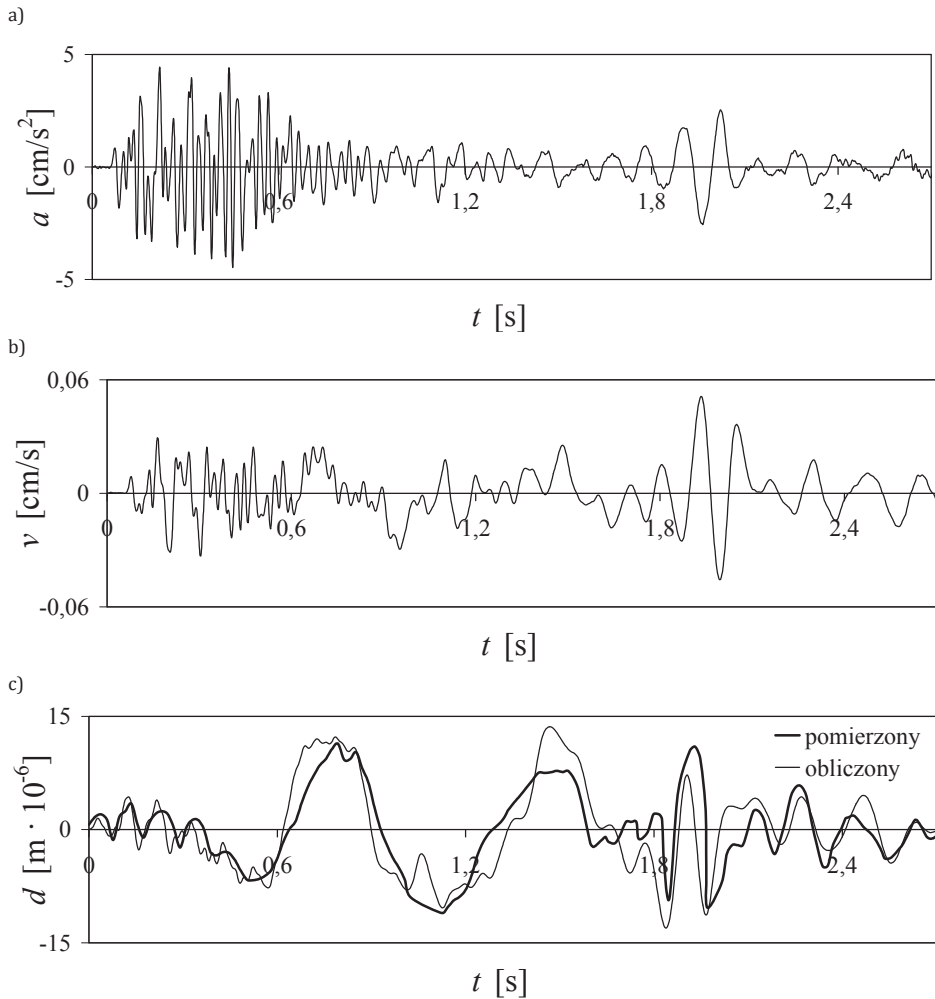


Rys. 4. Przebiegi drgań gruntu od wstrząsu górniczego o energii $E_n = 4,5 \cdot 10^8$ i odległości epicentralnej $r_e = 3357$ m: a) pomierzony przebieg przyśpieszeń drgań, b) obliczony przebieg prędkości drgań bez korekty linii bazowej, c) obliczony przebieg prędkości drgań z korektą linii bazowej (trend liniowy)

Z kolei rys. 5 ilustruje, jak istotny wpływ na uzyskane rezultaty może mieć poprawne określenie charakteru trendu przebiegu drgań. W tym celu pokazano na nim „wyjściowy” – przykładowy pomierzony przebieg przyśpieszeń drgań gruntu od wstrząsu górniczego, który również został wywołany jako skutek eksploatacji



Rys. 5. Przebiegi drgań gruntu od wstrząsu górniczego o energii $E_n = 4,2 \cdot 10^7$ J i odległości epicentralnej $r_e = 1668$ m: a) pomierzony przebieg przyspieszeń drgań; b) obliczony przebieg prędkości drgań bez korekty linii bazowej (1), c) obliczony przebieg prędkości drgań z usunięciem trendu liniowego (2), d) obliczony przebieg prędkości drgań z usunięciem trendu w postaci wielomianu drugiego stopnia (3)



Rys. 6. Przebiegi drgań gruntu od odstrzału materiału wybuchowego w kopalni odkrywkowej: a) pomierzony przebieg przyspieszeń drgań, b) obliczony przebieg prędkości drgań, c) porównanie obliczonego i pomierzonego przebiegu przemieszczeń drgań

podziemnej (rys. 5a) i obliczony na jego podstawie przebieg prędkości drgań w trzech wariantach: 1) gdy nie dokonano korekty linii bazowej (rys. 5b), 2) gdy usunięto trend liniowy (rys. 5c), 3) gdy linia trendu jest wielomianem 2-giego stopnia (rys. 5d). Widać, że różnice w otrzymanych przebiegach prędkości drgań w tych trzech podejściach mogą być znaczące. Trend sygnału powinien być każdorazowo badany, nie można „z góry” zakładać jego charakteru, np. liniowego.

Na rys. 6 pokazano przykładowy rezultat zastosowania przygotowanego podejścia do dwóch etapów całkowania przebiegów drgań gruntu od wstrząsu wywołanego odstrzałem materiału wybuchowego w kopalni odkrywkowej

(kamieniołomie). Na podstawie zarejestrowanego *in situ* przebiegu przyśpieszeń drgań gruntu (rys. 6a) wyznaczono przebieg prędkości drgań (1 etap całkowania, rys. 6b). Następnie, używając tak otrzymanego przebiegu prędkości drgań, wyliczono przebieg przemieszczeń drgań (2 etap całkowania, rys. 6c). Uzyskany w ten sposób przebieg przemieszczeń drgań porównano z przebiegiem przemieszczeń drgań z badań doświadczalnych. Należy wspomnieć, że pomiary przebiegów przyśpieszeń drgań i pomiary przebiegów przemieszczeń drgań prowadzone były z użyciem różnego typu aparatury – odpowiednio: akcelerometru i sejsmografu. Mimo tego przebieg przemieszczeń drgań uzyskany w wyniku dwukrotnego całkowania eksperymentalnie wyznaczonego przebiegu przyśpieszeń drgań, wykazuje dość dobrą dla celów praktycznych zgodność z przebiegiem rzeczywistym w zakresie amplitud i częstotliwości drgań.

W wyniku przeprowadzonych rozważań stwierdzono, że całkowanie przebiegów przyśpieszeń drgań metodą Runge-Kutty IV rzędu z korektą linii bazowej pozwala na wyznaczanie odpowiednich przebiegów prędkości i dalej przemieszczeń drgań z zadowalającą dokładnością. Istotny wpływ na uzyskane rezultaty może mieć poprawne określenie charakteru trendu przebiegu drgań.

Bibliografia

- [1] Atkinson K.E., *An Introduction to Numerical Analysis*, Wiley Ed., New York 1988
- [2] Bendat J.S., Piersol A.G., *Metody analizy i pomiarów sygnałów losowych*, PWN, Warszawa 1976
- [3] Giergiel J., Uhl T., *Identyfikacja układów mechanicznych*, PWN, Warszawa 1990
- [4] Manual Matlab 7.6.0.324, 2008
- [5] Maurin K., *Analiza. Część I. Elementy*, PWN, Warszawa 1976
- [6] Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P., *Numerical Recipes in Fortran*, Cambridge University Press 1992
- [7] Ralston A., *Wstęp do analizy numerycznej*, PWN, Warszawa 1975
- [8] Smith S.W., *Cyfrowe przetwarzanie sygnałów*, Wyd. BTC, Warszawa 2007

Selected problems of vibrations integration

Abstract

The paper deals with an analysis of the influence of integration method and initially pre-processing of vibrations (trend removing) on the accuracy of results obtained. The verification of the approach discussed was performed with the application of measured actual vibrations from mining tremors.

Key words: integration, vibrations, trend removing