

Miluše Vítečková, Antonín Víteček, Kazimierz Jaracz

Dobór nastaw regulatorów o dwóch stopniach swobody dla obiektów całkujących z opóźnieniem

Obiekty całkujące występują w przemyśle bardzo często [1–3]. Jeśli zakłócenia oddziałują na ich wejścia, to żeby usunąć uchyby ustalone, należy stosować regulatory o działaniu całkującym. Niestety regulatory te powiększają stopień astatyzmu układu regulacji, a tym samym powodują występowanie dużych przeregulowań i skłonność do oscylacji, a nawet mogą przy niewielkich zmianach parametrów obiektów spowodować utratę stabilności [6–9]. Dlatego dobór nastaw regulatorów całkujących należy do zadań trudniejszych [1–5].

Założmy, że obiekt regulacji opisany jest transmitancją

$$G_{OB}(s) = \frac{k_1}{s} e^{-T_o s} \quad (1)$$

gdzie: k_1 jest współczynnikiem wzmocnienia, T_o – opóźnieniem.

Standardowe regulatory typu PID i PI (z jednym stopniem swobody) mają transmitancje o postaciach odpowiednio

$$G_R(s) = k_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) \quad (2)$$

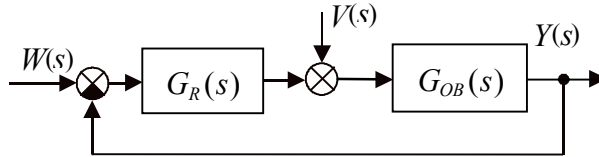
$$G_R(s) = k_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right) \quad (3)$$

gdzie: k_P jest wzmocnieniem regulatora, T_I – czasem zdwojenia (izodromu), T_D – czasem wyprzedzenia (różniczkowania).

Problemy występujące w układach z regulatorami całkującymi

Przy zastosowaniu regulatorów całkujących występują niekiedy istotne problemy, które zostaną krótko omówione w dalszej części artykułu.

Dla układu regulacji przedstawionego na rysunku 1 z regulatorem standardowym o jednym stopniu swobody, $E(s)$, $W(s)$, $U(s)$, $V(s)$ oraz $Y(s)$ oznaczają odpowiednio: transformaty uchybu regulacji $e(t)$, wielkości zadanej $w(t)$, wielkości sterującej $u(t)$, wielkości zakłócającej $v(t)$ oraz wielkości regulowanej $y(t)$, $G_R(s)$ – jest transmitancją regulatora, $G_{OB}(s)$ – transmitancją obiektu.



Rys. 1. Schemat układu regulacji z regulatorem z jednym stopniem swobody

Zgodnie z rysunkiem 1 dla standardowego regulatora typu PID o transmitancji (2) transformaty składowych uchybów regulacji $E_w(s)$ oraz $E_v(s)$ spowodowanych odpowiednio skokami wielkości zadanej $w(t)$ oraz zakłócającej $v(t)$, wyrażonych transformatami odpowiednio:

$$W(s) = \frac{w_0}{s}, \quad V(s) = \frac{v_0}{s} \quad (4)$$

dane są zależnościami:

$$E_w(s) = \frac{1}{1 + G_R(s)G_{OB}(s)} = \frac{T_I w_0 s}{T_I s^2 + k_1 k_p (T_I T_D s^2 + T_I s + 1) e^{-T_o s}} \quad (5)$$

$$E_v(s) = -\frac{G_{OB}(s)}{1 + G_R(s)G_{OB}(s)} = -\frac{k_1 T_I v_0}{T_I s^2 + k_1 k_p (T_I T_D s^2 + T_I s + 1) e^{-T_o s}} e^{-T_o s} \quad (6)$$

gdzie: w_0 oraz v_0 są amplitudami skoków.

Wyrażenia (5) i (6) dla $T_D = 0$ są również ważne dla standardowego regulatora typu PI.

Według oczekiwań dla uchybów ustalonych na podstawie wzorów (5) i (6) otrzymuje się

$$e_w(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [sE_w(s)] = 0 \quad (7)$$

$$e_v(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [sE_v(s)] = 0 \quad (8)$$

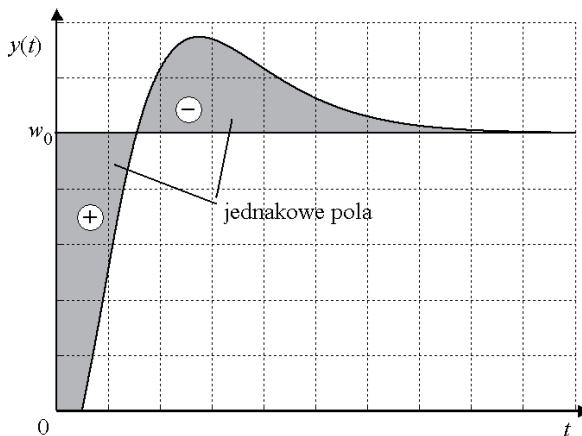
Właśnie wymaganie zerowych wartości uchybów ustalonych (7) i (8) jest powodem stosowania regulatorów z działaniem całkującym.

Na podstawie transformat uchybów (5) i (6) można łatwo obliczyć całki odpowiednich składowych uchybów, które wynoszą:

$$\int_0^{\infty} e_w(t) dt = \lim_{s \rightarrow 0} E_w(s) = 0 \quad (9)$$

$$\int_0^{\infty} e_v(t) dt = \lim_{s \rightarrow 0} E_v(s) = -\frac{T_I v_0}{k_P} \neq 0 \quad (10)$$

Bardzo ważna jest interpretacja uzyskanych wyników. Z zależności (9) wynika, że przy zastosowaniu standardowych regulatorów typu PID oraz PI (tj. regulatorów z działaniem całkującym) dla obiektów całkujących nie można osiągnąć odpowiedzi bez przeregulowania przy skokowej zmianie wielkości zadanej (4). Jest to przedstawione na rysunku 2.



Rys. 2. Interpretacja geometryczna zależności (9)

Z zależności (10) wynika natomiast, że odpowiednim doбором nastaw standardowych regulatorów typu PID oraz PI dla obiektów całkujących można osiągnąć przy skokowej zmianie wielkości zakłócającej (4) odpowiedzi aperiodycznej bez przeregulowania.

Powyzsze wnioski są ważne nie tylko dla obiektu (1), ale dla jakichkolwiek obiektów całkujących (z całkowaniem pierwszego rzędu).

Jeśli zatem jest wymagana odpowiedź aperiodyczna bez przeregulowania przy skokowej zmianie wielkości zadanej (4), to należy zastosować ograniczenie szybkości narastania wielkości zadanej $w(t)$ lub filtr wejściowy. Najwygodniejszym sposobem jest zastosowanie regulatorów z dwoma stopniami swobody, które umożliwiają dobór nastaw przy zmianach zarówno wielkości zakłócającej $v(t)$, jak i wielkości zadanej $w(t)$.

Przy zastosowaniu regulatora standardowego typu PID występuje jeszcze problem z początkową wartością wielkości sterującej $u(0)$.

Transmitancja układu regulacji przedstawionego na rysunku 1 dla relacji sygnałów „wielkość zadana–wielkość sterująca” ma postać

$$G_{wu}(s) = \frac{U(s)}{W(s)} = \frac{G_R(s)}{1 + G_R(s)G_{OB}(s)} = \frac{k_p(T_I T_D s^2 + T_I s + 1)s}{T_I s^2 + k_1 k_p (T_I T_D s^2 + T_I s + 1) e^{-T_o s}} = \quad (11)$$

$$= \frac{k_p T_D s}{1 + k_1 k_p T_D e^{-T_o s}} + \frac{k_p (T_I s + 1)s}{[T_I s^2 + k_1 k_p (T_I T_D s^2 + T_I s + 1) e^{-T_o s}] (1 + k_1 k_p T_D e^{-T_o s})}$$

Wartość początkowa wielkości sterującej $u(0)$, przy określonej wyrażeniem (4) wielkości $W(s)$ dana jest wyrażeniem

$$u(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} [s G_{wu}(s) W(s)] = k_p T_D w_0 \delta(t) + k_p w_0 \quad (12)$$

tnz. wielkość sterująca w chwili $t = 0$ zawiera impuls Diraca (teoretycznie o amplitudzie nieskończenie wielkiej).

Wniosek ten jest ważny dla idealnej postaci transmitancji standardowego regulatora PID. W praktyce składowa różniczkująca zawsze posiada pewną inercję wynikającą z filtracji filtrem o transmitancji

$$\frac{T_D s}{T_f s + 1} \quad (13)$$

gdzie: T_f jest stała czasowa filtracji składowej różniczkującej.

W regulatorach rzeczywistych stała czasowa filtracji najczęściej spełnia nierówność [2, 5, 6]

$$5 \leq \frac{T_D}{T_f} \leq 20 \quad (14)$$

Transmitancja standardowego regulatora PID z filtracją składowej różniczkującej po przekształceniu ma postać

$$G'_R(s) = k_p \left(1 + \frac{T_f}{T_I} \right) \left[1 + \frac{1}{T_I \left(1 + \frac{T_f}{T_I} \right) s} + \frac{T_D + T_f}{1 + \frac{T_f}{T_I}} s \right] \frac{1}{T_f s + 1} \quad (15)$$

W tym przypadku wartość początkowa wielkości sterującej jest

$$u(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[s \frac{G'_R(s)}{1 + G'_R(s)G_{OB}(s)} W(s) \right] = k_p \left(1 + \frac{T_D}{T_f} \right) w_0 \quad (16)$$

Po uwzględnieniu zależności (14) otrzyma się

$$6k_p \leq \frac{u(0)}{w_0} \leq 21k_p \quad (17)$$

Widać zatem, że i w tym przypadku wartość początkowa wielkości sterującej $u(0)$ jest bardzo duża.

Problem bardzo dużej wartości początkowej wielkości sterującej występuje przy zastosowaniu regulatorów typu PID dla obiektów całkujących i w zasadzie nie można go całkowicie usunąć nawet dla regulatorów z dwoma stopniami swobody.

Dla porównania przy zastosowaniu standardowego regulatora PI z zależności (12) dla $T_D = 0$ otrzymuje się

$$u(0) = k_p w_0 \quad (18)$$

Dla regulatora PI występuje zatem znacznie mniejsza wartość początkowa wielkości sterującej.

Regulatory z dwoma stopniami swobody

Konwencjonalny regulator PID z dwoma stopniami swobody opisany jest zależnością [2]

$$U(s) = k_p \left[bW(s) - Y(s) + \frac{1}{T_I s} [W(s) - Y(s)] + T_D s [cW(s) - Y(s)] \right] \quad (19)$$

gdzie: b jest wagą wielkości zadanej dla składowej proporcjonalnej, c – wagą wielkości zadanej dla składowej różniczkującej.

Zakłada się, że obydwie wagi mogą przyjmować wartości z przedziału 0–1.

Układ regulacji z regulatorem o dwóch stopniach swobody (19) może zostać przedstawiony w postaci standardowego regulatora typu PID (2) oraz filtra wejściowego wielkości zadanej, jak to pokazano na rysunku 3. Wtedy

$$G_F(s) = \frac{W'(s)}{W(s)} = \frac{cT_I T_D s^2 + bT_I s + 1}{T_I T_D s^2 + T_I s + 1} \quad (20)$$

Dla $T_D = 0$ z zależności (19) uzyska się regulator PI z dwoma stopniami swobody, któremu w schemacie przedstawionym na rysunku 3 odpowiada filtr wejściowy o transmitancji

$$G_F(s) = \frac{W'(s)}{W(s)} = \frac{bT_I s + 1}{T_I s + 1} \quad (21)$$

oraz standardowy regulator typu PI o transmitancji określonej relacją (3).

Dla $b = c = 1$ z zależności (19) otrzymuje się standardowy regulator PID (2) oraz dla $T_D = 0$ i $b = 1$ standardowy regulator PI (3).

Zgodnie z rysunkiem 3 nastawy filtra wejściowego $G_f(s)$ dobierane są z punktu widzenia śledzenia wielkości zadanej $w(t)$, natomiast nastawy standardowego regulatora $G_r(s)$ dobierane są z punktu widzenia maksymalnego stłumienia wpływu wielkości zakłócającej $v(t)$.

Metoda wielokrotnego bieguna dominującego

Metoda wielokrotnego bieguna dominującego zakłada istnienie stabilnego bieguna rzeczywistego z wielokrotnością równą liczbie nastawialnych parametrów regulatora powiększonej o jedność [4, 6–9].

Quasi-wielomian charakterystyczny dla zamkniętego układu regulacji ze standardowym regulatorem typu PID (przekształcony mianownik wyrażeń (5) i (6)) ma postać

$$N(s) = s^2 e^{T_o s} + k_1 k_p \left(T_D s^2 + s + \frac{1}{T_I} \right) \quad (22)$$

Wielokrotny biegun dominujący oraz nastawy standardowego regulatora PID można obliczyć z układu równań:

$$\frac{d^i N(s)}{ds^i} = 0 \quad \text{dla } i = 0, 1, 2, 3 \quad (23)$$

tj.

$$\begin{aligned} s^2 e^{T_o s} + k_1 k_p \left(T_D T_I s^2 + s + \frac{1}{T_I} \right) &= 0 \\ (T_o^2 s^2 + 2s) e^{T_o s} + 2k_1 k_p T_D s + k_1 k_p &= 0 \\ (T_o^2 s^2 + 4T_o s + 2) e^{T_o s} + 2k_1 k_p T_D &= 0 \\ T_o^2 s^2 + 6T_o s + 6 &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

Z układu równań (24) otrzymuje się czterokrotny biegun dominujący

$$s_4^* = -\frac{3 - \sqrt{3}}{T_o} \quad (25)$$

oraz kolejno pozostałe nastawy:

$$\begin{aligned} k_p^* &= \frac{6(2\sqrt{3} - 3)}{k_1 T_o} e^{\sqrt{3} - 3} \doteq 0,784 \frac{1}{k_1 T_o} \\ T_I^* &= (2 + \sqrt{3}) T_o \doteq 3,732 T_o \\ T_D^* &= \frac{3 + \sqrt{3}}{18} T_o \doteq 0,263 T_o \end{aligned} \quad (26)$$

Podobnie dla $T_D = 0$ w quasi-wielomianie charakterystycznym (22) dla standardowego regulatora PI z układu równań (23) dla $i = 0, 1, 2$ otrzyma się trzykrotny biegun dominujący

$$s_3^* = -\frac{2 - \sqrt{2}}{T_o} \quad (27)$$

oraz nastawy:

$$k_P^* = \frac{2(\sqrt{2} - 1)}{k_1 T_o} e^{\sqrt{2}-2} \doteq 0,461 \frac{1}{k_1 T_o} \quad (28)$$

$$T_I^* = (3 + 2\sqrt{2})T_o \doteq 5,828T_o$$

Transmitancje zamkniętego układu regulacji z regulatorem typu PID oraz PI z dwoma stopniami swobody zgodnie z rysunkiem 3 mają odpowiednio postacie:

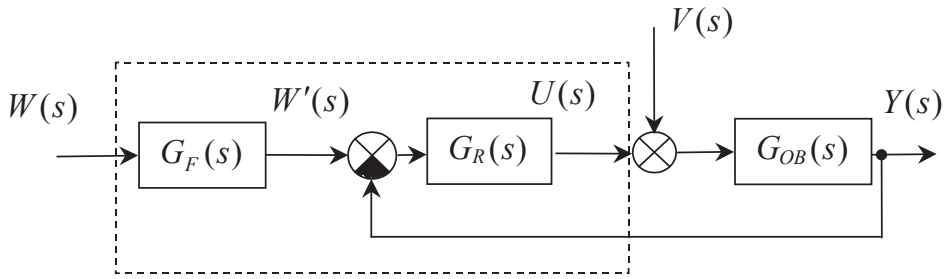
$$G_{wy}(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{cT_I^*T_D^*s^2 + bT_I^*s + 1}{\frac{T_I^*}{k_1 k_P^*} s^2 + (T_I^*T_D^*s^2 + T_I^*s + 1) e^{-T_o s}} e^{-T_o s} \approx$$

$$\approx \frac{cT_I^*T_D^*s^2 + bT_I^*s + 1}{\left(\frac{1}{|s_4^*|} s + 1 \right)^4} e^{-T_o s} \quad (29)$$

$$G_{wy}(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{bT_I^*s + 1}{\frac{T_I^*}{k_1 k_P^*} s^2 + (T_I^*s + 1) e^{-T_o s}} e^{-T_o s} \approx$$

$$\approx \frac{bT_I^*s + 1}{\left(\frac{1}{|s_3^*|} s + 1 \right)^3} e^{-T_o s} \quad (30)$$

Duże przeregulowania odpowiedzi skokowych spowodowanych wielkością zadaną $w(t)$ powodują zera stabilne w licznikach transmitancji zamkniętych układów regulacji z regulatorami standardowymi. Dlatego przy zastosowaniu regulatorów z dwoma stopniami swobody liczniki te zostaną skompensowane (skrócone) przez odpowiednie mianowniki transmitancji filtrów wejściowych (20) lub (21). Najczęściej dobiera się wagi wielkości zadanej o wartościach $b = c = 0$. Uzyskuje się wtedy odpowiedzi skokowe na wielkość zadaną $w(t)$ bez przeregulowań.



Rys. 3. Schemat układu regulacji z dwoma stopniami swobody

Odpowiedzi te można dodatkowo przyspieszyć, jeżeli wagi wielkości zadanej b i c w transmitancjach filtrów wejściowych zostaną dobrane tak, żeby w przypadku regulatora PID z dwoma stopniami swobody licznik filtru wejściowego (20) skompensował dwa bieguny dominujące (25) oraz, w przypadku regulatora PI z dwoma stopniami swobody, żeby licznik filtru wejściowego (21) skompensował jeden biegun dominujący (27).

Dla regulatora PID z dwoma stopniami swobody można więc napisać następujące równanie [zob. (20) i (29)]

$$\left(\frac{1}{|s_4^*|} s + 1 \right)^2 = c T_I^* T_D^* s^2 + b T_I^* s + 1 \quad (31)$$

oraz po podstawieniu (25) i (26) do (31) otrzymuje się

$$b^* = \frac{3 - \sqrt{3}}{3} \doteq 0,423; \quad c^* = \frac{3 - \sqrt{3}}{2} \doteq 0,634 \quad (32)$$

Podobnie dla regulatora PI z dwoma stopniami swobody można z równania [zob. (21) i (30)]

$$\frac{1}{|s_3^*|} s + 1 = b T_I^* s + 1 \quad (33)$$

po podstawieniu (27) i (28) do (33) otrzymuje się

$$b^* = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \doteq 0,293 \quad (34)$$

Metoda eksperymentalna

Na podstawie wielokrotnych eksperymentów oraz doświadczeń określono nastawy regulatorów z dwoma stopniami swobody dla obiektu o transmitancji (1):

– regulator PID z dwoma stopniami swobody

$$k_P^* = \frac{1}{k_1 T_o}; \quad T_I^* = 3T_o; \quad T_D^* = 0,35T_o; \quad b^* = 0,3; \quad c^* = 0,3 \quad (35)$$

– regulator PI z dwoma stopniami swobody

$$k_P^* = 0,6 \frac{1}{k_1 T_o}; \quad T_I^* = 4,15T_o; \quad b^* = 0,25 \quad (36)$$

Przykład

Dla obiektu o transmitancji

$$G_{OB}(s) = \frac{0,05}{s} e^{-5s}$$

należy dla regulatorów PI oraz PID z dwoma stopniami swobody dobrać ich nastawy tak, żeby odpowiedzi na skokowe zmiany wielkości zadanej $w(t)$ i wielkości zakłócającej $v(t)$ oddziaływającej na wejściu obiektu były aperiodyczne bez przeregulowań (opóźnienie wyrażono w sekundach).

Rozwiązanie

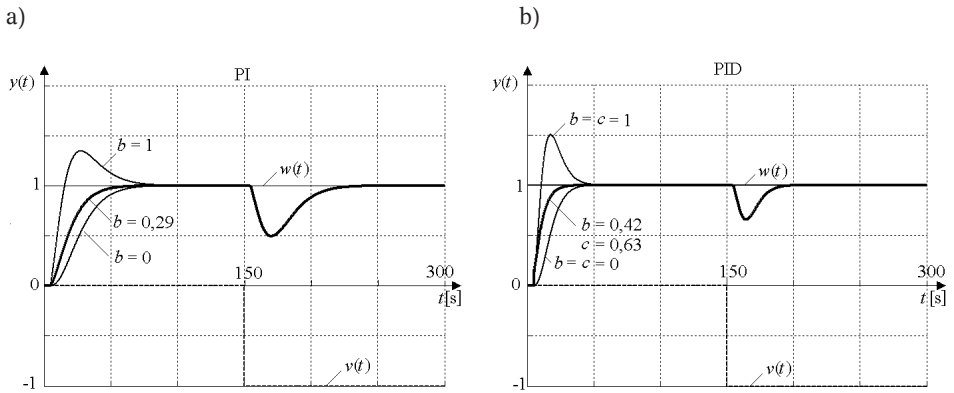
Dla parametrów obiektu $k_1 = 0,05 \text{ s}^{-1}$ oraz $T_o = 5 \text{ s}$ obliczono nastawy i zamieszczono w tabeli 1.

Odpowiedzi skokowe dla obu metod dla różnych wartości wag b oraz c wielkości zadanej $w(t)$ pokazano na rysunkach 4 oraz 5. Widać, że dla proponowanych wartości wag odpowiedzi są znacznie szybsze.

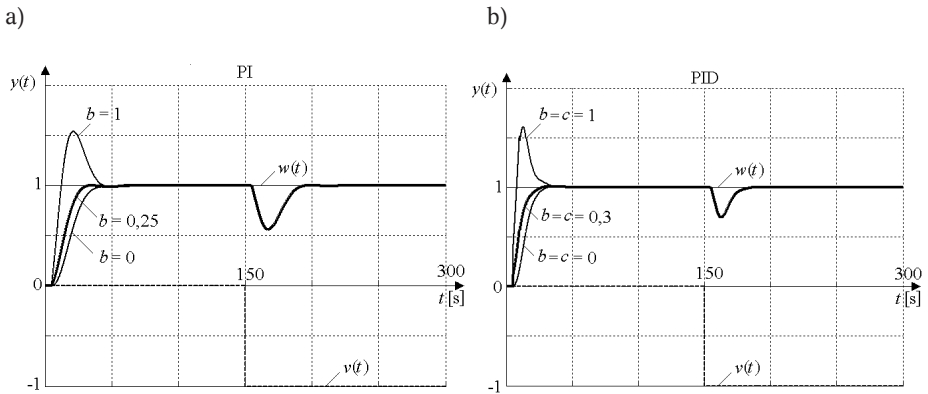
Na rysunkach 6 oraz 7 przedstawiono wpływ zmian opóźnienia T_o o $\pm 20\%$. Obydwie metody wykazują stosunkowo dobrą odporność, a więc nadają się do praktycznego wykorzystania.

Tab. 1. Obliczone nastawy regulatorów z przykładu 1

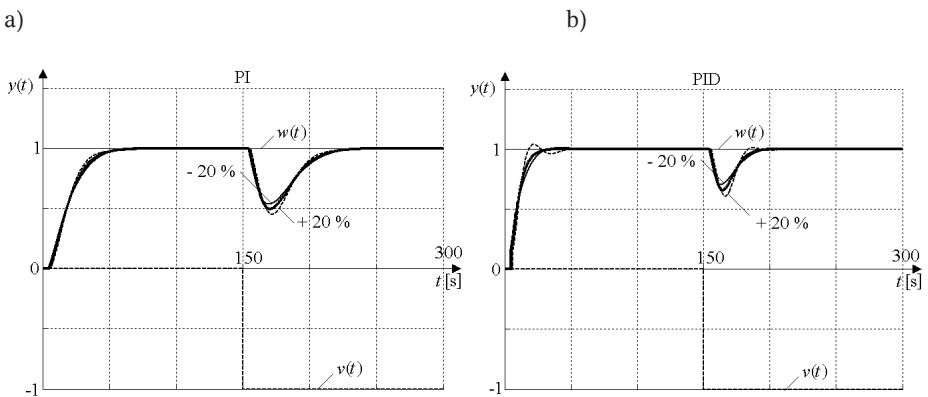
Metoda	Regulator z dwoma stopniami swobody					
	TYP	k_P^*	T_I^*	T_D^*	b^*	c^*
Wielokrotnego bieguna dominującego	PI	1,84	29,14	–	0,29	–
	PID	3,14	18,66	1,32	0,42	0,63
Eksperymentalna	PI	2,5	20,75	–	0,25	–
	PID	4	15	1,75	0,3	0,3



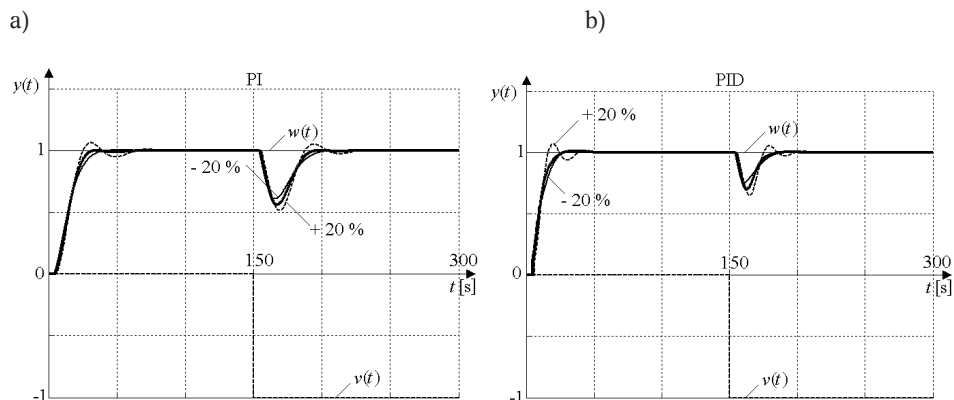
Rys. 4. Odpowiedzi skokowe układu regulacji z regulatorem z dwoma stopniami swobody dla metody wielokrotnego bieguna dominującego: a) PI, b) PID



Rys. 5. Odpowiedzi skokowe układu regulacji z regulatorem z dwoma stopniami swobody dla metody eksperymentalnej: a) PI, b) PID



Rys. 6. Odpowiedzi skokowe układu regulacji z regulatorem z dwoma stopniami swobody dla metody wielokrotnego bieguna dominującego dla zmian opóźnienia $\pm 20\%$: a) PI, b) PID



Rys. 7. Odpowiedzi skokowe układu regulacji z regulatorem z dwoma stopniami swobody dla metody eksperymentalnej dla zmian opóźnienia $\pm 20\%$: a) PI, b) PID

Wnioski

W artykule zaprezentowano dwie metody doboru nastaw regulatorów typu PID oraz PI z dwoma stopniami swobody. Metoda wielokrotnego bieguna dominującego jest metodą w pełni analityczną i dlatego bardzo dobrze nadaje się również do celów dydaktycznych. Zapewnia dobrą jakość procesu regulacji i jest dostatecznie odporna. Metoda eksperymentalna zapewnia szybsze odpowiedzi skokowe, co wymaga większych wartości wielkości sterującej. Jej odporność na zmiany opóźnienia jest nieco niższa niż w metodzie wielokrotnego bieguna dominującego. Obydwie metody są bardzo proste i zapewne znajdą wiele zastosowań w praktyce.

Artykuł powstał w ramach prac nad projektem grantowym GAČR nr 102/09/0894.

Bibliografia

- [1] Alenay A., Abdelrahman O., Ziedan I., *Rules of PID Controllers for Integrator/Dead Time Processes*, In: ACSE 05 Conference, 19–21 December 2005, Cairo, Egypt, pp. 6
- [2] Åström K.J., Hägglund T., *Advanced PID Control*. Research Triangle Park: ISA – Instrumentation, Systems, and Automatic Society, 2006
- [3] Chidambaram M., Sree R.P., *A Simple Method of Tuning PID Controllers for Integrator/Dead-Time Processes*, Computer and Chemical Engineering 27, 2003, p. 211–215
- [4] Górecki H., *Analiza i synteza układów regulacji z opóźnieniem*, WNT, Warszawa 1971
- [5] O'Dwyer A., *Handbook of PI and PID Controller Tuning Rules*, Imperial College Press, London 2006
- [6] Šulc B., Vítečková M., *Teorie a praxe návrhu regulačních obvodů*, Vydavatelství ČVUT, Praha 2004
- [7] Vítečková M., Víteček A., *Controller Tuning for Integral Plus Time Delay Plants*, Transactions of the VŠB – Technical University of Ostrava. Mechanical Series, vol. LIII, no. 2/2007, p. 159–166
- [8] Vítečková M., Víteček A., *Two-degree of Freedom Controller Tuning for Integral Plus Time Delay Plants*, ICIC Express Letters, vol. 2, no. 3, September 2008, p. 225–229

- [9] Vítečková M., Jaracz K., *Metoda doboru nastaw regulatorów przy pożądanym modelu matematycznym układu regulacji*, *Anales Academiae Paedagogicae Cracoviensis. Studia Technica I*, Folia 32, Kraków 2006, s. 129–135

Tuning of Controllers with two Degree of Freedom for Integrating Plants with Time Delay

Abstract

The article describes two tuning methods of PID and PI controllers with two degree of freedom for integrating plants with time delay. The first multiplied dominant pole method is fully analytical method, while the second method is purely empirical. The use of both methods is shown in the example, from which follows possibility of their wide practical using.

Key words: controller tuning, controllers with two degree of freedom, integrating plant, time delay, PID