Barbara Nawolska,
Joanna Żądło

Uniwersytet Pedagogiczny im. KEN w Krakowie

DZIAŁA(NIE) A POZNA(NIE) W EDUKACJI MATEMATYCZNEJ DZIECKA

Streszczenie

Podstawą kształtowania pojęć matematycznych i uczenia się matematyki są doświadczenia typu logiczno-matematycznego. Doświadczenia te są wprawdzie początkowo efektem działania na przedmiotach, ale nie przedmioty i ich cechy fizyczne są istotne w tych doświadczeniach, lecz efekty samych czynności, które są stopniowo uwewnętrzniane i mogą być realizowane jedynie w myśli, co jest podstawą tworzenia abstrakcyjnych pojęć a więc wiedzy matematycznej.

W procesie uczenia matematyki zapomina się czasami, że nie każda czynność fizyczna jest podstawą budowania pojęć matematycznych. Nie wystarczy więc dostarczyć dziecku konkretów i zachęcić do manipulowania nimi. Ważne jest, jakie czynności wykonuje dziecko, jaki jest efekt tych działań i jakie procesy myślowe temu towarzyszą. Nie każda czynność fizyczna świadczy o aktywności dziecka (w bezruchu można być aktywnym matematycznie).

Słowa kluczowe: kształtowanie pojęć matematycznych, poznanie i działanie w uczeniu się matematyki, obwód prostokąta

KNOWLEDGE AND ACTION IN THE MATHEMATICAL EDUCATION OF THE CHILD

Abstract

The basis of shaping mathematical concepts and learning mathematics are experiences of logical-mathematical type. Those experiences are admittedly at first an effect of calculations on objects, but not the objects and their physical characteristics are important, but the effects of actions themselves. At first, a child has to take physical actions, but step after step they are externalizing and can be realized only in mind, which is the basis of creating abstract concepts, like mathematical knowledge.

In the process of learning mathematics it is forgotten sometimes, that not every physical action is a basis to built mathematical concepts. It is not enough to give a child specifics and encourage to manipulate them. It's important to see what actions the child takes, what's the effect and what thought processes accompanies them. Not every physical activity indicates child's activeness. Stillness can mean that child is mathematically active.

Keywords: shaping mathematical concepts, knowledge and action in learning mathematics, perimeter of the rectangle

Uczymy się przez działanie (można także prowadzić działania na słowach i liczbach, a kto myśli, manipuluje myślami!). W żadnym razie nie umiemy matematyki (…), jeśli na pamięć wyuczyliśmy się reguł

(Spitzer 2007, 290–291).

Trochę teorii

W nabywaniu wiedzy pojęciowej dziecko przechodzi od konkretu, jego cech fizycznych i działania na nim do pojęcia. W matematyce zaś jako nauce abstrakcyjnej nie można poznawać obiektów matematycznych jako konkretnych przedmiotów, bo takie nie istnieją, ale działając na przedmiotach, można wykonywać takie czynności, które są podstawą tworzenia abstrakcyjnych pojęć matematycznych.

Na istotną rolę zmysłów w procesie uczenia się zwrócił uwagę już J.A. Komeński, który twierdził, że „zmysły muszą być punktem wyjścia dla każdego poznania (bo niczego nie ma w umyśle, czego by wpierw nie było w zmysłach)" (za Kurdybacha 1967, 508). Ważne też było używanie języka do zwerbalizowania nabytych doświadczeń. Te poglądy znalazły potwierdzenie w późniejszych psychologicznych teoriach rozwoju myślenia. Zarówno bowiem J. Piaget, jak i L. Wygotski czy J. Bruner wskazywali na istotną rolę działania w procesie uczenia się i rozwoju myślenia. Zwracali uwagę na to, że sam uczeń konstruuje swoją wiedzę w kontakcie z różnorodnymi materiałami, poprzez rozmaite doświadczenia, ale też w kontakcie z innymi osobami. Zdaniem wymienionych psychologów dziecko jest architektem swojego rozumienia. Według Piageta o gotowości do uczenia się decyduje stadium rozwoju dziecka, a zdaniem Wygotskiego i Brunera istotne jest jeszcze doświadczenie społeczne, w tym szczególnie społeczne interakcje oraz język jako składowy element komunikacji (por. Wood 2006, 34–36).

Także z najnowszych badań neuropsychologicznych wynika, że w procesie uczenia się istotne są czynności manualne, bowiem aż 1/3 naszego mózgu odpowiada za motorykę a więc za nasze działania. Nie jesteśmy pasywnymi obserwatorami otaczającej nas rzeczywistości, ale aktywnie kształtujemy swój świat. „Samo słowo *pojmować* świadczy o dużej roli rąk w procesie uczenia się" (Spitzer 2013, 160). Taki, manualny, sposób poznawania świata i zdobywania wiedzy dotyczy również wiedzy matematycznej, której nie można przekazać w gotowej postaci. Nie da się jej „wlać jak przez lejek"[1] do głowy dziecka. „Kto uważa, że uczenie się jest czymś biernym, ten szuka lejka. Kto uważa, że uczenie się jest aktywnością (…) ten nie poszukuje lejka, tylko zastanawia się nad tym, jak stworzyć dla tej aktywności optymalne warunki" (Spitzer 2007, 17). Zatem każdy do wiedzy matematycznej musi dojść sam, musi tę wiedzę skonstruować w wyniku własnych doświadczeń. Nie jest obojętne, jakie doświadczenia i w jaki sposób zdobywa je uczące się dziecko. Zdaniem M. Spitzera „czynnościowe wzorce aktywacji utrwalają się w mózgu jako element przyswojonej struktury pojęciowej jedynie wtedy, gdy procesowi uczenia się towarzyszą czynności manualne, a nie podczas samego przyglądania się obiektom" (Spitzer 2013, 157). Oprócz czynności fizycznych (manualnych) istotne są procesy myślowe tym czynnościom towarzyszące i refleksja nad tym, co i po co robimy. Niebanalne są też interakcje społeczne towarzyszące procesowi nabywania

[1] Chodzi o koncepcję „lejka norymberskiego" wspominaną m.in. przez M. Spitzera (por. 2007, 15–17).

wiedzy. Ten fakt dostrzega również M. Hejny, który w prawidłowym procesie uczenia się matematyki wyróżnia 5 etapów:

1. **Motywacja** – ukierunkowanie zainteresowania dziecka na sytuacje dydaktyczne będące nośnikami pojęć matematycznych.
2. **Etap izolowanych modeli** – nabywanie pierwszych doświadczeń, między którymi początkowo dziecko nie dostrzega żadnych związków.
3. **Etap uniwersalnych modeli** – dostrzeganie cech wspólnych wcześniej nabytych doświadczeń izolowanych i przenoszenie własności jednego modelu na inny.
4. **Podniesienie abstrakcji** – oderwanie się od konkretu i uświadomienie sobie niezależności pojęć matematycznych od cech fizycznych ich materialnych modeli (abstrahowanie).
5. **Etap krystalizacji** – włączanie nowej wiedzy do już istniejących struktur poznawczych (por. Hejny 1997, 17–18).

Każdy z wymienionych etapów jest znaczący w nabywaniu wiedzy matematycznej i każdy z nich bazuje na działaniu, poczynając od działania na przedmiotach konkretnych, poprzez działanie na słowach i liczbach, aż do manipulowania myślami. W edukacji przedszkolnej i wczesnoszkolnej zaczynamy od operacji na konkretach, gdyż rozumowanie logiczne na podstawie przesłanek słownych jest dla dziecka zbyt trudne. Dziecko manipulując przedmiotami gromadzi doświadczenia logiczno-matematyczne, w których ważny jest efekt wykonywanych czynności, a nie materiał, na którym są one wykonywane. Dopiero doświadczenia te są podstawą tworzenia izolowanych modeli. Im więcej takich doświadczeń gromadzi dziecko, tym łatwiej dostrzec mu ich cechy wspólne (dzięki ich porównywaniu, hierarchizowaniu). To jest podstawą uświadamiania możliwości przenoszenia własności z jednego modelu na inny, uogólnienia wszystkich izolowanych modeli i przejścia na wyższy poziom rozwoju pojęć. Od tego momentu dzieci mogą posługiwać się modelem uniwersalnym, np. liczeniem palców i na palcach zamiast liczeniem innych obiektów. Jednak nadal na tym etapie dziecku potrzebny jest konkret i działanie na nim. Dopiero w momencie podniesienia abstrakcji następuje zerwanie z konkretem i uświadomienie sobie pewnych prawidłowości matematycznych (np. niezależności liczb i działań na nich od świata realnego). Liczby i działania zaczynają tworzyć abstrakcyjny świat arytmetyki.

Trochę faktów, czyli jak jest

Co roku w Polsce prowadzone są Ogólnopolskie Badania Umiejętności Trzecioklasistów (OBUT) organizowane przez CKE. Na przykład w badaniach z roku 2011 zostały zastosowane zadania:

1. Prostokątna działka ma 40 m długości i 25 m szerokości. Ile metrów siatki potrzeba do ogrodzenia tej działki?
2. Oblicz obwód prostokąta o bokach 4 cm i 7 cm.

Dla matematyka są to identyczne zadania. W obu bowiem należy wyznaczyć obwód prostokąta. Różnią się jedynie danymi oraz językiem. Zadanie o działce sformułowane jest językiem naturalnym i ma znamiona zadania realistycznego w wersji uproszczonej (nie uwzględnia się bramy wejściowej na działkę). Za pomocą zadań takich jak to, sprawdza się umiejętność zastosowania wiedzy matematycznej w praktyce. Zaś zadanie drugie jest typowym zadaniem szkolnym.

W tabeli 1 przedstawione są procentowe wyniki rozwiązań obu zadań przez badanych trzecioklasistów.

Tabela 1. Obliczanie obwodu – zestawienie wyników procentowych z badań OBUT 2011 (Dąbrowski 2013, 180)

		Rozwiązania zad. o prostokącie	
		błędne	**poprawne**
Rozwiązania zad. o działce	błędne	24,2%	25,3%
	poprawne	4,4%	46,1%

Jak wynika z danych w tabeli 1 mniej niż połowa trzecioklasistów poprawnie rozwiązała oba zadania a aż co czwarty uczeń nie rozwiązał żadnego z nich. Można sądzić, że ci ostatni ani nie rozumieją pojęcia obwodu ani nie znają sposobu jego obliczania. Również, co czwarty uczeń potrafił wyznaczyć obwód prostokąta ale nie potrafił tej umiejętności zastosować w sytuacji realistycznej zaprezentowanej w zadaniu o działce. Świadczyć to może o zapamiętaniu wyuczonego sposobu rozwiązania szkolnego zadania bez rozumienia sensu wykonywanych obliczeń i ich zastosowań w praktyce (por. Dąbrowski 2013, 180).

Jak mogłoby być

Odwołując się do zaprezentowanych wcześniej poglądów dotyczących nabywania wiedzy matematycznej przez dzieci młodsze, kształtowanie pojęcia obwodu powinno przebiegać od motywacji do krystalizacji. By w ogóle można było mówić o obwodzie figury, trzeba rozumieć sens mierzenia długości i jednostek używanych w tym pomiarze, a także umiejętnie posługiwać się przyrządami pomiarowymi, takimi jak linijka czy taśma miernicza.

Kształtowanie pojęcia miary, umiejętności mierzenie i w dalszej perspektywie kształtowanie pojęcia obwodu figury rozpocząć należy od odpowiedniego zmotywowania dzieci. Czasami wystarczy proste pytanie: *Kto z was jest najwyższy/najniższy?* To prowokuje do porównywania wymiarów własnego ciała z ciałem rówieśników lub dorosłych. Tu wystarczy stanąć obok siebie. *A jak porównać wymiary talii czy bicepsów?* Warto pozwolić dzieciom na samodzielne poszukiwanie rozwiązania problemu bez użycia gotowej miarki (może sznurkiem, może paskiem do spodni). Zainteresowanie wymiarami własnego ciała mogłoby być punktem wyjścia do porównywania długości (wymiarów) różnych obiektów przez ich bezpośrednie przyłożenie do siebie i stwierdzenie, który z nich jest dłuższy, krótszy (wyższy, niższy, szerszy, węższy itp.). Kolejny krok to porównywanie wymiarów w sposób pośredni za pomocą trzeciego przedmiotu. Np. wysokości dwóch szafek znacznie od siebie oddalonych możemy porównać używając kija jako elementu pośredniego. Kolejnym etapem jest mierzenie różnych obiektów własnym ciałem (tak jak to było w historii ludzkości). Np. *Zmierz krokami długość sali. Zmierz dłońmi szerokość ławki. Zmierz stopami odległość między szafkami. Podaj wyniki tych pomiarów. Czy twoje wyniki są takie same jak kolegów? Dlaczego?* W tych zadaniach dziecko ma okazję wykonywać pomiar poprzez wielokrotne odkładanie tej samej jednostki. Następnie zamiast własnym ciałem możemy w mierzeniu posłużyć się np. klockiem lub kredką. Tu również pomiaru dokonujemy przez wielokrotne odkładanie wybranej jednostki. Usprawnieniem takiego sposobu mierzenia jest użycie wielu identycznych jednostek i ich jednoczesne przyłożenie (jedna za drugą) do mierzonego obiektu. Jest to jednocześnie wprowadzenie w sens posługiwania się linijką. Warto przy tym, by dzieci samodzielnie konstruowały „linijki" np. „zakrętkowe", „klockowe" i inne. Przy pomiarach taką linijką zwracamy uwagę na liczbę jednostek mieszczących się w mierzonej wielkości. Na tym etapie konieczne jest przeliczenie tych jednostek. By usprawnić czynność pomiaru i nie zliczać każdorazowo jednostek, warto odwzorować taką „linijkę" na pasku papieru zaznaczając kreskami kolejne jednostki i zapisując przy nich odpowiednie liczby. Ciąg tych liczb uzupełniamy na początku liczbą *zero* oznaczającą początek linijki. Tak skonstruowana miarka umożliwia rozumienie znajdujących się na niej liczb. Dziecku z takimi doświadczeniami, nawet nie przyjdzie do głowy, by mierząc, przykładać linijkę w punkcie jeden (jak to często niepoprawnie czynią dzieci). Jeśli dziecko umie posługiwać skonstruowaną przez siebie linijką, można już zapoznać je z pojęciem centymetra i wskazać jego realistyczne modele, jak np. długość boku dużej kratki w zeszycie, i rozpocząć mierzenie z użyciem klasycznej linijki centymetrowej.

Nauczyciel powinien zdawać sobie sprawę z tego, że dostępne w sklepach linijki szkolne są w istocie zespoleniem kilku (często nawet czterech) linijek: milimetrowej, centymetrowej, decymetrowej a nawet calowej. Dorośli często nie uświadamiają sobie tego faktu (budowa linijki jest dla nich zbyt oczywista), więc nie rozumieją, że dziecko może doświadczać trudności w posługiwaniu się szkolną linijką, gdy nie jest do tego odpowiednio przygotowane.

W miarę nabywania sprawności mierzenia wprowadzamy kolejne jednostki tj.: decymetr, milimetr, metr i kilometr. Ważne jest przy tym, aby każde nowe pojęcie wypełniło się treścią, by dzieci nadały nowym słowom właściwe znaczenie. „Mieć pojęcie to nie tylko znać nazwę i nawet posługiwać się nią. Posiadanie pojęcia można przyrównać do pudełka, na którym, owszem, przylepiona jest plakietka z nazwą, ale przede wszystkim, wewnątrz którego jest obfity i różnorodny zbiór desygnatów, czynności, doświadczeń, wyobrażeń i skojarzeń z nim związanych, a ten, kto ma pojęcie, potrafi wrzucać do niego kolejne elementy, które odpowiadają wyabstrahowanemu kryterium. W ten sposób nazwa zaczyna znaczyć (konotacja) i oznaczać (denotacja) stając się pojęciem" (Nowak 2008, 204). Cenne są w tym przypadku zadania, w których dzieci szacują wymiary (odległości) a następnie weryfikują swoje szacunki. Można też zaproponować zadania typu:

a) *Ustaw na stoliku ołówki w odległości ok. 1 cm, 10 cm, pół metra, metra. Za każdym razem sprawdź swój wynik za pomocą miarki. Oraz inne: Oto wyniki pomiarów. Przekreśl te wyniki, które na pewno są błędne: Długość mojego palca 85 cm, długość tapczanu 2 m, długość ręki mojego brata 67 cm, boki segregatora 31 cm i 28 cm, długość mojej stopy 2 cm.*
b) *Ułóż podobne zadanie zapisując wymiary przedmiotów mierzonych na podwórku.*
c) *Opowiedz, jakich jednostek używamy, aby określić*: *odległość między miastami, grubość książki, wzrost człowieka, szerokość ulicy, długość boiska, grubość uszczelki itp.*
d) *Jedno piętro w przeciętnym domu ma około 3 metrów wysokości. Ile metrów wysokości ma w przybliżeniu blok dziesięciopiętrowy? Zaproponuj inny wzorzec i oszacuj wymiary kilku przedmiotów w sali.*

W procesie nabywania wiedzy matematycznej ważne jest, by dziecko miało okazję zarówno do doświadczania, do samodzielnego badania relacji między różnymi jednostkami, by zauważało, że wynik pomiaru zależy od wyboru jednostki, wyjaśniało własne sposoby myślenia, projektowało własne sposoby dokonywania pomiarów i używania innych jednostek, zastępowania jednych drugimi i przewidywania rezultatów takich działań. Tak uczone dziecko potrafi posługiwać się zarówno wyrażeniami jedno- jak i dwumianowanymi, a zamiany jednostek dokonuje w sposób naturalny.

Kolejnym pojęciem, po opanowaniu umiejętności mierzenia, może być pojęcie obwodu. Dobrą motywacją może być samodzielne przygotowanie obrazków o różnych kształtach i wymiarach, których brzegi oklejamy wstążkami. Pytamy: *Ile centymetrów wstążki potrzeba na oklejenie każdego obrazka?* Uczniowie odwzorowują sznurkiem brzeg obrazka, wyprostowują go i mierzą. To doświadczenie powtarzane jest tyle razy, ile różnych obrazków przygotują. Inne ćwiczenia tego typu to: obszywanie koronką serwetki, uszczelnianie taśmą okien, oklejanie taśmą tablicy ogłoszeń, wyznaczanie rabatki i zabezpieczanie jej płotkiem. Istotnym elementem takich ćwiczeń jest dostrzeganie, że w każdym przypadku wyznaczana była długość brzegu figury. Stąd już krok do pojęcia obwodu figury i możliwość obliczania obwodów figur geometrycznych, także ich modeli rysunkowych, i ich modeli w świecie realnym. Koniecznie towarzyszyć temu musi opis słowny wykonywanych czynności. Ponadto może pojawić się próba symbolicznego zapisu sposobu obliczania obwodów.

Na dalszym etapie kształcenia uczniowie zauważają, że odpowiednikiem obwodu figury płaskiej jest w przestrzeni trójwymiarowej pojęcie powierzchni bryły, zaś odpowiednikiem pola figury płaskiej jest w przestrzeni objętość bryły. Zarówno obwód, pole jak i objętość są liczbami w aspekcie miarowym.

Uczeń, przechodząc taką drogę, jak opisana wyżej, bez żadnych skrótów ani nie „na przełaj", ma pojęcie obwodu figury i jest przygotowany do jego uogólnienia w późniejszym czasie. Posługując się porównaniem użytym przez Z. Nowaka (por. 2008, 205), można powiedzieć, że kształtowanie pojęć powinno narastać w czasie i przechodzić na coraz wyższy poziom, podobnie jak budowanie kolejnych kondygnacji domu. Nie można wybudować kolejnego piętra bez uprzedniego wybudowania niższej kondygnacji. Pominięcie któregoś z wcześniejszych etapów lub nierzetelne jego wykonanie, prowadzi do budowania „zamków napowietrznych", co skutkuje brakiem rozumienia pojęć a nawet może prowadzić do formalizmu zdegenerowanego.

W wynikach OBUT, co czwarty uczeń nie rozwiązał żadnego zadania, a co czwarty obliczył obwód prostokąta, lecz nie wyznaczył obwodu działki. Tak więc, sama znajomość wzorów matematycznych nie jest równoznaczna z rozumieniem pojęć matematycznych. Być może w ich edukacji ograniczano się do wprowadzania gotowych „przepisów" bez ich odpowiedniego przygotowania lub dzieci te miały zbyt mało doświadczeń i szybko przechodziły do stosowania zapamiętanych procedur, czyli przedwczesnej automatyzacji z wyłączeniem świadomości wykonywanych czynności.

Przedstawiona propozycja poznawania pojęcia obwodu figury jest ilustracją prawidłowego kształtowania pojęć metamatematycznych. W analogiczny sposób należy wprowadzać pozostałe pojęcia. Kluczowym elementem tego procesu jest praktyczne działanie – manipulowanie obiektami realnymi.

Co z tego wynika

Nie każde działanie fizyczne prowadzi do wiedzy. Poznanie musi być efektem samodzielnego działania (początkowo na przedmiotach, później jednak na słowach i myślach), któremu towarzyszy refleksja. Bez niej nie ma mowy o podniesieniu abstrakcji czyli o uczeniu się. Refleksję można wywołać stosownym pytaniem, np. *Dlaczego tak jest?, Czy można inaczej?, Co by było gdyby…?* albo też wywołując u ucznia konflikt poznawczy. Ważną rolę w takim procesie poznawania pełni nauczyciel będący jedynie organizatorem procesu uczenia się. Nie może on przekazywać dzieciom wiedzy w gotowej postaci, nie może narzucać dorosłego sposobu myślenia oraz przepisów postępowania. Ma zachęcać dzieci do poszukiwań własnych strategii rozwiązań akceptując możliwość, naturalnego w tej sytuacji, popełniania błędów. Tak postępując stwarza szansę, by zdobywana przez dzieci wiedza była operatywna.

Bibliografia

Dąbrowski M. 2013, *(Za) trudne, bo trzeba myśleć? O efektach nauczania matematyki na I etapie kształcenia*, Instytut Badań Edukacyjnych, Warszawa.

Hejny M. 1997, *Rozwój wiedzy matematycznej*, „Dydaktyka Matematyki", nr 19, s. 15–28.

Kurdybacha Ł. 1967, *System pedagogiczny Jana Amosa Komeńskiego*, w: Ł. Kurdybacha (red.), *Historia wychowania*, t. 1, PWN, Warszawa, s. 491–517.

Nowak Z. 2008, *Dylematy kształtowania pojęć z zakresu tzw. wiadomości i umiejętności praktycznych*, w: Matematika 3, Mathematical Education from Pupil's and Primary School Teacher's view. Univerzita Palackeho v Olomouci, Olomouc, s. 203–207.

Ogólnopolskie badanie umiejętności trzecioklasistów, raport z badań 2011, http://www.obut.edu.pl/artykuly/files/135/raport_ogolnopolski_2011_0.pdf (dostęp: 19.05.2014).

Spitzer M. 2007, *Jak uczy się mózg*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Spitzer M. 2013, *Cyfrowa demencja. W jaki sposób pozbawiamy rozumu siebie i swoje dzieci*, Wydawnictwo Dobra Literatura, Słupsk.

Wood D. 2006, *Jak dzieci uczą się i myślą; Społeczne konteksty rozwoju poznawczego*, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków.