DOI 10.24917/9788380840317.10

BARBARA NAWOLSKA
Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie

Razem czy osobno, czyli co łączyć, a co rozdzielać w edukacji matematycznej dzieci

Wstęp

Szeroko rozumiane „razem czy osobno" w edukacji dzieci dotyczy nie tylko spraw organizacyjnych i wychowawczych, ale także istoty uczenia. Zasadne są więc rozważania na ten temat w kontekście edukacji matematycznej. Matematyka jako dyscyplina naukowa jest abstrakcyjna, a dzieci w wieku wczesnoszkolnym myślą konkretnie. Te fakty rodzą pytania: Jak uczyć abstrakcyjnej matematyki konkretnie myślące dzieci? Jak przezwyciężyć tkwiącą w tym sprzeczność? Ważnych dla dydaktyki odpowiedzi na te pytania szukano od zawsze i poszukiwania trwają nadal, gdyż ciągle zbyt wielu uczniów doświadcza niepowodzeń w uczeniu się matematyki.

Trojaka natura szkolnej matematyki

Matematykę jako naukę i jako przedmiot szkolny można rozpatrywać w różnych aspektach:

- jako teorię naukową, ogromną dziedzinę wiedzy z całym bogactwem struktur matematycznych, definicji, twierdzeń i algorytmów, wiedzę, w której ważne są „fakty". Matematyka w tym aspekcie traktowana jest jako gotowy produkt, a uczenie się jej polega na poznaniu i zapamiętaniu tych faktów, sprawnym wykonywaniu obliczeń, przekształcaniu wyrażeń i rozwiązywaniu równań;
- jako zestaw abstrakcyjnych modeli, prezentujących schematycznie sytuacje świata realnego i zależności w nim występujące oraz zestaw narzędzi służących do rozwiązywania praktycznych problemów. Matematyka rozumiana jest jako użyteczne narzędzie, a uczenie się jej polega na dostrzeganiu związków matematyki z rzeczywistością i stosowaniu aparatu matematyki do rozwiązywania realistycznych zadań i problemów;

— jako dziedzinę twórczej, intelektualnej działalności ludzi, związaną z ich aktywnością poznawczą, z zaangażowaniem emocjonalnym. Matematyka tak rozumiana jest głównie procesem myślenia i badania, a także produktem tego procesu, a uczenie się jej polega na samodzielnym konstruowaniu wiedzy matematycznej, która staje się własnością osoby ją tworzącej[1].

Sięgając do historii matematyki, można zauważyć, że bodźcem do jej tworzenia były najczęściej sytuacje praktyczne. Matematyka jako dyscyplina naukowa, choć jest nauką abstrakcyjną, powstawała w wyniku potrzeby opisywania świata realnego i sytuacji życiowych człowieka. Na poziomie edukacji wczesnoszkolnej ten praktyczny aspekt pojęć matematycznych winien być mocno eksponowany. Wszak matematyka, zwłaszcza ta szkolna, nie jest jedynie czystym wytworem umysłu. Pojęcia matematyczne powstawały w wyniku matematyzowania realnych sytuacji jako narzędzia rozwiązywania różnorodnych problemów życiowych zaistniałych na tle tych sytuacji. Wobec tego w procesie uczenia się matematyki warto odnosić się do jej zastosowań praktycznych. Nie można na tym etapie kształcenia uczyć matematyki w izolacji, w oderwaniu od rzeczywistości. Próby zerwania pojęć matematycznych z ich korzeniami i dążenie do np. szybkiego pamięciowego opanowania dodawania i innych działań mogą doprowadzić do powstania negatywnego zjawiska formalizmu[2]. Wobec tego w procesie nabywania pojęć matematycznych ważne są czynności praktyczne i doświadczenia dzieci. Nie jest jednak obojętne, jakie czynności wykonuje dziecko i jakie doświadczenia zdobywa. Ważne, by były to doświadczenia logiczno-matematyczne. Zatem wszelkie czynności uczniów powinny być mądrze zaplanowane i takie, by prowokowały czynności intelektualne kluczowe w uczeniu się. Niezbędna jest przy tym aktywność własna dziecka, jego świadomość, co i po co robi, oraz analiza efektów własnych działań, prowadząca do abstrakcyjnych pojęć. W ten sposób dziecko konstruuje wiedzę, która staje się jego własnością. Chociaż każdy uczeń sam konstruuje swoją wiedzę, proces jej konstruowania odbywa się we współpracy z innymi uczestnikami tego procesu, czyli kolegami i nauczycielem. Ważna jest bowiem możliwość wymiany doświadczeń i korygowania własnych schematów w konfrontacji z innymi. Dzięki takiej konfrontacji i negocjacji znaczeń możliwe jest wieloaspektowe, krytyczne,

1 G. Treliński, *Kształcenie matematyczne w systemie zintegrowanym*, Wszechnica Świętokrzyska, Kielce 2004, s. 13–14.

2 Zjawisko to „charakteryzuje się nieobecnością w myśli ucznia semantycznego sensu terminów i symboli i chaosem w stosowaniu reguł syntaktycznych" (Z. Krygowska, *Elementy aktywności matematycznej, które powinny odgrywać znaczącą rolę w matematyce dla wszystkich*, „Dydaktyka Matematyki" 1986, nr 6, s. 27).

refleksyjne rozwiązywanie problemów. W ten sposób powstaje wiedza inna, niż mogłaby powstać bez tego kontekstu społecznego[3].

Rolę interakcji w procesie uczenia się podkreśla Lech Siemionowicz Wygotski[4], przypisując przy tym w procesie komunikowania się duże znaczenie językowi. Język jest ważny zarówno w komunikacji, jak i w procesie uwewnętrzniania wykonywanych czynności, co przyczynia się do budowania wiedzy. Zatem treści matematyczne łączymy z ich zastosowaniem w świecie realnym i proces uczenia realizujemy jako twórczą aktywność ucznia w łączności i w interakcji z innymi ludźmi.

Można podejmować próby uczenia matematyki z uwzględnieniem tylko jednego jej aspektu, ale nie można spodziewać się wtedy dobrych efektów. Bowiem one wszystkie się przenikają i wzajemnie dopełniają. Akcentując tylko jeden z nich, pozbawiamy uczącego się możliwości „ujrzenia" całości matematyki. Kształtujemy wypaczony jej obraz. W praktyce edukacyjnej żaden z aspektów nie może być pomijany, ale dopuszczalne jest ich różne akcentowanie, w zależności od wyznaczonych celów oraz w zależności od potrzeb i możliwości uczniów. Ważne, by wszystkie aspekty łączyć w jednym procesie edukacyjnym.

Łączenie czynności z czynnościami do nich odwrotnymi

Wiele codziennych czynności człowieka ma charakter czynności prostych i odwrotnych. Należą do nich np. ubieranie się i rozbieranie, zapinanie guzików i ich rozpinanie, sznurowanie butów i rozsznurowywanie, budowanie wieży z klocków i jej burzenie po to, by schować klocki do pudełka itp. Dorośli w swojej pracy zawodowej również wykonują czynności proste i odwrotne, gdy np. składają jakieś urządzenie, a następnie rozkładają je w celu konserwacji. Oczywiście nie każda czynność fizyczna jest odwracalna. Np. złamanie patyka, stłuczenie szklanki nie są odwracalne. Nie można bowiem w żaden sposób przywrócić złamanemu patykowi czy stłuczonej szklance pierwotnej postaci. Czynności fizyczne, zarówno proste jak i odwrotne, są wykonywane na przedmiotach i obserwowalne gołym okiem, dlatego nazywa się je czynnościami zewnętrznymi. Takie konkretne czynności w działaniu dziecka są izolowane, gdyż dziecko nie potrafi ująć stosunków między nimi. Ich przeciwieństwem są czynności myślowe, które są uwewnętrznione. Interioryzacja czynności konkretnych prowadzi do czynności wyobrażeniowych (wykonywanych w myśli), a te mogą być odwracalne i mogą się łączyć

3 D. Klus-Stańska, *Wiedza i sposoby jej nabywania*, red. D. Klus-Stańska, M. Szczepska-Pustkowska, Wydawnictwa Akademickie i Profesjonalne, Warszawa 2009 oraz Z. Krygowska, *Zarys dydaktyki matematyki*, cz. 1, WSiP, Warszawa 1977.

4 L.S. Wygotski, *Narzędzie i znak w rozwoju dziecka*, PWN, Warszawa 1978.

w pewne systemy[5]. W myśli możemy podzielić patyk na kawałki, a następnie, również w myśli, możemy scalić te kawałki do postaci pierwotnej. Można więc w myśli wykonać to, co praktycznie nie jest możliwe. Jeżeli człowiek jest zdolny do takiej odwracalności procesów myślowych, czyli jest zdolny do wykonywania czynności umysłowych wewnętrznych, umożliwiających łączenie przeciwstawnych czynności w jedną całość, to zdaniem Jeana Piageta[6] rozumuje operacyjnie i potrafi prowadzić skomplikowane rozumowania bez odwoływania się do działań praktycznych, jest zdolny do przewidywania następstw różnych działań. Dzięki odwracalności procesów myślowych potrafi wykrywać złożone zależności jakościowe i ilościowe, przewiduje zmiany, ich przyczyny oraz skutki, a także ustala, co pozostaje niezmienne. Takie procesy myślowe są istotne w uczeniu się matematyki, gdyż ma ona charakter operacyjny (każda operacja, każde działanie w tej nauce jest odwracalne). W procesie uczenia się tego przedmiotu niezbędne jest więc całościowe ujmowanie działań prostych i odwrotnych, bo dzięki temu uczący się jest w stanie dostrzegać rozmaite zależności. Ten fakt stał się podstawą opracowania koncepcji czynnościowego nauczania matematyki autorstwa Zofii Krygowskiej[7]. Zatem ilekroć uczymy dodawania, musi temu towarzyszyć odejmowanie. Jeżeli uczymy mnożenia, to równolegle należy uczyć dzielenia. Wszystkie pojęcia matematyczne powinny być kształtowane z uwzględnieniem zadań wzajemnie odwrotnych, z użyciem przykładów i kontrprzykładów.

W dawnych metodykach bardzo zabiegano o to, by każde pojęcie matematyczne było wprowadzane oddzielnie. Sądzono bowiem, że równoległe kształtowanie pojęć może skutkować myleniem ich i błędnym wykorzystaniem. I tak w klasie pierwszej długo ćwiczono dodawanie i dopiero po jego biegłym opanowaniu wprowadzano i ćwiczono odejmowanie. Podobnie mnożenie i dzielenie były rozdzielane w czasie. Tak się działo na każdym etapie matematycznej edukacji. Np. w szkole średniej najpierw długo ćwiczono mnożenie wielomianów i dowodzono wzorów skróconego mnożenia, a dopiero później ćwiczono rozkładanie wielomianów na czynniki. To ostatnie okazywało się bardzo trudne, bo nie było przez uczniów wiązane z wcześniejszymi czynnościami. Nie dostrzegali oni wzajemnej odwrotności wykonywanych operacji[8]. Takie izolowanie treści nie było korzystne. Dlatego w koncepcji nauczania matematyki opracowanej przez Zofię Krygowską zaleca się łączenie, bowiem, jak zauważa autorka: „Psychologiczna teoria operacji sugeruje postępowanie dydaktyczne kierowane zasadą *łączenia* a nie *oddzielania*"[9]. W koncepcji tej uwzględniany jest także pro-

5 Z. Krygowska, *Zarys dydaktyki…*, s. 89.

6 J. Piaget, *Studia z psychologii dziecka*, PWN, Warszawa 1966.

7 Z. Krygowska, *Zarys dydaktyki…*

8 Ibidem, s. 105.

9 Ibidem, s. 104.

ces interioryzacji, dzięki czemu w uczeniu się matematyki pokonuje się drogę od konkretu do abstrakcji matematycznej, od prymitywnych czynności dziecka do działań arytmetycznych. I odwrotnie: każdej operacji matematycznej mogą towarzyszyć konkretne czynności, pełniąc przy tym rozmaitą rolę. Mogą bowiem one pobudzać czynności myślowe, wspierać to, co w myśli jest chwiejne, albo tylko wyrażać tę myśl za pomocą np. rysunku, zapisu, pewnego modelu lub gestu[10]. W wyniku tego uczeń ma szansę, by konkretną sytuację, w której najpierw do 3 klocków dosuwa się 2, a następnie odsuwa się te 2 przed chwilą przysunięte, ująć całościowo i dostrzec wszystkie możliwe arytmetyczne zależności z tej sytuacji wynikające:

$$3 + 2 = 5,\ 2 + 3 = 5,\ 5 - 2 = 3,\ 5 - 3 = 2,\ 5 = 3 + 2,\ 5 = 2 + 3 \text{ itd.}$$

Zgodnie z koncepcją czynnościowego nauczania matematyki, podczas nauki, np. dodawania, nie można wykonywać jedynie prostych zadań typu: „Wyznacz sumę liczb 5 i 7". Takim zadaniom muszą towarzyszyć zadania odwrotne, np.: „Suma dwóch liczb jest równa 12. Jakie to liczby?". Rozwiązanie pierwszego zadania (prostego) jest jednoznaczne, jest nim liczba 12, bo $5 + 7 = 12$. Rozwiązaniem zadania odwrotnego jest nieskończenie wiele par liczb postaci $(x, 12 - x)$, z których x jest dowolną liczbą rzeczywistą. Jeżeli ograniczymy się tylko do rozwiązań w zbiorze liczb naturalnych, to nadal jest ich wiele, ale jest to już skończona liczba, bo x może przyjmować wartości od 0 do 12, a tych jest właśnie 13, więc jest 13 rozwiązań w zbiorze liczb naturalnych. Możemy je zapisać następująco:

$$12 = 0 + 12 = 1 + 11 = 2 + 10 = 3 + 9 = 4 + 8 = 5 + 7 = 6 + 6 = 7 + 5 = 8 + 4 = 9 + 3 = \text{itd.}$$

Ponieważ działania (zadania) odwrotne często mają niejednoznaczne rozwiązanie, jak to jest w prezentowanym przykładzie, to uznawane są powszechnie za zadania zbyt trudne (trudniejsze od zadań z jednym rozwiązaniem). Z tego powodu nauczyciele nie dają dzieciom takich zadań, a i w podręcznikach nie ma ich wiele. Można więc stwierdzić, że w szkole nie rozwiązuje się takich zadań. Być może wynika to z nieuświadomionego protestu przeciwko takiej niejednoznaczności. Panuje bowiem powszechne przekonanie, że matematyka jest nauką jednoznaczną, w której na każde pytanie jest tylko jedna odpowiedź, i każde zadanie musi mieć rozwiązanie, i to dokładnie jedno. A w tym zadaniu jest wiele dobrych odpowiedzi. Brak takich dywergencyjnych zadań stanowi dużą stratę w edukacji dzieci. Zadania wieloznaczne wywołują aktywność intelektualną, są źródłem twórczości, wyzwalają u uczniów pomysłowość w poszukiwaniu wielu odpowiedzi, i to niekiedy oryginalnych, innych od odpowiedzi pozostałych uczniów.

10 Ibidem, s. 92–93.

Z obawy przed wieloznacznością w podręcznikach najczęściej formułowane są nieco łatwiejsze pary zadań wzajemnie odwrotnych: „Do liczby 5 dodaj 7" (5 + 7 = 12) i do nich odwrotne: „Od liczby 12 odejmij 7" (12 – 7 = 5). W tym przypadku oba zadania mają dokładnie jedno rozwiązanie. Takie zadania można rozwiązywać, i robi się to w szkole, ale nie można na nich poprzestawać. Warto rozwiązywać także ich trudniejsze wersje. Przykłady zadań wzajemnie odwrotnych, których rozwiązania nie zawsze są jednoznaczne, zostały zamieszczone w tabeli poniżej.

Tab. Przykłady zadań prostych i odwrotnych

Zadanie proste	**Zadanie odwrotne**
Wyznacz iloczyn liczb 4 i 6.	Iloczyn dwóch liczb jest równy 24. Jakie to liczby?
Wyznacz różnicę liczb 10 i 7.	Podaj liczby, których różnica wynosi 3.
Wyznacz iloraz liczb 18 i 3.	Podaj liczby, których iloraz wynosi 6.
Wyznacz obwód prostokąta o bokach długości 3 cm i 5 cm.	Jakie długości mają boki prostokąta, którego obwód jest równy 16 cm?
Zapisz cyframi liczbę sto sześćdziesiąt trzy.	Odczytaj (zapisz słowami) liczbę 163.
Podaj liczby większe od 5.	Podaj liczby mniejsze lub równe 5.
Rozwiąż gotowe zadanie tekstowe.	Ułóż zadanie tekstowe.

Źródło: opracowanie własne

Kontrastowanie

Kontrastowanie polega na ostrym uwydatnianiu się pewnej cechy w spostrzeganym przedmiocie, zjawisku lub pojęciu poprzez zestawienie jej i porównanie z inną, najczęściej przeciwstawną cechą innego przedmiotu, zjawiska lub pojęcia. Poprzez takie zestawienie, dzięki dostrzeżonej różnicy, podkreślona zostaje istota i ranga eksponowanej cechy.

Kontrastowanie jest bardzo ważnym zabiegiem dydaktycznym w prawidłowym kształtowaniu pojęć i operatywnych schematów w myśli ucznia. Pozwala bowiem lepiej zrozumieć jakąś cechę lub własność pojęcia, gdy trudne jest zrozumienie i uchwycenie jej zasadniczych elementów. Wystarczy wtedy wyobrazić sobie lub skonstruować obiekt, który takiej cechy lub własności jest pozbawiony. Zestawienie braku z tym, co być powinno, pomaga ujrzeć to, co było niezauważalne bez kontrastującego tła. Głęboką ideę kontrastowania można dostrzec we fraszce „Szlachetne zdrowie, nikt się nie dowie, jako smakujesz, aż się zepsujesz"[11]. Niestety, choć oczywista wydaje się wartość dydaktyczna kontrastowania, to w szkolnej edukacji matematycznej takich zabiegów nie ma zbyt wiele.

11 Fragment fraszki Jana Kochanowskiego *Na zdrowie*.

A przecież wystarczy podczas kształtowania dowolnego pojęcia matematycznego konstruować nie tylko przykłady pozytywne, ale także kontrprzykłady i stawiać uczniów w sytuacjach konfliktowych. Np. podczas kształtowania pojęcia kwadratu, by uświadomić uczniom jego własności (bycie czworokątem, posiadanie równych boków i równych kątów), należy skonstruować takie kontrprzykłady, w których występuje zaprzeczenie dokładnie jednej z jego cech. Dobrymi kontrprzykładami służącymi uświadomieniu sobie istoty bycia czworokątem będą figury, które nie są czworokątami, choć mają równe boki i równe kąty, np. trójkąt równoboczny, gdyż nie posiada on własności, jaką jest czworokątność. By uświadomić znaczenie równości kątów w kwadracie, należy skonstruować czworokąt o równych bokach, lecz niekoniecznie równych kątach, np. romb. Zaś czworokąt o równych kątach, ale niekoniecznie równych bokach (prostokąt), będzie pomocny w uświadomieniu sobie istoty równości boków w kwadracie.

Jeżeli zależy nam na dobrym ukształtowaniu pojęcia używanego u nas systemu liczbowego, należy skontrastować jego cechy, czyli dziesiątkowość i pozycyjność, z systemami, które tych cech nie posiadają. Np. system rzymski nie jest pozycyjny, zaś system związany z mierzeniem czasu nie jest dziesiątkowy. Warto zapoznać dzieci także z innymi systemami liczbowymi, np. egipskim czy chińskim, które choć są dziesiątkowe, to nie są pozycyjne. Możliwość zapisywania i odczytywania liczb w tych systemach pomaga uświadomić sobie również, czym jest cyfra, a czym liczba[12], które to pojęcia tak często są mylone, nawet przez osoby, wydawać by się mogło, kompetentne. By ukształtować pojęcie równoległości (albo prostopadłości) odcinków lub prostych, konieczne jest konstruowanie przykładów, w których tej równoległości (prostopadłości) brakuje. By uświadamiać sens równości, należy skontrastować ją z jej brakiem.

Podobnie możemy postępować z zadaniami tekstowymi. Dzieci nie zawsze uświadamiają sobie ich strukturę i rolę elementów składowych. Są skłonne każdy tekst wyglądający jak zadanie (zawierający wyrazy, liczby i pytanie) uznawać za zadanie i podejmują, bez żadnej refleksji, próby jego rozwiązania. Proponując dzieciom odpowiednio dobrane zadania niestandardowe (pseudozadania), pomagamy im uświadomić sobie istotę i strukturę zadania z treścią. Pseudozadanie (zadanie z wadą, z brakiem) skupia uwagę dziecka na tym braku, uświadamiając jego rolę. Ponadto nie można proponować dzieciom rozwiązywania jedynie gotowych zadań z podręcznika. By dziecko rozumiało sens rozwiązywania zadań, musi przeżyć, doświadczyć ich „zawiązywania”, czyli formułowania. Zatem nie-

12 Cyfry są to znaki służące do zapisywania liczb, podobnie jak litery, które służą do zapisywania słów. Tak jak są różne alfabety (np. łaciński, grecki, cyrylica, Braille’a, Morse’a), tak są i różne zestawy cyfr. Na co dzień używamy cyfr arabskich (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0), ale też cyfr rzymskich, którymi są wielkie drukowane litery alfabetu łacińskiego (I, V, X, L, C, D, M). Natomiast liczby to pojęcia abstrakcyjne określające pewną ilość lub wielkość.

zbędne jest całkowicie samodzielne układanie przez dzieci zadań do sytuacji zaistniałej w klasie, do działania, do pytania, na zadany temat, bądź ich swobodne formułowanie bez żadnych ograniczeń. Bardzo korzystne jest stosowanie tzw. „strategii kruszenia" w pracy z tekstem matematycznym. Polega to na tym, że prezentujemy złożony tekst matematyczny (inaczej treść zadania, ale bez żadnego pytania), zaś dzieci układają do tego tekstu wszelkie możliwe pytania. Każde sformułowane przez dzieci pytanie wraz z tekstem jest w istocie zadaniem, które następnie wspólnie jest rozwiązywane. Ważne, by wśród pytań pojawiały się zarówno te poprawne i pasujące do treści, jak i niepoprawne. Dzięki analizie takich pytań zdajemy sobie sprawę, jakie pytanie jest sensowne i co znaczy sformułować pytanie. Ponadto do takiego tekstu matematycznego można układać najpierw działania (zarówno sensowne, jak i nie), a następnie ustalać, co za pomocą takiego działania można obliczyć i na jakie pytanie odpowiedzieć dzięki tym obliczeniom. Analiza niepasujących do tekstu działań jest ważna w uświadomieniu sobie, że każde działanie do zadania tekstowego musi mieć sens adekwatny do treści. Nie należy wykonywać obliczeń na przypadkowo wybranych z tekstu liczbach, bo można zgubić ten sens.

Ponieważ dzieci postrzegają synkretycznie, co jest przyczyną trudności w samodzielnym dostrzeganiu istotnych elementów składowych pojęć i operacji, zatem stosowanie zasady kontrastowania (łączenie przykładów z kontrprzykładami, obecności cechy z jej brakiem itp.) skutecznie pomaga w pokonywaniu tych trudności.

Znak równości

Od samego początku szkolnej edukacji matematycznej nauce dodawania i odejmowania, później także mnożenia i dzielenia, towarzyszy znak równości (=), używany do symbolicznego zapisu wspomnianych działań. Znak ten jest symbolem identyczności, łączy więc identyczne obiekty. Jego użycie oznacza, że to, co jest z jednej jego strony, tożsame jest z tym, co znajduje się po drugiej jego stronie. Np. zapis 5 + 3 = 8 oznacza, że liczba 5 + 3 jest tą samą liczbą, co 8. Po obu stronach znaku równości jest ta sama liczba, lecz różnie zapisana. Znajduje to wyraz także w sposobie czytania takich zapisów. W omawianym przypadku czytamy: „sumą liczb 5 i 3 jest 8 oraz 8 jest sumą liczb 5 i 3". Równość jest symetryczna, zatem skoro 5 + 3 = 8, to także 8 = 5 + 3. Oba zapisy mają to samo znaczenie i takiego rozumienia znaku równości, jako identyczności, należy uczyć dzieci. W tym celu powinno się z dziećmi rozwiązywać nie tylko zadania proste, ale także zadania odwrotne, i zapisywać je w różny sposób. Mogą to być zadania: „Wyznacz sumę liczb 5 i 3" oraz: „Osiem jest sumą dwóch liczb. Jakie to liczby?".

W pierwszym przypadku rozwiązanie jest jednoznaczne. Zaś zadanie odwrotne, o czym była już mowa, ma wiele rozwiązań[13]. Nie tylko wyznaczamy sumy liczb, ale i rozkładamy liczby na składniki. Dajemy także zadania, w których wprawdzie są działania, ale nie ma potrzeby wyznaczania wyników podanych działań. Np. „O ile liczba 5 + 3 jest większa od 3?"; „O ile liczba 3 jest mniejsza od 5 + 3?". Albo: „Uzupełnij: 5 + 3 = 4 + … = 3 + … = 2 + … =… itp." W takich sytuacjach uczeń ma możliwość uświadomić sobie, że wykonanie obliczeń wszystkich działań wcale nie przybliża go, lecz wręcz oddala od rozwiązania zadania. Dzięki temu możemy zapobiegać powstawaniu u dzieci błędnego przekonania, że znak równości (=) oznacza polecenie wyznaczenia wyniku operacji. O takim niepoprawnym rozumieniu tego znaku świadczą często spotykane błędne zapisy, jak np.: 7 + 5 = 7 + 3 = 10 + 2 = 12.

Liczby 7 + 5 i 7 + 3 nie są identyczne. Różne też są liczby 7 + 3 i 10 + 2. Chociaż zapis jest błędny, można się domyślić, w jaki sposób wykonane zostały obliczenia: by wyznaczyć sumę liczb 7 i 5, najpierw do 7 dodano 3 (by uzyskać pełną dziesiątkę), a potem do tak uzyskanej sumy, czyli do 10, dodano jeszcze 2 i otrzymano 12. Ten przykład błędu w użyciu znaku równości jest efektem traktowania równości jednokierunkowo i związany jest z niewłaściwym w tym przypadku izolowaniem treści matematycznych, z ćwiczeniem tylko określonego, jednego typu zadań. Na skutek tego uczniowie nie traktują równości symetrycznie. By wyeliminować takie błędy, należy od początku nauki zapisywać formuły i wzory w dwóch kierunkach, w dwóch kierunkach je odczytywać i równolegle w dwóch kierunkach je stosować, i to w różnorodnych zadaniach.

Automatyzacja, czyli kiedy oddzielać

W każdej dziedzinie ważne jest nabycie takiej sprawności, że większość czynności wykonywana jest automatycznie, nawet bez zaangażowania myśli. Np. gdybyśmy podczas pisania musieli stale przypominać sobie kształt liter, ich wygląd, to takie pisanie byłoby bardzo męczące i czasochłonne, a przy tym trudno byłoby skupić się na treści tego, co zamierzamy napisać. Automatyzacja jest tutaj niezbędna. Podobnie jest w uczeniu się matematyki: to, czego już się uczyliśmy, co umiemy i rozumiemy, powinno być zautomatyzowane. Np. podczas rozwiązywania zadania wymagającego wysiłku intelektualnego sama strona techniczna związana z wykonywaniem obliczeń powinna być tak opanowana, by uczeń nie tracił niepotrzebnie czasu i energii na rachunki i mógł skupić się na problemie. Także wykonując dzielenie, np. 648 : 4, uczeń powinien znać na pamięć tabliczkę mnożenia. Dzięki

13 W zbiorze liczb naturalnych jest 9 możliwości przedstawienia liczby 8 jako sumy dwóch składników: 8 = 8 + 0 = 7 + 1 = 6 + 2 = 5 + 3 = 4 + 4 = 3 + 5 = 2 + 6 = 1 + 7 = 0 + 8.

zautomatyzowaniu pewnych czynności można zaoszczędzony w ten sposób czas i energię wykorzystywać na uczenie się nowych treści i rozwiązywanie nowych problemów. Jednakże nie można utożsamiać automatyzacji dobrze rozumianych działań z wyuczaniem się ich na pamięć. Pamięciowe uczenie się, zamiast pojęciowego, jest prostą drogą do zablokowania możliwości uczenia się matematyki w sposób rozumny. Także przedwczesne zmechanizowanie działań, jeszcze przed właściwym pojęciowym ich ujęciem, może stać się w przyszłości przyczyną trudności w dalszym uczeniu się matematyki[14]. Automatyzacja ma być zakończeniem, a nie początkiem kształtowania pojęć i tego kształtowania w żaden sposób nie może zastąpić[15]. Każdy nauczyciel wie, że liczenie na konkretach lub palcach jest istotne w kształtowaniu umiejętności rachunkowych, lecz niestety jest również czasochłonne. Zdarza się więc, że chcąc usprawnić i przyśpieszyć umiejętności dzieci w zakresie obliczeń, korzysta z ich pamięci. Ponieważ pojemność dziecięcej pamięci jest duża, zabieg taki wydaje się skuteczny i efekty zdają się budujące, bo dzieci bardzo sprawnie liczą (jest skończona liczba sum i różnic w zakresie 20, a w większych zakresach wystarczy posłużyć się rachunkiem pisemnym, w którym opanowany pamięciowo zakres do 20 jest zupełnie wystarczający). Nauczyciel nabiera więc przekonania, że jego metoda jest bardzo dobra. Tragiczne skutki takich zabiegów ujawniają się znacznie później, gdy dziecko nie jest w stanie zrozumieć pojęcia ułamka zwykłego, ułamków dziesiętnych, liczb ujemnych, działań na nich itp. Dla tak uczonych dzieci uczenie się matematyki zawsze będzie się ograniczało do zapamiętania faktów i wyuczania na pamięć reguł[16]. W uczeniu się matematyki niezbędne jest najpierw zrozumienie pojęcia i świadome działanie oparte na konkretach. To zrozumienie musi być tak głębokie, że po zautomatyzowaniu, uczeń w każdej chwili potrafi wyjaśnić co i dlaczego robi, bowiem powinien on mieć świadomość znaczenia i sensu wszelkich wykonywanych operacji i podejmowanych działań.

Jak z powyższego wynika, nie można łączyć kształtowania nowego pojęcia z jego automatyzacją. Tu niezbędne jest oddzielenie jednego od drugiego w czasie. Z automatyzacją należy poczekać tak długo, jak długo pojęcie nie zostanie dobrze ukształtowane i głęboko zrozumiane.

14 Z. Krygowska, *Zarys dydaktyki…*, s. 97.

15 L. Jeleńska, *Metodyka pierwszych lat nauczania*, Nasza Księgarnia, Warszawa 1927, s. 167–169.

16 M. Hejny, *Rozwój wiedzy matematycznej*, „Dydaktyka Matematyki" 1997, nr 19, s. 20–21.

Podsumowanie

Matematyka ma wiele „twarzy". W edukacji matematycznej dzieci należy uwzględniać wszystkie oblicza tej dyscypliny, a więc łączyć je tak, by w umysłach dzieci powstał jej całościowy (pełny, nieułomny) obraz. Niezbędne jest przy tym wykorzystywanie praktycznych doświadczeń dzieci, nie tylko szkolnych, i stwarzanie dzieciom możliwości samodzielnego konstruowania wiedzy matematycznej.

Uczenie się nie przebiega w izolacji. Konieczne jest łączenie w tym procesie doświadczeń i przemyśleń wszystkich uczestników procesu uczenia się.

W procesie uczenia się matematyki należy uwzględniać jej operatywny charakter, łącząc operacje proste z odwrotnymi oraz czynności konkretne z ich uwewnętrznieniem i towarzyszącymi temu procesami myślowymi, przechodząc od konkretu do abstrakcji i z powrotem. Istotny w tym procesie jest język, gdyż werbalizacja wykonanych czynności wspiera proces ich uwewnętrznienia i odwrotnie: werbalizacja własnych myśli służy ich porządkowaniu i strukturyzowaniu. Język jest tym narzędziem, które łączy realny świat ze światem myśli i tworzonym przez nie światem matematycznej abstrakcji.

Dydaktycznie niezbędne jest stosowanie w edukacji zasady kontrastowania. Nie można bowiem uczyć się jedynie na przykładach pozytywnych. W uczeniu się potrzebne są nie tylko przykłady, ale i kontrprzykłady, dzięki którym możemy lepiej zrozumieć pojęcie, jakie ma ono właściwości (cechy), a jakich nie ma; co jest ważne, a co nie jest istotne dla danego pojęcia. Tylko dzięki połączeniu w edukacji przykładów z kontrprzykładami jesteśmy w stanie ujrzeć wyraźnie istotę pojęcia.

Nie wszystko w uczeniu się matematyki polega na łączeniu różnorodnych czynności, zadań i procesów. Nie można bowiem kształtować pojęcia z jednoczesną automatyzacją jego wykorzystania. Zbyt wczesne zautomatyzowanie bądź zastąpienie rozumienia wyuczaniem na pamięć może być drogą do niebezpiecznego zjawiska formalizmu, może być przyczyną różnych błędów i trudności w uczeniu się, a wręcz może całkowicie zablokować prawidłowy proces uczenia się matematyki. Zatem należy oddzielić kształtowanie pojęć od ich zautomatyzowania.

Bibliografia

Hejny M., *Rozwój wiedzy matematycznej*, „Dydaktyka Matematyki" 1997, nr 19, s. 15–28.
Jeleńska L., *Metodyka pierwszych lat nauczania*, Nasza Księgarnia, Warszawa 1927.
Klus-Stańska D., *Wiedza i sposoby jej nabywania*, [w:] *Pedagogika wczesnoszkolna – dyskursy, problemy, rozwiązania*, red. D. Klus-Stańska, M. Szczepska-Pustkowska, Wydawnictwa Akademickie i Profesjonalne, Warszawa 2009, s. 473–483.
Krygowska Z., *Elementy aktywności matematycznej, które powinny odgrywać znaczącą rolę w matematyce dla wszystkich*, „Dydaktyka Matematyki" 1986, nr 6, s. 23–41.
Krygowska Z., *Zarys dydaktyki matematyki*, cz. 1, WSiP, Warszawa 1977.
Piaget J., *Studia z psychologii dziecka*, PWN, Warszawa 1966.
Treliński G., *Kształcenie matematyczne w systemie zintegrowanym*, Wszechnica Świętokrzyska, Kielce 2004.
Wygotski L.S., *Narzędzie i znak w rozwoju dziecka*, PWN, Warszawa 1978.

Abstract

Together or Separately, What to Combine and What to Divide
in Children's Mathematics Education

In the article various issues related to learning mathematics are presented. Mathematics has a three-fold nature and all its aspects complement and infiltrate each other. This is why in mathematics education they cannot be divided. None of its aspects cannot be missed. Likewise, including mathematics' operational character, we should combine simple activities with more complex ones. In contrast, we should separate shaping the terms and actions from its automatization.

Keywords: active teaching, automatization, mathematics' operational character, mathematics' three-fold nature, simple and complex activities