FOLIA 97

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

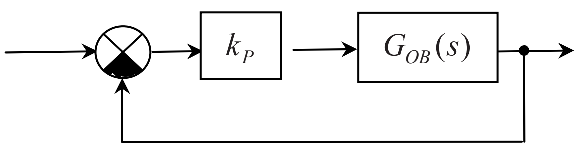
Studia Technica V (2012)

Miluše Vítečková, Antonín Víteček, Kazimierz Jaracz

Określenie parametrów krytycznych dla obiektów z opóźnieniem

Określenie parametrów krytycznych

Rozważany jest układ regulacji przedstawiony na rysunku 1 z regulatorem proporcjonalnym o wzmocnieniu k_P i obiektem o transmitancji $G_{OB}(s)$.



Rys. 1. Schemat układu regulacji

Dla układu regulacji z rysunku 1 granica stabilności określona jest warunkami [3]:

$$\mathrm{mod}[k_{Pk}G_{OB}(\mathrm{j}\omega_k)] = 1 \tag{1a}$$

$$\arg[k_{Pk}G_{OB}(\mathrm{j}\omega_k)] = -\pi \tag{1b}$$

gdzie: k_{Pk} – wzmocnienie krytyczne regulatora proporcjonalnego, ω_k – pulsacja (częstotliwość kątowa) krytyczna, mod – moduł, arg – faza.

Na podstawie warunków (1) można określić wzmocnienie krytyczne k_{Pk} i okres krytyczny T_k:

$$T_k = \frac{2\pi}{\omega_k} \tag{2}$$

Dla funkcji cyklometrycznej arctg(x) zastosowano prostą aproksymację [1]

$$\mathrm{arctg}(x) \approx \begin{cases} \dfrac{\pi}{4}x & \text{dla } |x| \le 1 \\ \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4x} & \text{dla } |x| > 1 \end{cases} \tag{3}$$

z błędem mniejszym niż ± 0,075.

Postępowanie i wyprowadzenie dokładnych i przybliżonych wzorów pokazano na dwóch prostych przykładach.

Przykład 1

Należy określić parametry krytyczne dla obiektu całkującego z opóźnieniem o transmitancji

$$G_{OB}(s) = \frac{k_1}{s} \mathrm{e}^{-T_o s} \tag{4}$$

gdzie: k_1 – współczynnik, T_o – opóźnienie.

Rozwiązanie

Na podstawie warunków (1) dla obiektu (4) otrzyma się

$$\left.\begin{aligned} \frac{k_{Pk}k_1}{\omega_k} &= 1 \\ -\frac{\pi}{2} - T_o\omega_k &= -\pi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} k_{Pk}k_1 &= \omega_k \\ T_o\omega_k &= \frac{\pi}{2} \end{aligned} \tag{5}$$

oraz po uwzględnieniu (2)

$$k_{Pk} = \frac{\pi}{2k_1T_o}, \qquad T_k = 4T_o$$

Zależności (5) umożliwiają na podstawie znanych wartości k_1 i T_o określić parametry krytyczne k_{Pk} i T_k. Jest oczywiste, że na podstawie znanych wartości k_{Pk} i T_k można na odwrót określić k_1 i T_o, tj.

$$k_1 = \frac{2\pi}{k_{Pk}T_k}, \qquad T_o = \frac{T_k}{4} \tag{6}$$

Oznacza to, że zależności (6) mogą zostać wykorzystane do strojenia regulatora w zamkniętym układzie regulacji dla eksperymentalnie określonych krytycznych parametrów k_{Pk} i T_k. Jeżeli regulator proporcjonalny zostanie zastąpiony przez dwupołożeniowy przekaźnik symetryczny, to parametry krytyczne we wzorach (6) mogą zostać określone w sposób przybliżony metodą stosowaną dla przekaźnika. Przykładowo dla dwupołożeniowego przekaźnika bez histerezy ważna jest zależność [4]:

$$k_{Pk} \approx \frac{4u_0}{\pi a} \tag{7}$$

gdzie: u_0 jest amplitudą sygnału wyjściowego przekaźnika (maksymalna wartość wyjściowa przekaźnika), a – amplitudą wielkości regulowanej z okresem oscylacji T_k.

Przykład 2

Należy określić parametry krytyczne dla obiektu proporcjonalnego z opóźnieniem

$$G_{OB}(s) = \frac{k_1}{(T_2 s + 1)^2} \mathrm{e}^{-T_o s} \tag{8}$$

gdzie: T_2 – stała czasowa.

Rozwiązanie

Zgodnie z warunkami (1) dla obiektu (8) otrzymamy:

$$\left.\begin{aligned} \frac{k_{Pk} k_1}{(T_2 \omega_k)^2 + 1} &= 1 \\ -2 \operatorname{arctg}(T_2 \omega_k) - T_o \omega_k &= -\pi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} k_{Pk} k_1 &= (T_2 \omega_k)^2 + 1 && \text{(9a)} \\ T_o \omega_k &= \pi - 2 \operatorname{arctg}(T_2 \omega_k) && \text{(9b)} \end{aligned}$$

Na podstawie zależności (9) można pisać:

$$\frac{T_o}{T_2} = \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{k_{Pk} k_1 - 1}}{\sqrt{k_{Pk} k_1 - 1}} \tag{10}$$

oraz przez porównanie zależności (3) i (9a) dla

$$x = T_2 \omega_k \Rightarrow x = \sqrt{k_{Pk} k_1 - 1}$$

wynika

$$x > 1 \Rightarrow k_{Pk} k_1 > 2 \Rightarrow \frac{T_o}{T_2} < \frac{\pi}{2}$$

$$x = 1 \Rightarrow k_{Pk} k_1 = 2 \Rightarrow \frac{T_o}{T_2} = \frac{\pi}{2}$$

$$x < 1 \Rightarrow k_{Pk} k_1 < 2 \Rightarrow \frac{T_o}{T_2} > \frac{\pi}{2}$$

Na podstawie zależności (9b), (10) i (11) otrzymuje się:

a) $0 < \dfrac{T_o}{T_2} < \dfrac{\pi}{2}$

$$k_{Pk} = \frac{1}{k_1} \left(\frac{\pi}{2} \frac{T_2}{T_o} + 1 \right) > \frac{2}{k_1} \tag{12}$$

$$T_k = 2\sqrt{2\pi T_o T_2}$$

b) $\frac{T_o}{T_2} = \frac{\pi}{2}$

$$k_{Pk} = \frac{2}{k_1} \tag{13}$$
$$T_k = 2\pi T_2 = 4T_o$$

c) $\frac{T_o}{T_2} > \frac{\pi}{2}$

$$k_{Pk} = \frac{1}{k_1}\left[\left(\frac{2\pi T_2}{2T_o + \pi T_2}\right)^2 + 1\right] < \frac{2}{k_1} \tag{14}$$
$$T_k = 2T_o + \pi T_2$$

Wzory (13) są dokładne; tak samo dokładny wynik dla podstawienia $\frac{T_o}{T_2} = \frac{\pi}{2}$ dają przybliżone wzory (12) i (14).

Przy założeniu, że współczynnik k_1 jest znany, to wzory (9) po przekształceniu mogą zostać zastosowane do identyfikacji eksperymentalnej

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{T_k}{2\pi}\sqrt{k_{Pk}k_1 - 1} \\ T_o &= \frac{T_k}{2\pi}\left(\pi - 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{k_{Pk}k_1 - 1}\right) \end{aligned} \tag{15}$$

Również w tym przypadku parametry krytyczne k_{Pk} i T_k mogą zostać określone drogą eksperymentalną, metodą przekaźnika [4].

W podobny sposób zostały określone pozostałe wzory w tabelach 1 i 2.

Wszystkie wzory w tabeli 1 są dokładne i służą do określenia dwóch nieznanych parametrów obiektu na podstawie wzmocnienia krytycznego k_{Pk} i okresu krytycznego T_k. Parametry krytyczne mogą zostać określone drogą eksperymentalną iteracyjnie przy pomocy regulatora proporcjonalnego lub w sposób przybliżony metodą przekaźnika (patrz zależność (7)) lub szczegółowo [4]. Dla obiektów z inercją pierwszego lub drugiego rzędu zakłada się znajomość współczynnika k_1.

Tab. 1. Identyfikacja obiektu w układzie zamkniętym na podstawie parametrów krytycznych k_{Pk} i T_k

Transmitancja obiektu	**Parametry obiektu**	**Uwaga**
$k_1\,\mathrm{e}^{-T_o s}$	$k_1 = \frac{1}{k_{Pk}}, \qquad T_o = \frac{T_k}{2}$	
$\frac{k_1}{s}\,\mathrm{e}^{-T_o s}$	$k_1 = \frac{2\pi}{k_{Pk}T_k}, \qquad T_o = \frac{T_k}{4}$	

$\dfrac{k_1}{T_1 s+1}\mathrm{e}^{-T_o s}$	$T_1=\dfrac{T_k}{2\pi}\sqrt{(k_{Pk}k_1)^2-1}$ $T_o=\dfrac{T_k}{2\pi}\left(\pi-\mathrm{arctg}\sqrt{(k_{Pk}k_1)^2-1}\right)$	k_1 – znane
$\dfrac{k_1}{s(T_1 s+1)}\mathrm{e}^{-T_o s}$	$T_1=\dfrac{T_k}{2\pi}\sqrt{\left(\dfrac{k_{Pk}k_1T_k}{2\pi}\right)^2-1}$ $T_o=\dfrac{T_k}{2\pi}\left[\dfrac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}\sqrt{\left(\dfrac{k_{Pk}k_1T_k}{2\pi}\right)^2-1}\right]$	k_1 – znane
$\dfrac{k_1}{(T_2 s+1)^2}\mathrm{e}^{-T_o s}$	$T_2=\dfrac{T_k}{2\pi}\sqrt{k_{Pk}k_1-1}$ $T_o=\dfrac{T_k}{2\pi}\left(\pi-2\,\mathrm{arctg}\sqrt{k_{Pk}k_1-1}\right)$	k_1 – znane

Tabela 2 służy do określenia parametrów krytycznych na podstawie znanych parametrów obiektu. Dla obiektów z inercją pierwszego i drugiego rzędu należy najpierw obliczyć stosunek T_o/T_1 lub T_o/T_2 i na jego podstawie wybrać odpowiednie wzory do obliczenia parametrów krytycznych. Dla tych obiektów wzory są jedynie przybliżone (wyjątek stanowią konkretne stosunki T_o/T_1 i T_o/T_2).

Tab. 2. Określenie parametrów krytycznych k_{Pk} i T_k na podstawie parametrów obiektu

<table>
<tr><th>Transmitancja obiektu</th><th colspan="2">Parametry krytyczne</th><th>Uwaga</th></tr>
<tr><td>$k_1\,\mathrm{e}^{-T_o s}$</td><td colspan="2">$k_{Pk}k_1=1,\qquad T_k=2T_o$</td><td>dokładne</td></tr>
<tr><td>$\dfrac{k_1}{s}\mathrm{e}^{-T_o s}$</td><td colspan="2">$k_{Pk}k_1=\dfrac{\pi}{2T_o},\quad T_k=4T_o$</td><td>dokładne</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\dfrac{k_1}{T_1 s+1}\mathrm{e}^{-T_o s}$</td><td>$0<\dfrac{T_o}{T_1}<\dfrac{3}{4}\pi$</td><td>$k_{Pk}k_1=\sqrt{\left[\dfrac{\pi T_1}{4T_o}\left(1+\sqrt{1+\dfrac{4T_o}{\pi T_1}}\right)\right]^2+1}>\sqrt{2}$
$T_k=\dfrac{8T_o}{1+\sqrt{1+\dfrac{4T_o}{\pi T_1}}}$</td><td>przybliżone, dla
$\dfrac{T_o}{T_1}=\dfrac{3}{4}\pi$
dokładne</td></tr>
<tr><td>$\dfrac{T_o}{T_1}=\dfrac{3}{4}\pi$</td><td>$k_{Pk}k_1=\sqrt{2}$
$T_k=\dfrac{8T_o}{3}=2\pi T_1$</td><td>dokładne</td></tr>
</table>

$\dfrac{k_1}{T_1 s+1}\mathrm{e}^{-T_o s}$	$\dfrac{T_o}{T_1} > \dfrac{3}{4}\pi$	$k_{Pk}k_1 = \sqrt{\left(\dfrac{4\pi T_1}{\pi T_1 + 4T_o}\right)^2 + 1} < \sqrt{2}$ $T_k = 2T_o + \dfrac{\pi T_1}{2}$	przybliżone, $\dfrac{T_o}{T_1} = \dfrac{3}{4}\pi$ dla dokładne
$\dfrac{k_1}{s(T_1 s+1)}\mathrm{e}^{-T_o s}$	$0 < \dfrac{T_o}{T_1} < \dfrac{\pi}{4}$	$k_{Pk}k_1 = \dfrac{1}{4T_o}\sqrt{\dfrac{\pi(4T_o + \pi T_1)}{T_1}} > \dfrac{\sqrt{2}}{T_1} = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}T_o}$ $T_k = 4\sqrt{\pi T_o T_1}$	przybliżone, $\dfrac{T_o}{T_1} = \dfrac{\pi}{4}$ dla dokładne
	$\dfrac{T_o}{T_1} = \dfrac{\pi}{4}$	$k_{Pk}k_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{T_1} = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}T_o}$ $T_k = 8T_o = 2\pi T_1$	dokładne
	$\dfrac{T_o}{T_1} > \dfrac{\pi}{4}$	$k_{Pk}k_1 = \dfrac{2\pi}{4T_o + \pi T_1}\sqrt{\left(\dfrac{2\pi T_1}{4T_o + \pi T_1}\right)^2 + 1} < \dfrac{\sqrt{2}}{T_1} =$ $= \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}T_o}$ $T_k = 4T_o + \pi T_1$	przybliżone, $\dfrac{T_o}{T_1} = \dfrac{\pi}{4}$ dla dokładne
$\dfrac{k_1}{(T_2 s+1)^2}\mathrm{e}^{-T_o s}$	$0 < \dfrac{T_o}{T_2} < \dfrac{\pi}{2}$	$k_{Pk}k_1 = \dfrac{\pi T_2}{2T_o} + 1 > 2$ $T_k = 2\sqrt{2\pi T_o T_2}$	przybliżone, $\dfrac{T_o}{T_2} = \dfrac{\pi}{2}$ dla dokładne
	$\dfrac{T_o}{T_2} = \dfrac{\pi}{2}$	$k_{Pk}k_1 = 2$ $T_k = 4T_o = 2\pi T_2$	dokładne
	$\dfrac{T_o}{T_2} = \dfrac{\pi}{2}$	$k_{Pk}k_1 = \left(\dfrac{2\pi T_2}{2T_o + \pi T_2}\right)^2 + 1 < 2$ $T_k = 2T_o + \pi T_2$	przybliżone, dla dokładne

Wnioski

W artykule przytoczono proste zależności, które pozwalają eksperymentalnie identyfikować podstawowe układy zawierające obiekty z opóźnieniem na podstawie wzmocnienia krytycznego regulatora proporcjonalnego i okresu krytycznego drgań powstających na granicy stabilności w układzie zamkniętym. Przytoczono również wzory pozwalające określić w sposób analityczny parametry krytyczne dla tych układów. W większości są to wzory przybliżone, ale ich dokładność dla celów praktycznych jest wystarczająca. Wzory te są oryginalne.

Artykuł powstał w ramach pracy nad projektem GAČR 102/09/0894.

Literatura

[1] Ho W.K., Hang C.C., Cao, L.S., *Tuning of PID Controllers Based on Gain and Phase Margin Specifications*, Automatica, 1995, vol. 31, No. 3, s. 497–502

[2] Oppelt W., *Příručka regulační techniky*, SNTL – Nakladatelství technické literatury, Praha 1967

[3] Vítečková M., Víteček A., *Základy automatické regulace*, Ostrava, FS VŠB-TU, Ostrava 2008.

[4] Vítečková M., Víteček A., *Experimental Plant Identification by Relay Method*, Transactions of the VŠB – Technical University of Ostrava, Mechanical Series, 2005, vol. LI, No. 2, s. 155–166

Determination of ultimate parameters for plants with time delay

Abstract

The paper is devoted to the determination and the use of the ultimate parameters, i.e. the ultimate proportional controller gain and the ultimate period in control. The simple relations which enable identifying two parameters of common plants with a time delay on the basis of the ultimate parameters and vice versa enable determining the ultimate parameters mostly approximately, but are given for practice with a sufficient accuracy. These relations are original.

Keywords: ultimate proportional controller gain, ultimate period, identification

Miluše Vítečková, Antonín Víteček
VŠB – Uniwersytet Techniczny, Ostrawa
Republika Czeska

Kazimierz Jaracz
Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie
Instytut Techniki
ul. Podchorążych 2
30-084 Kraków