

*Krystyna Kuźniar, Maciej Zajac*

## **Obliczanie częstotliwości drgań własnych modyfikowanych tarczowych elementów konstrukcji z wykorzystaniem metody aproksymacji połączonych**

### **Wstęp**

Określenie częstotliwości drgań własnych konstrukcji jest zwykle konieczne w przypadku, gdy podlega ona oddziaływaniom o charakterze dynamicznym [2, 7, 8].

Dla prostych modeli matematycznych istnieje możliwość otrzymania poszukiwanych częstotliwości drgań własnych metodą analityczną [10]. W przypadku konstrukcji o złożonej geometrii, nierównomiernym rozłożeniu masy i sztywności, rozwiązania poszukuje się z wykorzystaniem metod numerycznych. Do najpopularniejszych obecnie należy zaliczyć metodę elementów skończonych (MES) [12, 13].

Mimo szybkiego postępu technologicznego, zwłaszcza w dziedzinie zwiększania mocy obliczeniowej procesorów komputerowych, rozwiązanie zadania z dużą liczbą stopni swobody jest wciąż numerycznie kosztowne i czasochłonne. Dodatkowo, niektóre analizy (np. optymalizacja) wymagają wielokrotnego powtórzenia obliczeń, co znacząco wydłuża czas ich trwania.

Problem tego typu występuje również w przypadku prób modyfikacji konstrukcji, np. poprzez dołożenie lub odjęcie pewnych elementów. Każda zmiana w geometrii obiektu, a tym samym w sztywności i masie, powoduje zmianę właściwości dynamicznych, w tym częstotliwości drgań własnych. Wyznaczenie ich metodą elementów skończonych dla „nowej”, zmodyfikowanej konstrukcji wymaga ponownego rozwiązania zagadnienia własnego z „nowymi” macierzami sztywności i mas. W przypadku układów o wielu stopniach swobody rozważenie różnych wariantów modyfikacji wymaga znacznego czasu obliczeń. Stąd propozycja zmniejszenia wysiłku numerycznego poprzez wykorzystanie idei reanalizy, a więc użycia informacji o konstrukcji bez modyfikacji w kolejnych obliczeniach konstrukcji ze zmianami [1, 3, 6].

W niniejszej pracy do wyznaczania częstotliwości drgań własnych modyfikowanych tarczowych elementów konstrukcji zastosowano jedno z narzędzi reanalizy, tj. metodę aproksymacji połączonych (z ang. Combine Approximations Method CA) [3, 4, 5], której algorytm pozwala na redukcję wielkości zadania. Metodę testowano w odniesieniu do dwóch typów problemu: gdy liczba stopni swobody konstrukcji przed i po modyfikacji jest taka sama oraz gdy w modyfikowanej konstrukcji następuje zwiększenie liczby stopni swobody, a zatem jednocześnie zwiększenie wymiarów macierzy sztywności i mas.

### Algorytm metody połączonych aproksymacji

Metoda połączonych aproksymacji jest metodą przybliżoną, w której rozwiązywanie nowego problemu własnego konstrukcji po modyfikacji, a więc reanaliza zadania, odbywa się za pomocą zredukowanej liczby równań [3, 4, 5]. Wykorzystywane są tu wektory bazowe (aproksymacja globalna) otrzymane z rozwinięcia w szereg pewnego dwumianu (aproksymacja lokalna).

W wyniku modernizacji konstrukcji zmianie ulegają jej macierze sztywności i mas:

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_M &= \mathbf{K} + \Delta\mathbf{K} \\ \mathbf{M}_M &= \mathbf{M} + \Delta\mathbf{M}\end{aligned}\quad (1)$$

gdzie:  $\mathbf{K}, \mathbf{K}_M$  – macierze sztywności;  $\mathbf{M}, \mathbf{M}_M$  – macierze mas odpowiednio przed i po modyfikacji konstrukcji;  $\Delta\mathbf{K}, \Delta\mathbf{M}$  – odpowiednio zmiana w macierzy sztywności i mas.

Nowy problem własny z uwzględnieniem tak zmienionych macierzy sztywności i mas, można zapisać następująco:

$$\mathbf{K}_M \Phi_{M_i} = \lambda_{M_i} \mathbf{M}_M \Phi_{M_i}, \quad i = 1, \dots, p \quad (2)$$

gdzie: macierze  $\mathbf{K}_M, \mathbf{M}_M$  jak w (1);  $\Phi_{M_i}$  – wektory własne,  $\lambda_{M_i}$  – wartości własne ( $\lambda_{M_i} = \omega_{M_i}^2$ ,  $\omega_{M_i} = 2\pi f_{M_i}$ ),  $f_{M_i}$  – częstotliwości drgań własnych konstrukcji po modyfikacji;  $p$  – liczba rozważanych postaci drgań.

Wykorzystując związki (1), nowy problem własny, po modyfikacji z uwzględnieniem pierwotnych cech konstrukcji można zapisać w postaci:

$$(\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K})\Phi_{M_i} = \lambda_{M_i} (\mathbf{M} + \Delta\mathbf{M})\Phi_{M_i} \quad i = 1, \dots, p. \quad (3)$$

Dalszy krok algorytmu wymaga obliczenia macierzy wektorów bazowych  $\mathbf{r}_B$ , które mają bezpośredni wpływ na stabilność i dokładność obliczeń numerycznych:

$$\mathbf{r}_B = [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_s], \quad (4)$$

gdzie:  $\mathbf{r}_B$  – macierz wektorów bazowych;  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_s$  – wektory bazowe,  $s$  – liczba wektorów bazowych (znacznie mniejsza od liczby stopni swobody układu).

Pierwszy wektor bazy wyznacza się według wzoru:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M}_M \Phi_i \quad (5)$$

gdzie  $\Phi_i$  – wektor własny odpowiadający  $i$ -tej postaci konstrukcji pierwotnej.

Kolejne wektory bazowe oblicza się z zależności (6) (z wykorzystaniem rozwinięcia w dwumian), gdzie  $s$  to liczba wektorów (wymiar zredukowanego zadania) dużo mniejsza od liczby stopni swobody zadania pełnego,  $\mathbf{B} = \mathbf{K}^{-1} \Delta \mathbf{K}$ :

$$\mathbf{r}_k = -\mathbf{B} \mathbf{r}_{k-1}, \quad k = 2, 3, \dots, s. \quad (6)$$

Po wyznaczeniu macierzy wektorów bazowych oblicza się zgodnie z (7) zredukowane macierze sztywności  $\mathbf{K}_R$  i mas  $\mathbf{M}_R$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_R &= \mathbf{r}_B^T \mathbf{K}_M \mathbf{r}_B \\ \mathbf{M}_R &= \mathbf{r}_B^T \mathbf{M}_M \mathbf{r}_B \end{aligned} \quad (7)$$

Następnie analizuje się zredukowany problem własny dla pierwszej (najniższej) wartości własnej według (8):

$$\mathbf{K}_R \mathbf{y}_1 = \lambda_{M1} \mathbf{M}_R \mathbf{y}_1, \quad (8)$$

gdzie:  $\mathbf{y}_1$  - wektor szukanych współczynników,  $\mathbf{y}_1^T = \{y_1, y_2, \dots, y_s\}$ .

Poszukiwany wektor własny otrzymuje się w wyniku przemnożenia wektora współczynników  $\mathbf{y}_1$  przez macierz wektorów bazowych  $\mathbf{r}_B$ :

$$\Phi_{Mi} = y_1 \mathbf{r}_1 + y_2 \mathbf{r}_2 + \dots + y_s \mathbf{r}_s = \mathbf{r}_B \mathbf{y}_1 \quad . \quad (9)$$

Podobnej procedury używa się również w odniesieniu do wyższych postaci drgań.

W przypadku modyfikacji konstrukcji, skutkującej zwiększeniem liczby stopni swobody w stosunku do liczby stopni swobody konstrukcji pierwotnej, pojawiają się trudności z obliczeniem macierzy zmian  $\Delta \mathbf{K}$  i  $\Delta \mathbf{M}$  ze względu na różne wymiary odpowiednich macierzy mas i sztywności przed i po modyfikacji (por. (1)). W celu uniknięcia tego problemu tworzy się pseudopoczątkowe (fikcyjne), „powiększone” macierze sztywności ( $\mathbf{K}_f$ ) i mas ( $\mathbf{M}_f$ ) dla konstrukcji początkowej tak, aby wymiary tych macierzy były takie same jak wymiary macierzy odpowiadających konstrukcji po modyfikacji [3, 6].

Zaproponowano utworzenie fikcyjnej początkowej macierzy sztywności  $\mathbf{K}_f$  zgodnie z (10):

$$\mathbf{K}_f = \begin{pmatrix} \mathbf{K} & \alpha \cdot \mathbf{K}_{Mp} \\ \alpha \cdot \mathbf{K}_{Mn} & \alpha \cdot \mathbf{K}_{Mp} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Składa się ona z elementów rzeczywistej, początkowej macierzy sztywności  $\mathbf{K}$  i jest uzupełniona o elementy w dodatkowych wierszach i kolumnach. Elementy te powstają przez przemnożenie odpowiednich elementów macierzy po modyfikacji (w odpowiednich, dodatkowych kolumnach i wierszach) przez stałą  $\alpha$  z przedziału  $0 < \alpha \leq 1$  [3]. W niniejszej pracy obliczenia przeprowadzono z użyciem dwóch wartości tego parametru:  $\alpha = 0.001$  oraz  $\alpha = 0.002$ . Zwykle liczba dodanych stopni

swobody (nawet przy wprowadzaniu dużych zmian w konstrukcji) jest stosunkowo mała w porównaniu z liczbą stopni swobody konstrukcji przed modyfikacją.

W algorytmie metody aproksymacji połączonych do obliczenia pierwszego wektora bazowego wykorzystuje się wektor własny konstrukcji sprzed modyfikacji  $\Phi_i$ , odpowiadający poszukiwanej częstotliwości drgań. W przypadku zwiększenia liczby stopni swobody w wyniku modyfikacji konstrukcji, również i ten wektor musi być „powiększony”. W tym celu jako kolejne, dodatkowe elementy tego wektora przyjmuje się zera.

## Wyniki obliczeń częstotliwości drgań własnych modernizowanych tarczowych elementów konstrukcji z użyciem metody aproksymacji połączonych

### Uwagi wstępne

Analizie poddano tarcze prostokątne utwierdzone w podstawie (jeden z boków). Wszystkie mają wysokość 14 m i grubość 0.14 cm. Pod uwagę wzięto kilka szerokości tarcz pierwotnych (przed modyfikacją). Przyjęto następujące parametry materiału: gęstość  $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$ , moduł Younga  $E = 29 \text{ GPa}$ , współczynnik Poissona  $\nu = 0.17$ .

Macierze sztywności i mas, niezbędne w przypadku stosowania metody CA, otrzymano modelując konstrukcje w programie bazującym na metodzie elementów skończonych Ansys [11], z wykorzystaniem 4-węzłowego elementu „plate 42” o dwóch stopniach swobody w węźle.

Wykorzystując algorytm CA, opracowano własny program w środowisku Matlab [9] do wyliczania częstotliwości drgań własnych modernizowanych tarcz.

Skuteczność metody połączonych aproksymacji oraz dokładność uzyskiwanych rezultatów oceniano zgodnie z (11) poprzez porównywanie wartości częstotliwości wyznaczonych metodą CA ( $f_{iCA}$ ) z odpowiednimi wartościami dokładnymi ( $f_{iMES}$ ), tzn. otrzymanymi w wyniku rozwiązania pełnego zagadnienia własnego, a więc z pełnymi macierzami mas  $\mathbf{M}_M$  i macierzy sztywności  $\mathbf{K}_M$  zmodyfikowanej tarczy. W tym celu wyliczano ułamek  $r_i$ :

$$r_i = \frac{f_{iCA}}{f_{iMES}} \quad (11)$$

gdzie:  $f_{iCA}$  – wartość  $i$ -tej częstotliwości drgań wyliczona metodą CA,  $f_{iMES}$  – wartość  $i$ -tej częstotliwości drgań wyliczona z użyciem pełnej macierzy mas  $\mathbf{M}_M$  i macierzy sztywności  $\mathbf{K}_M$  zmodyfikowanej tarczy (traktowana jako wyznaczona dokładnie).

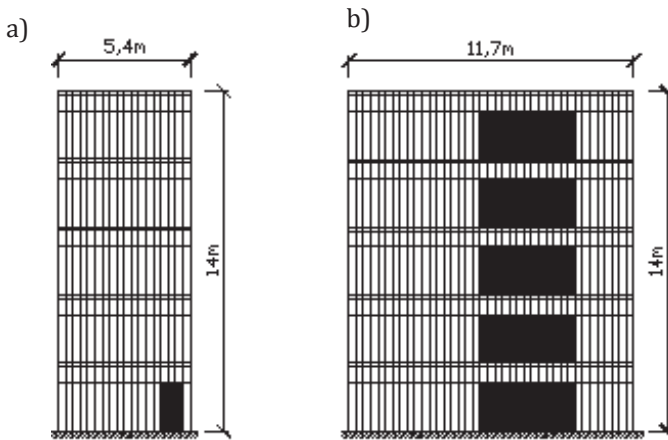
Dodatkowo, zgodnie z częstą praktyką, określono według wzoru (12) błąd względny rozwiązania CA:

$$ep_i = \frac{|f_{iMES} - f_{iCA}|}{f_{iMES}} \cdot 100\% \quad (12)$$

gdzie:  $ep_i$  – błąd względny wartości  $i$ -tej częstotliwości drgań własnych wyznaczonej za pomocą CA;  $f_{iCA}, f_{iMES}$  – jak we wzorze (11).

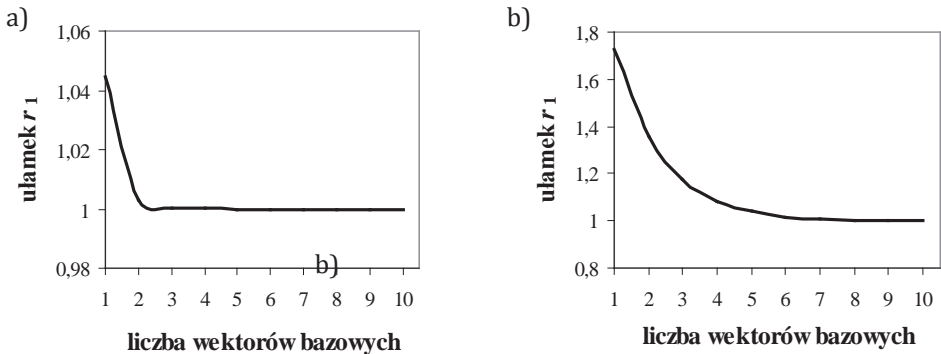
### Reanaliza problemu w przypadku tej samej liczby stopni swobody

Reanalizę problemu własnego z zachowaniem tej samej liczby stopni swobody przeprowadzono w odniesieniu do zmodyfikowanych dwóch tarcz: o szerokości 5,4 m oraz o szerokości 11,7 m. W tarczy o szerokości 5,4 m modernizacja polega na wprowadzeniu pojedynczego otworu o wymiarach 200 cm x 90 cm (rys. 1a). Stosunek powierzchni otworu do powierzchni całej tarczy wynosi 2,4%, jest więc to mała zmiana. W tarczy o szerokości 11,7 m istotnej zmiany w konstrukcji dokonano poprzez wprowadzenie „serii” otworów o wymiarach 200 cm x 390 cm jeden nad drugim (stosunek powierzchni otworów do całej tarczy – 24%), co pokazano na rys. 1b. Aby wprowadzone zmiany nie spowodowały różnicy w liczbie stopni swobody (wymiarach macierzy sztywności oraz mas) tarczy przed i po modernizacji, nie zmieniano siatki elementów, a otwory modelowano za pomocą elementów o sztywności i masie bliskich zeru.



Rys. 1. Rozmieszczenie otworów w tarczy o szerokości: a) 5.4 m, b) 11.7 m

Rys. 2 przedstawia zależność wartości ułamka  $r_1$  wyznaczonego dla pierwszej częstotliwości drgań własnych rozważanych tarcz od liczby zastosowanych w rozwiązaniu wektorów bazowych. Dodatkowo w tabeli 1 zestawiono wartości ułamka  $r_1$  dla pierwszej częstotliwości drgań własnych oraz błędu względnego rozwiązania  $ep_1$ .



Rys. 2. Zależność ułamka  $r_1$  od liczby wektorów bazowych dla pierwszej częstotliwości drgań własnych tarczy o szerokości: a) 5.4 m, b) 11.7 m

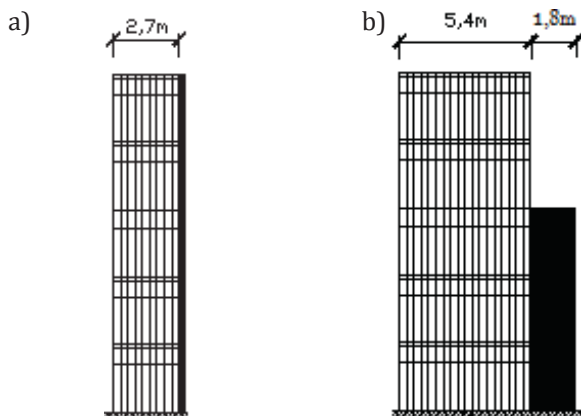
**Tab. 1.** Wartości ułamka  $r_1$  oraz błędę względnę  $ep_1$  w zależności od liczby użytych wektorów bazowych

| Liczba wektorów bazowych | Tarcza 5,4 m (rys. 1a) |            | Tarcza 11,7 m (rys. 1b) |            |
|--------------------------|------------------------|------------|-------------------------|------------|
|                          | $r_1$                  | $ep_1$ [%] | $r_1$                   | $ep_1$ [%] |
| 1                        | 1.0444                 | 4.4359     | 1.7244                  | 72.44      |
| 2                        | 1.0031                 | 0.3130     | 1.3598                  | 35.98      |
| 3                        | 1.0002                 | 0.0242     | 1.1732                  | 17.32      |
| 4                        | 1.0001                 | 0.0067     | 1.0819                  | 8.19       |
| 5                        | 1.0000                 | 0.0023     | 1.0390                  | 3.90       |
| 10                       | 1.0000                 | 0.0014     | 1.0005                  | 0.05       |

Widać (rys. 2a), że w przypadku tarczy o szerokości 5,4 m (570 stopni swobody, rys. 1a) zastosowanie tylko dwóch wektorów (redukcja wymiarów macierzy w problemie własnym z  $570 \times 570$  do  $2 \times 2$ ) pozwala na osiągnięcie rezultatu bliskiego jeden. W przypadku tarczy o szerokości 11,7 m (1200 stopni swobody, rys. 1b) zbieżność  $r_1$  do jedynki uzyskuje się przy użyciu nieco większej liczby wektorów bazowych (rys. 2b). Wynika to z rozmiaru przeprowadzonej modyfikacji. Niemniej jednak, także w tym przypadku można zaobserwować znaczącą redukcję zadania – użycie 10 wektorów bazowych skutkuje redukcją wymiarów macierzy w problemie własnym z  $1200 \times 1200$  do  $10 \times 10$ .

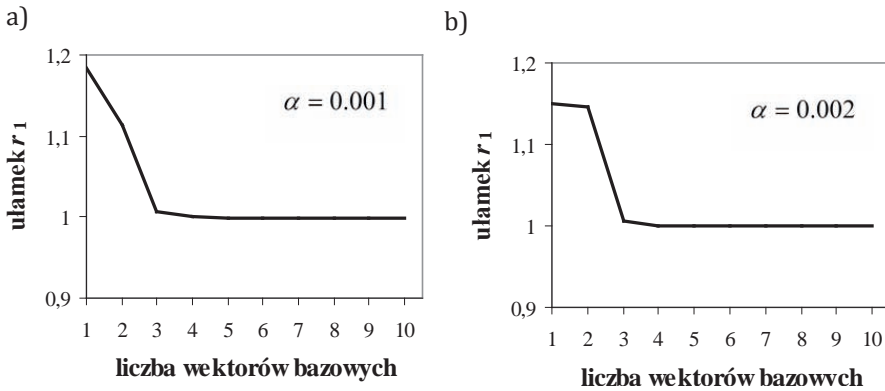
### Reanaliza problemu w przypadku zwiększenia liczby stopni swobody

Zmiana geometrii modernizowanej konstrukcji poprzez dokładanie nowych elementów wymusza prowadzenie obliczeń na modelach z inną niż pierwotna siatką elementów, co implikuje zmianę liczby stopni swobody. Taka sytuacja ma miejsce w rozważanych modyfikacjach tarcz o szerokościach 2,7 m i 5,4 m, pokazanych na rys. 3. W przypadku tarczy o szerokości 2,7 m (rys. 3a) „dołożono” do pierwotnej konstrukcji „pasek” o wymiarach 0,9 m x 14 m (zwiększenie liczby stopni swobody z 300 do 330), a w przypadku tarczy o szerokości 5,4 m (rys. 3b) „wzmocniono” konstrukcję „paskiem” 1,8 m x 8,4 m (zwiększenie liczby stopni swobody z 570 do 678).



**Rys. 3.** Schemat modyfikacji w wyniku „wzmocnienia” tarczy o szerokości: a) 2,7 m, b) 5,4 m

Na rys. 4 pokazano zależność wartości ułamka  $r_1$  od liczby wektorów bazowych dla pierwszej częstotliwości drgań własnych analizowanych tarcz z dołożonymi elementami. Z kolei w tabeli 2 oprócz wartości ułamka  $r_1$ , dodatkowo przedstawiono błąd względny  $ep_1$  rozwiązania w analizowanych przypadkach.



**Rys. 4.** Zależność ułamka  $r_1$  od liczby wektorów bazowych dla pierwszej częstotliwości drgań własnych tarcz z dołożonymi elementami: a) 2,7 m, b) 5,4 m

**Tab. 2.** Wartości ułamka  $r_1$  oraz błędu względnego  $ep_1$  w zależności od liczby użytych wektorów bazowych

| Liczba wektorów bazowych | Tarcza 2.7 m (rys. 3a)<br>$\alpha = 0.001$ |            | Tarcza 5.4 m (rys. 3b)<br>$\alpha = 0.002$ |            |
|--------------------------|--|------------|--|------------|
|                          | $r_1$                                      | $ep_1$ [%] | $r_1$                                      | $ep_1$ [%] |
| 1                        | 1.1847                                     | 18,466     | 1.1503                                     | 15.025     |
| 2                        | 1.1139                                     | 11.389     | 1.1467                                     | 14.675     |
| 3                        | 1.0073                                     | 0.7361     | 1.0057                                     | 0.5763     |
| 4                        | 0.9997                                     | 0.0332     | 0.9999                                     | 0.0024     |
| 5                        | 0.9995                                     | 0.0494     | 0.9997                                     | 0.0326     |
| 10                       | 0.9995                                     | 0.0495     | 0.9997                                     | 0.0351     |

Zarówno w przypadku niewielkiego zwiększenia liczby stopni swobody tarczy po modernizacji (rys. 4a), jak i zdecydowanie większej zmiany (rys. 4b), użycie w metodzie CA tylko 3 wektorów bazowych pozwala na wyliczenie częstotliwości drgań własnych „nowych” tarcz z błędem mniejszym niż 1%. Podkreślić należy, że takie rezultaty uzyskano przy znaczącej redukcji wielkości zadania – do 3 równań. Rozwiązanie zagadnienia własnego z użyciem pełnych macierzy mas i sztywności analizowanych tarcz wymagałoby w metodzie elementów skończonych wykorzystania odpowiednio 330 i 678 równań.

## Wnioski

Metoda połączonych aproksymacji, jako narzędzie reanalizy, pozwala na szybkie i wystarczająco dokładne wyznaczenie częstotliwości drgań własnych modyfikowanych tarczowych elementów konstrukcji. Redukcja „wielkości” zadania, a tym samym znaczące skrócenie czasu obliczeń, odbywa się bez widocznej straty dokładności wyników, co przykładowo przedstawiono m.in. w tabeli 3. Porównano w niej wartości pierwszych częstotliwości drgań własnych analizowanych tarcz ze zmienioną geometrią otrzymane z użyciem metody CA oraz metody elementów skończonych (z pełnymi macierzami sztywności i mas).

**Tab. 3.** Porównanie wartości pierwszej częstotliwości drgań własnych  $f_1$  [Hz] tarcz ze zmienioną geometrią otrzymanych z użyciem metody CA oraz MES

| Metoda | Modyfikacja tarczy               |           |                                   |           |
|--------|----------------------------------|-----------|-----------------------------------|-----------|
|        | Bez zmiany liczby stopni swobody |           | Zwiększenie liczby stopni swobody |           |
|        | (rys. 1a)                        | (rys. 1b) | (rys. 3a)                         | (rys. 3b) |
| CA     | 7.51                             | 7.99      | 4.94                              | 11.61     |
| MES    | 7.51                             | 7.99      | 4.94                              | 11.61     |

Tak obiecujące rezultaty uzyskano zarówno gdy liczba stopni swobody konstrukcji przed i po modyfikacji jest taka sama, jak i gdy w modyfikowanej konstrukcji następuje zwiększenie liczby stopni swobody, a zatem jednocześnie zwiększenie wymiarów macierzy sztywności i mas.

## Literatura

- [1] Chen S.H., Yang X.W., Lian H.D., *Comparison of several eigenvalue reanalysis methods for modified structures*, Structural Multidisciplinary Optimization, 2000, 20, 4, 253–259.
- [2] Chmielewski T., Zembaty Z., *Podstawy dynamiki budowli*, Arkady, Warszawa 1998.
- [3] Kirsch U., *Reanalysis of Structures. A Unified Approach for Linear, Nonlinear, Static and Dynamic Systems*, Springer Netherlands, 2008.
- [4] Kirsch U., Bogomolni M., Sheinman I., *Efficient Dynamic Reanalysis of Structures*, Journal of Structural Engineering, ASCE, 2007, 133, 3, 440–448.
- [5] Kirsch U., Papalambros P.Y., *Exact and Accurate Reanalysis of Structures for Geometrical Changes*, Engineering with Computers, 2001, 17, 363–372.
- [6] Level P., Gallo Y., Tison T., Ravalard Y., *On an extension of classical modal reanalysis algorithms: the improvement of initial models*, Journal of Sound and Vibrations, 1995, 186, 4, 551–560.
- [7] Lewandowski R., *Dynamika konstrukcji budowlanych*, Wyd. Politechniki Poznańskiej, Poznań 2006.
- [8] Lipiński J., *Fundamenty pod maszyny*, Arkady, Warszawa 1985.
- [9] Manual Matlab 7.6.0.324, 2008.



- [10] Olszowski B., Radwańska M., *Mechanika budowli*, t. 2, Wyd. Politechniki Krakowskiej, Kraków 2010.
- [11] Release 11.0 Documentation for Ansys, 2007.
- [12] Zienkiewicz O.C., *The Finite Element Method*, McGraw-Hill, 1977.
- [13] Zienkiewicz O.C, Taylor R.L., *Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*, Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005.

## **Computation of natural frequencies of vibrations of modified shear structures, using combine approximations method**

### **Abstract**

In the paper combined approximations (CA) hybrid method was proposed as effective reanalysis approach for computation of natural frequencies of the modified shear structure. CA procedure is applied in case of the same number and in case of increasing number of degrees of freedom in structure after modification. It was proved that CA method gives significant reduction of the computational effort for the evaluation of the natural frequencies of vibrations of the modified structure with no greater decrease of the accuracy.

**Key words:** Combined approximations method, reanalysis of structure, natural frequencies of vibration

Krystyna Kuźniar, Maciej Zając  
UP – Kraków  
Instytut Techniki