

Miluš Vítěčková, Antonín Víteček, Kazimierz Jaracz

Dobór nastaw cyfrowych i analogowych regulatorów PI 2DOF dla obiektu całkującego z opóźnieniem

Wprowadzenie

Dobór nastaw regulatorów z działaniem całkującym dla obiektów całkujących należy do trudniejszych zadań teorii i praktyki regulacji. Wynika to przede wszystkim z rzędu astatyzmu układu regulacji $q = 2$. Wtedy istnieje skłonność do dużych przeregulowań, oscylacji, a nawet niestabilności [1, 8, 10, 11, 13–15]. Szczegółowo ten problem dla regulatorów analogowych PI oraz PID rozważano w [15], gdzie wyprowadzono wzory dla ich nastaw. Teraz wzory te zostaną rozszerzone dla regulatorów cyfrowych PI.

Zakłada się, że obiekt opisany jest L-transmitancją

$$G_{OB}(s) = \frac{k_1}{s} e^{-T_o s} \quad (1)$$

gdzie: k_1 jest współczynnikiem wzmocnienia, T_o – opóźnieniem, s – zmienną zespoloną w L-przekształceniu.

Dalej stosowano D-przekształcenie, które umożliwiła jednakowe podejście do układów regulacji z regulatorem cyfrowym, jak również analogowym [2, 3, 6, 12].

D-transmitancja obiektu (1) dana jest zależnością

$$G_{OB}(\gamma) = \frac{k_1}{\gamma} (T\gamma + 1)^{-d} \quad (2)$$

gdzie: T to okres próbkowania, γ – zmienne zespolone w D-przekształceniu, d – opóźnienie względne

$$d = \frac{T_o}{T} \quad (3)$$

o którym zakłada się, że jest liczbą całkowitą (później zostanie pokazane, że założenie to nie jest istotne).

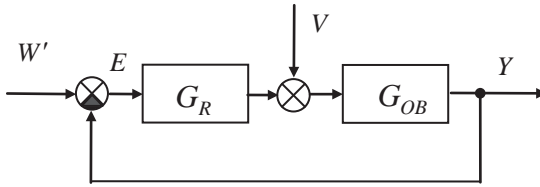
Zastosowano regulator PI, którego L-, Z- oraz D-transmitancje zamieszczono w tabeli 1.

Dla układu regulacji przedstawionego na rys. 1 z konwencjonalnym PI regulatorem (o jednym stopniu swobody), wielkości W' , Y , V oraz E oznaczają odpowiednio transformaty wielkości zadanej w' , wielkości regulowanej y , wielkości zakłócającej

v oraz uchybu regulacji e . G_R i G_{OB} oznaczają odpowiednio transmitancję regulatora i obiektu.

Tab. 1. Transmitancje konwencjonalnego regulatora PI, filtru wejściowego oraz obiektu

	L-przekształcenie	Z-przekształcenie	D-przekształcenie
G_R	$K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right)$	$K_P \left(1 + \frac{T}{T_I} \frac{z}{z-1} \right)$	$K_P \left(1 + \frac{T\gamma+1}{T_I\gamma} \right)$
G_F	$\frac{bT_I s + 1}{T_I s + 1}$	$\frac{(bT_I + T)z - bT_I}{(T_I + T)z - T_I}$	$\frac{(bT_I + T)\gamma + 1}{(T_I + T)\gamma + 1}$
G_{OB}	$\frac{k_1}{s} e^{-T_o s}$	$\frac{k_1 T}{z-1} z^{-d}$	$\frac{k_1}{\gamma} (T\gamma + 1)^{-d}$



Rys. 1. Schemat układu regulacji z regulatorem konwencjonalnym

D-transmitancja otwartego układu regulacji dla konwencjonalnego regulatora PI (tab. 1) dana jest zależnością

$$G_o(\gamma) = G_R(\gamma)G_{OB}(\gamma) = \frac{k_1 K_P [(T_I + T)\gamma + 1]}{T_I \gamma^2} (T\gamma + 1)^{-d} \quad (4)$$

gdzie: K_P jest wzmocnieniem regulatora, T_I - czasem zdwojenia (całkowania).

D-transmitancje uchybów układu regulacji przedstawionego na rys. 1 mają postacie

$$G_{w'e}(\gamma) = \frac{E_{w'}(\gamma)}{W'(\gamma)} = \frac{T_I \gamma^2}{T_I \gamma^2 + k_1 K_P [(T_I + T)\gamma + 1] (T\gamma + 1)^{-d}} \quad (5)$$

$$G_{v'e}(\gamma) = \frac{E_v(\gamma)}{V(\gamma)} = - \frac{k_1 T_I \gamma (T\gamma + 1)^{-d}}{T_I \gamma^2 + k_1 K_P [(T_I + T)\gamma + 1] (T\gamma + 1)^{-d}} \quad (6)$$

Dla uchybów ustalonych dla skoków jednostkowych wielkości zadanej i zakłócającej

$$W'(\gamma) = \frac{T\gamma + 1}{\gamma}, \quad V(\gamma) = \frac{T\gamma + 1}{\gamma} \quad (7)$$

słuszne są zależności [2, 3, 6]

$$e_{w'}(\infty) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} [\gamma E_{w'}(\gamma)] = \lim_{\gamma \rightarrow 0} [\gamma G_{w'e}(\gamma) W'(\gamma)] = 0 \quad (8)$$

$$e_v(\infty) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} [\gamma E_v(\gamma)] = \lim_{\gamma \rightarrow 0} [\gamma G_{ve}(\gamma) V(\gamma)] = 0 \quad (9)$$

Z zależności (8) i (9) wynika, że uchyby ustalone dla skoków wielkości zadanej i zakłócającej są zerowe.

Wskaźniki sumacyjne (całkowe) dla skoków (7) dane są zależnościami [2, 3, 6]

$$T \sum_{k=0}^{\infty} e_{w'}(kT) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} E_{w'}(\gamma) = 0 \quad (10)$$

$$T \sum_{k=0}^{\infty} e_v(kT) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} E_v(\gamma) = -k_1 T_I \neq 0 \quad (11)$$

Bardzo ważna jest interpretacja uzyskanych wyników (10) oraz (11).

Zależność (10) obrazuje, że wielkości pola pod i nad półprostą określoną wartością zadaną są jednakowe, tj. w przebiegu wielkości regulowanej występuje co najmniej jedno przeregulowanie. Oznacza to, że dla konwencjonalnego regulatora PI nie można w żadnym przypadku dobrać jego nastawy tak, żeby w odpowiedzi skokowej wywołanej wielkością zadaną nie występowało przeregulowanie. Natomiast z zależności (11) wynika, że odpowiednim doбором nastaw konwencjonalnego regulatora PI można uzyskać odpowiedź skokową na zakłócenie bez przeregulowania.

W artykule [15] pokazano, że dobrym rozwiązaniem jest zastosowanie regulatora PI z dwoma stopniami swobody, tj. regulatora PI 2DOF (2DOF – 2 degree-of-freedom).

Dobór nastaw regulatora PI 2DOF

Regulator PI 2DOF może zostać w dziedzinie zmiennej zespolonej γ opisany zależnością

$$U(\gamma) = K_p \left\{ bW(\gamma) - Y(\gamma) + \frac{T\gamma + 1}{T_I \gamma} [W(\gamma) - Y(\gamma)] \right\} \quad (12)$$

która może zostać przekształcona do postaci (rys. 2)

$$U(\gamma) = G_F(\gamma) G_R(\gamma) W(\gamma) - G_R(\gamma) Y(\gamma) \quad (13)$$

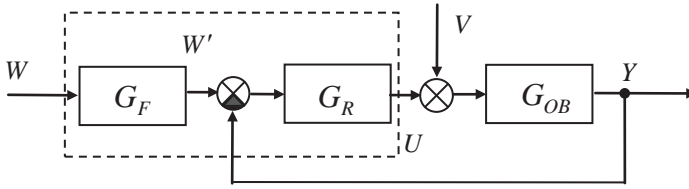
$$G_R(\gamma) = K_p \left(1 + \frac{T\gamma + 1}{T_I \gamma} \right) \quad (14)$$

$$G_F(\gamma) = \frac{(bT_I + T)\gamma + 1}{(T_I + T)\gamma + 1} \quad (15)$$

gdzie: $G_R(\gamma)$ jest D-transmitancją konwencjonalnego regulatora PI (tab. 1), $G_F(\gamma)$ – D-transmitancją filtra wejściowego, b – wagą wielkości zadanej dla składowej proporcjonalnej ($0 \leq b \leq 1$).

Dla $b = 1$ zależność (12) opisuje konwencjonalny regulator PI (14) oraz $G_F = 1$, tj. filtra wejściowego nie ma.

regulator 2DOF



Rys. 2. Schemat układu regulacji z regulatorem 2DOF

Z rys. 2 widać, że nastawy konwencjonalnego regulatora PI (14) powinny być dobrane ze względu na wymaganą odpowiedź na zakłócenie, a waga b filtra wejściowego (15) musi zostać dobrana ze względu na wymaganą odpowiedź na wielkość zadaną [1, 9, 11, 13–15].

W artykule dla obu przypadków zastosowano metodę wielokrotnego bieguna dominującego, która zakłada, że bieguny oraz zera niedominujące nie mają zasadniczego wpływu na właściwości układu regulacji [4, 5, 12–15].

Dla konwencjonalnego regulatora PI (14) wielomian charakterystyczny układu regulacji na rys. 1 ma postać (patrz mianowniki D-transmitancji (5) oraz (6))

$$N(\gamma) = T_I \gamma^2 (T\gamma + 1)^d + k_1 K_p [(T_I + T)\gamma + 1] \quad (16)$$

Ponieważ konwencjonalny regulator PI ma dwa nastawialne parametry T_I^* oraz K_p^* , zakłada się istnienie trójrotnego bieguna dominującego γ_3^* . Trzy niewiadome można uzyskać rozwiązaniem układu trzech równań

$$\frac{d^i N(\gamma)}{d\gamma^i} = 0 \quad \text{dla } i = 0, 1, 2 \quad (17a)$$

tj.

$$\begin{aligned} T_I \gamma^2 (T\gamma + 1)^d + k_1 K_p [(T_I + T)\gamma + 1] &= 0 \\ 2T_I \gamma (T\gamma + 1)^d + dT_I \gamma^2 (T\gamma + 1)^{d-1} + k_1 K_p (T_I + T) &= 0 \\ T^2 (d+1)(d+2)\gamma^2 + 4T(d+1)\gamma + 2 &= 0 \end{aligned} \quad (17b)$$

Po rozwiązaniu otrzymuje się

$$\gamma_3^* = -\frac{1}{(d+2)T} \left(2 - \sqrt{\frac{2d}{d+1}} \right) \quad (18)$$

$$T_I^*(\gamma_3^*) = -\frac{(d+2)T\gamma_3^* + 2}{[(d+1)T\gamma_3^* + 1]\gamma_3^*} - T \quad (19)$$

$$K_P^*(\gamma_3^*) = -\frac{1}{k_1} [(d+1)T\gamma_3^* + 2]\gamma_3^* (T\gamma_3^* + 1)^d \quad (20)$$

Przy obliczeniu trójrotnego bieguna dominującego (18) należy z powodu dominacji wybrać pierwiastek bliższy osi urojonej, tj. znak „+“.

Dla obliczonych nastaw (19) oraz (20) D-transmitancja układu regulacji z konwencjonalnym regulatorem PI ma postać

$$G_{w'y}(\gamma) = \frac{Y(\gamma)}{W'(\gamma)} = \frac{(T_I^* + T)\gamma + 1}{\frac{T_I^*}{k_1 K_P^*} \gamma^2 + [(T_I^* + T)\gamma + 1](T\gamma + 1)^{-d}} (T\gamma + 1)^{-d} \quad (21)$$

która może zostać aproksymowana przy pomocy bieguna dominującego (18)

$$G_{w'y}(\gamma) \approx \frac{(T_I^* + T)\gamma + 1}{\left(\frac{1}{|\gamma_3^*|} \gamma + 1 \right)^3} (T\gamma + 1)^{-d} \quad (22)$$

Duże przeregulowanie w odpowiedzi na wielkość zadaną powoduje licznik transmitancji (22), tj. jego stabilne zero

$$\gamma_z = -\frac{1}{T_I^* + T} \quad (23)$$

i dlatego należy go skompensować.

D-transmitancja układu regulacji z regulatorem PI 2DOF ma zgodnie z rys. 2 i zależnościami (13)–(15) postać

$$G_{wy}(\gamma) = \frac{Y(s)}{W(s)} = G_F(\gamma) G_{w'y}(\gamma) \approx \frac{(bT_I^* + T)\gamma + 1}{(T_I^* + T)\gamma + 1} \frac{(T_I^* + T)\gamma + 1}{\left(\frac{1}{|\gamma_3^*|} \gamma + 1 \right)^3} (T\gamma + 1)^{-d} \quad (24)$$

Z zależności (24) wynika, że mianownik filtra wejściowego kompensuje licznik D-transmitancji układu regulacji. Dochodzi przy tym do usunięcia przeregulowania, ale jednocześnie do znacznego zwolnienia odpowiedzi na wielkość zadaną.

Odpowiednim doбором wagi b można licznikiem filtra wejściowego wykompenso-
wać jeden dwumian mianownika D-transmitancji układu regulacji, tj.

$$(bT_I^* + T)\gamma + 1 = \frac{1}{|\gamma_3^*|}\gamma + 1 \Rightarrow b^*(\gamma_3^*) = \frac{1}{T_I^*} \left(\frac{1}{|\gamma_3^*|} - T \right) \quad (25)$$

W tym przypadku dynamika całego układu regulacji uprości się, a odpowiedź
na wielkość zadaną przyspieszy się.

Wzory (18) ÷ (20) oraz (25) są ważne bezpośrednio dla doboru nastaw cyfro-
wego regulatora PI o Z-transmitancji

$$G_R(z) = K_P \left(1 + \frac{T}{T_I} \frac{z}{z-1} \right) \quad (26)$$

oraz filtra wejściowego określonego Z-transmitancją

$$G_F(z) = \frac{(bT_I + T)z - bT_I}{(T_I + T)z - T_I} \quad (27)$$

Odpowiadające wzory dla analogowego regulatora PI o L-transmitancji

$$G_R(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right) \quad (28)$$

oraz filtra wejściowego o L-transmitancji

$$G_F(s) = \frac{bT_I s + 1}{T_I s + 1} \quad (29)$$

otrzyma się dla $T \rightarrow 0$, tj.

$$s_3^* = \lim_{T \rightarrow 0} \gamma_3^* = -\frac{2 - \sqrt{2}}{T_o} \quad (30)$$

$$T_I^*(s_3^*) = \lim_{T \rightarrow 0} T_I^*(\gamma_3^*) = (3 + 2\sqrt{2})T_o \doteq 5,828T_o \quad (31)$$

$$K_P^*(s_3^*) = \lim_{T \rightarrow 0} K_P^*(\gamma_3^*) = \frac{2(\sqrt{2} - 1)}{k_1 T_o} e^{\sqrt{2} - 2} \doteq 0,461 \frac{1}{k_1 T_o} \quad (32)$$

$$b^*(s_3^*) = \lim_{T \rightarrow 0} b^*(\gamma_3^*) = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \doteq 0,293 \quad (33)$$

Z porównania wzorów (18) – (20) oraz (25) dla regulatora cyfrowego z wzorami (30) ÷ (33) dla regulatora analogowego wynika, że obliczenie nastaw dla regulatora cyfrowego jest bardziej pracochłonne, a więc większe jest prawdopodobieństwo popełnienia błędów. Dlatego w praktyce wzory te nie są najodpowiedniejsze. Dla dostatecznie małego okresu próbkowania nastawy dla regulatora cyfrowego mogą zostać aproksymowane odpowiednimi nastawami dla regulatora analogowego, jeśli powiększyć opóźnienie o połowę okresu próbkowania [14].

Na podstawie wzorów (31) – (32) otrzyma się

$$T_I^* \approx (3 + 2\sqrt{2}) \left(T_o + \frac{T}{2} \right) \doteq 5,828 \left(T_o + \frac{T}{2} \right) \quad (34)$$

$$K_P^* \approx \frac{2(\sqrt{2}-1)}{k_1 \left(T_o + \frac{T}{2} \right)} e^{\sqrt{2}-2} \doteq \frac{0,461}{k_1 \left(T_o + \frac{T}{2} \right)} \quad (35)$$

Dla

$$T \leq \frac{T_o}{2} \quad (36)$$

czas zdwojenia (19) aproksymowany jest wzorem (34) z dokładnością lepszą niż 5% (rys. 3a) oraz wzmocnienie regulatora (20) wzorem (35) z dokładnością większą od 3% (rys. 3b).

Waga b wielkości zadanej dla składowej proporcjonalnej (25) może zostać aproksymowana wartością stałą (33) dla

$$T \leq \frac{T_o}{4} \quad (37)$$

z dokładnością lepszą niż 5%, lub dla (36) wzorem

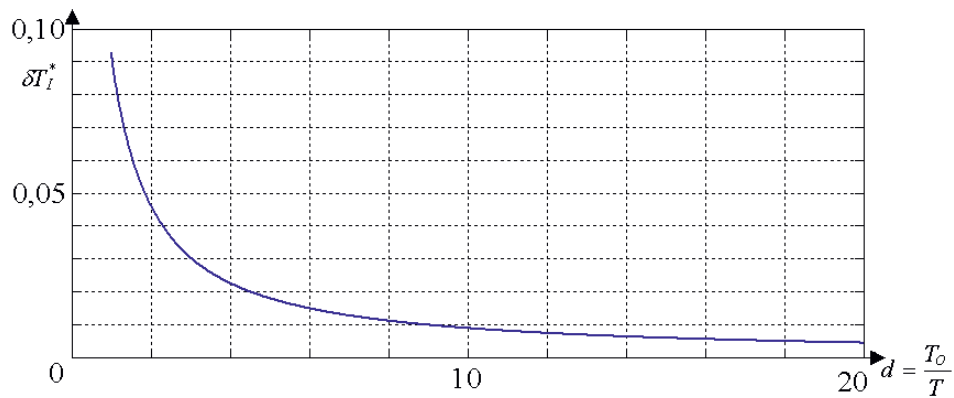
$$b^* \approx \frac{T_o}{(2 + \sqrt{2}) \left(T_o + \frac{T}{5} \right)} \doteq 0,293 \frac{T_o}{T_o + \frac{T}{5}} \quad (38)$$

z dokładnością lepszą niż 1% (rys. 3c).

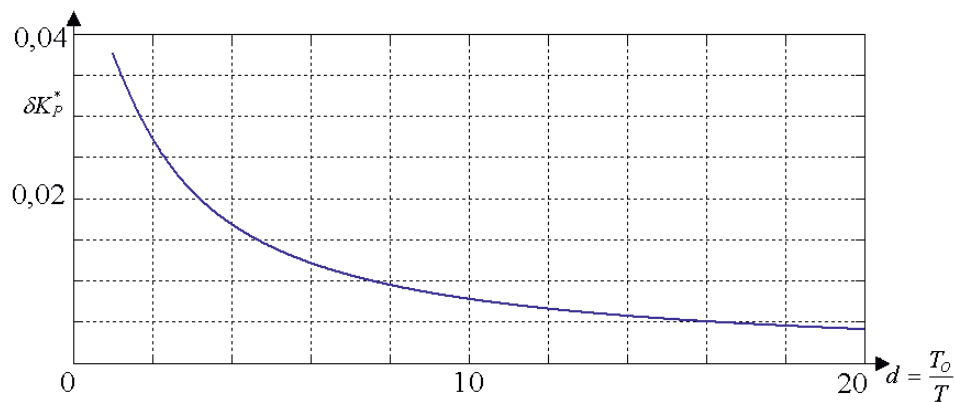
Przebiegi błędów względnych aproksymowanych nastaw cyfrowego regulatora PI 2DOF pokazano na rys. 3.

Jest oczywiste, że wzory (34), (35) oraz (38) są ważne tak dla regulatorów 2DOF cyfrowych ($T > 0$), jak i analogowych ($T = 0$).

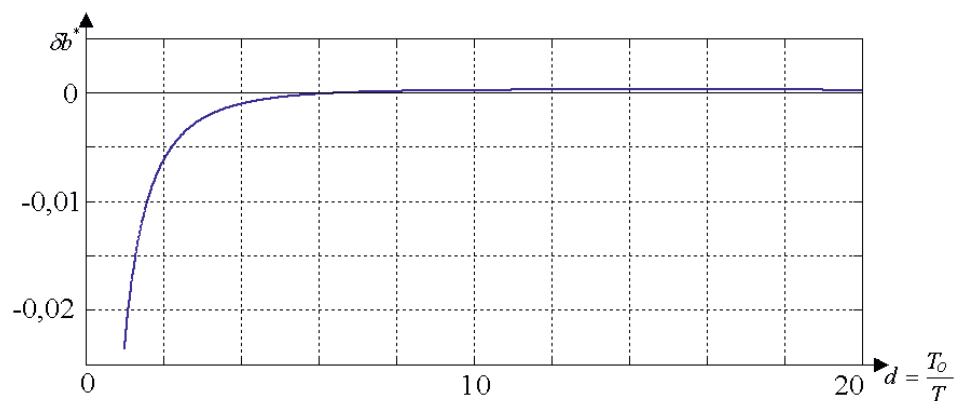
a)



b)



c)



Rys. 3. Przebiegi błędów względnych nastaw aproksymowanych cyfrowego regulatora PI 2DOF: a) czasu zdwojenia T_I^* , b) wzmocnienia regulatora K_P^* , c) wagi wielkości zadanej dla składowej proporcjonalnej b^*

Przykład

Dla obiektu całkującego z opóźnieniem o L-transmitancji

$$G_{OB}(s) = \frac{0,05}{s} e^{-5s}$$

należy dla regulatora analogowego i cyfrowego PI 2DOF dobrać ich nastawy tak, żeby odpowiedzi na skokowe zmiany wielkości zadanej i zakłócającej były aperiodyczne bez przeregulowań (opóźnienie wyrażono w sekundach).

Rozwiązanie:

Dla $k_1 = 0,05 \text{ s}^{-1}$ oraz $T_o = 5 \text{ s}$ otrzyma się:

– analogowy regulator PI 2DOF

Na podstawie wzorów (31) ÷ (33) otrzyma się:

$$T_I^* \doteq 29,142; k_p^* \doteq 1,845; b^* \doteq 0,293$$

Odpowiedzi układu regulacji z analogowym regulatorem PI 2DOF dla $b^* \doteq 0,293$ oraz $b = 1$ (konwencjonalny regulator) pokazano na rys. 4.

– cyfrowy regulator PI 2DOF

Na podstawie dokładnych wzorów (18) ÷ (20) oraz (25) dla $T = 2,5 \Rightarrow d = 2$ otrzyma się:

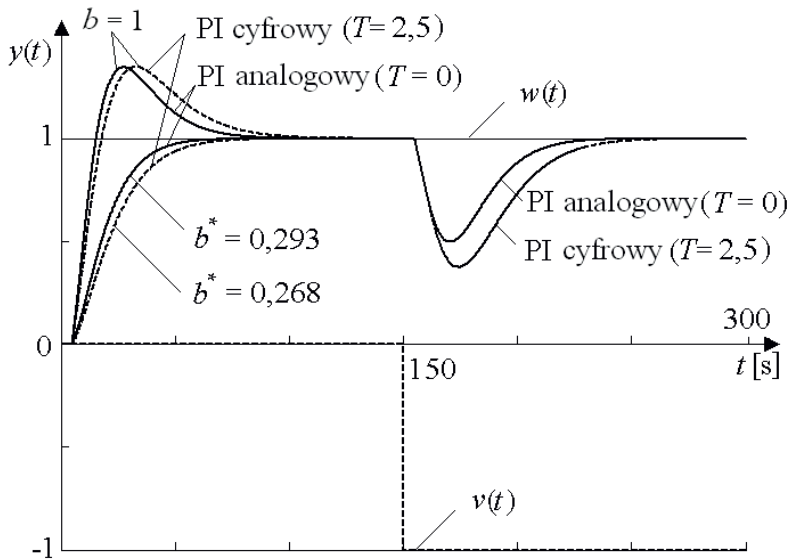
$$\gamma_3^* \doteq -0,0845; T_I^* \doteq 34,821; k_p^* \doteq 1,437; b^* \doteq 0,268$$

Podobnie na podstawie przybliżonych wzorów (34), (35) oraz (38) otrzyma się:

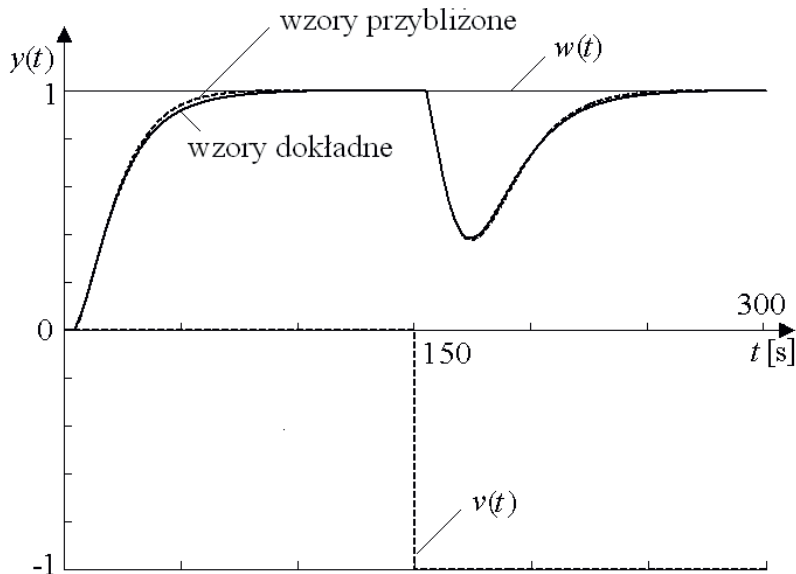
$$T_I^* \doteq 36,428; k_p^* \doteq 1,476; b^* \doteq 0,266$$

Odpowiedzi układu regulacji z cyfrowym regulatorem PI 2DOF dla dokładnych wartości nastaw dla $b^* \doteq 0,268$ oraz $b = 1$ (konwencjonalny regulator) pokazano na rys. 4 oraz dla dokładnych i przybliżonych wartości nastaw na rys. 5.

Specjalnie dobrano dużą wartość okresu próbkowania T ($d = 2$), żeby pokazać, że wzory przybliżone (34) oraz (35) są dla praktycznego korzystania odpowiednie. Z tych wzorów wynika również, że opóźnienie względne d nie musi być liczbą całkowitą.



Rys. 4. Odpowiedzi układu regulacji z cyfrowym i analogowym regulatorem PI 2DOF



Rys. 5. Odpowiedzi układu regulacji z cyfrowym regulatorem PI 2DOF

Wnioski

W artykule opisano kompleksowe podejście do doboru nastaw analogowych i cyfrowych regulatorów PI z dwoma stopniami swobody dla obiektu całkującego z opóźnieniem na podstawie metody wielokrotnego bieguna dominującego oraz D-przekształcenia. Metoda jest w pełni analityczna i prowadzi do uniwersalnych i jednocześnie prostych wzorów stosowalnych tak dla regulatorów analogowych,

jak i cyfrowych. Opisana metoda doboru nastaw jest stosunkowo odporna i dlatego można oczekiwać jej zastosowań praktycznych.

Artykuł powstał w ramach pracy nad projektem GAČR 102/09/0894.

Literatura

- [1] Åström K.J., Hägglund T., *Advanced PID Control. ISA – The Instrumentation, Systems, and Society*, Research Triangle Park, 2006.
- [2] Feuer A., Goodwin G.C., *Sampling in Digital Signal Processing and Control*, Birkhäuser 1996.
- [3] Goodwin G.C., Graebe S.F., Salgado M.E., *Control System Design*, Prentice-Hall, Delhi 2003.
- [4] Górecki H., *Analiza i synteza układów regulacji z opóźnieniem*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1971.
- [5] Górecki H., Fuksa S., Grabowski P., Korytowski A., *Analysis and Synthesis of Time Delay Systems*, Polish Scientific Publishers – John Wiley & Sons, Warszawa–Chichester 1989.
- [6] Middleton R.H., Goodwin G.C., *Digital Control and Estimation. A Unified Approach*, Prentice-Hall 1990.
- [7] O'Dwyer A., *Handbook of PI and PID Controller Tuning Rules*, 3rd Edition, Imperial College Press, London, 2009.
- [8] Silva G.J., Datta A., Bhattacharyya S.P., *PID Controllers for Time-Delay Systems*, Birkhäuser, Boston 2005.
- [9] Skoczowski S., Osypiuk R., Pietruszewicz K., *Odporna regulacja PID o dwóch stopniach swobody*, Wydawnictwo Naukowe PWN SA, Warszawa 2006.
- [10] Vašek V., Kolomazník K., Janáčková D., *Optimization and automatic control of chromium recycling technology*, Proc. 5th WSEAS Int. Conf. on Simulation, modeling and optimization Corfu, Greece, August 17–19, 2005, s. 391–394.
- [11] Visioli A., *Practical PID Control*, Springer-Verlag, London 2006.
- [12] Vítečková M., Víteček A., *New dominant poles controller tuning method for proportional non-oscillatory plants with time delay*, Proceedings of the Workshop on Intelligent Mining Systems. KYUSHU University, April 2002, s. 103–108.
- [13] Vítečková M., Víteček A., *2DOF PI and PID controllers tuning*, Proc. 9th IFAC Workshop on Time Delay Systems (TDS), Prague, Czech Republic, June 7–9, 2010.
- [14] Vítečková M., Víteček A., *Základy automatické regulace*, FS VŠB-TUO, Ostrava 2008.
- [15] Vítečková M., Víteček A., Jaracz K., *Dobór nastaw regulatorów o dwóch stopniach swobody dla obiektów całkujących z opóźnieniem*, Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Folia 85. Studia Technica IV, Wydawnictwo Naukowe UP, Kraków 2011, s. 164–175.

Digital and analog 2DOF controller tuning for integrating plants with delay

Abstract

The paper is devoted to the unified approach to the tuning of the digital and analog PI controllers with two-degrees-of-freedom by the multiple dominant pole method for integrating plants with a time delay on the basis of the D-transform. The approach is fully analytical and it enables tuning so that the servo and regulatory responses are non-oscillatory without overshoots. The uses of the method are shown in the example.

Key words: 2DOF PI controller, integrating plant, time delay, D-transform

Miluše Vítečková

VŠB – Univerzita Technická v Ostravě

e-mail: miluse.viteckova@vsb.cz, antonin.vitecek@vsb.cz

Antonín Víteček

VŠB – Univerzita Technická v Ostravě

e-mail: miluse.viteckova@vsb.cz, antonin.vitecek@vsb.cz

Kazimierz Jaracz

UP – Kraków, Instytut Techniki

e-mail: jaracz@up.krakow.pl