FOLIA 110

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia IV (2012)

Jan Górowski, Maciej Klakla, Adam Łomnicki

Od hipotezy do twierdzenia*

Abstract. In the paper, on the basis of elementary geometrical content, the authors present examples of students' reasoning, which permits, in the first place, to formulate a hypothesis, and further to find a proof. The essential fact here is that the same hypothesis can lead students to follow different possible ways of reasoning.

Czy obecnie na lekcjach matematyki w szkołach średnich uczniowie mają okazje do stawiania hipotez, do ich weryfikowania, do dowodzenia twierdzeń, do ich odkrywania? Satysfakcja dla ucznia i jego nauczyciela z odkrycia twierdzenia i jego dowodu (dowodów) jest tak duża, że może być bodźcem do związania się z matematyką na całe życie. Czy nauczyciel matematyki dysponuje materiałami dydaktycznymi do takiego organizowania procesu nauczania-uczenia się matematyki, który sprzyjałby wyzwalaniu aktywności matematycznych ucznia?

W artykule tym postaramy się pokazać, jakie możliwości aktywizowania uczniów daje formułowanie na lekcjach matematyki tzw. zadań „na wymuszanie" i ich rozwiązywanie. Od kilkunastu lat próbujemy w literaturze dydaktycznej ukazywać walory takich zadań (zob. Górowski, Klakla, Łomnicki, 1995; 1996; 1997a; 1997b; 1997c; 2004).

Zadaniami „na wymuszanie" nazwaliśmy zadania, w których na dany obiekt (np. figurę geometryczną) narzucone zostają pewne warunki, a zadanie polega na wydedukowaniu konsekwencji tych warunków. W zależności od stopnia trudności, niektóre z ułożonych przez nas zadań nadają się do pracy z uczniami gimnazjum, inne dla uczniów szkół średnich, inne dla studentów matematyki lub uczniów szkół średnich, przygotowujących się do konkursów matematycznych.

Podamy najpierw tematy kilku opisanych już w literaturze dydaktycznej zadań, kierowanych do uczniów szkół średnich oraz dokładniej omówimy ostatnio uzyskane twierdzenia.

Zadanie 1

Łatwo uzasadnić, że środek okręgu opisanego na trójkącie równobocznym pokrywa

*From hypothesis to theorem

2010 Mathematics Subject Classification: Primary: 97D50

Key words and phrases: Hypothesis and verification, proof

się ze środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt. Czy tę własność ma tylko trójkąt równoboczny? Narzuca się hipoteza, że jest to cecha trójkąta równobocznego. Ale na początku jest to tylko hipoteza, którą trzeba zweryfikować. Dla uczniów nie jest takie oczywiste, co należy przyjąć jako założenie. Przyjmijmy więc z uczniami, że środek okręgu opisanego na pewnym trójkącie pokrywa się ze środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt. Nietrudno udowodnić, że trójkąt ten jest równoboczny.

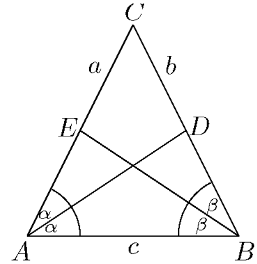
Zadanie 2
Łatwo udowodnić, że w trójkącie równobocznym pokrywają się cztery punkty charakterystyczne trójkąta: środek okręgu opisanego na trójkącie, środek okręgu wpisanego w trójkąt, środek ciężkości trójkąta, ortocentrum. Okazuje się, że prawdziwa jest hipoteza, że jest to cecha charakterystyczna trójkąta równobocznego. Co więcej, nietrudno udowodnić następujące twierdzenie: jeżeli w trójkącie pokrywają się dwa z jego punktów charakterystycznych, to jest to trójkąt równoboczny (zob. Górowski, Klakla, Łomnicki, 2004).

Zadanie 3
Łatwo uzasadnić, że środek okręgu opisanego na n-kącie foremnym pokrywa się ze środkiem okręgu wpisanego w ten n-kąt. Okazuje się, że prawdziwa jest hipoteza, że jest to cecha charakterystyczna n-kąta foremnego, uzyskujemy więc następujące twierdzenie:

> *jeżeli środek okręgu opisanego na n-kącie pokrywa się ze środkiem okręgu wpisanego w ten n-kąt, to wielokąt jest foremny.*

Zadanie 4
Przyjmijmy, jak zwykle w zadaniach „na wymuszanie", które są formułowane w sposób otwarty (bez narzucanej pytaniem hipotezy), że w trójkącie przystające są dwie z jego środkowych. Jaką hipotezę o tym trójkącie można postawić? Interesującą tezą (łatwą do udowodnienia) jest: jest to trójkąt równoramienny.

W dalszej części artykułu ukażemy, jak różne rozumowania może wyzwolić u uzdolnionego ucznia szkoły średniej lub studenta matematyki próba weryfikacji hipotezy narzucającej się po przyjęciu następujących założeń:
załóżmy, że w trójkącie przystające są odcinki dwusiecznych dwóch z jego kątów. Przez odcinek dwusiecznej kąta będziemy tu rozumieć część wspólną dwusiecznej kąta trójkąta i (obszaru) tego trójkąta (w literaturze spotkaliśmy też nazwę: dwusieczna wewnętrzna trójkąta).



Rysunek 1.

Przy oznaczeniach jak na rysunku 1 załóżmy więc, że $|AD| = |BE|$. Przyjmijmy też oznaczenia: $|AB| = c$, $|AC| = b$, $|BC| = a$, $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Możliwe są teraz dwie drogi: stawiamy hipotezę i próbujemy ją zweryfikować lub „wymuszamy" tezę z przyjętych założeń.

I rozumowanie ilustruje drugą z tych dróg:
Ze znanych wzorów:

$$|AD'| = \tfrac{2}{b+c}\sqrt{bcp\cdot(p-a)}, \quad |BE| = \tfrac{2}{a+c}\sqrt{acp\cdot(p-b)}.$$

Mamy kolejno:

$$\frac{2}{b+c}\sqrt{bcp\cdot(p-a)} = \frac{2}{a+c}\sqrt{acp\cdot(p-b)},$$

$$(a+c)^2bcp\cdot(p-a) = (b+c)^2acp\cdot(p-b),$$

$$(a^2+2ac+c^2)(bp-ab) = (b^2+2bc+c^2)(ap-ab),$$

$$a^2bp - a^3b + 2abcp - 2a^2bc + c^2bp - c^2ab = b^2ap - ab^3 + 2abcp - 2ab^2c + c^2ap - c^2ab,$$

$$abp\cdot(a-b) - ab\cdot(a^2-b^2) - 2abc\cdot(a-b) + c^2p\cdot(b-a) = 0,$$

$$(a-b)\cdot(abp - ab\cdot(a+b) - 2abc - c^2p) = 0,$$

$$(a-b)\left[ab\cdot(p-(a+b)-2c) - c^2p\right] = 0,$$

$$(a-b)\left[ab\cdot(p-(a+b+c)-c) - c^2p\right] = 0,$$

$$(a-b)(ab\cdot(-p-c) - c^2p) = 0,$$

$$a-b=0,$$

$$a=b.$$

Uzyskaliśmy więc **dowód I** tezy: *trójkąt jest równoramienny.*

Dowód II:

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 1 i ponadto $|AD| = d$, $|BE| = d$.

Wykażemy, że $2\alpha = 2\beta$.

Weźmy pod uwagę trójkąt ABD; z twierdzenia sinusów dostajemy:

$$\frac{d}{\sin 2\beta} = \frac{c}{\sin|\sphericalangle ADB|},$$

a ponieważ $|\sphericalangle ADB| = \pi - 2\beta - \alpha$, to

$$\frac{d}{\sin 2\beta} = \frac{c}{\sin(2\beta+\alpha)}.$$

Podobnie biorac pod uwagę trójkąt ABE dostajemy

$$\frac{d}{\sin 2\alpha} = \frac{c}{\sin(2\alpha+\beta)}.$$

Stąd

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sin(2\alpha+\beta)} = \frac{\sin 2\beta}{\sin(2\beta+\alpha)}$$

i kolejno

$$\sin 2\alpha \sin(2\beta+\alpha) = \sin 2\beta \sin(2\alpha+\beta),$$
$$-2\sin 2\alpha \sin(2\beta+\alpha) = -2\sin 2\beta \sin(2\alpha+\beta),$$
$$\cos(3\alpha+2\beta) - \cos(\alpha-2\beta) = \cos(3\beta+2\alpha) - \cos(\beta-2\alpha),$$
$$\cos(3\alpha+2\beta) - \cos(3\beta+2\alpha) = \cos(\alpha-2\beta) - \cos(\beta-2\alpha),$$
$$-2\sin\frac{5\alpha+5\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = -2\sin\frac{-\alpha-\beta}{2}\sin\frac{3\alpha-3\beta}{2}.$$

Stąd i ze wzorów: $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$, $\sin 5x = \sin^5 x - 10\sin^3 x\cos^2 x + 5\sin x\cos^4 x$ dostajemy

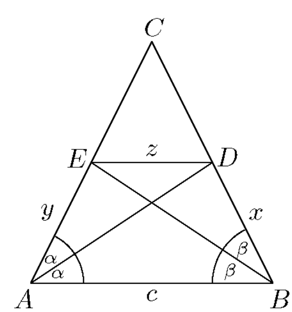
$$\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\sin\frac{4\alpha+\beta}{2} - 10\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} + 5\cos^4\frac{\alpha+\beta}{2}\right) =$$
$$= -\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\left(3 - 4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

Przypuśćmy, że $\alpha \neq \beta$. Wtedy $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \neq 0$ i kolejno

$$\sin^4\frac{\alpha+\beta}{2} - 10\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} + 5\cos^4\frac{\alpha+\beta}{2} = 4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2} - 3,$$
$$5\left(\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} - \sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 - 4\sin^4\frac{\alpha+\beta}{2} = 4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2} - 3,$$
$$5\cos^2(\alpha+\beta) + 3 = 4\left(\sin^4\frac{\alpha+\beta}{2} + \sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

Ponieważ $0 < 2\alpha+2\beta < \pi$, zatem $0 < \alpha+\beta < \frac{\pi}{2}$, $0 < \frac{\alpha+\beta}{2} < \frac{\pi}{4}$, $|\frac{\alpha-\beta}{2}| < \frac{\pi}{4}$ oraz $5\cos^2(\alpha+\beta)+3 > 3$ i $4\left(\sin^4\frac{\alpha+\beta}{2} + \sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}\right) < 4\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) = 3$. Otrzymujemy sprzeczność. Zatem $\alpha = \beta$, $2\alpha = 2\beta$, $a = b$.

Dowód III:



Rysunek 2.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 2, $|AE| = y$, $|ED| = z$, $|BD| = x$. Korzystając z twierdzenia cosinusów dostajemy:

$$c^2 = d^2 + x^2 - 2dx\cos(\pi - 2\beta - \alpha) = d^2 + x^2 + 2dx\cos(2\beta + \alpha),$$

$$c^2 = d^2 + y^2 - 2dy\cos(\pi - 2\alpha - \beta) = d^2 + y^2 + 2dy\cos(2\alpha + \beta),$$

$$z^2 = d^2 + x^2 - 2dx\cos\beta,$$

$$z^2 = d^2 + y^2 - 2dy\cos\alpha,$$

$$d^2 + x^2 + 2dx\cos(2\beta + \alpha) = d^2 + y^2 + 2dy\cos(2\alpha + \beta),$$

$$d^2 + x^2 - 2dx\cos\beta = d^2 + y^2 - 2dy\cos\alpha,$$

$$4dx(\cos(2\beta + \alpha) + \cos\beta) = 4dy(\cos(2\alpha + \beta) + \cos\alpha),$$

$$x\cos\frac{3\beta + \alpha}{2}\cos\frac{\alpha + \beta}{2} = y\cos\frac{3\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Zauważmy, że

$$0 < \frac{\alpha + \beta}{2} < \frac{\pi}{4}$$

oraz

$$0 < \frac{3\alpha + \beta}{2} < \frac{\pi}{2} \quad \text{i} \quad 0 < \frac{3\beta + \alpha}{2} < \frac{\pi}{2}.$$

Uzasadnimy, że

$$\frac{3\alpha + \beta}{2} < \frac{\pi}{2} \quad \text{i} \quad \frac{3\beta + \alpha}{2} < \frac{\pi}{2}.$$

Najpierw zauważmy, że

$$\frac{3\alpha + \beta}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2} + \alpha < \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3}{4}\pi.$$

Podobnie

$$\frac{3\beta + \alpha}{2} < \frac{3}{4}\pi.$$

Gdyby np.

$$\frac{\pi}{2} < \frac{3\alpha + \beta}{2} < \frac{3}{4}\pi \quad \text{i} \quad \frac{3\beta + \alpha}{2} \leqslant \frac{\pi}{2},$$

to warunek

$$x\cos\frac{3\beta + \alpha}{2}\cos\frac{\alpha + \beta}{2} = y\cos\frac{3\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha + \beta}{2}$$

równoważny warunkowi

$$x\cos\frac{3\beta + \alpha}{2} = y\cos\frac{3\alpha + \beta}{2}$$

nie mógłby zajść. Stąd

$$\frac{3\alpha + \beta}{2} \leqslant \frac{\pi}{2} \quad \text{i} \quad \frac{3\beta + \alpha}{2} \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Gdyby
$$\frac{3\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{2} \quad \text{i} \quad \frac{3\beta+\alpha}{2}=\frac{\pi}{2},$$
to $\alpha+\beta=\pi$.

Oczywiście przypadek
$$\frac{3\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{2} \ \text{ i } \ \frac{3\beta+\alpha}{2}<\frac{\pi}{2} \quad \text{lub} \quad \frac{3\alpha+\beta}{2}<\frac{\pi}{2} \ \text{ i } \ \frac{3\beta+\alpha}{2}=\frac{\pi}{2},$$
zajść nie może, bo przeczy temu warunek
$$x\cos\frac{3\beta+\alpha}{2}=y\cos\frac{3\alpha+\beta}{2}.$$
Stąd
$$0<\frac{3\alpha+\beta}{2}<\frac{\pi}{2} \quad \text{i} \quad 0<\frac{3\beta+\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}.$$
Gdyby teraz $\alpha>\beta$, to
$$x>y \quad \text{oraz} \quad \frac{3\alpha+\beta}{2}>\frac{3\beta+\alpha}{2}.$$
Stąd
$$\cos\frac{3\alpha+\beta}{2}<\cos\frac{3\beta+\alpha}{2} \quad \text{i} \quad y\cos\frac{3\alpha+\beta}{2}<x\cos\frac{3\beta+\alpha}{2}.$$
Otrzymaliśmy sprzeczność z warunkiem
$$x\cos\frac{3\beta+\alpha}{2}=y\cos\frac{3\alpha+\beta}{2}.$$

Podobnie wykluczamy przypadek $\alpha<\beta$. Zatem $\alpha=\beta$.

Dowód IV:

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 1, a więc $|AD|=|BE|$. Wykażemy, że $a=b$.

Przypuśćmy, że $2\alpha>2\beta$. Wtedy $\sin\alpha>\sin\beta$ i ponieważ
$$P_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}\cdot dc\cdot\sin\alpha, \quad P_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}\cdot dc\cdot\sin\beta,$$
to $P_{\triangle ABD}>P_{\triangle ABE}$, zatem $P_{\triangle ADC}<P_{\triangle BEC}$. Stąd ponieważ
$$P_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}\cdot bd\cdot\sin\alpha \quad \text{i} \quad P_{\triangle BEC}=\frac{1}{2}\cdot da\cdot\sin\beta,$$
to
$$\frac{1}{2}\cdot bd\cdot\sin\alpha<\frac{1}{2}\cdot\sin\beta, \quad \frac{b}{\sin\beta}<\frac{a}{\sin\alpha}.$$
Skoro $0<\beta<\alpha<\frac{\pi}{2}$, to
$$\cos\beta>\cos\alpha>0 \quad \text{i} \quad 0<\frac{1}{2\cos\beta}<\frac{1}{2\cos\alpha}.$$

Stąd oraz z nierówności $\frac{b}{\sin\beta} < \frac{a}{\sin\alpha}$ dostajemy kolejno:

$$\frac{b}{2\sin\beta\cos\beta} < \frac{a}{2\sin\alpha\cos\alpha}, \quad \frac{b}{\sin 2\beta} < \frac{a}{\sin 2\alpha}.$$

Otrzymaliśmy sprzeczność (z twierdzeniem sinusów dla trójkąta ABC).

Analogicznie można uzasadnić, że przypuszczenie $2\beta > 2\alpha$ prowadzi do sprzeczności. Zatem $2\beta = 2\alpha$, $a = b$.

Dowód V:

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 1, a więc $|AD| = |BE|$. Wykażemy, że $a = b$. Mamy

$$|AD| = \frac{2bc}{b+c}\cos\alpha, \quad |BE| = \frac{2ac}{a+c}\cos\beta.$$

Przypuśćmy, że $a > b$. Wtedy

$$\alpha > \beta \quad \text{i} \quad 0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Stąd $\cos\beta > \cos\alpha$. Ponadto

$$\frac{2bc}{b+c}\cos\alpha = \frac{2ac}{a+c}\cos\beta,$$

$$b\cdot(a+c)\cos\alpha = a\cdot(b+c)\cos\beta,$$

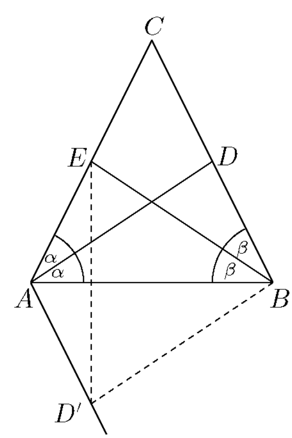
$$ab\cdot(\cos\alpha - \cos\beta) = ac\cdot\cos\beta - bc\cdot\cos\alpha.$$

Lewa strona ostatniej równości jest ujemna, zaś prawa dodatnia, gdyż $ac > bc$ i $\cos\beta > \cos\alpha > 0$. Otrzymaliśmy sprzeczność.

Analogicznie można uzasadnić, że przypuszczenie $a < b$ prowadzi do sprzeczności. Zatem $a = b$.

Na zakończenie podamy **dowód VI**, uzyskany po uzupełnieniu luk w rozumowaniu podanym przez słynnego matematyka szwajcarskiego Jakuba Steinera (wg Enriques, Amaldi, 1916, s. 105).

Załóżmy, że w trójkącie ABC przystające są odcinki AD i BE dwusiecznych dwóch jego kątów (rys. 3).



Rysunek 3.

Przypuśćmy, że $|BC| > |AC|$. Stąd $|\sphericalangle BAD| > |\sphericalangle EBA|$. I dalej z twierdzenia cosinusów: $|BD| > |AE|$. Zatem $|\sphericalangle ADB| > |\sphericalangle AEB|$. Przez punkt A prowadzimy prostą równoległą do BC. Niech punkt D' będzie takim punktem tej prostej, że $|AD'| = |BD|$ oraz E i D' leżą po przeciwnych stronach prostej AB (zob. rysunek 3). Wtedy $|\sphericalangle DBA| = |\sphericalangle BAD'|$ i trójkąty ABD i ABD' są przystające, $|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle AD'B|$, $|BE| = |AD| = |BD'|$, $|\sphericalangle BD'E| = |\sphericalangle D'EB|$. Stąd $|\sphericalangle AD'E| = |\sphericalangle AD'B| - |\sphericalangle BD'E| = |\sphericalangle ADB| - |\sphericalangle D'EB| > |\sphericalangle AEB| - |\sphericalangle D'EB| = |\sphericalangle AED'|$, $|AE| > |AD'| = |BD|$. Otrzymaliśmy sprzeczność z uzyskaną poprzednio nierównością $|BD| > |AE|$.
Trójkąt ABC jest więc równoramienny.

Literatura

Enriques, F., Amaldi, U.: 1916, *Zasady gieometrji elementarnej do użytku szkół średnich*, Warszawa-Lwów.

Górowski, J., Klakla, M., Łomnicki, A.: 1995, O czworoboku wypukłym, *Gradient* **7**, 218-232.

Górowski, J., Klakla, M., Łomnicki, A.: 1996, Jeszcze o czworoboku wypukłym, *Gradient* **1-2**, 14-25.

Górowski, J., Klakla, M., Łomnicki, A.: 1997a, O pewnej charakterystyce trójkątów równoramiennych i równobocznych, *Gradient* **1**, 13-20.

Górowski, J., Klakla, M., Łomnicki, A.: 1997b, O pewnych własnościach czworokąta wypukłego, *Matematyka* **4**, 206-209.

Górowski, J., Klakla, M., Łomnicki, A.: 1997c, Trójkąt – niewyczerpane źródło problemów, *Matematyka* **6**, 357-360.

Górowski, J., Klakla, M., Łomnicki, A.: 2004, Zadania „na wymuszanie" jako środek matematycznej aktywizacji uczących się, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **26**, 61-80.

Instytut Matematyki
Uniwersytet Pedagogiczny
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
e-mail alomnicki@poczta.fm
e-mail smklakla@up.krakow.pl
e-mail jangorowski@interia.pl