

Jan Górowski, Adam Łomnicki

Cechy równobocznosci trójkątów*

Abstract. The paper presents some non-standard (in the sense: not yet presented in the literature), necessary and sufficient conditions for a triangle to be isosceles.

W pracy podamy kilkanaście cech równobocznosci trójkątów, których nie spotkaliśmy w literaturze. Inspiracją do poszukiwań były nasze wcześniejsze artykuły (Górowski, Klakła, Łomnicki, 1997a; 1997b; 2004), dotyczące tzw. zadań „na wymuszanie” oraz pozycja (Kourliandtchik, 2006), w której między innymi podano szereg nierówności dla funkcji trygonometrycznych miar kątów trójkąta. Na początku wzmocnimy niektóre wyniki z (Kourliandtchik, 2006), by z nich następnie skorzystać w dalszej części pracy.

LEMAT 1

Dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z zachodzą równości:

$$\sin x + \sin y + \sin z - \sin(x + y + z) = 4 \sin \frac{x + y}{2} \sin \frac{x + z}{2} \sin \frac{y + z}{2},$$

$$\cos x + \cos y + \cos z + \cos(x + y + z) = 4 \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x + z}{2} \cos \frac{y + z}{2}.$$

Dowód. Dla dowodu pierwszej z tych tożsamości wystarczy wykorzystać dla sumy

$$(\sin x + \sin y) - (\sin(x + y + z) - \sin z)$$

kolejno wzory na sumę sinusów, różnicę sinusów, a następnie wzór na różnicę cosinusów.

Dla uzasadnienia drugiej z tych tożsamości wystarczy do sumy

$$(\cos x + \cos y) + (\cos(x + y + z) + \cos z)$$

zastosować trzykrotnie wzór na sumę cosinusów.

*Some necessary and sufficient conditions for a triangle to be isosceles
2010 Mathematics Subject Classification: Primary: 97G40

Key words and phrases: isosceles triangle, necessary and sufficient condition

LEMAT 2

Załóżmy, że α, β, γ są miarami kątów trójkąta. Wtedy

$$(1) \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8},$$

$$(2) \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}.$$

Dowód. Zauważmy, że co najmniej dwie spośród liczb α, β, γ należą do przedziału $[0, \frac{\pi}{2}]$. Przyjmijmy, że są to β i γ . Wtedy:

$$\left| \frac{\gamma - \beta}{2} \right| < \frac{\gamma + \beta}{2} < \frac{\pi}{2} \quad \text{i} \quad \cos \frac{\gamma - \beta}{2} > \cos \frac{\gamma + \beta}{2} > 0$$

oraz

$$\begin{aligned} \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} &= \frac{1}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{\gamma - \beta}{2} - \cos \frac{\gamma + \beta}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cos \frac{\gamma + \beta}{2} \left(\cos \frac{\gamma - \beta}{2} - \cos \frac{\gamma + \beta}{2} \right) \\ &\leq \frac{1}{2} \cos \frac{\gamma + \beta}{2} \left(1 - \cos \frac{\gamma + \beta}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} u(1 - u), \end{aligned}$$

gdzie $u = \cos \frac{\gamma + \beta}{2}$ i $u \in (0, 1)$.

Oczywiście największą wartością funkcji kwadratowej $f(u) = \frac{1}{2}u(1 - u)$ jest $\frac{1}{8}$ i $\frac{1}{8} = f(\frac{1}{2})$.

Wobec tego

$$\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}.$$

Ponadto

$$\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{8}.$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\cos \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{i} \quad \cos \frac{\gamma - \beta}{2} = 1,$$

a więc wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\gamma = \beta = \frac{\pi}{3}.$$

To kończy dowód lematu 2.

LEMAT 3

Załóżmy, że α, β, γ są miarami kątów trójkąta. Wtedy:

- (1) $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma \leq \frac{9}{4}$,
 (2) $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$.

Dowód. Korzystając z lematu 1 dostajemy:

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha + 1 - \cos 2\beta + 1 - \cos 2\gamma) \\ &= \frac{1}{2}[3 - (\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma)] \\ &= \frac{1}{2}[3 - (-\cos(2\alpha + 2\beta + 2\gamma) + 4 \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha + \gamma) \cos(\beta + \gamma))] \\ &= 2 + 2 \cos \gamma \cos \beta \cos \alpha. \end{aligned}$$

Zauważmy, że gdy jedna z liczb α, β, γ należy do przedziału $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, to $2 + 2 \cos \gamma \cos \beta \cos \alpha \leq 2$ i nierówność z tezy (1) jest wtedy oczywista.

Przyjmijmy zatem teraz, że $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \frac{\pi}{2})$ oraz $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha'}{2}$, $\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta'}{2}$, $\gamma = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma'}{2}$. Wtedy α', β', γ' są miarami kątów trójkąta oraz $2 + 2 \cos \gamma \cos \beta \cos \alpha = 2 + 2 \sin \frac{\alpha'}{2} \cdot \sin \frac{\beta'}{2} \cdot \sin \frac{\gamma'}{2}$ i na mocy lematu 2 mamy $2 + 2 \sin \frac{\alpha'}{2} \cdot \sin \frac{\beta'}{2} \cdot \sin \frac{\gamma'}{2} \leq \frac{9}{4}$ oraz $2 + 2 \sin \frac{\alpha'}{2} \cdot \sin \frac{\beta'}{2} \cdot \sin \frac{\gamma'}{2} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \alpha' = \beta' = \gamma' = \frac{\pi}{3}$.

Ponieważ warunek $\alpha' = \beta' = \gamma' = \frac{\pi}{3}$ jest równoważny warunkowi $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$, zatem dowód lematu 3 został zakończony.

Z lematu 3 wynika wprost

LEMAT 4

Załóżmy, że α, β, γ są miarami kątów trójkąta. Wtedy:

- (1) $\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \leq \frac{1}{8}$,
 (2) $\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$.

Udowodnimy teraz dwa twierdzenia, w których podamy sześć cech równobocznosci trójkątów.

TWIERDZENIE 1

Jeżeli w trójkącie ABC boki długości a, b, c znajdują się naprzeciw kątów o miarach odpowiednio α, β, γ oraz $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$, a R jest długością promienia okręgu opisanego na tym trójkącie, to następujące warunki są równoważne:

- (1) $a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma = p$;
 (2) $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$;
 (3) $\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{8}$;
 (4) $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$.

Dowód poprowadzimy według schematu (1) \Rightarrow (2), (2) \Rightarrow (3), (3) \Rightarrow (4), (4) \Rightarrow (1).

Uzasadnimy najpierw implikację (1) \Rightarrow (2).

Z (1) wynika kolejno:

$$\frac{a}{\sin \alpha} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{b}{\sin \beta} \sin \beta \cos \beta + \frac{c}{\sin \gamma} \sin \gamma \cos \gamma = \frac{1}{2}(a + b + c),$$

$$R \sin 2\alpha + R \sin 2\beta + R \sin 2\gamma = R(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)$$

z twierdzenia sinusów,

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma.$$

(2) \Rightarrow (3)

Mamy kolejno:

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma,$$

$$\begin{aligned} \sin 2(\alpha + \beta + \gamma) + 4 \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha + \gamma) \sin(\beta + \gamma) \\ = \sin(\alpha + \beta + \gamma) + 4 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \gamma}{2} \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \end{aligned}$$

na podstawie lematu 1,

$$8 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \gamma}{2} \cos \frac{\alpha + \gamma}{2} \sin \frac{\gamma + \beta}{2} \cos \frac{\gamma + \beta}{2} = \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \gamma}{2} \sin \frac{\beta + \gamma}{2},$$

$$\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \gamma}{2} \cos \frac{\beta + \gamma}{2} = \frac{1}{8},$$

$$\sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{8}.$$

(3) \Rightarrow (4) wynika bezpośrednio z lematu 2.

Implikacja (4) \Rightarrow (1) jest oczywista.

TWIERDZENIE 2

Jeżeli α, β, γ są miarami kątów trójkąta ABC , to trójkąt ABC jest równoboczny wtedy i tylko wtedy, gdy $\sin 4\alpha + \sin 4\beta + \sin 4\gamma = -(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma)$.

Dowód. Wykorzystując tożsamość z lematu 1 oraz fakt, że $0 < \alpha + \beta < \pi$, $0 < \alpha + \gamma < \pi$, $0 < \beta + \gamma < \pi$ dostajemy kolejno:

$$\begin{aligned} \sin 4(\alpha + \beta + \gamma) + 4 \sin(2\alpha + 2\beta) \sin(2\alpha + 2\gamma) \sin(2\beta + 2\gamma) \\ = -[\sin 2(\alpha + \beta + \gamma) + 4 \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha + \gamma) \sin(\beta + \gamma)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8 \cos(\alpha + \beta) \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha + \gamma) \sin(\alpha + \gamma) \cos(\beta + \gamma) \sin(\beta + \gamma) \\ = -\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha + \gamma) \sin(\beta + \gamma), \end{aligned}$$

$$\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha + \gamma) \cos(\beta + \gamma) = -\frac{1}{8},$$

$$\cos \gamma \cos \beta \cos \alpha = \frac{1}{8}.$$

Ostatni warunek, na mocy lematu 4, jest równoważny warunkowi $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$. Dowód twierdzenia 2 został zakończony.

Z lematu 4 wynika także

TWIERDZENIE 3

Jeżeli α, β, γ są miarami kątów trójkąta ABC , to trójkąt ABC jest równoboczny wtedy i tylko wtedy, gdy $\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = \frac{1}{8}$.

TWIERDZENIE 4

Jeśli w trójkącie ABC boki długości a, b, c znajdują się naprzeciw kątów o miarach (odpowiednio) α, β, γ , a R jest długością promienia okręgu opisanego na tym trójkącie oraz h_a, h_b, h_c oznaczają długości wysokości opuszczonych na boki długości (odpowiednio) a, b, c , to następujące warunki są równoważne:

$$(1) \quad 2(h_a + h_b + h_c) = 9R,$$

$$(2) \quad 2(\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - \frac{9}{4}) = (\sin \beta - \sin \gamma)^2 + (\sin \alpha - \sin \gamma)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2,$$

$$(3) \quad \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = \frac{9}{4},$$

$$(4) \quad \alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}.$$

Dowód. (1) \Rightarrow (2).

Oznaczając przez S pole trójkąta ABC mamy $2h_a = \frac{4S}{a}$, $2h_b = \frac{4S}{b}$, $2h_c = \frac{4S}{c}$ oraz $S = \frac{abc}{4R}$.

Stąd

$$9R = 2(h_a + h_b + h_c) = \frac{bc}{R} + \frac{ac}{R} + \frac{ab}{R},$$

$$9R^2 = bc + ac + ab, \quad -18R^2 = -2bc - 2ac - 2ab,$$

$$-18R^2 = (b - c)^2 + (a - c)^2 + (a - b)^2 - 2(a^2 + b^2 + c^2),$$

$$2(a^2 + b^2 + c^2) - 18R^2 = (b - c)^2 + (a - c)^2 + (a - b)^2.$$

Wykorzystując teraz twierdzenie sinusów otrzymujemy:

$$8R^2 \left(\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - \frac{9}{4} \right) = 4R^2 ((\sin \beta - \sin \gamma)^2 + (\sin \alpha - \sin \gamma)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2),$$

czyli

$$2 \left(\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - \frac{9}{4} \right) = (\sin \beta - \sin \gamma)^2 + (\sin \alpha - \sin \gamma)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2.$$

$$(2) \Rightarrow (3)$$

Z lematu 3 wiemy, że

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - \frac{9}{4} \leq 0.$$

Oczywiście

$$(\sin \beta - \sin \gamma)^2 + (\sin \alpha - \sin \gamma)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2 \geq 0.$$

Zatem

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = \frac{9}{4}.$$

Wykazaliśmy więc, że z (2) wynika (3).

Implikacja (3) \Rightarrow (4) wynika wprost z lematu 3.

Implikacja (4) \Rightarrow (1) jest oczywista.

Z twierdzenia 4 wynika bezpośrednio

Twierdzenie 5

Jeżeli α, β, γ są miarami kątów trójkąta ABC , to:

trójkąt ABC jest równoboczny $\Leftrightarrow \sin \alpha \sin \beta + \sin \alpha \sin \gamma + \sin \beta \sin \gamma = \frac{9}{4}$.

Udowodnimy teraz

Twierdzenie 6

Jeżeli α, β, γ są miarami kątów w trójkącie ABC , to trójkąt ABC jest równoboczny wtedy i tylko wtedy, gdy $\cos \alpha \cos \beta + \cos \alpha \cos \gamma + \cos \beta \cos \gamma = \frac{3}{4}$.

Dowód. Uzasadnimy mniej oczywistą implikację „ \Leftarrow ”.

Mamy:

$$\cos \alpha \cos \beta + \cos \alpha \cos \gamma + \cos \beta \cos \gamma = \frac{3}{4},$$

$$\frac{1}{2} [(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma)^2 - (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)] = \frac{3}{4}.$$

Wykorzystując teraz tożsamość z lematu 1, otrzymujemy

$$\left[\left(1 + 4 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \gamma}{2} \cos \frac{\beta + \gamma}{2} \right)^2 - (3 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta - \sin^2 \gamma) \right] = \frac{6}{4},$$

$$\left[\left(1 + 4 \sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \right)^2 - (3 - (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma)) \right] = \frac{6}{4}.$$

Wobec lematów 2 i 3 największą wartością wyrażenia

$$4 \sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2}$$

a tym samym wyrażenia

$$\left(1 + 4 \sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2}\right)^2$$

jest $(1 + 4 \cdot \frac{1}{8})^2$, czyli $\frac{9}{4}$, zaś najmniejszą wartością wyrażenia

$$3 - (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma)$$

jest $3 - \frac{9}{4}$, czyli $\frac{3}{4}$.

Co więcej, zarówno ta największa wartość, jak i ta najmniejsza, o których mówimy, są przyjmowane dla $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$. Stąd

$$\left(1 + 4 \sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2}\right)^2 - (3 - (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma)) \leq \frac{6}{4}.$$

Wobec tego

$$\cos \alpha \cos \beta + \cos \alpha \cos \gamma + \cos \beta \cos \gamma \leq \frac{3}{4},$$

a równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$.

Wykażemy teraz

TWIERDZENIE 7

Niech r, R będą (odpowiednio) długościami promieni okręgów wpisanego i opisanego na trójkącie ABC . Wtedy: trójkąt ABC jest równoboczny $\Leftrightarrow R = 2r$.

Dowód. Uzasadnimy mniej oczywistą implikację „ \Leftarrow ”.

Ponieważ

$$r = 4R \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2},$$

gdzie α, β, γ oznaczają miary kątów trójkąta ABC , to wobec przyjętego założenia mamy,

$$\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{8}.$$

Stąd z lematu 2 dostajemy $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$.

Z porównania pola trójkąta obliczonego dwoma sposobami otrzymujemy

TWIERDZENIE 8

Jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta ABC oraz r, R (odpowiednio) długościami promieni okręgów wpisanego i opisanego na nim, to: trójkąt ABC jest równoboczny $\Leftrightarrow \frac{abc}{a+b+c} = R^2$ lub $\frac{abc}{a+b+c} = 4r^2$.

Dowód. Wystarczy wykorzystać wzór

$$S = \frac{abc}{4R} \quad \text{lub} \quad S = \frac{1}{2}(a+b+c) \cdot r,$$

gdzie S oznacza pole trójkąta ABC oraz twierdzenie 7.

TWIERDZENIE 9

Jeżeli α, β, γ są miarami kątów w trójkącie ABC , to następujące warunki są równoważne:

- (1) $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$,
- (2) $4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$,
- (3) $\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha+\gamma}{2} \sin \frac{\beta+\gamma}{2}$,
- (4) $4 \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\gamma = \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma$,
- (5) $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = \cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\gamma}{2}$,
- (6) $4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} = \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma$,
- (7) $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = \frac{3}{2}$,
- (8) $\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{3}{2}$.

Dowód. To, że (1) \Leftrightarrow (2) wynika wprost z twierdzenia 8 i twierdzenia sinusów zastosowanego przy warunku $\frac{abc}{a+b+c} = R^2$.
Wykorzystując tożsamość z lematu 1 dostajemy

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = \sin(\alpha + \beta + \gamma) + 4 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \gamma}{2} \sin \frac{\beta + \gamma}{2},$$

a stąd wnosimy, że (2) \Leftrightarrow (3).

Wykorzystując tożsamość z lematu 1 otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma &= \sin(2\alpha + 2\beta + 2\gamma) + 4 \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha + \gamma) \sin(\beta + \gamma) \\ &= 4 \sin \gamma \sin \beta \sin \alpha. \end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned} 4 \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\gamma &= 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma, \\ \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma &= \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Z lematu 4 wynika teraz wprost, że (4) \Leftrightarrow (1).

Wykorzystując tożsamości z lematu 1 oraz lemat 2 uzyskujemy warunki równoważne:

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma &= \cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\gamma}{2}, \\ 4 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \gamma}{2} \sin \frac{\beta + \gamma}{2} &= 4 \cos \frac{\alpha + \beta}{4} \cos \frac{\alpha + \gamma}{4} \cos \frac{\beta + \gamma}{4}, \end{aligned}$$

$$\sin \frac{\alpha + \beta}{4} \sin \frac{\alpha + \gamma}{4} \sin \frac{\beta + \gamma}{4} = \frac{1}{8},$$

$$\sin \frac{\alpha'}{2} \sin \frac{\beta'}{2} \sin \frac{\gamma'}{2} = \frac{1}{8},$$

gdzie

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \gamma', \quad \frac{\alpha + \gamma}{2} = \beta', \quad \frac{\beta + \gamma}{2} = \alpha', \quad \gamma' = \beta' = \alpha' = \frac{\pi}{3}, \quad \alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}.$$

Wobec tego (5) \Leftrightarrow (1).

Z lematu 1 mamy

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha + \gamma) \sin(\beta + \gamma) = 4 \sin \gamma \sin \beta \sin \alpha.$$

Stąd oraz z lematu 2 wnosimy, że warunek

$$4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} = \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma$$

jest równoważny kolejno warunkom

$$4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma,$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{8}, \quad \alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}.$$

Zatem (6) \Leftrightarrow (1).

Wykorzystując tożsamość z lematu 1 oraz lematu 2 dostajemy kolejno:

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = \frac{3}{2},$$

$$1 + 4 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \gamma}{2} \cos \frac{\beta + \gamma}{2} = \frac{3}{2},$$

$$\sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{8}, \quad \alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}.$$

Zatem (7) \Leftrightarrow (1).

Korzystając ponownie z lematu 1, otrzymujemy kolejno:

$$\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{3}{2},$$

$$1 + 4 \sin \frac{\alpha + \beta}{4} \sin \frac{\alpha + \gamma}{4} \sin \frac{\beta + \gamma}{4} = \frac{1}{8}.$$

Otrzymaliśmy warunek taki sam jak w dowodzie (5) \Leftrightarrow (1). Wobec tego (8) \Leftrightarrow (1).

Literatura

- Górowski, J., Klakla, M., Łomnicki, A.: 1997a, O pewnej charakterystyce trójkątów równoramiennych i równobocznych, *Gradient* **1**, 13-20.
- Górowski, J., Klakla, M., Łomnicki, A.: 1997b, Trójkąt – niewyczerpane źródło problemów, *Matematyka* **6**, 357-360.
- Górowski, J., Klakla, M., Łomnicki, A.: 2004, Zadania „na wymuszanie” jako środek matematycznej aktywizacji uczących się, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **26**, 61-80.
- Kourliandtchik, L.: 2006, *Wędrowki po krainie nierówności*, Aksjomat, Toruń.

*Instytut Matematyki
Uniwersytet Pedagogiczny
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
e-mail alomnicki@poczta.fm
e-mail jangorowski@interia.pl*