

Tadeusz Rams

O elementach logiki erotetycznej w edukacji matematycznej*

Abstract. Asking questions is one of the most common activities of mathematics teachers at various levels of education. Moreover, the way the teachers formulate questions has profound impact on the results of teaching, especially on their pupils' reasoning process.

Erotetic logic is frequently presented in a very formal manner. In this paper, we restrict our attention to these aspects of erotetic logic that can turn it into a useful framework to describe various didactic situations. In particular, the paper contains remarks on question structure, its didactic function, certain criteria of correctness of questions, and various classifications of questions that can be useful for teaching. Finally, we discuss some strategies and techniques of asking questions and encouraging pupils to pose questions.

*Najlepszy sposób, by zdobyć mądrość, to wciąż pytać (...)
Skoro wątpimy, musimy badać, skoro badamy, odkrywamy prawdę.*

Pierre Abelard (1079-1142)

... tout l'effort de l'esprit humain consiste à pose des problèmes et à les résoudre.

Verneaux R. (1951, s. 57)

1. Wstęp

Rozwój matematyki to nie tylko gromadzenie i systematyzowanie informacji, ale przede wszystkim stawianie i rozwiązywanie problemów. Umiejętność dostrzegania i formułowania właściwych problemów jest czasem trudniejsza od dawania na nie odpowiedzi. Problemy naukowe są formułowane w postaci pytań. Spowodowało to rozwój logiki erotetycznej¹, a logiczna analiza pytań i odpowiedzi jest obecnie ważną częścią logiki.

*On certain aspects of erotetic logic in mathematics education

2010 Mathematics Subject Classification: Primary 97A99

Key words: erotetic logic, teaching-learning process

¹Logika erotetyczna, czyli logika pytań, jest młodym, rozwijającym się od kilkudziesięciu lat, działem logiki.

Współczesne nauczanie matematyki to nie uczenie się i nauczanie receptywnie (odtwórcze), a raczej organizowanie uczenia się tego przedmiotu przez rozwiązywanie problemów, odkrywanie oraz właściwe sterowanie tym odkrywaniem.

Dlatego, podobnie jak w matematyce jako nauce, również w edukacji matematycznej dużą rolę odgrywa logika erotetyczna. Niezależnie od formy organizacyjnej zajęć dydaktycznych i stosowanych metod nauczania, nauczanie (uczenie się) matematyki, na różnych szczeblach edukacji, wsparte jest na pytaniach. Dotyczy to również wykładów, ćwiczeń i seminariów prowadzonych na kierunkach ścisłych uczelni wyższych.

Zadawanie pytań jest najczęstszą czynnością nauczyciela w procesie nauczania matematyki². Sposób, w jaki nauczyciele posługują się językiem, a zwłaszcza jak stawiają pytania, doraźnie i długofalowo wpływa na efekty nauczania, a szczególnie na myślenie uczniów.

Obserwacje procesu nauczania matematyki wskazują, że często komunikowanie jest tam zdominowane przez nauczyciela i odbywa się na linii nauczyciel → uczeń.

Chodzi jednak o to, by pytania (nauczycielowi, innym uczniom a także sobie) zadawali również uczniowie. Bowiern ilość stawianych przez uczniów pytań jest miarą ich aktywności.

Badania prowadzone w Zakładzie Dydaktyki Matematyki WSP w Zielonej Górze, opisane przez J. Dudę, R. Leszko (1991), pokazały, że 67,8% nauczycieli nie zetknęło się z elementami logiki pytań ani w toku studiów, ani w ramach samokształcenia. Dotyczące tego problemu, badania sondażowe przeprowadzone wśród nauczycieli południowej części województwa małopolskiego w roku 2007 dały podobny wynik 69,1%³.

Nauczycielom potrzebna jest refleksja nad tym, jakie są funkcje dydaktyczne pytań. W artykule zostaną też zaprezentowane uwagi na temat: budowy pytań (zadań pytajnych), pytań poprawnie postawionych a także pytań niewłaściwie postawionych (niektórych kryteriów poprawności pytań), różnych klasyfikacji pytań przydatnych do celów dydaktycznych. Rozważania dotyczą również taktyki i techniki stawiania pytań, a w szczególności problemu zachęcania uczniów do stawiania pytań.

2. Budowa zadań pytajnych. Niektóre warunki poprawności pytań

Wśród logików uprawiających logikę erotetyczną istnieją różne poglądy na temat tego czym jest pytanie. Wyróżnić też można odmienne sposoby ujęcia logiki pytań; w sposób sformalizowany przedstawia je T. Kubiński (1971)

Tutaj ograniczymy się do takiego przedstawienia elementów logiki erotetycznej, które jest dogodną kategorią opisu różnych sytuacji dydaktycznych.

Pytania (zadania pytajne) nie są zdaniem w sensie logiki, nie opisują rzeczywistości. Każde pytanie (zdanie pytajne) składa się z partykuły pytajnej lub zaimka

²Jest zdumiewające, że dotąd elementy logiki erotetycznej nie występują w programach uczelni kształcących nauczycieli.

³Jest oczywiste, że nieznanomość elementów logiki erotetycznej wśród nauczycieli matematyki negatywnie wpływa na przygotowywane przez nich zajęcia dydaktyczne, a potem na przebieg procesu nauczania.

pytającego (*czy, co, gdzie, dlaczego, po co, kiedy, kto,...*), zdania oznajmującego (albo jego fragmentu) i znaku zapytania.

Osnowa pytania to ta jego część, która wchodzi w skład pytania poza zwrotem pytajnym. Na przykład w pytaniu „Czy wykres funkcji $y = \cos x$ ma osie symetrii?” osnową pytania jest całe zdanie: *wykres funkcji $y = \cos x$ ma osie symetrii*.

Natomiast w pytaniu: „Kto w roku 1933 sformalizował rachunek prawdopodobieństwa?” osnową pytania jest tylko fragment zdania oznajmującego. Wszystkie odpowiedzi na to pytanie można uzyskać z formy zdaniowej: *x w roku 1933 sformalizował rachunek prawdopodobieństwa* wyznaczonej przez zawarty w pytaniu fragment zdania oznajmującego.

Wyznaczona przez zdanie pytajne forma zdaniowa (schemat odpowiedzi) nazywana jest **daną pytania**. Zawartą w tej formie zdaniowej zmienną nazywamy **niewiadomą pytania**. Może być kilka niewiadomych pytania, na przykład w pytaniu: „Która z danych liczb jest wielokrotnością liczby 3 i pewnej liczby dwucyfrowej?” daną pytania jest forma zdaniowa dwuargumentowa: *liczba x jest wielokrotnością 3 i pewnej liczby dwucyfrowej y* .

Zbiór tych nazw indywidualnych, których podstawienie za niewiadomą pytania jest zgodne z sensem pytania, nazywamy **zakresem niewiadomej pytania**.

Odpowiedź właściwa (albo bezpośrednia) na pytanie, to odpowiedź utworzona z danej pytania, przez podstawienie w miejsce niewiadomej, nazwy indywidualnej należącej do zakresu tej niewiadomej lub odpowiedź z nią równoważna.

Odpowiedź właściwa może być zdaniem prawdziwym albo fałszywym.

Każda odpowiedź, która nie spełnia tych warunków, jest odpowiedzią niewłaściwą. Na przykład daną pytania: Czy 827 jest liczbą pierwszą? jest forma zdaniowa: *x jest liczbą pierwszą*, a odpowiedzią niewłaściwą na to pytanie jest zdanie: *Wielomian jest liczbą pierwszą*.

Pozytywne założenie pytania to jest założenie, że przynajmniej jedna odpowiedź właściwa na to pytanie jest prawdziwa. Natomiast negatywne założenie pytania to założenie, że przynajmniej jedna odpowiedź właściwa na to pytanie jest fałszywa.

Pytanie właściwie postawione to pytanie, którego oba założenia (pozytywne i negatywne) są prawdziwe. Natomiast pytanie, którego jedno z założeń jest fałszywe, nazywa się pytaniem niewłaściwie postawionym.

Na przykład pytaniem niewłaściwie postawionym jest: „Które liczby rzeczywiste większe od 1 są prawdopodobieństwami pewnych zdarzeń losowych?” ponieważ wszystkie odpowiedzi właściwe, tzn. zdania utworzone z formy zdaniowej: *liczba rzeczywista $x > 1$ jest prawdopodobieństwem pewnego zdarzenia losowego są fałszywe*.

Pytania powinny być jednoznaczne. Zdania oznajmujące, które wchodzi w ich skład, muszą mieć sprecyzowany sens. Formułując pytanie unikamy wieloznaczności zarówno poszczególnych wyrazów zawartych w pytaniu, jak i tych, które wynikają z szyku wyrazów.

Od zdań pytajnych wymaga się, by były formułowane jasno, to znaczy, aby:

- wyraźnie wskazywały daną pytania (wieloznaczność w danej pytania czasem powoduje wieloznaczność pytania),

- pozwalały na ustalenie zakresu niewiadomej pytania,
- istniała co najmniej jedna odpowiedź właściwa na każde z nich.

Partykuła pytajna może też być niekiedy wieloznaczna. Taka jest zwłaszcza partykuła *dłaczego*. Gdy używamy jej samodzielnie, mogą powstać wątpliwości czy pytamy o: przyczynę, cel, uzasadnienie. Na przykład uczeń stwierdza: „To twierdzenie jest fałszywe”. Nauczyciel pyta, „Dłaczego?” Pytany może je interpretować jako pytanie: o uzasadnienie (wywód logiczny), tylko o kontrprzykład, o pokazanie jak sprawdzanie konkretnych przypadków doprowadziło go do tego stwierdzenia.

3. Różne klasyfikacje pytań przydatne do celów dydaktycznych

Istnieją różne klasyfikacje pytań, uwzględniające na przykład jako zasadę podziału kryteria: logiczne, dydaktyczne, psychologiczne.

Najbardziej podstawowy sposób podziału pytań z logicznego stanowiska podaje K. Ajdukiewicz (1975, s. 88), który ze względu na rodzaj partykuły pytajnej dzieli pytania na dwie grupy: **pytania rozstrzygnięcia i pytania dopełnienia**.

Pytania rozstrzygnięcia zaczynają się od partykuły pytajnej *czy*. Pytania te mają ściśle określoną z góry liczbę odpowiedzi o określonej stereotypowej strukturze (sama budowa pytania określa w pewnym stopniu oczekiwaną odpowiedź).

Na przykład na pytanie: „Czy figura złożona ze skończonej liczby punktów może być figurą wypukłą?” mamy dwie możliwe odpowiedzi: tak, nie. Odpowiedzi na te pytania sprowadzają się do stwierdzenia zajścia lub niezajścia określonego stanu rzeczy, zdarzenia (albo własnego braku wiedzy w danym zakresie).

Natomiast na pytanie: „Czy liczba 888⁹⁹⁹ jest mniejsza, czy równa, czy większa od liczby 999⁸⁸⁸?” mamy więcej niż dwie możliwe odpowiedzi.

Dlatego w logice erotetycznej **pytania rozstrzygnięcia** dzieli się na **dwuczłonowe** lub **wieloczłonowe**.

Pytania rozstrzygnięcia są zawsze właściwie postawione. Jeżeli są to pytania dwuczłonowe, to mają tylko dwie odpowiedzi właściwe będące zdaniem nawzajem sprzecznymi, z których zawsze jedno jest prawdziwe, a drugie fałszywe. Natomiast, jeżeli są to pytania rozstrzygnięcia wieloczłonowe, to mają skończoną liczbę odpowiedzi, z których nie wszystkie są prawdziwe ani nie wszystkie są fałszywe.

W pytaniach rozstrzygnięcia osnowa pytania będąca zdaniem może być prawdziwa lub fałszywa. W każdym z tych przypadków pytanie rozstrzygnięcia jest pytaniem sensownym i poprawnym,

Wszelkie pytania nie będące pytaniami rozstrzygnięcia nazywamy pytaniami dopełnienia. Na przykład: „Dłaczego wielomian $W(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 2$ nie ma pierwiastków całkowitych?”

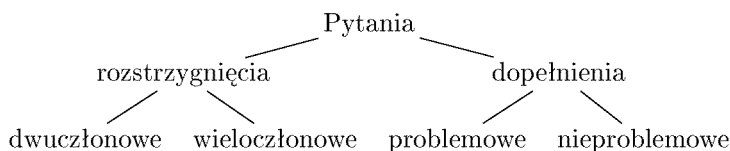
W pytaniach dopełnienia najczęściej występują partykuły pytajne: *kto*, *kiedy*, *jak*, *w jaki sposób*, *dłaczego*, *po co*, *w jakim celu*, itp. Na ogół odpowiedzi na pytania dopełnienia sprowadzają się do wskazania wyróżnionych elementów określonych zbiorów. Czasem liczba odpowiedzi właściwych na takie pytanie jest duża i trudna do przewidzenia. Istnieją pytania dopełnienia, które wśród swoich licznych odpowiedzi właściwych mają tylko jedną odpowiedź będącą zdaniem prawdziwym oraz takie, które wśród odpowiedzi właściwych mają więcej niż jedną prawdziwą.

Ze względu na sposób udzielania odpowiedzi na nie, **pytania dopełnienia** dzielą się na **problemowe i nieproblemowe**.

Odpowiedziami na pytania problemowe są zdania przedstawiające przyczynę lub powód, względnie cel lub skutek zaistnienia zdarzenia, zjawiska opisywanego w osnowie pytania. Wskazują one związek łączący zdania lub stany rzeczy.

W pytaniach tego typu osnowa pytania musi być zdaniem w sensie logicznym, i to zdaniem prawdziwym. Na przykład taka jest osnowa w pytaniu: „Dlaczego $\sqrt{7}$ jest liczbą niewymierną?” Jest to cecha wyróżniająca pytania problemowe od pozostałych pytań. Pytanie problemowe z daną pytania, która jest zdaniem fałszywym jest pytaniem niepoprawnym, bezsensownym, na które nie można i nie należy odpowiadać, które należy odrzucić.

Podział pytań z logicznego punktu widzenia przedstawia schemat:



Ze względu na większe walory kształcące, w edukacji matematycznej preferowane są pytania dopełnienia, a zwłaszcza pytania problemowe.

Dwuczłonowe pytania rozstrzygnięcia mogą prowokować uczniów do zgadywania odpowiedzi: *tak, nie*. (W przypadku wieloczłonowych pytań rozstrzygnięcia prawdopodobieństwo trafienia na poprawną odpowiedź jest mniejsze.)

W języku mówionym niekiedy opuszczamy partykułę pytającą – wykorzystując do tego celu odpowiednie rozłożenie akcentów, odpowiednią intonację, na przykład: „Dla każdej liczby naturalnej n liczby $n + 1$ i $3n + 2$ są względnie pierwsze?”. Tak wypowiedziane pytania mają na ogół charakter pytań rozstrzygnięcia.

Pod względem formalnym pytania, ze względu na ich budowę, można podzielić na dwie grupy: **pytania proste i pytania złożone**.

Pytania proste to na przykład: „Dlaczego wykresem funkcji $y = \arcsin(\sin x)$ nie jest prosta $y = x$?”, „Czy iloczyn skalarny wektorów jest łączny?” (Żadna ich część sama nie jest pytaniem.)

W pytaniach złożonych zawsze wyrażony jest pewien związek, czy to między pytaniami składowymi, czy między jakimś zadaniem w sensie logiki a pytaniem. Na przykład: „Ile pierwiastków ma równanie $x^x = a$ w zależności od wartości parametru a i jak znaleźć te pierwiastki gdy $a = 27$?”. „Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, zaś jej superpozycja $f \circ f$ jest funkcją rosnącą, czy funkcja f musi być rosnąca?”

Złożenie pytań może polegać na łączeniu partykuł pytających, na przykład: „Jak i kiedy zastosujesz zasadę indukcji matematycznej?” albo wynikać ze struktury osnowy pytania, na przykład: „Gdzie żył i działał Archimedes?”

Do budowania pytań złożonych używamy tych samych spójników, jakich używamy przy tworzeniu zdań złożonych w sensie logiki (*i, lub, a, jeżeli to,...*). Jednak związki między elementami składowymi, wyrażone przy ich pomocy, w pytaniach różnią się zasadniczo od związków międzyzdanowych.

Wśród pytań złożonych wyróżnia się: **pytania hipotetyczne i pytania warunkowe**.

Pytania hipotetyczne to pytania w postaci pary, której pierwszym elementem jest zdanie, a drugim pytanie. Na przykład: „Gdybyś miał narysowany prostokąt, to jak używając cyrkla i linijki podzieliłbyś go na trzy trójkąty prostokątne i podobne?”.

Przykład pytania warunkowego: „Jeżeli w czworościanie foremny $ABCD$ poprowadzisz płaszczyznę przez środki krawędzi AB , BD , i CD , to na jakie bryły podzieli ona ten czworościan i co możesz stwierdzić o objętościach tych brył?”.

Różnica między pytaniami hipotetycznymi i pytaniami warunkowymi polega na tym, że odpowiedzi na pytania warunkowe nie są zdaniami warunkowymi⁴. Odpowiedź na takie pytanie może być udzielona, gdy spełniony zostanie pewien warunek (tzn. zdanie stanowiące ten warunek jest prawdziwe).

Złożone pytania w zasadzie nie są błędne, a niekiedy skracają proces zbierania informacji. Jednak często nie ułatwiają odpowiedzi, a nawet wprowadzają w błąd pytanych lub pytających, co jest konsekwencją nie dość jasnego rozumienia znaczenia odnośnych połączeń.

Gdy w pośpiechu łączymy kilka pytań, w rezultacie zamiast przyspieszenia odpowiedzi ucznia, opóźniamy ją – złożone pytanie jest trudniejsze do zrozumienia, łatwiej wtedy o nieporozumienie.

W edukacji matematycznej istotny jest stopień trudności pytań, ale również poziom czynności poznawczych, szczególnie stopień złożoności myślenia niezbędnego, by na nie odpowiedzieć.

Odpowiedź na pytanie może polegać na odtworzeniu pewnych faktów albo może wymagać wyżej zorganizowanych czynności poznawczych, w szczególności tzw. **myślenia wyżej zorganizowanego**. Charakteryzuje się ono między innymi tym, że jest: niealgorytmiczne, często prowadzi do wielu rozwiązań, jest złożone (to znaczy uwzględnia różne punkty widzenia), cechuje go niepewność (nie wszystko, co wiąże się z pytaniem jest od razu wiadome), samoregukuje proces myślenia i wymaga wysiłku, który związany jest z transponowaniem wiedzy, interpretacją i ocenianiem.

W związku z tym pytania dzieli się na:

- **pytania faktograficzne**, wymagające odtwarzania faktów i informacji (odpowiedź na nie jest oparta na przypominaniu, nie wychodzi poza informacje poznane poprzednio, nie zmienia formy ani porządku informacji); na przykład: „Jaka jest kolejność wykonywania działań?”
- **pytania wymagające wyżej zorganizowanego myślenia** (odpowiedzi na nie wiążą się z przetwarzaniem informacji dla osiągnięcia jakiegoś celu).

Podobną klasyfikację pytań wprowadza S. Sośnicki (1966), który dzieli je na dwie grupy: **pytania kontrolne i pytania badawcze**. Pytania kontrolne (egzaminacyjne) wymagają odtworzenia poznanej poprzednio wiedzy. Natomiast pytania badawcze pobudzają do myślenia, prowadzą do nowej wiedzy.

Wybór rodzaju pytań powinien zależeć od poziomu uczniów i celów, jakie chcemy osiągnąć. Pytania faktograficzne pozwalają na natychmiastowe informowanie uczniów, czy odpowiedź była poprawna. Są one bardziej skuteczne na niższych szczeblach nauczania, gdzie chodzi o elementarne wiadomości i proste

⁴Pisze o tym J. Kopania (1987, s. 301)

umiejętności. Pytania wymagające wyżej zorganizowanych czynności poznawczych przynoszą lepsze efekty na wyższych szczeblach edukacji oraz w przypadku uczniów przeciętnie i ponadprzeciętnie uzdolnionych.

Jako narzędzie doboru treści i celów kształcenia, dydaktycy wykorzystują schematy hierarchicznego uporządkowania celów zwane taksonomiami celów nauczania. Przykładem takiej ogólnej taksonomii celów nauczania jest opracowana przez pedagogów amerykańskich tzw. taksonomia Blooma. Wyróżnia się w niej sześć poziomów: wiedza, rozumienie (orientacja), zastosowanie, analiza, synteza, ewaluacja (krytyczna ocena, wartościowanie poznawcze).

Zwolennicy Blooma próbowali do tych poziomów dopasować cele nauczania matematyki. Jednak spotkało się to z krytyką ze strony dydaktyków matematyki i nauczycieli, ponieważ w zadaniach matematycznych, nawet elementarnych, często interweniują na raz różne poziomy.

Obecnie przydatność taksonomii Blooma upatruje się głównie w tym, że może ona pobudzać do refleksji i ustrzec nauczycieli przed jednostronnym doborem pytań; przede wszystkim ułatwia porządkowanie pytań.

Pytania formułowane na poszczególnych poziomach taksonomii Blooma wymagają odpowiedzi angażujących specyficzne procesy myślowe. Projektując pytania lub ich sekwencje, możemy wyodrębnić sześć kategorii pytań:

Poziom	Przykład	Procesy poznawcze
1. Wiedza	Jakie własności ma składanie przekształceń geometrycznych? Które z funkcji trygonometrycznych są nieparzyste?	zapamiętanie i przypomnienie wiadomości faktograficznych
2. Rozumienie	Jak sprawdzisz, że podana funkcja jest okresowa?	interpretowanie i pojmowanie
3. Zastosowanie	Jak wykorzystasz schemat Hornera do rozwiązania tego równania wielomianowego? Jak, stosując twierdzenie Cavalieriego, wyprowadzisz wzór na objętość kuli?	wykorzystanie: definicji, twierdzeń, metod matematycznych
4. Analiza	Jak wysokość trapezu równoramiennego opisanego na okręgu zależy od długości jego podstaw? Jakie rodzaje izometrii możesz wyróżnić i jakie są ich niezmienniki?	wnioskowanie lub wyjaśnianie związków, rozkładanie na części
5. Synteza	Jakie własności działań na zbiorach możesz podać w oparciu o poznane w rachunku zdań własności alternatywy i koniunkcji?	przewidywanie, łączenie
6. Ocenianie	Która z podanych metod rozwiązania tego zadania jest ogólniejsza i dlaczego?	wyrażanie opinii, szacowanie

Klasyfikację pytań, związaną z opracowaną przez niego taksonomią celów nauczania, przedstawia J. V. Dormolen (1978). Odnosi się ona bezpośrednio do nauczania matematyki.

J. V. Dormolen wyróżnia **cztery poziomy pytań**:

- **pierwszy** poziom (jest to taksonomicznie poziom wiedzy) odnosi się do powtórzeń i przypomnień niezbędnych dla dobrej organizacji procesu uczenia się; chodzi o pytania sprawdzające wiedzę przyswojoną w poprzednim okresie (pytania skierowane wstecz), ale bada się też postępy w toku uczenia się (pytania skierowane w przód),
- **drugi** to poziom pytań pojęciowych (pytania dotyczą rozumienia pojęć),
- **trzeci** poziom pytań to świadome stosowanie wiedzy (taksonomicznie odpowiada poziomowi zastosowań), J. V. Dormolen określa go jako „obserwowanie”,
- **czwarty** poziom pytań (jest to taksonomicznie poziom analizy i syntezy) to stosowanie hipotez, ich dowodzenie lub falsyfikowanie.

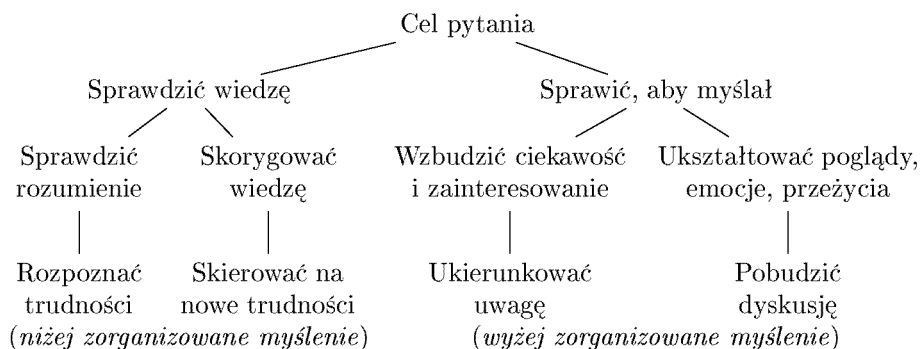
Według J. V. Dormolena na wszystkich czterech poziomach chodzi o pytania pobudzające uczniów do matematycznej aktywności i to na coraz to wyższych poziomach abstrakcji.

Pytania stosowane w edukacji matematycznej próbowano też klasyfikować ze względu na ich treści merytoryczne. Taki podział logiczny pytań proponuje S. Racinowski (1967).

4. Technika i taktyka stawiania pytań

W procesie nauczania matematyki zadaje się mnóstwo pytań, jednak większość z nich pochodzi od nauczycieli. Różne typy pytań wywołują różne formy aktywności matematycznej uczniów, różne rodzaje myślenia. Dlatego ważne jest, by nauczyciel był świadom, w jakim celu zadaje pytania.

Niektóre funkcje dydaktyczne pytań przedstawia schemat:



Problem roli pytań nauczyciela w sprawdzaniu postępów uczniów w edukacji matematycznej badała M. Ćwik (1987).

Prawidłowe formułowanie pytań jest warunkiem uzyskania poprawnych odpowiedzi, właściwych informacji. *(Jakie pytanie – takie myślenie – taka odpowiedź.)*

Poprawne pytania powinny pobudzać uczniów do obserwowania, wyobrażania, być zaproszeniem do myślenia i działania.

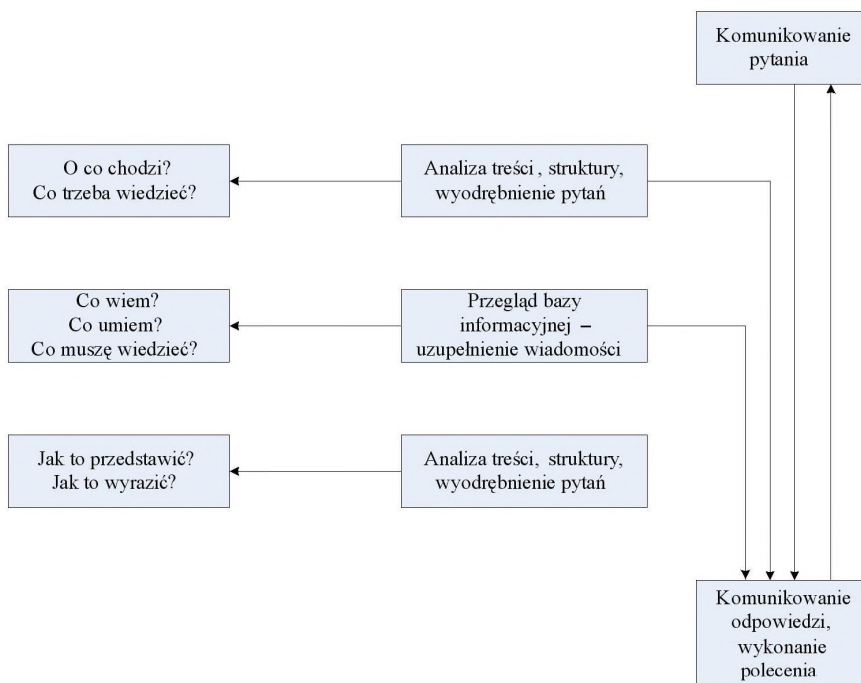
W dobrze zorganizowanym procesie nauczania matematyki pojawiają się pytania zarówno z niższego, jak i wyższego poziomu poznawczego. Na przykład rozpoczynamy od pytań prostych, faktograficznych, a potem padają pytania wymagające rozumienia i analizy (pytania *dlaczego*). W końcu stawiane są pytania bardziej pobudzające do myślenia.

Zadając pytanie wskazujemy w nim pytanemu pewną wiedzę o materiale potrzebnym do wykorzystania w odpowiedzi. Może się zdarzyć, że pytany tę wiedzę ma lub jej częściowo albo całkowicie nie posiada. Ma to ważne znaczenie dla metody stawiania pytań. Wcześniejsze posiadanie wiedzy przez pytanego przyczynia się do lepszego zrozumienia pytania i odpowiedzi na nie. Brak tej wiedzy utrudni mu odpowiedź lub ją uniemożliwi.

Analiza zachowań nauczyciela w toku stawiania pytań i reakcji uczniów podczas udzielania odpowiedzi (wykonywania poleceń) pozwala wyróżnić kilka faz:

- **pierwsza** polega na zakomunikowaniu pytania, zrozumieniu go przez uczniów, jest to wstępna analiza pytania,
- **druga** to rekonstruowanie informacji dla prawidłowego zaprojektowania odpowiedzi na nie,
- **trzecia** polega na konstruowaniu planu odpowiedzi,
- **czwarta** to komunikowanie odpowiedzi, uzupełnianie, ocenianie odpowiedzi.

Relacje między tymi fazami przedstawia schemat:



Rysunek 1.

Pytania powinny być stawiane w sposób ekonomiczny, to znaczy tak, by za pomocą małej ich liczby uzyskać maksymalną ilość potrzebnych informacji.

Praktyka nauczania matematyki wskazuje, że w naszych szkołach dominuje metoda szybkich pytań i odpowiedzi. Po zadaniu pytania nauczyciele za krótko czekają na odpowiedź (około sekundy), po czym stawiają następne pytania albo zwracają się do innych uczniów. W powodzi szybkich pytań uczniowie gubią się, zniechęcają do rozwiniętych i przemyślanych odpowiedzi.

Przedłużenie czasu oczekiwania na odpowiedź (do około trzech sekund) radykalnie podnosi jakość odpowiedzi uczniowskich; stają się one wtedy dłuższe, głębsze, bardziej twórcze, więcej uczniów zgłasza się do odpowiedzi i pragną oni zadawać więcej pytań. Dlatego czasem należy zwolnić tempo lekcji matematyki, na przykład możemy powtórzyć pytanie w zmienionej postaci, gdy uczeń ma trudności z odpowiedzią. (Powtórzenie pytania sugeruje uczniom, że poprzednia odpowiedź była błędna.)

Niekiedy musimy zostawić uczniom więcej czasu na przemyślenie i przeformułowanie sądu. (*Czy mógłbyś to wyrazić inaczej?, Powiedz to jeszcze raz, Jak mógłbyś to wytłumaczyć?*)

Zachęcanie do wnikliwszego wejrzenia w problem matematyczny ułatwiają pytania pogłębiające: *Co przez to rozumiesz?, Skąd to wiesz?, Dlaczego tak myślisz? Czy możesz powiedzieć o tym coś więcej?*

Niekiedy dalsze odpowiedzi uczniów wyzwoli drobna zachęta (*aha, tak, i, no, ...*). Podobną rolę odgrywają wzmocnienia niewerbalne – kontakt wzrokowy, sygnały mimiczne (uśmiech, gesty itp.).

Dobre pytanie powinno rodzić następne pytania; ułatwiają to pewne formy pytań. Na przykład:

- **pytania skupiające uwagę:** *Co widziałeś?, Co zauważyłeś?, Spójrz na te bryły, Co to jest?* (prosta obserwacja może wywołać całą spiralę pytań, które wypróbuje wartość argumentów, dowodów, założeń),
- **pytania, które wymagają porównania** (pomagają uczniom: porównywać różne obiekty, dokonywać klasyfikacji, uporządkować dziedzinę, w której poruszają się, gdy rozwiązują matematyczne zadanie),
- **pytania domagające się uściślenia:** *Czy możesz to bliżej wyjaśnić?, Jaki dałbyś tu przykład (kontrprzykład)?, Co chciałeś przez to powiedzieć?* (pomagają skupić się na znaczeniu użytych słów),
- **pytania zachęcające do badania:** *Co powinniśmy wiedzieć?, Co się stanie, jeżeli, ... , Jak możesz to skonstruować?*
- **pytania o wyjaśnienie:** *Skąd to wiesz?, Jakie masz argumenty?, Na jakiej podstawie tak twierdzisz?, Co cię skłoniło do wyboru tej metody?* (dotyczą procesu rozumowania, pomagają zastanowić się nad zebranymi przez siebie danymi oraz własnymi odpowiedziami).

Odpowiednie posługiwanie się pytaniami w toku lekcji matematyki pozwala na rozwijanie różnych form aktywności matematycznej uczniów.

W szczególności służy temu:

- a) kierowanie pytania do wielu uczniów (mogą to być pytania wymagające odpowiedzi o wzajemnie powiązanych faktach, pozwalające na pojawienie się niejednakowych odpowiedzi),
- b) efektywna zmiana adresata pytania (w tym celu nie musimy powtarzać ani przeformułowywać pytania dla każdego ucznia), *Oto pytanie, które ma więcej niż jedną odpowiedź. Będę kolejno prosił was o odpowiedzi.*
- c) rozłożenie w czasie pytań, a także pauz między pytaniami,
- d) stawianie uczniów wobec pytań prowokujących i otwartych,
- e) operowanie takimi sekwencjami pytań, które wymagają coraz wyżej zorganizowanego myślenia,
- f) wspólne poszukiwanie odpowiedzi, gdy padła odpowiedź *nie wiem* lub odwrócenie pytania (czasem wymaga to analizy pytania, przeredagowania pytania, podsunięcia metody).

Jak zachęcać uczniów do stawiania pytań?

W miarę dorastania dzieci obserwujemy, że narasta w nich skłonność, aby akceptować wypowiedzi innych zamiast pytać. Dlatego zachęcanie uczniów do stawiania pytań przychodzi tym trudniej, im wyższy jest szczebel nauczania.

Dobrą strategią nauczyciela jest myślenie na głos i zadawanie dalszych pytań, prezentowanie modelu poszukującego umysłu. Ciągłe dostarczamy uczniom okazji do stawiania pytań i demonstrujemy, że cenimy sobie ich pytania.

Zdolność stawiania pytań rozwija się w toku odpowiednio dobranych ćwiczeń. Na przykład: prosimy uczniów o pomoc w układaniu pytań do przeczytanego tekstu matematycznego, albo uczniowie dobierają pytania do danej odpowiedzi.

W nauczaniu matematyki stwarzamy warunki do interakcji uczeń → uczeń poprzez takie zbiegi dydaktyczne, jak:

- namawianie do odpowiedzi alternatywnych (*Nie istnieje tu jedna odpowiedź. Jakie są inne możliwości? Kto uważa inaczej?*),
- zachęcanie do zadawania pytań (*Czy możesz poprosić go o wyjaśnienie? Dlaczego tak mu powiedziałeś?*),
- umożliwianie uczniom pytania się nawzajem (*Spytaj kolegów co o tym sądzą, ...Co proponują?*),
- wywoływanie krytycznej oceny w stosunku do wypowiedzi kolegów (ujawnianie i poprawianie zawartych w nich błędów),
- kolejność: pomyśl – zapytaj kolegi – przedstaw grupie (nauczyciel wtedy mówi mniej, a dodaje uczniom odwagi do formułowania pytań, reagowania na siebie nawzajem).

Po realizacji pewnego działu programu nauczania matematyki (na przykład przed sprawdzianem), uczniowie mogą w domu przygotować pytania dotyczące występujących tam pojęć, twierdzeń i metod. Wtedy lekcja powtórzeniowa będzie polegała

na zadawaniu sobie pytań i analizie odpowiedzi na nie. Będzie to raczej nie rozmowa nauczyciela z uczniami, ale przede wszystkim uczniowie będą rozmawiali ze sobą.

Doświadczony nauczyciel matematyki gromadzi interesujące lub zaskakujące pytania, jakie padły w klasie. W odpowiednim momencie może omawiać je z uczniami albo przekazywać im do opracowania w domu.

Dzięki odpowiednio dobranym pytaniom możemy: zainteresować uczniów poznawanymi treściami nauczania, wzbogacać ich doświadczenie matematyczne, pomagać im w opanowywaniu umiejętności i sprawności matematycznych.

Zadajemy pytania, by lepiej poznać swoich uczniów, na przykład co ich naprawdę interesuje, w jakim stopniu rozumieją opracowane treści. Przy okazji otrzymujemy informację „zwrotną” o naszych pytaniach czy rozwiązywanych zadaniach.

Literatura

- Ajdukiewicz, K.: 1975, *Logika pragmatyczna*, PWN, Warszawa.
- Ćwik, M.: 1987, Pytania nauczyciela jako środek kontroli w nauczaniu matematyki (próba diagnozy), *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **8**, 7-50.
- Dormolen, J. V.: 1978, *Didaktik der Mathematik*, Vieweg, Braunschweig.
- Duda, A., Leszko, R.: 1991, Interrogatyka jako problem badawczy dydaktyki, *Problemy Dydaktyczne Matematyki* **V**, 159-165.
- Kopania, J.: 1987, Logika pytań, w: W. Marciszewski (red.), *Logika formalna. Zarys encyklopedyczny z zastosowaniami do informatyki i lingwistyki*, PWN, Warszawa, 296-310.
- Kubiński, T.: 1971, *Wstęp do logicznej teorii pytań*, PWN, Warszawa.
- Racinowski, S.: 1967, *Pytanie i odpowiedź*, Nasza Księgarnia, Warszawa.
- Sośnicki, J.: 1966, *Poradnik dydaktyczny*, PZWS, Warszawa.
- Verneaux, R.: 1951, La notion de probleme, *Revue Philosophique de Louvain* **49**, 57-77.

Sąddecki Oddział Polskiego Towarzystwa Matematycznego
ul. Szymanowskiego 36
33-310 Nowy Sącz
e-mail: trams@mnet.pl