Streszczenie

Analizujemy dwie prace Bernarda Bolzano o liczbach rzeczywistych: *Rein analytischer Beweis* (Bolzano 1817) i *Reine Zahlenlehre* (Bolzano 1962/1976). W pierwszej liczby rzeczywiste ujęte są w sposób aksjomatyczny, w drugiej, skonstruowane. W obu pracach dowodzona jest zasada supremum i zupełność w sensie Cauchy'ego, przy czym, jak pokazujemy, dowody w (Bolzano 1817) są niepoprawne.

W (Bolzano 1817) aksjomaty ciała uporządkowanego są stosowane *implicite*, gdy w dowodach twierdzeń przekształcane są formuły. Aksjomat ciągłości jest sformułowany wprost w postaci zasady supremum i zupełności w sensie Cauchy'ego w koniunkcji z aksjomatem Archimedesa. Na tej podstawie wnosimy, że w rozprawie znajduje się aksjomatyczne ujęcie liczb rzeczywistych. Dowód zasady supremum w (Bolzano 1817) wykorzystuje zupełność w sensie Cauchy'ego, którą – jak pokazujemy – Bolzano próbuje wyprowadzić z aksjomatów ciała uporządkowanego.

Praca (Bolzano 1962/1976) to teoria tzw. liczb mierzalnych, do których należą liczby nieskończenie małe. W rozprawie tej Bolzano posługuje się też liczbami nieskończenie dużymi, definiowanymi jako odwrotności nieskończenie małych. Interpretujemy tę pracę w oparciu o rozszerzenie liczb wymiernych za pomocą ultrafiltru. Zbiór liczb hiperwymiernych $\mathbb{Q}^*$ definiujemy jako $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}/_{\mathcal{U}}$, gdzie $\mathcal{U}$ jest ultrafiltrem niegłównym na $\mathbb{N}$. W zbiorze $\mathbb{Q}^*$ wprowadzamy działania i porządek tak, że powstaje ciało niearchimedesowe. W ciele liczb hiperwymiernych wyróżniamy pierścień liczb ograniczonych $\mathbb{L}_Q$ oraz ideał nieskończenie małych Ω_Q. Liczby rzeczywiste definiujemy jako pierścień ilorazowy $\mathbb{L}_Q/_{\Omega_Q}$. Pokazujemy, że liczbę mierzalną można interpretować jako element pierścienia $\mathbb{L}_Q/_{\Omega_Q}$. Pokazujemy, że w przyjętej interpretacji dowody zasady supremum oraz zupełności w sensie Cauchy'ego w (Bolzano 1962/1976) są poprawne.