Geometryczne i homologiczne własności układów gładkich krzywych w $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ Streszczenie Rozprawy Doktorskiej

Marcin Zieliński

Głównym celem niniejszej pracy doktorskiej jest zbadanie własności algebraiczno-kombinatorycznych układów krzywych gładkich na zespolonej płaszczyźnie rzutowej. Ten nurt badań jest obecny w światowej matematyce od blisko 40 lat, a mianowicie od momentu sformułowania hipotezy Terao (choć niektórzy autorzy wskazują, że hipoteza ta powinna nosić miano hipotezy Terao-Saito), która przewiduje, że dla układów hiperpłaszczyzn zawartych w $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ algebraiczna własność wolności układu jest w pełni determinowana przez jego kratę przecięcia. Hipoteza ta jest uznawana za jeden z najważniejszych i najtrudniejszych otwartych problemów w kombinatorycznej geometrii algebraicznej. W przypadku płaskim, tj. dla $n = 2$, hipoteza ta została zweryfikowana (tylko!) dla układów $d \leqslant 14$ prostych, co też pokazuje z jak trudnym i skomplikowanym problemem mierzą się badacze na całym świecie. Jak się okazało później, hipoteza Terao jest tylko jednym z wielu trudnych problemów badawczych z pogranicza algebry i kombinatoryki, i możemy przywołać całą listę podobnych problemów, które dodatkowo zahaczają o topologię, np. problem nietrywialności wielomianów Alexandera wyznaczonych przez układy prostych, problemy zawierania dla potęg symbolicznych ideałów jednorodnych stowarzyszonych z konfiguracjami punktów, czy też możemy wspomnieć o problematyce konstruowalności par Zariskiego.

W niniejszej pracy skupimy się na układach, które składają się z gładkich krzywych płaskich stopnia 1, 2, oraz 4. Zmiana ta, tj. dopuszczenie krzywych stopnia większego niż 1, ma charakter fundamentalny, głównie ze względu na pojawiające się komplikacje. W celu zobrazowania sytuacji przytoczymy tylko kilka utrudnień, mianowicie:

- osobliwości zwyczajne dla układów krzywych, w odróżnieniu od przypadku układów prostych, przestają być quasi-jednorodne,
- wiele technik działających dla układów prostych przestaje mieć zastosowanie w ogólniejszej sytuacji, np. gdy dopuszczamy gładkie stożkowe,
- jest bardzo mało znanych narzędzi, które mogą pozwolić na efektywną pracę z układami krzywych, np. w kontekście ograniczania słabych kombinatoryk układów,
- zdecydowanie wzrasta złożoność obliczeniowa dla problemów algebry homologicznej, np. gdy chcemy wyznaczyć minimalne rezolwenty wolne algebr ilorazowych.

W niniejszej pracy doktorskiej skupimy się na dwu ważnych aspektach, mianowicie na tworzeniu narzędzi, które pozwalają badać własności krzywych z perspektywy kombinatorycznej, oraz na konstrukcjach układów krzywych z ciekawymi własnościami algebraiczno-kombinatorycznymi. Prowadząc nasze badania, zauważyliśmy pewne luki w kombinatorycznej teorii układów prostych bistycznych stowarzyszonych z gładkimi płaskimi kwartykami i stało się to dla nas motywacją do jej uzupełnienia. Przedstawmy teraz, pokrótce, najważniejsze rezultaty badawcze uzyskane w wyniku naszych badań oraz strukturę niniejszej pracy doktorskiej.

Pierwszy wynik naszych badań dotyczy układów gładkich stożkowych, które dopuszczają tylko pewne ADE osobliwości. Interesują nas wzajemne zależności pomiędzy liczbą osobliwości A_1, A_3, D_4,

A_5, A_7 i liczby stożkowych tworzących dany układ. Korzystając z nierówności Bogomołowa-Miyaoki-Yau oraz twierdzenia Bézouta, wyznaczamy związek między tymi wielkościami w postaci następującej nierówności.

Twierdzenie **A** (zobacz Twierdzenie 2.3). *Niech $\mathcal{C}$ będzie układem $k \geqslant 3$ gładkich stożkowych, który dopuszcza n_2 osobliwości A_1, t_3 osobliwości A_3, n_3 osobliwości D_4, t_5 osobliwości A_5, oraz t_7 osobliwości A_7. Wówczas zachodzi następująca nierówność typu Hirzebrucha:*

$$560k + 100n_2 + 75n_3 \geqslant 608t_7 + 404t_5 + 184t_3.$$

Otrzymana nierówność pozwala wyznaczyć ograniczenia górne na liczbę osobliwości A_5 i A_7 w układach gładkich stożkowych, które dopuszczają tylko pewne typy osobliwości. Jeśli oznaczymy przez t_{2m+1} liczbę punktów osobliwych typu A_{2m+1} dla $m \geqslant 0$, oszacowania te w zależności od liczby stożkowych k tworzących układ mają postać:

$$t_5 \leqslant \frac{25}{88}k^2 + \frac{45}{88}k,$$

$$t_7 \leqslant \frac{25}{126}k^2 + \frac{5}{14}k.$$

W dalszej części pracy zajmujemy się układami gładkich kwartyk i prostych zawartych w zespolonej płaszczyźnie rzutowej. Nasze rozważania rozpoczynamy od ogólnego wyniku pozwalającego ograniczyć słabe kombinatoryki dla układów kwartyk i prostych, zawierających tylko pewne określone osobliwości quasi-jednorodne.

Twierdzenie **B** (zobacz Twierdzenie 3.1). *Niech $\mathcal{QL} = \{\ell_1, \ldots, \ell_d, Q_1, \ldots, Q_k\} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ będzie układem składającym się z $d \geqslant 1$ prostych oraz $k \geqslant 1$ gładkich kwartyk. Niech $4k + d \geqslant 6$. Przypuśćmy, że $\mathcal{QL}$ dopuszcza n_2 prostych punktów podwójnych A_1, t_3 osobliwości A_3, t_5 osobliwości A_5, d_6 osobliwości D_6, t_7 osobliwości A_7, n_3 osobliwości D_4 oraz n_4 osobliwości X_9. Wówczas zachodzi następująca nierówność:*

$$56k + n_2 + \frac{3}{4}n_3 \geqslant d + \frac{13}{8}d_6 + \frac{5}{2}t_3 + 5t_5 + \frac{29}{4}t_7.$$

W dalszej części rozdziału przytaczamy pewne znane fakty dotyczące prostych bistycznych do kwartyk gładkich, a następnie dowodzimy kilka ciekawych faktów opisujących układy prostych bistycznych do kwartyk Kleina, Dycka i Komiya-Kuribayashiego.

W kolejnej części tego rozdziału przedstawimy pełny opis słabych kombinatoryk układów 28 prostych bistycznych do bardzo symetrycznych gładkich kwartyk, podając również odpowiednie równania tychże prostych, jak i współrzędne punktów poczwórnych, i same incydencje.

Dalej omawiamy własności wolność, niemal wolność oraz plus-jeden generowania dla układów składających się z prostych i jednej gładkiej kwartyki, a w końcowej części rozdziału także dla układów złożonych z elementów pewnego pęku kwartyk. Na początku rozdziału dowodzimy stwierdzenia orzekające, że nie istnieje układ wolny lub niemal wolny złożony z gładkiej kwartyki i jednej prostej i, co więcej, jeśli dołożymy do układu drugą prostą i ograniczymy się do pewnych osobliwości quasi-jednorodnych, to taki układ również nie może być układem wolnym. W kolejnych kilku stwierdzeniach przedstawiamy konkretne układy wolne, niemal wolne, jak i plus-jeden generowane złożone z kwartyki Dycka i wybranych prostych bistycznych. Dalsza analiza układów prostych bistycznych dotyczy układów stowarzyszonych z kwartyką Kleina. Specyfika układów złożonych z kwartyki Kleina i prostych bistycznych wynika z faktu, że każda prosta bistyczna do kwartyki Kleina ma z nią dokładnie dwa punkty wspólne będące osobliwościami A_3. Brak punktów styczności A_7 skutkuje tym, że istnieje mniej możliwości na skonstruowanie układów o relatywnie dużej całkowitej liczbie Tjuriny. Z tego powodu w pracy podajemy tylko jeden typ plus-jeden generowanych układów złożonych z kwartyki Kleina i czterech prostych bistycznych przecinających się w punkcie poczwórnym. Układy te jednakże są interesujące w zestawieniu z wynikami pochodzących z pewnej pracy autorstwa Dimci i Sticlaru, gdyż realizują maksymalny w stosunku do stopnia układu wykładnik d_3 dla krzywych 3-syzygijnych.

Ostatnia część pracy jest poświęcona na badaniu pęku krzywych

$$\mathcal{P}: \quad uK_1 + vK_2, \quad (u:v) \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}},$$

gdzie, odpowiednio, K_1 to kwartyka Komiya-Kuribayashiego, a K_2 to kwartyka rozkładalna złożona z pewnych czterech prostych hiperoskulujących. Z krzywych należących do pęku konstruujemy układ wolny C_3 złożony z naszych bazowych kwartyk K_1, K_2 oraz dwóch specjalnie dobranych osobliwych nierozkładalnych kwartyk z pęku. Analizując nasz układ dochodzimy do wniosku, że nasz pęk zawiera krzywą niezredukowaną. Dowodzimy stwierdzenie, które niejako podsumowuje te analizy, nie tylko wskazując tę niezredukowaną kwartykę, ale orzekając również, że jest to jedyna niezredukowana krzywa w tym pęku. Na koniec, inspirując się twierdzeniem udowodnionym przez Dimcę oraz Măcinic i Pokorę, zbadaliśmy układy powstałe z układów wolnych poprzez usunięcie jednej prostej hiperoskulujacej będącej składową kwartyki K_2, dowodząc, że uzyskane układy są wolne.