

*Krzysztof Cipora*<sup>1</sup>

Instytut Psychologii Uniwersytet Jagielloński, Kraków

## Perspektywy wykorzystania wyników badań nad przestrzennym komponentem reprezentacji liczb w edukacji

### Streszczenie

Przestrzenny komponent reprezentacji liczb był obiektem dużego zainteresowania badaczy w ciągu ostatnich 20 lat. W badaniach z zakresu psychologii i neuronauki wykazano, że reprezentacje liczb są w sposób naturalny mapowane w przestrzeni. W niniejszej pracy dokonano przeglądu możliwości zastosowania wyników tych badań w dziedzinie edukacji. Teoretycznie wskazać można 3 obszary takich zastosowań: diagnoza specyficznych trudności w uczeniu, ocena kompetencji matematycznych uczniów oraz trenowanie zdolności matematycznych. Biorąc pod uwagę niewielką moc diagnostyczną aktualnie stosowanych metod badawczych oraz niejednoznaczne wyniki, można stwierdzić, że możliwości z zakresu diagnozy i oceny kompetencji są na chwilę obecną ograniczone. Z drugiej strony obiecujące są wyniki wstępnych badań nad trenowaniem zdolności numerycznych w atrakcyjnej dla dzieci formie.

**Słowa kluczowe:** efekt SNARC, reprezentacja przestrzenna, diagnoza, treningi, edukacja

### Application perspectives of study results on the spatial component of number representation in education

#### Abstract

Spatial component of number representation has been broadly investigated during the past 20 years. Numerous studies in cognitive psychology and neuroscience indicate that number representations are automatically mapped in space. The aim of this paper is to discuss potential applications of spatial numerical associations in the domain of education. Theoretically, investigating spatial numerical associations may be useful for: (a) diagnostics of Math deficits, (b) assessment in Math education and (c) developing trainings and tools aimed at improving Math performance. Keeping recent results in mind, it seems that diagnostic power of spatial numerical associations is limited; nevertheless, possibilities of developing trainings of spatial mapping of numbers may be a fruitful area of application.

**Keywords:** SNARC effect, spatial representation, diagnosis, trainings, education

---

<sup>1</sup> Adres do korespondencji: Krzysztof Cipora, Instytut Psychologii UJ, Al. Mickiewicza 3, 31-120 Kraków, krzysztof.cipora@gmail.com

## Uwagi wstępne

W niniejszej pracy przedstawione zostaną możliwości zastosowania wyników badań nad przestrzennym komponentem reprezentacji liczb w nauczaniu matematyki. Przestrzenny komponent reprezentacji liczb jest szeroko eksplorowanym tematem na polu psychologii poznania matematycznego (*mathematical cognition*; przegląd: Wood, Willmes, Nuerk, Fischer 2008; Hubbard, Piazza, Pinel, Dehaene 2005; prace w języku polskim: Cipora i Nęcka, w druku; Mackiewicz 2012), a wykorzystanie wyników tych badań w edukacji matematycznej wydaje się być naturalne. Można wskazać trzy możliwe obszary wykorzystania badań z tego obszaru i ich wyników: (1) diagnoza problemów i zaburzeń w nabywaniu kompetencji matematycznych; (2) ocena kompetencji matematycznych uczniów; (3) zwiększanie efektywności nauczania matematyki, zwłaszcza w początkowych etapach kształcenia.

## Przestrzenny komponent reprezentacji liczb – zarys badań

Systematyczne badania nad reprezentacją liczb rozpoczął już w XIX w. Galton (1880). Badał on przy pomocy kwestionariuszy to, w jaki sposób osoby badane wyobrażają sobie najróżniejsze obiekty. Część osób określała, że liczby wyobraża sobie jako umieszczone w przestrzeni, najczęściej na linii (czasami prostej, częściej zakrzywionej). Osoby badane wizualizowały również inne kategorie, których przedstawiciele można uporządkować zgodnie z określoną kolejnością (daty, dni tygodnia, miesiące) na różne sposoby, często wiążąc je z konkretnym miejscem w przestrzeni. Kolejne dowody na to, że liczby pomimo tego, że stanowią typowe wartości proporcjonalne, mogą być reprezentowane w sposób analogowy (na przykład jako umieszczone na linii) przedstawili Moyer i Landauer (1967). Wykazali oni, że czas porównywania dwóch liczb jest zależny od różnicy ich wartości. Innymi słowy, im bardziej różnią się wartości porównywanych liczb, tym mniej czasu zajmuje badanym ich porównanie. Zjawisko to jest analogiczne do uzyskanego przez badaczy działających w nurcie Gestalt efektu dystansu. Efekt ten występował w przypadku obiektów różniących się pod względem fizycznych charakterystyk (na przykład długości odcinków czy wielkości pola powierzchni), stąd też nowe zjawisko nazwano efektem dystansu numerycznego. Porównanie wyników Moyera i Landauera (1967) z odkryciami Gestaltystów wskazuje wyraźnie, że liczby nie są reprezentowane w sposób, w jaki są traktowane w twierdzeniach matematycznych, gdzie tożsamość ma charakter zero jedynkowy (dwie liczby są równe lub różne; por. Cohen Kadosh, Lammertyn, Izard 2008). Restle (1970) jest zdania, że owa analogowa reprezentacja jest zorganizowana liniowo. Używa on przyjętego przez późniejszych badaczy terminu *mentalna oś liczbowa*.

Punkty na mentalnej osi liczbowej nie są rozmieszczone liniowo, a logarytmicznie. Dowodem na takie uporządkowanie jest m.in. efekt rozmiaru. Osobom badanym łatwiej jest (czasy reakcji są krótsze, a proporcja błędów mniejsza) porównywać ze sobą małe liczby niż duże liczby, mimo tego, że bezwzględna różnica między nimi jest taka sama. Ten sam efekt można zaobserwować zarówno dla zapisu cyfrowego jak i dla zbiorów elementów (Dehaene, Dupoux, Mehler 1990; przegląd różnych modeli reprezentacji liczb: Brysbaert 1995; Fayol i Seron 2005). Jak postuluje Dehaene (2001) efekt ten wynika stąd, że ludzie jako gatunek posiadają ewolucyjne

mechanizmy szacowania i operowania na liczebnościach zwane instynktem numerycznym (*number sense*). Edukacja matematyczna bazuje na pierwotnych, niedokładnych reprezentacjach i je rozwija. Niedokładne szacunkowe reprezentacje liczebności zostają w toku kształcenia połączone z konkretnymi etykietami wizualnymi (cyfry i liczebniki) oraz dźwiękowymi (Dehaene 2001).

Związki liczb z przestrzenią przy użyciu metody chronometrycznej wykazali Dehaene, Bossini i Giroux (1993). Udowodnili oni, że reakcje na liczby o większej wartości są szybsze po prawej stronie ciała, natomiast reakcje na liczby o małych wartościach są szybsze po stronie lewej. Efekt ten występuje nawet wtedy, gdy wartość liczby nie jest czynnikiem decydującym o tym, jaką osoba badana ma wykonać reakcję (sposób reagowania może zależeć na przykład od parzystości prezentowanej liczby, a nawet tego, czy jest ona napisana prostą czcionką czy kursywą; Lammertyn, Fias, Lauwereyns 2002). Zadaniem, w którym wielkość liczby stanowi kryterium reakcji i w którym również obserwowany jest powyższy efekt, jest porównywanie prezentowanej liczby ze stałym lub zmieniającym się z próby na próbę kryterium. Na określenie opisywanego tu zjawiska używa się terminu efekt SNARC (*Spatial Numerical Association of Response Codes*). Jego polskie tłumaczenie „zależność przestrzenna między liczbą a rodzajem odpowiedzi” proponuje Mackiewicz (2012). Jedno z podstawowych wyjaśnień tego efektu odnosi się do hipotezy mentalnej osi liczbowej, która jest zorientowana zgodnie z kierunkiem pisania (por. Dehaene i wsp. 1993). W związku z tym w kulturach, w których obowiązuje zapis od prawej do lewej strony, kierunek efektu SNARC jest odwrócony (por. Zebian 2005). Wyniki tych badań zdają się wspierać twierdzenie na temat analogowej, liniowej organizacji reprezentacji liczb, dając dodatkowo wskazówkę na temat tego, jaki jest kierunek mentalnej osi liczbowej.

O potencjalnych walorach diagnostycznych efektu SNARC świadczyć może bardzo duże różnicowanie indywidualne w zakresie tego zjawiska. Sam SNARC występuje u około 70% osób badanych (por. Cipora i Nęcka, w druku). W literaturze przedmiotu można znaleźć sugestie, że SNARC jest słabszy u osób biegłych w zakresie matematyki (Dehaene i wsp. 1993 eksp. 1, Fischer i Rottmann eksp. 1). Niemniej jednak różnice te są tendencją i nie osiągają istotności statystycznej. Badanie z udziałem znacznie większej liczby osób badanych i wykorzystaniem bardziej rzetelnego zadania nie wykazało związków między poziomem kompetencji w zakresie matematyki, a wielkością efektu SNARC (Cipora, Czernecka, Żelechowska i Szewczyk 2011).

Aktywacja przestrzennej reprezentacji nie jest uzależniona od motoryki rąk i następuje automatycznie. Fischer, Castell, Dodd i Pratt (2003) wykazali, że spostrzeganie centralnie prezentowanej liczby powoduje ukryte przesunięcie uwagi (*covert shift of attention*), którego kierunek jest zależny od wartości tej liczby. Liczby o dużej wartości przyspieszały detekcję bodźca wzrokowego pojawiającego się po prawej stronie, a liczby o małej wartości – bodźca po lewej stronie. Działo się tak pomimo tego, że liczby nie miały wartości predykcyjnej dla późniejszej lokalizacji bodźca. W późniejszych badaniach Fischer, Ellis, Cangelosi, Mychakov (2011) wykazali, że prezentacja liczby prowadzi do samoistnych mikrosakkad w odpowiednim kierunku (w lewo po prezentacji liczby o małej wartości, w prawo po prezentacji liczby o dużej wartości).

Poza reprezentacjami samych liczb, wykazano również, że wykonywanie szacunkowych obliczeń w zależności od rodzaju operacji prowadzi do różnego rodzaju błędów (Knops, Viarouge, Dehaene 2009). Odejmowanie prowadzi do niedoszacowania wyniku, a dodawanie do jego przeszacowania. Efekt ten występował zarówno w przypadku operowania zapisem symbolicznym (cyfry arabskie), jak i niewerbalnym (liczebności zbioru). Wykazano również, że podczas obliczeń umysłowych aktywowane są części mózgu odpowiedzialne za ruch oczu. Wzorec pobudzenia tych ośrodków dla dodawania jest podobny do wzorca ruchu w prawo, a dla odejmowania – ruchu w lewo (Knops, Thirion, Hubbard, Michel, Dehaene 2009).

Analogiczne efekty można zaobserwować w zadaniach typu *line bisection*. Prosi się w nich osoby badane o podzielenie na pół prezentowanych odcinków złożonych z liter bądź cyfr. Jeśli linia składa się z cyfr o małych wartościach, osoby badane wskazują jako środek miejsce znajdujące się po lewej, a gdy linia składa się z cyfr o dużych wartościach wskazują miejsce umieszczone bardziej po prawej stronie w stosunku do wskazań z warunku kontrolnego jakim jest linia składająca się np. z liter „x” (por. Hubbard i wsp. 2005).

Na podstawie przedstawionych wyżej wyników badań można wnioskować, że aktywacja przestrzennego komponentu reprezentacji liczb jest naturalnym aspektem przetwarzania informacji związanych z liczebnością. Szczególnie istotne znaczenie ma tutaj obserwacja, że występuje ona w sytuacjach, w których powiązanie konkretnych wartości z przestrzenią nie zostaje bezpośrednio wzbudzone przez instrukcję zadania.

Istnienie reprezentacji przestrzennej, zgodnie z argumentacją Dehaene’a (2011) można tłumaczyć w ten sposób, że ludzki mózg nie jest ewolucyjnie przystosowany do operowania na abstrakcyjnym materiale jakim są liczby. Nie wykształciły się bowiem struktury, które mogłyby odpowiadać za operowanie na takim materiale. W związku z tym, do przetwarzania tego rodzaju informacji wykorzystywane są struktury odpowiadające za przetwarzanie informacji o przestrzeni, zwłaszcza w rejonie płatów ciemieniowych mózgu. Dehaene, Piazza, Pinel, Cohen (2005) wskazują, że najbardziej zaangażowane w operacje związane z przetwarzaniem informacji liczbowych są obwody neuronowe mieszczące się w środkowej części bruzdy śródciemieniowej (*Horizontal Intraparietal Sulcus HIPS*).

Z drugiej strony należy zaznaczyć, że przestrzenny komponent reprezentacji liczb nie jest trwały i niezmienny i do pewnego stopnia jest uzależniony od warunków zadania. Przykładowo, w zależności od tego czy liczby 4 i 5 pojawiają się w zestawie 1–5 czy w zestawie 4–9, wzorce czasów reakcji dla tych liczb mogą być charakterystyczne dla dużych bądź dla małych liczb (przewaga prawej bądź lewej ręki; Dehaene i wsp. 1993, eksp. 3). Ponadto, w pewnych warunkach eksperymentalnych możliwe jest tymczasowe odwrócenie kierunku efektu SNARC (Bächtold, Baumüller, Brugger 1998), osłabienie (Fischer, Mills, Shaki 2010), czy też uzależnienie jego kierunku od pozycji danej liczby w zestawie bodźców, a nie jej wielkości liczbowej (van Dijck i Fias 2011). Jak konkludują Satens i Gevers (2008) z efektu SNARC nie można wnioskować na temat istnienia mentalnej osi liczbowej. Zdaniem tych autorów, w czasie wykonywania zadania, w którym można zaobserwować efekt SNARC, bodźce są kategoryzowane dychotomicznie (np. duży versus mały itp.)

i dopiero efekt tej kategoryzacji jest mapowany przestrzennie. Podobnego zdania są też Gevers, Verguts, Reynvoet, Caessens, Fias (2006).

### Przestrzenny komponent reprezentacji liczb w perspektywie rozwojowej

Patro i Haman (2012) wykazali przestrzenne mapowanie liczb już u dzieci w wieku przedszkolnym, nie umiejących jeszcze ani czytać ani liczyć. Dzieci (średnia wieku 4 lata) reagowały szybciej na mniej liczne zbiory, gdy te znajdowały się po lewej stronie, podczas gdy na bardziej liczne zbiory reagowały szybciej, gdy te znajdowały się po prawej stronie. Na podstawie wyników tego badania można przypuszczać, że kształtowanie przestrzennych reprezentacji nie jest nierozłącznie związane z kierunkiem czytania oraz czynnikami związanymi z edukacją matematyczną.

Efekt SNARC zaobserwować można już u dzieci w pierwszej klasie szkoły podstawowej (w wieku 7 lat), co wykazali van Galen i Reitsma (2008). Używali oni zadania odnoszącego się wprost do wielkości liczby. Tym samym podważyli wcześniejsze ustalenia, zgodnie z którymi SNARC pojawia się dopiero w wieku 9 lat (Berch, Foley, Hill, Ryan 1999). Berch i wsp. stosowali bowiem ocenę parzystości nie odnoszącą się wprost do wartości liczbowej. W związku z tym van Galen i Reitsma (2008) twierdzą, że wiek podany przez Bercha i wsp. (1999) to w rzeczywistości okres, w którym na skutek wzmożonego kontaktu z liczbami pojawia się automatyczna aktywacja reprezentacji wielkości liczbowej. Podsumowanie wyników przedstawionych wyżej badań zamieszczono w tabeli 1.

**Tabela 1.** Rozwój efektu SNARC w okresie szkoły podstawowej.

Opracowanie własne na podstawie Berch i wsp. (1999) oraz van Galen i Reitsma (2008)

Klasa	Średni wiek	SNARC – porównywanie wielkości (van Galen i Reitsma 2008)	SNARC – ocena parzystości (Berch i wsp. 1999)
1	7;0 lat	TAK	–
2	8;0 lat / 7;9 lat	TAK	NIE
3	9;2 lat	TAK	TAK
4	9;10 lat	–	TAK
6	11;8 lat	–	TAK (osłabiony)
8	13;7 lat	–	TAK (osłabiony)

Wydaje się, że w przypadku wykonywania konkretnego zadania związanego z miejscem danej liczby na kontinuum mapowanie przestrzenne pojawia się bardzo wcześnie. Automatyczne mapowanie liczb w przestrzeni bez względu na rodzaj zadania pojawia się później. Zaznaczyć jednak należy, że już Berch i wsp. (1999) nie odrzucają możliwości przestrzennego mapowania reprezentacji wielkości liczby u młodszych dzieci.

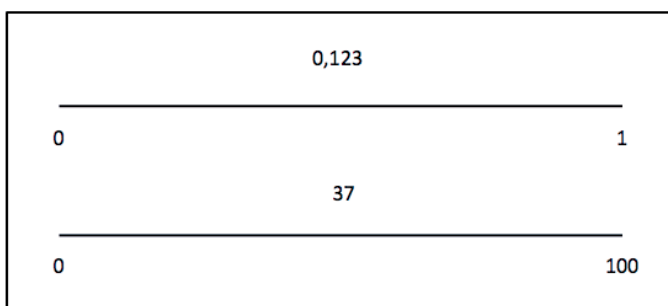
Przestrzenny komponent reprezentacji liczb nie zanika wraz z osiągnięciem dorosłości. Człowiek osiągając stadium operacji formalnych, w którym zgodnie z teorią Piageta (por. Kielar-Turska 2000) powinien być zdolny wykonywać operacje na materiale symbolicznym, teoretycznie nie potrzebuje już reprezentacji przestrzennych. Wyniki badań wskazują wręcz na przeciwną tendencję. W okresie dorosłości wraz z wiekiem siła efektu SNARC wzrasta (Wood i wsp. 2008). Zjawisko to można tłumaczyć przynajmniej na 3 sposoby. Po pierwsze, wzrasta doświadczenie

w łączeniu liczb z przestrzenią. Ma to miejsce poprzez kontakt z różnego rodzaju graficznie przedstawionymi osiami liczbowymi i innymi formami zapisu, gdzie małe liczby występują po lewej stronie, podczas gdy duże liczby po prawej. Po drugie, z wiekiem zmniejsza się sprawność funkcji kontrolnych. W związku z tym osłabia się również mechanizm hamowania narzucającej się reakcji. Co za tym idzie wydłużają się czasy reakcji w warunku, w którym osoba badana ma zareagować w sposób niezgodny z naturalnym mapowaniem, czyli w odpowiedzi na liczbę małą zareagować przyciskiem po prawej stronie, lub w odpowiedzi na liczbę dużą – przyciskiem po lewej. Po trzecie, z wiekiem wzrastają czasy reakcji. Jak wykazali Gevers i wsp. (2006), efekt SNARC jest silniejszy u osób, które reagują wolniej. Wyniki te potwierdza również Wood i wsp. (2008).

Warto zaznaczyć, że wiedza matematyczna w okresie przedszkolnym, również wiążąca się z wiązaniem liczebności obiektów z konkretnymi cyframi, stanowi bardzo dobry predyktor późniejszych osiągnięć szkolnych w zakresie matematyki, nawet na poziomie szkoły średniej. Co więcej pozwala ona niemal dwukrotnie lepiej przewidywać późniejsze osiągnięcia matematyczne, niż znajomość liter późniejszą sprawność czytania (Siegler 2009).

Późny wiek przedszkolny i wczesny szkolny stanowi okres krytyczny, w którym kształtowane jest pojęcie liczby oraz liczebności. Dziecko zaczyna rozumieć, że cyfrom odpowiadają konkretne liczebności (Wilson, Dehaene, Pinel, Revkin, Cohen, Cohen 2006a). W tym okresie również dzieci są szczególnie wrażliwe na interwencje mające na celu wspomaganie rozwoju.

W zakresie związków liczb z przestrzenią, w tym właśnie okresie naturalna logarytmiczna reprezentacja wielkości liczbowych jest systematycznie zastępowana przez reprezentację liniową. Sposób organizacji takiej reprezentacji bardzo łatwo mierzyć zadaniem szacowania na osi liczbowej. Osoba badana ma narysowaną oś liczbową z oznaczonymi końcami i ma na niej zaznaczyć odpowiednią wartość (jak na rys. 1, por. też Siegler i Ramani 2011).



**Rycina 1.** Szacowanie na osi liczbowej (*number line estimation*) – przykładowe próby. Zadanie osoby badanej polega na tym, żeby możliwie jak najdokładniej zaznaczyć na osi podaną wyżej wartość. Opracowanie własne na podstawie Schneider i wsp. (2009)

Poprawność i liniowość oszacowań wzrasta z wiekiem (por. Fischer, Moeller, Bientzle, Cress i Nuerk 2010). W czasie rozwoju u tego samego dziecka reprezentacja liczb z zakresu 1–10 może mieć charakter liniowy, a liczb z zakresu 1–1000 nadal logarytmiczny (Siegler 2009). Co więcej, liniowość mentalnej osi liczbowej wiąże

się z poziomem osiągnięć matematycznych w zakresie arytymetyki, efektywnością zapamiętywania liczb, czy ogólnymi wynikami testów matematycznych. Korelacje osiągają wartości 0,5–0,6 (por. Siegler 2009, Siegler i Ramani 2011). Można znaleźć również dowody na to, że zdolności szacowania na osi liczbowej są przyczynowo związane z bardziej złożonymi umiejętnościami (por. Siegler i Booth 2005).

### **Możliwości wykorzystania przestrzennego komponentu reprezentacji liczb w nauczaniu matematyki**

Jak wspomniano w początkowej części pracy, można wyróżnić 3 potencjalne zastosowania wyników badań nad przestrzennym komponentem reprezentacji liczb w nauczaniu matematyki: (1) diagnoza problemów z uczeniem się; (2) ocena kompetencji matematycznych uczniów; (3) tworzenie narzędzi wspomagania rozwoju kompetencji matematycznych u dzieci. Zostaną one omówione w dalszej części niniejszej pracy.

#### **Diagnoza trudności w uczeniu się i ocena umiejętności matematycznych**

Bachot, Gevers, Fias i Roeyers (2005) wykazali, że efekt SNARC nie występuje u dzieci z zaburzeniem wzrokowo-przestrzennym (*VSD, visuospatial disability*). Pojawił się natomiast u nich efekt dystansu. Autorzy konkludują, że zaburzenie zdolności reprezentowania wartości liczbowych na mentalnej osi liczbowej może stanowić mediator związku między deficytami wzrokowo-przestrzennymi i deficytami w zakresie zdolności do operowania liczbami.

Wynik powyższego badania sugeruje, że efekt SNARC i jego wielkość mogą być związane z poziomem kompetencji w matematyce. Być może w okresie dzieciństwa i adolescencji związki te są silniejsze niż w wieku dorosłym. Temat związku efektu SNARC oraz efektu dystansu numerycznego z poziomem kompetencji w matematyce został podjęty w badaniach Schneidera, Grabnera i Paetscha (2009). Badacze ci sprawdzali związki między poziomem osiągnięć szkolnych z matematyki u dzieci w klasach 5 i 6 a: (1) efektem dystansu; (2) efektem SNARC; (3) wiedzą na temat ułamków dziesiętnych; (4) inteligencją numeryczną. Wyniki tego zakrojonego na dużą skalę badania ( $N = 429$ ) wskazują, że wiedza matematyczna, inteligencja numeryczna i zdolność szacowania na osi liczbowej są dobrymi predyktorami osiągnięć w zakresie matematyki, natomiast efekt dystansu i efekt SNARC nie są niemal w ogóle z nim związane. Autorzy pracy dyskutują ze stwierdzeniem Dehaene'a (2001), iż poziom kompetencji i osiągnięć w zakresie matematyki jest zdeterminowany tym, jak bardzo w danej kulturze liczby związane są z przestrzenią. Zdaniem autorów, jeśli powiązanie liczb z przestrzenią jest potrzebne, to tylko na niższych poziomach rozwoju kompetencji matematycznych, zwłaszcza, gdy operacje wykonywane są głównie na liczbach naturalnych. Później, gdy konieczne jest operowanie ułamkami, kluczowego znaczenia nabierają konkretna wiedza oraz zdolności poprawnego szacowania.

Choć szacowanie na osi liczbowej stanowi dobry predyktor innych umiejętności matematycznych, wydaje się, że jego przydatność diagnostyczna na obecnym etapie jest ograniczona. Pomimo stosunkowo wysokich korelacji z innymi miarami kompetencji matematycznych, rzetelność ich oceny na podstawie poprawności szacowania na osi liczbowej prawdopodobnie nie jest zbyt wysoka. Tym bardziej

problematyczne wydaje się porównanie dopasowania odpowiedzi danej osoby do funkcji liniowej i logarytmicznej. W obu przypadkach są one dość wysokie ( $R^2$  powyżej 0,8; por. Siegler i Booth 2005). Tym samym ciężko o kategorię rozstrzygnięcia w zakresie diagnozy indywidualnej. Aby tego typu rozwiązania były możliwe, konieczne jest opracowanie zadań o odpowiednich właściwościach psychometrycznych.

### **Wczesna interwencja i wspomaganie rozwoju kompetencji matematycznych**

Pierwszy rodzaj interwencji można zaczerpnąć z badania Fischer i wsp. (2010), w którym to dzieci w wieku przedszkolnym wykonywały zadanie wymagające wiązania liczb z przestrzenią. Polegało ono na porównywaniu prezentowanych liczb lub liczebności (zbiory) z kryterium np. liczbą 5. W warunkach eksperymentalnych dzieci miały za zadanie skakać w lewo (jeśli liczba była mniejsza od kryterium) lub w prawo (jeśli była większa od kryterium). Wykorzystano cyfrową matę, przy pomocy której rejestrowano ruchy dzieci. W warunkach kontrolnych dzieci wykonywały na dotykowym ekranie komputera podobne zadanie<sup>2</sup>. W każdym warunku trening obejmował 3 sesje po 64–72 próby. Jedna sesja trwała około 15 minut. Przed pierwszym rodzajem treningu, po nim oraz po drugim rodzaju treningu mierzono zdolności matematyczne. Okazało się, że ćwiczenia angażujące motorykę całego ciała prowadzą do poprawy poziomu szacowania na osi liczbowej oraz zdolności liczenia takich jak liczenie dwójkami, liczenie do tyłu itp. Takiej poprawy nie zaobserwowano w grupie kontrolnej. Co szczególnie warto odnotować, liczenie dwójkami czy liczenie do tyłu nie odnoszą się wprost do połączenia wartości liczbowych z przestrzenią. Niestety, nadal kwestią otwartą pozostaje trwałość skutków takiego oddziaływania, gdyż autorzy badania nie przeprowadzili odroczonego posttestu.

Co warto podkreślić, przeprowadzenie opisanego wyżej treningu jest bardzo proste i nie wymaga zaangażowania dużych środków. Wydaje się zatem zasadne rozważenie możliwości wprowadzenia tego rodzaju interwencji w edukacji przedszkolnej. Tego typu trening może stać się elementem standardowych zajęć ruchowych będących stałym elementem zajęć przedszkolnych. Wymagałoby to pewnych modyfikacji procedury zastosowanej w oryginalnym badaniu wynikających z kwestii organizacyjnych i logistycznych. Propozycję takich modyfikacji przedstawiono poniżej.

W oryginalnym badaniu bodźce były prezentowane na podłodze bezpośrednio przed dzieckiem (sam trening był przeprowadzany indywidualnie). W warunkach przedszkola można stosować rzutnik multimedialny i prezentować bodźce z przodu. Trening może być przeprowadzany grupowo. Niemniej jednak w warunkach treningu grupowego należałoby rozważyć zwiększenie liczby treningów.

Ciekawą możliwością wykorzystania wyników badań psychologicznych i tych prowadzonych w zakresie neuronauki stanowią adaptacyjne gry komputerowe. Umożliwiają one intensywny trening zdolności, będących podstawą kształtowania się kompetencji matematycznych. Warty uwagi narzędziem tego rodzaju jest gra *The Number Race* (Wilson i wsp. 2006a). Od niedawna dostępna jest polska wersja tej gry pod tytułem *Wyścig liczb – The Number Race* (szczegółowy opis: Cipora

---

<sup>2</sup> Badanie odbywało się w układzie wewnątrzgrupowym, kolejność treningów była zbalansowana między osobami badanymi.



i Szczygieł, w recenzji). Można ją pobrać ze strony Source Forge. Poprzez bardzo dużą liczbę powtórzeń zadania porównywania liczb i liczebności gra wzmacnia powiązania między różnymi formami zapisu liczebności (zbiory elementów, cyfry arabskie, liczebniki w formie dźwiękowej), ćwiczy proste operacje arytmetyczne oraz sprzyja ich automatyzacji. Dodatkowo wzmacniane są powiązania liczb z przestrzenią. Dużym walorem gry jest to, że dzięki tzw. adaptacyjnemu algorytmowi dostosowuje aktualny poziom trudności zadań do poziomu umiejętności gracza. Gra jest przeznaczona dla dzieci w późnym wieku przedszkolnym i wczesnoszkolnym. *The Number Race* została opracowana jako narzędzie wczesnej interwencji w dyskalkulii rozwojowej, niemniej jednak można ją wykorzystywać do wspomagania rozwoju kompetencji matematycznych u dzieci nie przejawiających specyficznych trudności w uczeniu się matematyki (Wilson i wsp. 2006a; Wilson, Revkin, Cohen, Cohen, Dehaene 2006b; Wilson, Dehaene, Fayol 2009; Räsänen, Salminen, Wilson, Aunio, Dehaene 2009; przegląd wyników dotychczas przeprowadzonych badań skuteczności gry: Cipora i Szczygieł, w recenzji). Jak wykazują wyniki badań z wykorzystaniem podobnego narzędzia, gry *Rescue Calcularis* (Kucian i wsp. 2011), korzystanie z gry przynosi korzystne rezultaty u wszystkich dzieci, zarówno tych, u których zdiagnozowano dyskalkulię rozwojową jak i u zdrowych dzieci z grupy kontrolnej. Co więcej, zmiany obserwowano nie tylko na poziomie behawioralnym (rozwiązywanie problemów matematycznych), ale również na poziomie wzorca aktywności mózgu. Stwierdzono wzrost aktywacji struktur wyspecjalizowanych w przetwarzaniu liczb, a spadek aktywności tych, które są odpowiedzialne za ogólne procesy kontroli poznawczej.

Jako kolejny rodzaj interwencji Siegler (2009) wskazuje gry planszowe. Podobnie jak w standardowych grach tego rodzaju, dziecko losuje liczbę i przemieszcza się o odpowiednią liczbę pól na planszy. Gra pomaga wykształcić liniową reprezentację liczb, która zastępuje naturalnie występującą reprezentację uporządkowaną logarytmicznie. W grze, pole zawierające każdą liczbę ma tę samą wielkość, a wartość liczbowa danego pola jest wprost proporcjonalna do liczby ruchów i wypowiedzianych nazw liczb koniecznych by do niego dotrzeć czy też do czasu jaki upłynął od rozpoczęcia rozgrywki. Najlepsze rezultaty osiągnęto w przypadku liniowego uporządkowania planszy (Siegler i Ramani 2009). Trening z wykorzystaniem gier planszowych jest bardzo prosty i tani (w badaniach interwencja obejmowała zaledwie 4 sesje gry prowadzone indywidualnie z eksperymentatorem, każda po około 15–20 minut). Gra/trening przynosi bardzo dobre rezultaty, w zakresie zarówno szacowania na osi liczbowej jak i porównywania liczb, liczenia, czy identyfikacji cyfr. Z interwencji tego rodzaju większe korzyści odnoszą dzieci, które początkowo przejawiają większe trudności w opanowywaniu podstaw matematyki (Ramani i Siegler 2011). Co więcej, efekty interwencji obserwowano nawet 2 miesiące po jej zakończeniu (Ramani i Siegler 2008). Podobne wyniki uzyskano również w badaniach prowadzonych w Europie (Whyte i Bull 2008). Dostępne do bezpłatnego wykorzystania są polskie odpowiedniki gier zastosowanych w cytowanych wyżej badaniach Sieglera i współpracowników, wraz z gotowym do wydrukowania zestawem materiałów.

## Podsumowanie

Perspektywy wykorzystania badań nad przestrzennym komponentem reprezentacji liczb w celach diagnostycznych i do oceny zdolności matematycznych, przynajmniej na obecnym etapie wydają się być ograniczone. Problemem pozostaje opracowanie zadań o właściwościach psychometrycznych odpowiednich do prowadzenia indywidualnej diagnozy. Ocenianie sprawności instynktu numerycznego i wykorzystanie go jako składnika oceny z matematyki wydaje się bardzo kontrowersyjne. Zdolności te, są determinowane przez bardzo wiele czynników środowiskowych, zwłaszcza w okresie przedszkolnym. Siegler (2009) wymienia między innymi dużą dysproporcję w zakresie tych zdolności w zależności od statusu społeczno-ekonomicznego rodziny (por. też: Wilson i wsp. 2006a i 2006b; Wilson i wsp. 2009; Räsänen i wsp. 2009).

Najbardziej obiecujący i różnorodny wydaje się trzeci obszar zastosowania a mianowicie trening zdolności matematycznych, zwłaszcza we wczesnych etapach edukacji, kiedy to kształtowane jest pojęcie liczby. Opisane wyżej interwencje są stosunkowo łatwe do przeprowadzenia, nie wymagają specjalistycznego przygotowania ze strony osób, które mają je prowadzić. Mogą one być prowadzone zarówno na terenie szkoły/przedszkola jak również w formie indywidualnej pracy z dzieckiem w domu. Co więcej, ich przeprowadzenie nie wymaga poświęcenia dużej ilości czasu ani innych zasobów. Potrzebne materiały można darmowo pobrać z Internetu.

Wymienione wyżej treningi są dla dzieci atrakcyjne (angażowanie motoryki całego ciała, aktywność ruchowa i ludyczny charakter, możliwość wspólnej zabawy z osobą dorosłą, czy korzystanie z gry komputerowej). Dodatkowo wyniki badań nad skutecznością takich treningów wskazują zarówno na zasadność tego rodzaju interwencji jak i skłaniają do tego, by badania nad nimi były kontynuowane. Warto by dalsze badania mające na celu weryfikację efektywności wyżej opisanych metod i im podobnych oraz ich udoskonalenie zostały podjęte również przez polskich badaczy. Ważne jest również, aby wiedza na temat już dostępnych narzędzi była bardziej powszechna wśród praktyków.

## Bibliografia

- Bachot, J., Gevers, W., Fias, W. & Roeyers, H. (2005). Number sense in children with visuo-spatial disabilities: orientation of the mental number line. *Psychology Science*, 47(1), 172–183.
- Bächtold, D., Baumüller, M. & Brugger, P. (1998). Stimulus–response compatibility in representational space. *Neuropsychologia*, 36, 731–735.
- Berch, D. B., Foley, E. J., Hill, R. J. & Ryan, P. M. (1999). Extracting parity and magnitude from Arabic numerals: Developmental changes in number processing and mental representation. *Journal of Experimental Child Psychology*, 74, 286–308.
- Brysbaert, M. (1995). Arabic number reading: On the nature of the numerical scale and the origin of phonological recoding. *Journal of Experimental Psychology: General*, 124, 434–452.
- Cipora, K., Czernecka, K., Żelechowska, D. & Szewczyk, J. (2011). *Sources of individual differences in the magnitude of the SNARC effect*. International Society for the Study of Individual Differences, London, Wielka Brytania. Poster.

- Cipora, K. & Nęcka, E. (w druku). Kontinua a przestrzeń – przegląd badań nad przestrzennym komponentem poznawczej reprezentacji wielkości i nasilenia. *Psychologia-Etologia-Genetyka*.
- Cipora, K. & Szczygieł, M. (w recenzji). „Wyścig Liczb – The Number Race” – polska adaptacja narzędzia wczesnej interwencji w dyskalkulii rozwojowej oraz wspomaganie rozwoju kompetencji matematycznych.
- Cohen Kadosh, R., Lammertyn, J. & Izard, V. (2008). Are numbers special? An overview of chronometric, neuroimaging, developmental and comparative studies of magnitude representation. *Progress in Neurobiology*, 84(2), 132–147.
- Dehaene, S. (2001). Precise of the number sense. *Mind & Language*, 16, 16–36.
- Dehaene, S. (2011). *The number sense. How the mind creates mathematics?* Nowy Jork: Oxford University Press.
- Dehaene, S., Dupoux, E. & Mehler, J. (1990). Is numerical comparison digital: Analogical and symbolic effects in two-digit number comparison. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, 16, 626–641.
- Dehaene, S., Bossini, S. & Giraux, P. (1993). The Mental Representation of Parity and Number Magnitude. *Journal of Experimental Psychology: General*, 122, 371–396.
- Dehaene, S., Piazza, M., Pinel, P. & Cohen, L. (2005). Three Parietal Circuits for Number Processing. In J. I. D. Campbell (Ed.), *Handbook of Mathematical Cognition* (pp. 433–453). New York: Psychology Press.
- Fayol, M. & Seron, X. (2005). About numerical representations: insights from neuropsychological, experimental and developmental studies. In J. B. Campbell (Ed.), *Handbook of Mathematical Cognition* (pp. 3–22). New York: Psychology Press.
- Fischer, M. H., Castel, A. D., Dodd, M. D. & Pratt, J. (2003). Perceiving numbers causes spatial shifts of attention. *Nature Neuroscience*, 6, 555–556.
- Fischer, M. H., Ellis, R., Cangelosi, A. & Mychakov, A. (2011). *The oculomotor resonance effect during auditory number comprehension*. Poster zaprezentowany podczas XXIXth European Workshop on Cognitive Neuropsychology. Bressanone, Włochy.
- Fischer, M. H., Mills, R. A. & Shaki, S. (2010). How to cook a SNARC: number placement in text rapidly changes spatial-numerical associations. *Brain and cognition*, 72(3), 333–336.
- Fischer, M. & Rottmann, J. (2005). Do negative numbers have a place on the mental number line? *Psychology Science*, 47(1), 22–32.
- Fischer, U., Moeller, K., Bientzle, M., Cress, U. & Nuerk, H. C. (2011). Sensori-motor spatial training of number magnitude representation. *Psychonomic Bulletin & Review*, 18(1), 177–183.
- Galen, M. S. van, & Reitsma, P. (2008). Developing access to number magnitude: a study of the SNARC effect in 7- to 9-year-olds. *Journal of experimental child psychology*, 101(2), 99–113.
- Galton, F. (1880). Visualised numerals. *Nature*, 21, 252–256.
- Gevers, W., Verguts, T., Reynvoet, B., Caessens, B. & Fias, W. (2006). Numbers and space: A computational model of the SNARC effect. *Journal of Experimental Psychology. Human Perception and Performance*, 32, 32–44.
- Hubbard, E. M., Piazza, M., Pinel, P. & Dehaene, S. (2005). Interactions between number and space in parietal cortex. *Nature Reviews Neuroscience*, 6, 435–448.
- Kielar-Turska, M. (2000). Rozwój człowieka w pełnym cyklu życia. In J. Strelau (Ed.), *Psychologia, Podręcznik Akademicki* (pp. 285–332). Gdańsk: GWP.

- Knops, A., Thirion, B., Hubbard, E. M., Michel, V. & Dehaene, S. (2009). Recruitment of an area involved in eye movements during mental arithmetic. *Science*, 324, 5934.
- Knops, A., Viarouge, A. & Dehaene, S. (2009). Dynamic representations underlying symbolic and nonsymbolic calculation: Evidence from. *Attention, Perception & Psychophysics*, 71(4), 803–821.
- Kucian, K., Grond, U., Rotzer, S., Henzi, B., Schönmann, C., Plangger, F., Gälli, M., Martin, E., von Aster, M. (2011). Mental number line training in children with developmental dyscalculia. *NeuroImage*, 57(3), 782–795.
- Lammertyn, J., Fias, W. & Lauwereyns, J. (2002). Semantic Influences On Feature-Based Attention Due To Overlap Of Neural Circuits. *Cortex*, 38, 878–882.
- Mackiewicz, R. (2012). Liczby w decyzjach ekonomicznych: instynkt numeryczny i wrażliwość cenowa. In A. Falkowski & T. Zaleśkiewicz (Eds.), *Psychologia poznawcza w praktyce. Ekonomia, Biznes, Polityka* (pp. 137–185). Warszawa: PWN.
- Moyer, R. S. & Landauer, T. K. (1967). Time required for judgments of numerical inequality. *Nature*, 215, 1519–1520.
- Patro, K. & Haman, M. (2012). The spatial–numerical congruity effect in preschoolers. *Journal of Experimental Child Psychology*, 111(3), 534–542.
- Ramani, G. B. & Siegler, R. S. (2008). Promoting Broad and Stable Improvements in Low-Income Children's Numerical Knowledge Through Playing Number Board Games. *Child Development*, 79(2), 375–394.
- Ramani, G. B. & Siegler, R. S. (2011). Reducing the gap in numerical knowledge between low- and middle-income preschoolers. *Journal of Applied Developmental Psychology*, 32(3), 146–159.
- Räsänen, P., Salminen, J., Wilson, A. J., Aunio, P. & Dehaene, S. (2009). Computer-assisted intervention for children with low numeracy skills. *Cognitive Development*, 24(4), 450–472.
- Restle, F. (1970). Speed of adding and comparing numbers. *Journal of Experimental Psychology*, 95, 437–444.
- Santens, S. & Gevers, W. (2008). The SNARC effect does not imply a mental number line. *Cognition*, 108(1), 263–270.
- Schneider, M., Grabner, R. H. & Paetsch, J. (2009). Mental number line, number line estimation, and mathematical achievement: Their interrelations in grades 5 and 6. *Journal of Educational Psychology*, 101(2), 359–372.
- Siegler, R. S. (2009). Improving the numerical understanding of children from low-income families. *Child Development Perspectives*, 3, 118–124.
- Siegler, R. S. & Booth, J. L. (2005). Development of numerical estimation: A review. In J. B. Campbell (Ed.), *Handbook of Mathematical Cognition* (pp. 197–212). New York: Psychology Press.
- Siegler, R. S. & Ramani, G. B. (2009). Playing linear number board games – but not circular ones – improves low-income preschoolers' numerical understanding. *Journal of Educational Psychology*, 101, 545–560.
- Siegler, R. S. & Ramani, G. B. (2011). Improving Low-Income Children's Number Sense. In S. Dehaene & E. Brannon (Eds.), *Space, Time and Number in the Brain: Searching for the Foundations of Mathematical Thought* (pp. 343–354). London, UK: Elsevier.
- van Dijck, J.-P. & Fias, W. (2011). A working memory account for spatial-numerical associations. *Cognition*, 119(1), 114–119.

- Whyte, J. C. & Bull, R. (2008). Number games, magnitude representation, and basic number skills in preschoolers. *Developmental psychology*, 44(2), 588–596.
- Wilson, A. J., Dehaene, S., Pinel, P., Revkin, S. K., Cohen, L. & Cohen, D. (2006a). Principles underlying the design of “the number race”, an adaptive computer game for remediation of dyscalculia. *Behavioural and Brain Functioning*, 2, 19.
- Wilson, A. J., Revkin, S. K., Cohen, D., Cohen, L. & Dehaene, S. (2006b). An open trial assessment of “The Number Race”, an adaptive computer game for remediation of dyscalculia. *Behavioral and brain functions*, 2, 20.
- Wilson, A. J., Dehaene, S. & Fayol, M. (2009). Effects of an Adaptive Game Intervention on Accessing Number Sense in Kindergarten Children. *Mind, Brain and Education*, 3(4), 224–234.
- Wood, G., Willmes, K., Nuerk, H. C. & Fischer, M. H. (2008). On the cognitive link between space and number: A meta-analysis of the SNARC effect. *Psychology Science Quarterly*, 50(4), 489–525.
- Zebian, S. (2005). Linkages between number concepts, spatial thinking, and directionality of writing: The SNARC effect and the reverse SNARC effect in English and Arabic monoliterates, biliterates, and illiterate Arabic speakers. *Journal of Cognition and Culture*, 5(1–2), 165–190.