FOLIA 163

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia VI (2014)

*Jan Górowski, Adam Łomnicki*

# Trójkąty średnioboczne o środkowej mającej długość wymierną*

**Abstract.** We use the recurrence relations and the Pell equations to determine all integer triangles whose lengths are consecutive integers and the length of a fixed median is a rational number.

Trójkąt o bokach długości $x-1$, $x$, $x+1$, gdzie $x \in \mathbb{N}$ i $x \geqslant 3$ nazywamy trójkątem średniobocznym. Nazwa pochodzi zapewne stąd, że $x$ jest średnią arytmetyczną liczb $x-1$, $x+1$. Będziemy mówili, że trójka liczb $(x-1, x, x+1)$, gdzie $x \in \mathbb{N}$ i $x \geqslant 3$ wyznacza trójkąt średnioboczny o bokach długości $x-1$, $x$, $x+1$, i nazywali tę trójkę trójką średnioboczną.

Od dawna badano te trójkąty średnioboczne, których pole wyraża się liczbą wymierną (zob. Sierpiński, 1950; Bednarek, 2009), nazywane są trójkątami wymiernymi średniobocznymi.

W tej pracy wyznaczymy wszystkie te trójkąty średnioboczne, dla których dowolnie ustalona ich środkowa ma długość będącą liczbą wymierną.

Przyjmijmy oznaczenia obowiązujące w całej pracy:

$m_a$ – długość środkowej trójkąta, poprowadzonej do boku długości $a$,
$\mathbb{N}$ – zbiór liczb naturalnych, $2\mathbb{N}$ – zbiór liczb naturalnych parzystych,
$\mathbb{N}_1$ – zbiór liczb naturalnych dodatnich,
$2\mathbb{N}_1$ – zbiór liczb naturalnych parzystych dodatnich,
$\mathbb{N}_k = \mathbb{N} \setminus \{0, 1, \ldots, k-1\}$, gdzie $k$ jest liczbą naturalną dodatnią,
$\mathbb{Z}$ – zbiór liczb całkowitych, $\mathbb{Q}$ – zbiór liczb wymiernych,
$NWD(p, q)$ – największy wspólny dzielnik liczb naturalnych dodatnich $p$, $q$.

Problem 1
*Znaleźć wszystkie trójkąty średnioboczne wyznaczone przez trójki* $(x-1, x, x+1)$, *dla których* $m_x \in \mathbb{Q}$.

---

*On some intger triangles with a rational median

2010 Mathematics Subject Classification: Primary: 51M05, 51M04, 11B37
Key words and phrases: recurrence relation, Pell equation, integer triangle

Rozwiązanie problemu 1

Ze wzoru na długość środkowej trójkąta dostajemy

$$m_x = \frac{1}{2}\sqrt{2((x-1)^2 + (x+1)^2) - x^2} \quad \text{czyli} \quad 2m_x = \sqrt{3x^2 + 4}.$$

Ponieważ $3x^2 + 4$ jest liczbą naturalną, zatem $m_x \in \mathbb{Q}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\sqrt{3x^2+4}$ jest liczbą naturalną, czyli $2m_x \in \mathbb{N}$.
Przyjmijmy teraz oznaczenie $y = 2m_x$. Stąd rozwiązanie problemu 1 jest równoważne znalezieniu wszystkich rozwiązań równania Pella (zob. Song, 2006, s. 52)

$$y^2 = 3x^2 + 4 \quad \text{o niewiadomych } x, y \in \mathbb{N}_1 \tag{1}$$

spełniających warunek $x \geqslant 3$.

Przyjmijmy oznaczenia:

$F : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}^2,\ F(x,y) = (2x + y, 3x + 2y)$,
$G : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}^2,\ G(x,y) = (2x - y, -3x + 2y)$.

Zauważmy, że $F \circ G = G \circ F = Id_{\mathbb{Z}^2}$, gdzie $Id_{\mathbb{Z}^2}$ oznacza przekształcenie tożsamościowe zbioru $\mathbb{Z}^2$.

Udowodnimy teraz trzy lematy, które wykorzystamy w dalszej części rozwiązania problemu 1.

Lemat 1
*Jeśli $(x,y)$ jest rozwiązaniem równania*

$$y^2 = 3x^2 + 4 \ \textit{o niewiadomych } x, y \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

*to $F(x,y)$ oraz $G(x,y)$ są także rozwiązaniami równania* (2).

*Dowód.* Niech $(x,y)$ będzie rozwiązaniem równania (2). Wtedy $F(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ oraz $G(x,y) \in \mathbb{Z}^2$. Ponadto

$$(3x + 2y)^2 - 3(2x + y)^2 = -3x^2 + y^2.$$

Stąd $F(x,y)$ jest rozwiązaniem równania (2).

Analogicznie można uzasadnić, że jeśli $(x,y)$ jest rozwiązaniem równania (2), to $G(x,y)$ jest także rozwiązaniem równania (2).

Dowód lematu 1 został zakończony.

Lemat 2
*Jeśli $(x,y)$ jest rozwiązaniem równania* (1) *oraz $x \geqslant 8$, to $G(x,y) \in \mathbb{N}_2 \times \mathbb{N}_4$.*

*Dowód.* Niech $(x,y)$ będzie rozwiązaniem równania (1), takim, że $x \geqslant 8$. Wtedy następujące warunki są równoważne:

$$2x - y \geqslant 2,$$

$$2x - 2 \geqslant y,$$

$$4x^2 - 8x + 4 \geqslant y^2,$$
$$4x^2 - 8x + 4 \geqslant 3x^2 + 4,$$
$$x^2 - 8x \geqslant 0,$$
$$(x-4)^2 \geqslant 16,$$
$$x - 4 \geqslant 4,$$
$$x \geqslant 8.$$

Podobnie, przy uczynionych założeniach, następujące warunki są równoważne:

$$-3x + 2y \geqslant 4,$$
$$2y \geqslant 4 + 3x,$$
$$4y^2 \geqslant 16 + 24x + 9x^2,$$
$$4(3x^2 + 4) \geqslant 16 + 24x + 9x^2,$$
$$3x^2 - 24x \geqslant 0,$$
$$(x-4)^2 \geqslant 16,$$
$$x \geqslant 8.$$

To kończy dowód lematu 2.

Lemat 3
*Jeśli $(x, y)$ jest rozwiązaniem równania (1), to istnieje liczba naturalna $n$, taka że $(x, y) = F^n(2, 4)$, gdzie $F(x, y) = (2x + y, 3x + 2y)$, a $F^n$ oznacza $n$-tą iterację funkcji $F$.*

*Dowód.* Z lematu 1 wynika, że $F^n(2, 4)$ jest rozwiązaniem równania (1) dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Bezpośrednim rachunkiem można sprawdzić, że nie istnieje rozwiązanie $(x, y)$ równania (1), takie, że $x \in \{3, 4, 5, 6, 7\}$.
Stąd i z lematów 1 i 2 wnosimy, że jeśli $(x, y)$ jest rozwiązaniem równania (1), takim, że $x \geqslant 8$, to $G(x, y)$, gdzie $G(x, y) = (2x - y, -3x + 2y)$ jest rozwiązaniem równania (1). Jeśli teraz $(x', y') = G(x, y)$ oraz $x' \geqslant 8$, to $G(x', y') = (x'', y'')$ daje nowe rozwiązanie równania (1).

Kontynuując ten proces dojdziemy do rozwiązania, którego pierwsza współrzędna jest mniejsza od 8, czyli do rozwiązania $(2, 4)$. To oznacza, że $G^n(x, y) = (2, 4)$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Stąd $(x, y) = F^n(2, 4)$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Dowód lematu 3 został zakończony.

Udowodnimy teraz

Twierdzenie 1
*Jeśli*

$$x_n = \frac{(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n}{\sqrt{3}},$$
$$y_n = (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n, \ \textit{gdzie } n \in \mathbb{N}_1,$$

*to $\{(x_n, y_n) : n \in \mathbb{N}_1\}$ jest zbiorem rozwiązań równania (1).*

*Dowód.* Z lematu 3 wynika, że wszystkie rozwiązania równania (1) można otrzymać ze wzorów

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + y_n \\ y_{n+1} = 3x_n + 2y_n, \end{cases} \tag{3}$$

gdzie $n \in \mathbb{N}_1$ i $(x_1, y_1) = (2, 4)$.

Z warunków (3) otrzymujemy kolejno:

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} + y_{n+1},$$

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} + 3x_n + 2y_n,$$

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} + 3x_n + (2x_{n+1} - 4x_n),$$

$$x_{n+2} = 4x_{n+1} - x_n.$$

Ponadto $(x_2, y_2) = (8, 14)$.

Wobec tego ciąg $(x_n)$ spełnia równanie rekurencyjne:

$$x_{n+2} - 4x_{n+1} + x_n = 0 \text{ dla } n \in \mathbb{N}_1 \tag{4}$$

i warunki początkowe $x_1 = 2$, $x_2 = 8$.

Z teorii równań rekurencyjnych wiadomo, że rozwiązaniem równania rekurencyjnego (4) z warunkami $x_1 = 2$, $x_2 = 8$ jest ciąg określony wzorem

$$x_n = A(2 + \sqrt{3})^n + B(2 - \sqrt{3})^n,$$

gdzie stałe $A$, $B$ spełniają układ równań

$$\begin{cases} A(2 + \sqrt{3}) + B(2 - \sqrt{3}) = 2, \\ A(2 + \sqrt{3})^2 + B(2 - \sqrt{3})^2 = 8. \end{cases}$$

Stąd $A = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $B = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. To dowodzi, że ciąg zadany wzorem

$$x_n = \frac{(2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n}{\sqrt{3}}$$

jest rozwiązaniem równania rekurencyjnego (4), spełniającym warunki początkowe $x_1 = 2, x_2 = 8$. Podobnie wychodząc od układu (3), gdzie $(x_1, y_1) = (2, 4)$ dostajemy

$$y_{n+2} - 4y_{n+1} + y_n = 0, \tag{5}$$

gdzie $n \in \mathbb{N}_1$ oraz $y_1 = 4$, $y_2 = 14$.

Rozwiązując równanie rekurencyjne (5) z podanymi warunkami początkowymi, dostajemy $y_n = (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$, a to kończy dowód twierdzenia 1.

Z twierdzenia 1 wynika bezpośrednio rozwiązanie problemu 1.

Jeśli

$$x_n = \frac{(2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n}{\sqrt{3}},$$

$$y_n = (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n, n \in \mathbb{N}_1,$$

to trójki $(x_{n+1}-1, x_{n+1}, x_{n+1}+1)$ są wszystkimi trójkami średniobocznymi, o których mowa w problemie 1.
Ponadto $m_{x_{n+1}} = \frac{1}{2}y_{n+1}$, czyli $m_{x_{n+1}} = \frac{1}{2}((2+\sqrt{3})^{n+1} + (2-\sqrt{3})^{n+1})$.

PROBLEM 2
*Znaleźć wszystkie trójki średnioboczne $(x-1, x, x+1)$, dla których $m_{x-1} \in \mathbb{Q}$.*

PROBLEM 3
*Znaleźć wszystkie trójki średnioboczne $(x-1, x, x+1)$, dla których $m_{x+1} \in \mathbb{Q}$.*

Dla rozwiązania problemów 2 i 3 posłużymy się rozwiązaniami równania

$$y^2 = 3x^2 - 2 \text{ o niewiadomych } x, y \in \mathbb{N}_1 \tag{6}$$

Udowodnimy teraz

TWIERDZENIE 2
*Jeśli*

$$x_n = \frac{(\sqrt{3}-1)(2+\sqrt{3})^n + (\sqrt{3}+1)(2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}},$$

$$y_n = \frac{(3-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n - (3+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}},$$

*gdzie $n \in \mathbb{N}_1$, to zbiór $\{(x_n, y_n) : n \in \mathbb{N}_1\}$ jest zbiorem rozwiązań równania (6).*

*Dowód.* Niech $F(x,y) = (2x+y, 3x+2y)$, $G(x,y) = (2x-y, -3x+2y)$, gdzie $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$.

Zauważamy, że $F \circ G = Id_{\mathbb{Z}^2}$. Podobnie jak przy rozwiązaniu problemu 1 można pokazać, że jeśli $(x,y)$ jest rozwiązaniem równania

$$y^2 = 3x^2 - 2 \text{ o niewiadomych } x, y \in \mathbb{Z}, \tag{7}$$

to $(2x+y, 3x+2y)$ oraz $(2x-y, -3x+2y)$ są również rozwiązaniami równania (7). Zauważmy ponadto, że jeśli $(x,y)$ jest rozwiązaniem równania (6), to

$$(2x+y, 3x+2y) \in \mathbb{N}_1^2 \text{ i } 2x+y > x \text{ i } 3x+2y > y \text{ i } (2x+y, 3x+2y)$$

jest rozwiązaniem równania (6).

Pokażemy teraz, że jeśli $(x,y)$ jest rozwiązaniem równania (6) i $x \geqslant 2$, to $(2x-y, -3x+2y)$ jest rozwiązaniem równania (6).

Wiemy już, że $(2x-y, -3x+2y)$ jest rozwiązaniem równania (7). Wystarczy zatem uzasadnić, że $2x-y>0$ i $-3x+2y>0$.

Warunek $2x-y>0$ jest równoważny kolejno warunkom:

$$2x > y, \quad 4x^2 > y^2, \quad 4x^2 > 3x^2 - 2, \quad x^2 > -2.$$

Warunek $-3x + 2y > 0$ jest równoważny kolejno warunkom:

$$2y > 3x, \quad 4y^2 > 9x^2, \quad 4(3x^2 - 2) > 9x^2, \quad 3x^2 > 8, \quad x \geqslant 2.$$

Zauważmy teraz, że jedynymi rozwiązaniami równania (6) należącymi do zbioru $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3, 4, 5\}$ są $(1, 1)$ oraz $(3, 5)$. Wobec tego dla każdego rozwiązania $(x, y)$ równania (6), takiego że $x \geqslant 2$ istnieje $n \in \mathbb{N}_1$, takie, że $G^n(x, y) = (1, 1)$, gdzie $G^n$ oznacza $n$-tą iterację funkcji $G$. Stąd też mamy $(x, y) = F^n(G^n(x, y)) = F^n(1, 1)$.

Przyjmijmy teraz następujące oznaczenie:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + y_n, \\ y_{n+1} = 3x_n + 2y_n, \quad \text{gdzie} \quad n \in \mathbb{N}_1 \quad \text{i} \quad (x_1, y_1) = (1, 1). \end{cases} \tag{8}$$

Wobec wcześniejszych ustaleń dla zakończenia dowodu twierdzenia 2 wystarczy znaleźć przepisy ciągów określonych układem (8). Podobnie jak przy rozwiązaniu problemu 1 z układu (8) wynika, że ciągi $(x_n)$, $(y_n)$ spełniają odpowiednio warunki:

$$x_{n+2} - 4x_{n+1} + x_n = 0 \quad \text{i} \quad x_1 = 1 \quad \text{i} \quad x_2 = 3, \tag{9}$$

$$y_{n+2} - 4y_{n+1} + y_n = 0 \quad \text{i} \quad y_1 = 1 \quad \text{i} \quad y_2 = 5. \tag{10}$$

Bez trudu można sprawdzić, że ciągi podane w twierdzeniu 2 spełniają warunki: ciąg $(x_n)$ warunek (9), zaś ciąg $(y_n)$ warunek (10). To kończy dowód twierdzenia 2.

Przystępujemy teraz do rozwiązania problemu 2.

Niech $m_{x-1} = \frac{p}{q}$, gdzie $p, q \in \mathbb{N}_1$ i $NWD(p, q) = 1$. Ze wzoru na długość środkowej trójkąta dostajemy kolejno:

$$m_{x-1} = \frac{1}{2}\sqrt{2(x^2 + (x+1)^2) - (x-1)^2},$$

$$4p^2 = q^2(3x^2 + 6x + 1).$$

Skoro $NWD(p, q) = 1$, to $q \mid 2$, stąd $q = 1$ lub $q = 2$.

Gdyby $q = 1$, to mielibyśmy $4p^2 = 3x^2 + 6x + 1$. Otrzymane równanie nie ma rozwiązań w $\mathbb{N}_1^2$, ponieważ dla $x \in 2\mathbb{N}_1$ mamy

$$4 \mid 4p^2 \quad \text{i} \quad 4 \nmid (3x^2 + 6x + 1)$$

oraz dla $x \in \mathbb{N} \setminus 2\mathbb{N}$ mamy

$$4 \mid 4p^2 \quad \text{i} \quad 4 \nmid (3x^2 + 6x + 1).$$

To oznacza, że należy przyjąć $q = 2$. Stąd rozwiązanie problemu 2 jest równoważne rozwiązaniu w $\mathbb{N}_1^2$ równania

$$p^2 = 3x^2 + 6x + 1, \quad \text{gdzie} \quad x \geqslant 3 \tag{11}$$

lub też równania

$$p^2 = 3(x+1)^2 - 2, \quad \text{gdzie} \quad x \geqslant 3. \tag{12}$$

Z twierdzenia 2 wnioskujemy, że trójki $(x_{n+2}-2, x_{n+2}-1, x_{n+2})$, gdzie

$$x_n = \frac{(\sqrt{3}-1)(2+\sqrt{3})^n + (\sqrt{3}+1)(2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}, \quad n \in \mathbb{N}_1$$

są wszystkimi trójkami średniobocznymi, dla których $m_{x_{n+2}-2} \in \mathbb{Q}$. Ponadto $m_{x_{n+2}-2} = \frac{1}{2}y_{n+2}$, gdzie

$$y_n = \frac{(3-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n - (3+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}, \quad n \in \mathbb{N}_1.$$

Analogicznie jak problem 2 można rozwiązać problem 3. Oto jego rozwiązanie:

Trójki $(x_{n+1}, x_{n+1}+1, x_{n+1}+2), n \in \mathbb{N}_1$, gdzie:

$$x_n = \frac{(\sqrt{3}-1)(2+\sqrt{3})^n + (\sqrt{3}+1)(2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}, \quad n \in \mathbb{N}_1$$

są wszystkimi trójkami średniobocznymi, dla których $m_{x_{n+1}+2} \in \mathbb{Q}$. Ponadto $m_{x_{n+1}+2} = \frac{1}{2}y_{n+1}$, gdzie

$$y_n = \frac{(3-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n - (3+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}, \quad n \in \mathbb{N}_1.$$

Mamy nadzieję, że przedstawione problemy i ich rozwiązania wzbudzą zainteresowanie nauczycieli akademickich, którzy szukają niebanalnych zagadnień do zajęć z teorii liczb, a w konsekwencji i studentów matematyki, zwłaszcza tych, którzy znajdują satysfakcję w stawianiu problemów i poszukiwaniu rozwiązań w oparciu o poznane na studiach nowe działy matematyki wyższej. Zazwyczaj w ramach kursu algebry z teorią liczb studenci poznają wiele pojęć i twierdzeń, ilustrowanych bardzo elementarnymi przykładami, a prawie nie rozwiązują znalezionych w literaturze lub postawionych samodzielnie zadań-problemów. To wynika z różnych powodów, głównie z konieczności realizacji obszernych programów nauczania. Oczywiście pisanie prac dyplomowych z matematyki lub dydaktyki matematyki wdraża studentów w twórcze poznawanie matematyki. Ta praca miała też takie ambitne cele.

## Literatura

Bednarek, W.: 2009, Trójkąty średnioboczne, *Matematyka* **7**, 433-434.

Sierpiński, W.: 1950, *Teoria liczb, Monografie Matematyczne*, t. XIX, Warszawa-Wrocław.

Song, Y. Y.: 2006, *Teoria liczb w informatyce*, PWN, Warszawa.

*Instytut Matematyki*
*Uniwersytet Pedagogiczny*
*ul. Podchorążych 2*
*PL-30-084 Kraków*
*e-mail:* alomnicki@poczta.fm
*e-mail:* jangorowski@interia.pl