FOLIA 163

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia VI (2014)

Jerzy Pogonowski

Twórcza rola patologii w matematyce*

Abstract. We discuss the creative role of objects called pathologies by mathematicians. Pathologies may become "domesticated" and give rise to new mathematical domains. Thus they influence changes in mathematical intuition.

1. Cel

Niniejsza notatka dotyczy sposobów rozumienia pojęcia *patologii* w matematyce. Bierzemy pod uwagę opinie wyrażane przez zawodowych matematyków, określających pewne obiekty swoich badań jako patologiczne. Wnioskiem z tych rozważań jest – uzasadniane obserwacjami z dziejów matematyki – przekonanie, iż obiekty uważane za patologiczne pełnią rolę twórczą w rozwoju matematyki. Zajmujemy się tą problematyką w związku z następującymi zagadnieniami:

1. *Modele zamierzone.* W innym miejscu staramy się opisać rolę *aksjomatów ekstremalnych* (np.: aksjomatu zupełności w geometrii, ciągłości w algebrze i analizie, aksjomatów ograniczenia, konstruowalności, kanoniczności w teorii mnogości, zasady indukcji matematycznej w arytmetyce) w dążeniu do uzyskania charakterystyki pojęcia *modelu zamierzonego* teorii. Brane jest przy tym pod uwagę odróżnienie standardu od patologii.
2. *Intuicja matematyczna.* Z podanych niżej przykładów powinno być widoczne, że modyfikacja intuicji matematycznych dokonuje się m.in. pod wpływem *oswajania* patologii. Sądzimy, że zawodowi matematycy zgodzą się z tezą, iż żywione przez nich intuicje mają charakter dynamiczny, a na ich zmienność wpływa m.in. rozwiązywanie *paradoksów* (w tym tych wywoływanych przez konstrukcje patologiczne).
3. *Krytyka koncepcji matematyki ucieleśnionej.* Sądzimy, że *celowe* konstruowanie patologii (co jest procedurą dość powszechną w matematyce) stanowi jeden z ważnych argumentów przeciwko trafności tezy, że całość genezy oraz funkcjonowania matematyki można wyjaśnić, odwołując się wyłącznie

*Creative role of pathologies in mathematics

2010 Mathematics Subject Classification: Primary: 00A30, Secondary: 97A80, 97E20.
Key words and phrases: pathological object, paradox, mathematical intuition, counterexample

do tworzenia metafor pojęciowych, którą to tezę głosi się np. w (Lakoff, Núñez, 2000).

4. *Dydaktyka matematyki.* Pomiędzy matematyką nauczaną w szkole a matematyką współcześnie wykorzystywaną w opisie świata istnieje ogromna przepaść. Niezrozumiałe wydaje się np. uporczywe zatajanie przed uczniami elementarnych pojęć analizy matematycznej, bez których nie jest możliwe rozumienie nie tylko świata fizycznego, ale również chociażby zjawisk ekonomicznych. Piszący te słowa prowadzi w UAM wykład monograficzny *Zagadki*, poświęcony *zagadkom matematycznym*, których rozwiązania stanowią wyzwania dla (jakże często złudnych!) intuicji doświadczenia potocznego. Wiele z tych zagadek odwołuje się do mniej lub bardziej skomplikowanych obiektów patologicznych.

2. Nieformalne charakterystyki

Próba charakterystyki pojęcia *patologii* (w matematyce) brać musi pod uwagę sposoby rozumienia także innych pojęć. Należą do nich:

1. *Standardy*: obiekty uważane za normalne, wzorcowe, naturalne. O tym, co uważamy za standard, decyduje przede wszystkim praktyka matematyczna, użyteczność w zastosowaniach, a w dalszej chyba kolejności prostota logiczna pojęć. Standardowe są więc np. od dawna znane i szeroko wykorzystywane systemy liczbowe.
2. *Wyjątki*: obiekty o szczególnym zestawie własności bądź obiekty niemieszczące się w ustalonej klasyfikacji, np.: grupy sporadyczne, wielokomórki foremne.
3. *Obiekty ekstremalne*: obiekty posiadające pewne własności w stopniu maksymalnym lub minimalnym, np.: modele nasycone lub modele atomowe, wspomniane już wielokomórki foremne.
4. *Kontrprzykłady*: obiekty pozwalające na odróżnienie zakresów własności lub zakresów prawdziwości twierdzeń, np.: obiekty różnicujące klasy struktur algebraicznych lub przestrzeni topologicznych.
5. *Niespodzianki*: nieoczekiwane, acz „niezłośliwe" obiekty/twierdzenia, np.: hipoteza Borsuka, hipoteza Mertensa.
6. *Patologie*: obiekty pojawiające się w trakcie badań, ale traktowane jako „niechciane" bądź obiekty konstruowane specjalnie dla ukazania ograniczeń (pojęć, metod, intuicji). O wielu kontrprzykładach mawia się, że są patologiami (ale nie każdy kontrprzykład nazywamy patologią).

Oczywiście nie jest naszym zamiarem klasyfikowanie wszelkich obiektów matematycznych – to byłoby zadaniem bezsensownym. Chcemy jedynie wskazać na *sposoby mówienia* o pewnych obiektach matematycznych. Być może warto byłoby uwzględnić dalsze często używane przez matematyków określenia badanych przez nich obiektów, np.: anomalie, obiekty dziwne (tajemnicze, dzikie, niedostępne itp.), ale poniżej ograniczymy się jedynie do wcześniej już wymienionych typów obiektów.

Powyższe nieformalne charakterystyki wymagają pewnych komentarzy, które warto dodać, zanim poświęcimy uwagę samym patologiom matematycznym.

2.1. Standard i „dobre zachowanie"

W tekstach matematycznych stosunkowo często napotykamy określenie *dobrze zachowujący się obiekt* (np. struktura algebraiczna, funkcja, przestrzeń). Jest ono zrelatywizowane do celów prowadzonych badań i nie może być rozumiane w sposób absolutny. Czasem mawia się też, że jedne obiekty *zachowują się lepiej* od innych (np. funkcje analityczne zachowują się lepiej niż funkcje różniczkowalne lub jedynie ciągłe, zbiory Borelowskie zachowują się lepiej niż całkiem dowolne zbiory, przestrzenie Hausdorffa zachowują się lepiej niż dowolne przestrzenie topologiczne itd.). Lepiej lub gorzej zachowywać się mogą obiekty matematyczne pod ustalonym względem – nie sporządzamy żadnych absolutnych liniowych list dobrego zachowania się – np. ciało liczb rzeczywistych jest uporządkowane w sposób zupełny, ale nie jest algebraicznie domknięte, natomiast ciało liczb zespolonych jest algebraicznie domknięte, ale nie istnieje w nim porządek zgodny z działaniami arytmetycznymi. Widać wyraźnie z dziejów matematyki, że przypadki *złego zachowania się* (np.: nieprzemienność mnożenia w pewnych dziedzinach, brak jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze w niektórych pierścieniach) wymuszają na matematykach uogólnienia, rozszerzenia dziedziny badań, a więc – mówiąc nieformalnie – tworzenia coraz to nowych kodeksów *savoir vivre* obiektów matematycznych. Pojawiają się w ten sposób nowe standardy matematyczne.

2.2. Postacie kanoniczne

Ważną procedurą wspomagającą ustalanie standardów jest sprowadzanie obiektów (o ile to możliwe) do równoważnych im obiektów w postaci *normalnej* (*standardowej*, *kanonicznej*). Zwykle korzyścią bywa tu możliwość stosowania do obiektów w postaci normalnej pewnych dobrze opracowanych metod ich badania, a wyniki tych badań automatycznie odnoszą się do wszelkich obiektów z rozważanej dziedziny. Dla przykładu wspomnijmy o: różnych rodzajach postaci normalnych formuł języków logiki, kanonicznej reprezentacji liczb naturalnych jako iloczynów stosownych potęg liczb pierwszych, postaciach normalnych macierzy, postaciach normalnych Cantora dla liczb porządkowych.

2.3. Twierdzenia o klasyfikacji i twierdzenia o reprezentacji

Do rutynowych działań matematyków należą: *klasyfikowanie* obiektów oraz *reprezentowanie* ich w określonych postaciach. Stosowne twierdzenia o klasyfikacji oraz reprezentacji porządkują dziedzinę badań. Twierdzenia o klasyfikacji podają bowiem kompletne (lub z określonymi wyjątkami) inwentarze typów badanych obiektów, natomiast twierdzenia o reprezentacji pozwalają uzyskiwać takie przedstawienia interesujących nas obiektów, dla których wypracowano dobre metody operowania na nich, które są już wystarczająco dobrze „oswojone". Klasyfikujemy obiekty poprzez izomorfizmy, homeomorfizmy, dyfeomorfizmy itp. Przykładami są:

klasyfikacja prostych grup skończonych, klasyfikacja powierzchni, klasyfikacja izometrii płaszczyzny. Z kolei twierdzenia o reprezentacji pozwalają na przedstawienie wszystkich obiektów z rozważanej dziedziny jako (w ściśle określony sposób) nieodróżnialnych od obiektów z dobrze zbadanej dziedziny. Przykłady: twierdzenia o reprezentacji grup, algebr Boole'a, rozmaitości różniczkowalnych, algebr Lie, lemat Mostowskiego o kontrakcji.

2.4. Niezmienniki

Ważną rolę w procedurach klasyfikowania obiektów matematycznych (a więc pośrednio również w ustalaniu, co jest dla rozważanej teorii obiektem standardowym) odgrywają *niezmienniki*. Informacji o obiektach matematycznych dostarczają te ich własności, które pozostają niezmienione przy określonego rodzaju przekształceniach. Rozważać także można zadane z góry niezmienniki i pytać, dla jakiego rodzaju obiektów są one charakterystyczne. Jak pamiętamy, badania tego typu zapoczątkowane zostały w XIX wieku dla systemów geometrii, a następnie dla wielu innych dziedzin. Pojęcie niezmiennika stało się niezwykle popularne w matematyce w wieku XIX. Poniższa tabela podaje proste przykłady własności obiektów matematycznych wybranych rodzajów przy stosownych przekształceniach:

Dziedzina	Przekształcenie	Niezmiennik
Przestrzenie topologiczne	Homeomorfizm	Wymiar
Zbiory	Przesunięcie	Miara Lebesgue'a
Liczby zespolone	Mnożenie	Wartość bezwzględna
Pierścień wielomianów	Liniowe przekształcenie zmiennych	Stopień wielomianu
Przestrzeń rzutowa	Przekształcenie rzutowe	Dwustosunek czwórki punktów

W 1872 roku Felix Klein przedstawił – bardzo wpływowy, jak się później okazało – program badawczy, znany dziś jako *Program z Erlangen*. Proponuje się w nim klasyfikowanie systemów geometrii na bazie grup przekształceń rozważanych przestrzeni. Poniższa tabela podaje kilka przykładów (daleko nie wszystkie!) powiązań między grupami przekształceń, geometriami oraz niezmiennikami:

Grupa przekształceń	Geometria	Niektóre niezmienniki
identycznościowe	położenia	położenie
izometrie	metryczna	odległość
podobieństwa	podobieństw	kąt
afiniczne	afiniczna	współliniowość
homeomorfizmy	topologia	spójność, zwartość
wzajemnie jednoznaczne	teoria mnogości	moc zbioru

Rozumienie *teorii matematycznej* jako ogółu zdań prawdziwych o niezmiennikach było kiedyś bardzo popularne. Obecnie – za Paschem i Hilbertem – teorie rozumiemy jako twory syntaktyczne (zespoły zdań), a badaniem ich modeli zajmuje się teoria modeli.

2.5. Rola kontrprzykładów

Do obowiązkowych lektur każdego matematyka należy klasyczna rozprawa (Lakatos, 1976). Stanowi ona oryginalną próbę rekonstrukcji (fragmentu) kontekstu odkrycia matematycznego – w tym przypadku rzecz dotyczy wzoru Eulera dla wielościanów, a szczególną rolę pełnią przy tym różnego rodzaju kontrprzykłady. Jesteśmy przyzwyczajeni do wykorzystywania kontrprzykładów w trakcie wykładu teorii matematycznej w celu ukazania zakresu obowiązywania twierdzeń, roli poszczególnych założeń, możliwości (bądź niemożliwości) dokonywania uogólnień itd. Wiele kontrprzykładów pełniących takie właśnie role rozproszonych jest w podręcznikach, a ponadto dysponujemy także całymi zbiorami specjalnie wybranych kontrprzykładów, systematycznie pogrupowanych (zob. np. Steen, Seebach, 1995; Gelbaum, Olmsted, 1990, 2003; Wise, Hall, 1993). Wyraziste kontrprzykłady otrzymują często miano patologicznych – tak więc sfera rogata Alexandera jest kontrprzykładem dla próby przeniesienia twierdzenia Jordana o krzywej zamkniętej na płaszczyźnie na przypadek trzech wymiarów.

2.6. Wyjątki oraz obiekty ekstremalne

Zdarza się, że próbując dokonać klasyfikacji obiektów rozważanej dziedziny (wedle ustalonego zestawu własności), napotykamy na obiekty, które nie mogą zostać przypisane do żadnego z członów proponowanej klasyfikacji. Dla przykładu klasyfikacja prostych grup skończonych wyszczególnia kilka ich klas oraz 26 grup *sporadycznych*, niewpadających do żadnej z tych klas. O wyjątkach nie mówimy, iż są patologiami, lecz raczej określamy je jako nieprzystające do ustalonego wzorca katalogowania obiektów, bez naruszania wyjściowych intuicji matematycznych. Obiekty *ekstremalne* wyróżniają się tym, iż pewne cechy posiadają w stopniu minimalnym bądź maksymalnym. W tym sensie wielokomórki foremne są obiektami ekstremalnymi, jako charakteryzującymi się maksymalną liczbą stosownych symetrii. Wyjątkowe wśród prostych grup Lie są G_2, F_4, E_6, E_7, E_8. Zwykle nie nazywamy obiektów wyjątkowych patologiami.

2.7. Niespodzianki

Myślenie naiwne mogłoby nasuwać przypuszczenie, że skoro aksjomaty teorii dobrane są w sposób jakoś naturalny, zgodny z powszechnie (w środowisku matematyków) akceptowanymi intuicjami, to środkami dedukcyjnymi nie można z takich aksjomatów otrzymać rezultatów kolidujących z tymi intuicjami. Wszak dedukcja ma polegać na transferze prawdziwości i nie powinna doprowadzać do informacji stanowiących dla nas zaskoczenie, których nie uświadamiamy sobie, analizując same aksjomaty wyjściowe. To oczywiście złudzenie – nie widać żadnego powodu, aby następniki obiektywnej relacji wynikania logicznego były poznawczo równie oczywiste jak jej minimalne poprzedniki, czyli aksjomaty teorii. Bywamy zatem zaskakiwani nowymi wynikami matematycznymi. Jeśli te zaskoczenia nie owocują koniecznością gruntownej zmiany intuicji, to proponujemy je nazywać właśnie *niespodziankami*, który to termin nie ma konotacji negatywnych. Oprócz wspomnianych wyżej hipotez Mertensa i Borsuka, których fałszywość okazała się taką niespodzianką, przywołajmy jeszcze przykład istnienia skończonych matryc logicznych, które nie są aksjomatyzowalne (zob. np. Wojtylak, 1979).

2.8. Patologie

Wybrane przykłady patologii podajemy poniżej, dla kilku dziedzin matematyki. Można oczywiście zastanawiać się nad jakimiś możliwościami klasyfikowania patologii – ze względów strukturalnych lub funkcjonalnych. Powinno być jasne, że pojęcie *patologii* ma uwarunkowania pragmatyczne i historyczne. Uważamy, że niebagatelną rolę w decydowaniu, które obiekty nazywane są standardowymi, a które patologicznymi odgrywają motywacje, które czerpie matematyka z nauk empirycznych. Patologie pojawiające się w matematyce prawie zawsze okazują się, z różnych powodów, użyteczne. Z jednej strony obiekty patologiczne są „niechciane", ale z drugiej strony, po jakimś czasie, okazują się ważne, motywują nowe badania, pozwalają poszerzyć perspektywy itd. W istocie taka jest główna rola specjalnie konstruowanych obiektów patologicznych (o nich nie powiemy jednak chyba, że są *niechciane*, ale może raczej, iż są *przekorne*).

Należy wyraźnie podkreślić, że nie określa się mianem patologii wszelkich nowych obiektów matematycznych, które wydają się *dziwne* (tajemnicze, nieoswojone, dotąd niezbadane itp.). Matematyka bezustannie rozszerza dziedzinę swoich badań, wkracza na nowe tereny, które wymagają wypracowania nowych metod badania napotkanych tam obiektów. Często długiego czasu potrzeba, abyśmy uznali, że dobrze rozumiemy określoną dziedzinę matematyczną.

Pojęcie patologii jest zatem zrelatywizowane historycznie. Obiekt nazywany w jakimś okresie patologicznym nie jest taki wiecznie, bywa oswajany i zyskuje pełnoprawne obywatelstwo w matematyce. Mówienie o jakimś obiekcie, że jest patologiczny wskazuje na konieczność wypracowania nowych metod w matematyce, na zmianę perspektywy badawczej poprzez wprowadzanie uogólnień, na konieczność dokonania subtelniejszych dystynkcji w dotychczas żywionych przekonaniach, konstytuujących intuicje matematyczne danego okresu.

3. Patologie: przykłady

Rozważmy teraz wybrane przykłady obiektów (konstrukcji, wyników), określanych (obecnie lub w czasie ich pojawienia się) jako patologiczne (zob. np. Feferman, Friedman, Maddy, Steel, 2000; Hahn, 1956). Nie jest to oczywiście jakikolwiek kompletny przegląd patologii, przykłady dobraliśmy trochę *ad hoc* spośród omawianych w literaturze olbrzymiej ich liczby.

3.1. Arytmetyka

Nie ma świadectw, że liczby naturalne oraz wymierne były kiedykolwiek uważane za obiekty patologiczne. Odkrycie wielkości niewspółmiernych było zaskoczeniem dla Pitagorejczyków, wierzących w harmonię świata bazującą na liczbach (w domyśle: wymiernych). Precyzyjną teorię liczb rzeczywistych opracowano dopiero w wieku XIX. Parę stuleci trwało oswajanie zarówno liczb ujemnych, jak i zespolonych. Liczby obu tych rodzajów były początkowo traktowane jako patologiczne, fikcyjne, absurdalne, fałszywe. Do ich oswojenia przyczyniła się zarówno ich użyteczność w coraz szerszych zastosowaniach, jak też wykazanie, iż tworzą one dobrze określone struktury. Obecnie trudno sobie wyobrazić np. opis świata fizycznego bez stosowania liczb rzeczywistych oraz zespolonych.

Model standardowy arytmetyki Peana (pierwszego rzędu) ma uniwersum złożone z najbardziej bodaj standardowych obiektów matematycznych – liczb naturalnych. Jak jednak wiadomo, teoria ta nie jest ani zupełna, ani (tym bardziej) kategoryczna – ma kontinuum przeliczalnych modeli. Model standardowy jest wśród nich *wyjątkowy* (jest modelem pierwszym, jedynym jej modelem dobrze uporządkowanym i jedynym jej rekurencyjnym modelem). Wszystkie pozostałe modele możemy nazywać patologicznymi – zawierają one elementy większe od wszystkich liczb naturalnych, a działania arytmetyczne nie dają się w tych modelach określić w sposób rekurencyjny. W logice drugiego rzędu możemy oczywiście określić model arytmetyki w sposób kategoryczny.

3.2. Algebra

W odróżnieniu od liczb ujemnych oraz zespolonych inne rodzaje liczb (kwaterniony, oktoniony, liczby dualne itd.) przyjmowane były w matematyce bez większych oporów, na co wpływ miało niewątpliwie przekształcenie się algebry z działu matematyki poświęconego rozwiązywaniu równań w obszerną dziedzinę zajmującą się całkiem dowolnymi strukturami. Patrząc z takiej szerszej perspektywy, ustalenie, że nie wszystkie (lubiane, uważane za pożyteczne) własności operacji arytmetycznych zachowują ważność dla nowych rodzajów liczb (mnożenie kwaternionów nie jest przemienne, a mnożenie oktonionów nie jest ani przemienne ani łączne) nie stwarzało, jak się zdaje, podstaw do określania tych nowych obiektów jako patologicznych. Czy ustalenia dotyczące np. istnienia dzielników zera lub niejednoznaczności rozkładu, odróżnienia elementów pierwszych od nierozkładalnych itd. ukazywały pojawianie się patologii? Jeśli tak, to można chyba twierdzić, że Kummer uważał jednoznaczność rozkładu za własność tak ważną, że dla jej osiągnięcia uznał za wskazane wprowadzenie całkiem nowych obiektów matematycznych – swoich *liczb idealnych*. Pomysł ten został uogólniony i rozwinięty przez Dedekinda w jego teorii *ideałów*. Tak więc próba poradzenia sobie z własnością uznawaną za patologiczną zaowocowała w tym przypadku rozszerzeniem dziedziny badań matematycznych – patologia okazała się twórcza.

W ogromnym uniwersum wszelkich struktur algebraicznych znajdujemy też takie, które określa się mianem patologicznych. Dla przykładu dziwnymi obiektami zdają się być grupy-potwory Tarskiego: grupy nieskończone, których każda nietrywialna podgrupa jest grupą cykliczną rzędu p (p pierwsza).

Uważamy, że mamy dobre intuicje dotyczące obiektów rozważanych w algebrze liniowej. Jednak przenoszenie takich intuicji z przypadku struktur skończenie wymiarowych na te o nieskończonej liczbie wymiarów nie zawsze jest uzasadnione. Przypomnijmy choćby słynny wynik Enflo z 1973 roku, ukazujący, że istnieje nieskończenie wymiarowa ośrodkowa przestrzeń Banacha nieposiadająca bazy Schaudera.

3.3. Analiza

„Polowanie na patologie” spektakularny wyraz znalazło w czasie porządkowania podstaw analizy matematycznej w wieku XIX. Rozumienie pojęcia funkcji ulegało ewolucji. Funkcje bywały pojmowane jako procesy, jako przepisy na otrzymywanie wartości dla danych argumentów, a dopiero później zaczęto rozumieć funkcje jako całkiem dowolne przyporządkowania wartości argumentom. Z chwilą akceptacji tego najbardziej ogólnego rozumienia zmuszeni zostaliśmy także do akceptacji – jako dobrze określonych – funkcji, które nazywane były patologicznymi. Gdy w wieku XIX zaczęto dopuszczać mówienie o funkcjach jako całkiem dowolnych zbiorach par uporządkowanych (spełniających oczywisty warunek jednoznaczności), okazało się, że oprócz naturalnych, zgodnych z intuicjami doświadczenia potocznego zależności funkcyjnych za funkcje w tym najbardziej ogólnym znaczeniu musimy uznać również takie zależności, które tym intuicjom dramatycznie przeczą.

Skonstruowano wiele przykładów *funkcji patologicznych* – do najbardziej znanych należą chyba różne obiekty *fraktalne*, np. krzywe Peana oraz Hilberta (ciągłe odwzorowania odcinka $[0,1]$ na kwadrat $[0,1] \times [0,1]$). Wiele konstrukcji związanych było z próbami podania precyzyjnych podstaw dla podstawowych pojęć analizy (takich jak: zbieżność, granica, różne rodzaje ciągłości, pochodna, różne rodzaje całek). W szczególności niektóre z tych przykładów ukazywały np. zalety całki Lebesgue'a w porównaniu z całką Riemanna.

Cantor tworzył swoją teorię mnogości w związku z badaniami dotyczącymi zbiorów liczb rzeczywistych oraz warunków zbieżności szeregów nieskończonych. Zbiór trójkowy Cantora (obecnie dość powszechnie znany, gdyż często przywoływany w opracowaniach popularyzujących matematykę) był uważany początkowo za twór wielce patologiczny: ma on moc kontinuum, lecz miarę równą zeru, nie zawiera żadnego niepustego przedziału, jest zbiorem doskonałym, ale nigdziegęstym itd. Jednak ze względu na wielość i rozległość owocnych zastosowań został, jak się zdaje, już dość dobrze oswojony w matematyce. Wiemy np., że: każda zwarta przestrzeń metryczna jest ciągłym obrazem zbioru Cantora, każda nieprzeliczalna ośrodkowa i metryzowalna w sposób zupełny przestrzeń topologiczna zawiera podzbiór homeomorficzny ze zbiorem Cantora.

Dość swobodne operowanie szeregami nieskończonymi w wieku XVIII zastąpione zostało ich rygorystycznym traktowaniem w wieku następnym, gdy ustalano kryteria zbieżności takich szeregów. Kryteria owe eliminowały różne wcześniejsze – z dzisiejszego punktu widzenia pochopne – ustalenia na temat sum szeregów nieskończonych. Konieczność okiełznania patologii owocowała więc rozwojem tego fragmentu analizy matematycznej.

Dla ilustracji przywołajmy kilka (dobrze znanych matematykom) przykładów funkcji określanych jako patologiczne:

1. *Funkcja Thomaego.* Jest określona wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} \text{ jeśli } x = \frac{p}{q} \text{ jest liczbą wymierną (ułamek nieskracalny), } q > 0, \\ 0 \text{ jeśli } x \text{ jest liczbą niewymierną.} \end{cases}$$

Jest ona ciągła w każdym punkcie niewymiernym i nieciągła w każdym punkcie wymiernym. Jest całkowalna w sensie Riemanna na każdym przedziale domkniętym. Jej wykres nosi wiele pomysłowych nazw (sad Euklidesa, Gwiazdy Babilonu, funkcja Riemanna, prażona kukurydza, krople deszczu itd.).

Uwaga: nie istnieje funkcja, która byłaby ciągła dla wszystkich argumentów wymiernych, a nieciągła dla wszystkich argumentów niewymiernych (ponieważ zbiór punktów nieciągłości musi być zbiorem typu F_σ).

2. *Funkcja Dirichleta.* Jest zdefiniowana wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ jeśli } x \text{ jest liczbą wymierną,} \\ 0 \text{ jeśli } x \text{ jest liczbą niewymierną.} \end{cases}$$

Jest ona nieciągła dla każdego argumentu swojej dziedziny. Nie jest całkowalna w sensie Riemanna na żadnym przedziale domkniętym, jest całkowalna w sensie Lebesgue'a. Ponieważ $f(x) = \lim_{k\to\infty} \lim_{j\to\infty} (\cos(k!\pi x))^{2j}$, więc jest to funkcja drugiej klasy Baire'a.

3. *Funkcja Weierstrassa.* Jest przykładem funkcji ciągłej, która w żadnym punkcie nie jest różniczkowalna i należy do rodziny zdefiniowanej wzorem:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x),$$

gdzie $0 < a < 1$, b jest liczbą całkowitą nieparzystą oraz $ab \geqslant 1$.

4. *Funkcja Volterry.* Dla określenia funkcji Volterry wykorzystuje się zbiór SVC (zbiór Smitha-Volterry-Cantora). Jest on konstruowany podobnie jak zbiór trójkowy Cantora. Zaczynamy od przedziału $[0, 1]$ i w n-tym kroku konstrukcji usuwamy przedział otwarty o długości $\frac{1}{2^{2n}}$ z każdego z 2^{n-1} otrzymanych uprzednio przedziałów domkniętych. Dwa pierwsze kroki dają więc odpowiednio: $[0, \frac{3}{8}] \cup [\frac{5}{8}, 1]$ oraz $[0, \frac{5}{32}] \cup [\frac{7}{32}, \frac{3}{8}] \cup [\frac{5}{8}, \frac{25}{32}] \cup [\frac{27}{32}, 1]$. Zbiór SVC jest częścią wspólną wszystkich przedziałów domkniętych otrzymywanych w kolejnych krokach konstrukcji. Jest to zbiór domknięty o pustym wnętrzu, jego miara Lebesgue'a równa jest $\frac{1}{2}$ (a więc jego brzeg ma dodatnią miarę Lebesgue'a!).

W konstrukcji funkcji Volterry wykorzystujemy stosowne „kopie" funkcji zdefiniowanej przez $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ dla $x \neq 0$ oraz $f(0) = 0$, które odpowiednio „sklejamy" na brzegach odcinków usuniętych w konstrukcji SVC. Funkcja Volterry jest granicą takiego ciągu „kopii".

Funkcja Volterry jest wszędzie różniczkowalna, a jej pochodna jest nieciągła dokładnie w każdym punkcie SVC. Tak więc pochodna funkcji Volterry nie jest całkowalna w sensie Riemanna.

5. *Funkcja Cantora-Lebesgue'a.* Funkcja Cantora-Lebesgue'a (*diabelskie schody*) jest stała na wszystkich przedziałach, które usuwa się ze zbioru trójkowego Cantora, określonego na przedziale $[0, 1]$. Funkcja ta ma ponadto następujące własności:

(a) Jest niemalejąca, przyjmuje wszystkie wartości z przedziału $[0,1]$.
(b) Funkcja ta jest wszędzie ciągła; w istocie jest ona jednostajnie ciągła (ale nie jest bezwzględnie ciągła).
(c) Jest różniczkowalna jedynie w punktach poza zbiorem Cantora i jej pochodna jest w każdym punkcie równa zeru.

Funkcję Cantora-Lebesgue'a można zdefiniować na sposób arytmetyczny (wykorzystując rozwinięcia trójkowe i dwójkowe), ale określić ją także można jako granicę następującego ciągu funkcji:

(a) $f_0(x) = x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, a dla $n \geqslant 1$:
(b) $f_{n+1}(x) = \frac{1}{2} f_n(3x)$ dla $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{3}$
(c) $f_{n+1}(x) = \frac{1}{2}$ dla $\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{2}{3}$
(d) $f_{n+1}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} f_n(3x-2)$ dla $\frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 1$.

Ciąg funkcji f_n jest jednostajnie zbieżny do funkcji Cantora-Lebesgue'a.

6. *Funkcja Minkowskiego.* Rozważamy reprezentacje liczb rzeczywistych w postaci ułamków łańcuchowych: $x = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$ i oznaczamy: $R_k = \sum\limits_{j=1}^{k} a_j$. Funkcja Minkowskiego ? definiowana jest wzorem:

$$?\,(x) = \begin{cases} 2 \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{2^{R_i}} & \text{jeśli } x \text{ jest liczbą wymierną różną od } 1, \\ 2 \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{2^{R_i}} & \text{jeśli } x \text{ jest liczbą niewymierną,} \\ 1 & \text{jeśli } x = 1. \end{cases}$$

Funkcja Minkowskiego jest ściśle rosnąca oraz ciągła (ale nie jest bezwzględnie ciągła), jej pochodna jest równa zeru w każdym punkcie wymiernym. Jest to funkcja nieparzysta, której wartość w każdym punkcie wymiernym jest wymierną liczbą diadyczną; w każdym punkcie, który jest niewymiernym kwadratem, wartość tej funkcji jest niediadyczną liczbą wymierną. Jeśli $?(x)$ jest liczbą niewymierną, to x jest albo liczbą algebraiczną stopnia wyższego niż 2 albo liczbą przestępną.

7. *Funkcja różniczkowalna o nieprzeliczalnym zbiorze wartości krytycznych.* Punktem krytycznym funkcji różniczkowalnej nazwiemy punkt, w którym jej pochodna jest równa zeru (wartość funkcji dla takiego punktu to jej *wartość krytyczna*). Przypominamy, że dopełnienie zbioru trójkowego Cantora C jest sumą przedziałów otwartych: $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha_n, \beta_n)$. Zdefiniujmy $f(x) = 0$ dla $x \in C$ oraz $f(x) = (x-\alpha_n)(\beta_n - x)$ dla $x \in (\alpha_n, \beta_n)$. Niech $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Ponieważ $F' = f$, więc F' jest ciągła. Mamy: $S =_{def} \{t : F'(t) = 0\}$ (zbiór punktów krytycznych F) jest równy C, a ponieważ f jest dodatnia na zbiorze $[0,1] \setminus C$, więc F jest ściśle rosnąca i zbiór $\{F(t) : t \in S\}$ jej wartości krytycznych jest nieprzeliczalny.

3.4. Geometria

Sierpiński udowodnił, że istnieje zbiór na płaszczyźnie, który ma z każdą prostą dokładnie dwa punkty wspólne. Wykorzystując nieefektywny aksjomat wyboru, można podawać przykłady innych zbiorów punktowych płaszczyzny, mających własności kolidujące z potocznymi wyobrażeniami na temat możliwych tworów geometrycznych.

Jednak nie tylko środki nieefektywne służą do konstrukcji „dziwnych" zbiorów. Poniższa konstrukcja (Gelbaum, Olmsted, 1990) pokazuje, że można połączyć przeciwległe wierzchołki kwadratu rozłącznymi (!) zbiorami spójnymi C_1 i C_2, z których każdy jest sumą dwóch łuków domkniętych i łuku otwartego:

$$C_1 = \{(-1+t, -1+\tfrac{7}{8}t) : t \in [0,1]\} \cup \{(t, \tfrac{1}{2}\sin(\tfrac{\pi}{2t}) + \tfrac{1}{4}) : t \in (0,1)\} \cup \{(1, \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{4}t) : t \in [0,1]\}$$

$$C_2 = \{(-1+t, 1-\tfrac{7}{8}t) : t \in [0,1]\} \cup \{(t, \tfrac{1}{2}\sin(\tfrac{\pi}{2t}) - \tfrac{1}{4}) : t \in (0,1)\} \cup \{(1, -1+\tfrac{5}{4}t) : t \in [0,1]\}.$$

Zauważmy, że:

1. $\{(-1,-1)\} \cup \{(1,1)\} \subset C_1$
2. $\{(-1,1)\} \cup \{(1,-1)\} \subset C_2$.

Zwrot *kwadratura koła* powszechnie rozumiany jest jako czynność niemożliwa do wykonania. Przypomnijmy, że problem kwadratury koła polega na znalezieniu kwadratu o polu równym polu danego koła, przy czym posługiwać się można jedynie linijką (bez podziałki) oraz cyrklem. To, iż jest to niewykonalne, wykazano dopiero w XIX wieku. W matematyce od dawna rozważano problem równoważności figur (oraz brył) poprzez rozkład. Dwa wielościany o tej samej objętości nazywamy równoważnymi przez rozkład, jeśli jeden z nich można podzielić na mniejsze wielościany, z których złożyć można drugi. Dla przykładu: czworościan nie jest równoważny przez rozkład z sześcianem (np. naroże sześcianu jednostkowego nie jest równoważne przez rozkład z sześcianem o boku $\frac{1}{\sqrt[3]{6}}$) (por. np. Dehn, 1902). Alfred Tarski w 1925 roku sformułował problem następujący: czy możliwe jest podzielenie koła na skończoną liczbę części i złożenie tych części w taki sposób, aby utworzyły one kwadrat o polu równym polu wyjściowego koła (zob. Tarski, 1925). Problem ten został rozwiązany ćwierć wieku temu (zob. Laczkovich, 1990). W dowodzie korzysta się jednak zarówno z aksjomatu wyboru, jak i ze zbiorów niemierzalnych, a więc w jakimś intuicyjnym sensie patologicznych.

Prawie każdy słyszał o *paradoksalnym rozkładzie kuli* – twierdzeniu udowodnionym przez Banacha i Tarskiego: kulę w przestrzeni trójwymiarowej można podzielić na skończoną liczbę kawałków, a następnie kawałki te złożyć razem tak, iż w wyniku powstaną dwie kule, każda o mierze (objętości) takiej samej jak kula wyjściowa. To twierdzenie o rozkładzie również korzysta w dowodzie ze zbiorów niemierzalnych, czyniąc użytek także z nieefektywnego aksjomatu wyboru. W tym przypadku zatem paradoksalność wyniku (względem intuicji potocznego doświadczenia) jest konsekwencją środków użytych w dowodzie twierdzenia. Tak więc zanim zaczniesz rozpowiadać, że (samo sformułowanie) twierdzenia Banacha-Tarskiego propaguje patologie, przestudiuj jego dowód.

Dość dobrze radzimy sobie z obliczaniem długości, pola powierzchni oraz objętości w przypadku przestrzeni do wymiaru trzy włącznie. Wymienione pojęcia mają oczywiście swoje odpowiedniki w przestrzeniach o dowolnym wymiarze skończonym. Możemy jednak być zaskoczeni, próbując przenosić intuicje potoczne na przypadek przestrzeni o wymiarze nie mniejszym niż cztery, jak widać to np. w wynikach dotyczących *koncentracji miary* (w sformułowaniu tabloidalnym: prawie cała objętość wielowymiarowej kuli skoncentrowana jest w okolicy jej brzegu). Nie chcemy oczywiście twierdzić, że kula n-wymiarowa jest obiektem patologicznym. Wręcz przeciwnie – kula taka jest obiektem dobrze zrozumiałym, a umykają naszym potocznym intuicjom wyobrażenia o strukturze przestrzeni o wyższym wymiarze.

3.5. Topologia

W topologii ogólnej znajdujemy całe mnóstwo specjalnie konstruowanych obiektów, których patologiczność wykorzystywana bywa do lepszego rozumienia coraz bardziej skomplikowanych intuicji matematycznych wytwarzanych w praktyce badawczej. Dla przykładu:

1. *Sinusoida zagęszczona.* To obiekt $\{(x, \sin(\frac{1}{x}))\colon x \in (0, \frac{1}{\pi}]\} \cup \{(0, y)\colon y \in [-1, 1]\}$. Jest przestrzenią zwartą i spójną (a więc jest kontinuum), ale nie jest ani lokalnie spójna, ani łukowo spójna.
2. *Sfera rogata Alexandera.* Obiekt ten jest homeomorficzny ze zwykłą sferą dwuwymiarową oraz dzieli całą przestrzeń trójwymiarową na dwa obszary, przy czym obszar wewnątrz sfery rogatej *jest* homeomorficzny z wnętrzem zwykłej sfery, ale obszar na zewnątrz sfery rogatej *nie jest* homeomorficzny z obszarem na zewnątrz zwykłej sfery. Tak więc sfera rogata Alexandera dostarcza przykładu na to, iż twierdzenie Jordana (o krzywej zamkniętej na płaszczyźnie) nie daje się uogólnić z dwóch do trzech wymiarów.
3. *Jeziora Wady.* Można podać przykład *trzech* rozłącznych spójnych i otwartych zbiorów na płaszczyźnie, które mają wspólny brzeg. Równoważnie można skonstruować krzywą na płaszczyźnie, która będzie wspólnym brzegiem takich trzech zbiorów (co oczywiście koliduje z intuicjami doświadczenia potocznego).
4. *Naszyjnik Antoine'a.* Obiekt ten stanowi topologiczne włożenie zbioru Cantora w $\mathbb{R}^3$. Jego dopełnienie nie jest jednospójne. Pomijając matematyczne szczegóły konstrukcji, można ją sobie wyobrazić następująco. Zaczynamy od torusa i umieszczamy wewnątrz niego torusy „zazębiające się" jak ogniwa (skończonego) łańcucha. W każdym z tych torusów umieszczamy torusy „zazębiające się" jak ogniwa (skończonego) łańcucha itd. Naszyjnik Antoine'a to część wspólna tych wszystkich torusów. Jego spójne składowe to pojedyncze punkty. Zbiór ten jest domknięty, nigdziegęsty, doskonały, całkowicie niespójny i ma moc kontinuum, a zatem jest homeomorficzny ze zbiorem Cantora.
5. *Dziki łuk Artina-Foxa. Dziki łuk* to łuk γ włożony w $\mathbb{R}^3$ tak, że nie istnieje homeomorfizm $\mathbb{R}^3$ na $\mathbb{R}^3$, przy którym γ przechodzi na przedział jednostkowy.
6. *Przenicowanie sfery.* Stephen Smale udowodnił, że sferę dwuwymiarową S^2 można „przenicować na drugą stronę" (bez „rozrywania") w przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Jeśli $f : S^2 \to \mathbb{R}^3$ jest zwykłym włożeniem, to istnieje homotopia immersji $f_t : S^2 \to \mathbb{R}^3$ taka, że $f_0 = f$ oraz $f_1 = -f$. W sieci znaleźć można wiele filmów ukazujących na czym polega ta paradoksalna (z punktu widzenia doświadczenia potocznego) konstrukcja.

7. *Powierzchnie jednostronne.* Z punktu widzenia intuicji potocznych, powierzchnie mające tylko jedną stronę (jak np. wstęga Möbiusa) wydają się patologiczne. W topologii rozważamy własność nazywaną *orientowalnością* powierzchni, która jest pomocna przy rozumieniu, jak „wyglądać" mogą różne powierzchnie.
8. *Sfery egzotyczne.* Przez *sferę egzotyczną* rozumiemy w geometrii różniczkowej rozmaitość różniczkowalną, która jest homeomorficzna ze „zwykłą" sferą w przestrzeni euklidesowej n-wymiarowej, lecz nie jest z nią dyfeomorficzna. Pierwszy przykład takiej sfery (siedmiowymiarowej) podał John Milnor w latach pięćdziesiątych XX wieku. Nie wiadomo obecnie (2014), czy istnieją egzotyczne sfery czterowymiarowe. Czy sfery egzotyczne nazwiemy (dzisiaj) obiektami *patologicznymi*? Gdyby tak czynić, to musielibyśmy chyba jednocześnie przyznawać, że mamy jakieś głębokie intuicje dotyczące struktur różniczkowych w przestrzeniach o wysokim wymiarze, że dobrze wiemy, co jest w tych przypadkach standardem. Czy jednak mamy takie intuicje np. w przypadku przestrzeni siedmiowymiarowej?
9. *Egzotyczna* $\mathbb{R}^4$. Przez *egzotyczną* $\mathbb{R}^4$ rozumiemy rozmaitość różniczkowalną, która jest homeomorficzna z przestrzenią euklidesową $\mathbb{R}^4$, lecz nie jest z nią dyfeomorficzna. Istnieje kontinuum niedyfeomorficznych struktur różniczkowych na $\mathbb{R}^4$. Wymiar 4 jest tu wyróżniony: dla żadnej $n \neq 4$ nie istnieją struktury egzotyczne na $\mathbb{R}^n$.
10. *Świat rozmaitości.* Uważamy, że dobrze rozumiemy świat 1-rozmaitości (krzywych) oraz 2-rozmaitości (powierzchni). Te rozmaitości zostały bowiem całkowicie sklasyfikowane na początku XX wieku (zarówno pod względem topologicznym, jak i geometrycznym). Niedawno Perelman udowodnił tzw. Hipotezę Geometryzacyjną Thurstona (1997) (i tym samym słynną Hipotezę Poincarégo), uzyskując geometryczną klasyfikację zwartych 3-rozmaitości. Tego typu klasyfikacja nie jest możliwa dla n-rozmaitości, $n \geqslant 4$. Świat rozmaitości czterowymiarowych jest szczególnie skomplikowany. Udowodniono np., że problem ustalenia, czy dwie triangulowalne 4-rozmaitości są homeomorficzne, nie jest rozstrzygalny (zob. np. Scorpan, 2005).

To tylko kilka przykładów z wielkiej obfitości topologicznych konstrukcji, cieszących matematyków. Warto podkreślić, że wspomniane obiekty budowane były celowo, dla zaznaczenia konieczności modyfikacji pewnych dotychczasowych intuicji matematycznych.

3.6. Teoria miary

Już na przykładzie zbioru trójkowego Cantora widzimy, że miara zbioru może wydawać się paradoksalnie niewspółmierna z liczbą jego elementów. Wspomniany wcześniej paradoks związany z twierdzeniem Banacha-Tarskiego pokazuje, że użycie środków nieefektywnych (aksjomatu wyboru) może prowadzić do sprzecznych z potoczną intuicją wyników dotyczących miary. Podobnie jest w przypadku takich (niemierzalnych w sensie Lebesgue'a) tworów jak zbiory Vitalego lub zbiory Bernsteina.

Niektóre wyniki wydają nam się paradoksalne, gdyż wyobrażamy sobie, że rozważane zbiory powinny mieć dużą (bądź małą) miarę, por. np.: zbiór Kakeyi, sfera Besicovitcha, róg Gabriela.

Współcześnie pojęcie prawdopodobieństwa analizujemy z użyciem środków teorii miary. Należy zatem pamiętać, że np. niezależność zdarzeń nie jest własnością samych zdarzeń, lecz zależy od przyjętej miary. Podobnie od przyjętej miary zależy odpowiedź na proste szkolne pytanie: jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrana cięciwa okręgu o promieniu długości 1 będzie dłuższa od boku trójkąta równobocznego wpisanego w ten okrąg? Jak wiadomo, można tu uzyskać różne odpowiedzi:

(a) $\frac{1}{3}$: wykorzystujemy długość łuku;

(b) $\frac{1}{2}$: wykorzystujemy długość odcinka;

(c) $\frac{1}{4}$: wykorzystujemy pole.

Rozwiązanie tego prostego zadania (które staje się od razu widoczne po sporządzeniu rysunku) nie ujawnia żadnej patologii probabilistycznej, natomiast wyraźnie wskazuje, jaki jest status pojęcia prawdopodobieństwa.

3.7. Teoria mnogości

„Normalni" matematycy (a więc ci, którzy nie zajmują się zawodowo podstawami teorii mnogości) wierzą chyba w istnienie świata „prawdziwych" zbiorów i nie przejmują się subtelnościami rozważań metateoretycznych. O ile teoria mnogości jest niesprzeczna, to posiada ona wiele modeli, w tym modele przeliczalne, które niektórzy zapewne zechcą określać mianem patologicznych. Nie podzielamy tej opinii – uważamy że *paradoks Skolema* (rzekoma kolizja między faktem, że w teorii mnogości udowodnić możemy istnienie zbiorów nieprzeliczalnych, a faktem, że zbiory takie mają pomieścić się w modelu przeliczalnym) jest jedynie niedostrzeżeniem różnicy między rozumieniem terminu *nieprzeliczalny* w języku przedmiotowym i w metajęzyku. Przeliczalny model M teorii mnogości może zawierać zbiór nieskończony, powiedzmy A, który jest „z punktu widzenia tego modelu" nieprzeliczalny, gdyż w rozważanym modelu M jest zbyt mało funkcji – nie istnieje w nim bijekcja z A na zbiór wszystkich liczb naturalnych (który daje się reprezentować w M na mocy aksjomatu nieskończoności); natomiast „z punktu widzenia metateorii" taki zbiór A będzie przeliczalny. Osobną sprawą jest, że środkami językowymi teorii mnogości (pierwszego rzędu) nie można dotrzeć do wszystkich elementów zbioru potęgowego dowolnego zbioru nieskończonego. Wydaje się, że normalni matematycy nie są całkowicie zgodni co do tego, jakiej części pełnego zbioru potęgowego potrzebuje matematyka (pamiętajmy o niezależności aksjomatu konstruowalności Gödla od teorii mnogości ZFC).

Zauważmy, że w ostatnich kilkudziesięciu latach zmieniono przekonania dotyczące naturalności założeń o istnieniu bardzo dużych liczb kardynalnych. Hausdorff sądził, że liczby mocno nieosiągalne nigdy nie znajdą żadnego istotnego zastosowania w matematyce, Zermelo postulował istnienie całej pozaskończonej hierarchii takich liczb, a obecnie są one najmniejszymi z branych pod uwagę, intensywnie badanych dużych liczb kardynalnych (zob. Kanamori, 1994). Dostrzeżono m.in., że aksjomaty istnienia takich liczb związane są z mocą dowodową teorii, wykorzystywane są też one w rozważaniach dotyczących całkiem „normalnych" obiektów matematycznych. Bardzo duże liczby kardynalne nie są więc już obiektami patologicznymi, jak można było mniemać na początku badań nad teorią mnogości. Dodać może należy, że współcześnie akceptuje się pogląd, iż uniwersa teorii mnogości powinny być możliwie jak najobszerniejsze, a to wiąże się właśnie z aksjomatami istnienia dużych liczb kardynalnych. Może warto jeszcze wspomnieć, że duże liczby kardynalne okazują się konieczne w dowodach pewnych twierdzeń dotyczących obiektów „matematyki konkretnej".

Niektórzy matematycy (dla przykładu zob. Friedman, 1992) uważają, że to właśnie obiekty patologiczne kryją się za znanymi wynikami dotyczącymi niezupełności ważnych teorii matematycznych. Hipoteza Kontinuum jest niezależna od aksjomatów teorii mnogości ZFC, jeśli jednak ograniczymy się do zbiorów wystarczająco „naturalnych", to możemy o nich rozstrzygnąć więcej niż w przypadku całkiem dowolnych zbiorów. Już Hausdorff udowodnił, że każdy nieskończony borelowsko mierzalny zbiór liczb rzeczywistych pozostaje we wzajemnie jednoznacznej borelowsko mierzalnej odpowiedniości albo ze zbiorem wszystkich liczb całkowitych albo ze zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych.

W matematyce współczesnej paradygmat teorii mnogości jest wszechobecny. Warto jednak chyba pamiętać, że teorię mnogości uważano za:

1. Raj, z którego nie damy się wypędzić (Hilbert)
2. Zarazę, z której matematyka się wyleczy (Kronecker)
3. Dziwaczną kandydatkę na podstawy matematyki (Skolem)
4. Teorię, która będzie (?) podobna do topologii ogólnej (Mostowski)
5. Paradygmat, który zniknie, gdy wymrą jego przedstawiciele (Awodey)

3.8. Logika

Przykładem patologii logicznej jest niewątpliwie każda *antynomia* – zawsze staramy się pozbyć zauważonej sprzeczności. Patologiczność objawia się również w przypadku wielu *paradoksów* logicznych, które staramy się rozwiązywać, modyfikując w efekcie niektóre żywione uprzednio intuicje. Paradoksy takie mogą mieć swoje źródło np. w mieszaniu języka przedmiotowego z jego metajęzykiem, z intensjonalnością wyrażeń lub ich nieostrością.

Czasem wskazuje się na wybrane własności implikacji i równoważności materialnej jako paradoksalne (w tym sensie, że pozostają one w konflikcie z naszymi intuicyjnymi przekonaniami dotyczącymi np. wynikania, równoznaczności itp.) – należą do nich m.in.:

$$(p \wedge \neg p) \rightarrow q,$$

$$p \to (q \vee \neg q),$$

$$(p \to q) \vee (q \to p),$$

$$(p \equiv q) \vee (q \equiv r) \vee (p \equiv r).$$

Naszym zdaniem, nie są to przejawy patologii, o ile pamiętamy, jaki naprawdę jest zasięg stosowania klasycznego (!) rachunku zdań. Oczywiście nie ma przeszkód, aby konstruować systemy logiczne, które takich własności mieć nie będą (np.: logiki relewantne, logika niefregowska itp.).

Czasami mówi się o patologiach *klas spełniania*, które są konstrukcjami otrzymywanymi w *aksjomatycznych* ujęciach pojęcia prawdy: takich klas spełniania może istnieć kontinuum (nad danym modelem), a więc w sposób bardzo niejednoznaczny charakteryzują one badane pojęcie. Również w tym przypadku sądzimy, że ta niejednoznaczność nie jest przejawem patologii, ale raczej widomy znak, jak bardzo skomplikowane jest owo pojęcie. Natomiast fakt, że w przypadku pewnych logik infinitarnych np. nieskończona koniunkcja zdań prawdziwych może być fałszywa (w sensie wykorzystującym pojęcie klas spełniania) stwarza oczywiście pewien niepokój poznawczy.

4. Wnioski

Niniejsza notatka nie zawiera rzecz jasna żadnego nowego wyniku matematycznego, nie jest też zapewne jakoś wyjątkowo oryginalna w treści. Przytoczone w niej obserwacje wydają się wskazywać na następujące konkluzje.

4.1. Historia matematyki

Patologie bywają oswajane. Najczęściej prowadzi to do rozwoju danej bądź całkiem nowej gałęzi matematyki. Chciałoby się rzec, że matematyk nigdy nie przechodzi obojętnie wobec patologii, zawsze korci go zmierzenie się z trudnością nieoczekiwaną bądź stworzoną przez siebie samego. Przychodzi na myśl znany wiersz Norwida (1964) *Fatum*:

> Jak dziki zwierz, przyszło *nieszczęście* do człowieka
> I zatopiło weń fatalne oczy...
> – Czeka – –
> – Czy człowiek zboczy?
> Lecz on odejrzał mu, jak gdy artysta
> Mierzy swojego kształt modelu;
> I spostrzegło, że on patrzy, co skorzysta
> Na swym nieprzyjacielu? –
> I zachwiało się całą postaci wagą
> – – I nie ma go!

Patologie matematyczne nie są nieszczęściem, ale zawsze stanowią nowe wyzwania. Uważamy za ciekawe zadanie opracowanie eseju historycznego, w którym punktami wyjścia prowadzonych analiz byłyby konkretne przypadki patologii matematycznych, ze wskazaniem, jak uporano się z daną patologią i jakie przyniosło to skutki (w domyśle: korzyści) matematyce. Niniejsza notatka takim esejem oczywiście nie jest – nie dokonujemy analizy konkretnych przypadków, co wymagałoby nakreślenia odpowiedniego tła historycznego, zwrócenia uwagi na nurtujące matematyków w danym okresie problemy wraz z propozycjami ich rozwiązywania itd. Nie wystarczy też zapewne odwołanie się w takim eseju do podręcznikowych opracowań historii matematyki (np. Kline, 1994) – trzeba sięgać do samych tekstów źródłowych, w których pojawiają się nowe idee.

4.2. Krytyka koncepcji matematyki ucieleśnionej

Teoria metafor poznawczych zrobiła sporą karierę w lingwistyce, przede wszystkim za sprawą znakomitej monografii (Lakoff, Johnson, 1980). Próbuje się ostatnio rozszerzyć zasięg jej zastosowań, między innymi w matematyce (Lakoff, Núñez, 2000). Uważamy, że próba ta jest nieudana, co staraliśmy się uzasadnić w innych miejscach (zob. np. Pogonowski, 2011, 2012). Nie przytoczymy tu wszystkich tych argumentów, zauważmy jedynie, że to m.in. właśnie konstruowane przez samych matematyków obiekty patologiczne zdają się zachowywać odmiennie, niż przewiduje to koncepcja matematyki ucieleśnionej, żądająca użycia stosownej metafory pojęciowej w przypadku każdego z tworzonych pojęć matematycznych. Twierdzimy, że:

1. W wielu przypadkach to właśnie odejście od mniej lub bardziej potocznych intuicji jest odpowiedzialne za utworzenie nowego pojęcia matematycznego. W istocie konstruujemy obiekty patologiczne właśnie *na przekór* pewnym intuicjom. Jaskrawo jest to widoczne w przykładach topologicznych. Wiele aktywności matematycznych związanych jest właśnie z *porzuceniem* metaforyzowania, wyraźnym rozdzieleniu intuicji oraz roboty formalnej. Podać można niezliczone przykłady, gdy intuicje bazowane na doświadczeniu potocznym *zwodzą* nas, nawet w przypadku rozważania całkiem prostych obiektów i konstrukcji matematycznych.

2. Nie wystarczy postulować istnienie jakiegoś obiektu, wykorzystując sprytnie dobraną metaforę pojęciową. Matematyk musi udowodnić, że brane pod uwagę warunki nie generują sprzeczności.

3. Wykorzystywana wielokrotnie w (Lakoff, Núñez, 2000) Podstawowa Metafora Nieskończoności nie zawsze działa. Powiedzmy, że chcielibyśmy utworzyć pojęcie *szeregu najwolniej rozbieżnego*, wykorzystując tę metaforę. Określamy, co to znaczy, że jeden szereg jest wolniej rozbieżny od drugiego (to nietrudne) i „domykamy” łańcuch takich coraz wolniej rozbieżnych szeregów obiektem granicznym, którego istnienie postuluje wspomniana metafora. To jednak oczywiście nie działa: można *udowodnić*, że nie istnieje szereg najwolniej rozbieżny. Myślenie życzeniowymi metaforami pojęciowymi nic w tej kwestii nie zmieni.

4. Naszym zdaniem, koncepcja matematyki ucieleśnionej nie zdaje adekwatnie sprawy z dynamiki zmian intuicji matematycznych, a zmiany takie następują często właśnie poprzez oswajanie obiektów uważanych początkowo za

patologiczne. Na drodze jedynie tworzenia metafor nie można chyba wytłumaczyć ani *zmienności* naszych intuicji matematycznych, ani faktu *konfliktu* między pewnymi intuicjami.

5. Metafory być może dobrze zdają sprawę z tworzenia prostych pojęć matematycznych. Jednak od pewnego *poziomu zaawansowania* teorii (a czasem nawet przy tworzeniu całkiem nowych teorii) to chyba nie one odpowiadają za twórczą działalność matematyków.
6. Metafory pojęciowe istotnie pełnią jakąś rolę przy tworzeniu niektórych pojęć matematycznych. Jednak to nie tylko one pełnią tę rolę. *Abstrakcja*, *uogólnianie*, *analogia*, *wyobrażanie sobie* – to bodaj ważniejsze w tym względzie procedury. Tworzenie metafor pojęciowych na sposób rozumiany przez autorów nie zdaje sprawy np. z różnicy między *opisywaniem* a *definiowaniem* obiektów (a co za tym idzie, również pojęć).
7. Tworzenie metafor pojęciowych w stylu Lakoffa i Núñeza nie wystarcza, naszym zdaniem, do *rozumienia* złożonych pojęć matematycznych (np.: nieprzeliczalność, zawiłe struktury topologiczne i różniczkowe, równość prawie wszędzie itd.). Można szukać dalszych tego typu przykładów, w każdej właściwie dyscyplinie matematycznej.
8. Być może ładnie dobrane metafory pojęciowe mogą wspomagać *dydaktykę* matematyki. Ich rola jednak pozostaje pomocnicza – nie wyczerpują one ogółu umiejętności matematycznych. Potwierdzono, iż uczący się matematyki mogą różnić się między sobą w stosowaniu metafor.

Nasze uwagi krytyczne mogą wydawać się bezładną zbieraniną poczynionych *ad hoc* zarzutów, lecz nie było naszym zamiarem podanie jakiejś spójnej, w miarę kompletnej alternatywy dla koncepcji ucieleśnionej matematyki, to przekracza nasze skromne możliwości. Książka Lakoffa i Núñeza zasługuje na krytykę, lecz zasługuje również na uwagę. Jest odważną (w wielu miejscach niestety pochopnie brawurową) próbą zmierzenia się z fundamentalnymi pytaniami dotyczącymi, m.in.: epistemologii matematyki, jej ontologii, fascynującego zjawiska, jakim jest twórczość matematyczna, bardzo trudnych problemów związanych ze skutecznym nauczaniem matematyki, wreszcie miejsca matematyki w całości kultury.

4.3. Dydaktyka matematyki

Nauczać matematyki w szkole trzeba oczywiście w sposób rozważny, biorąc pod uwagę poziom rozwoju intelektualnego uczniów oraz szereg innych czynników, w tym także dojrzałość emocjonalną. Czasami twierdzi się, że dziecko przychodzi do szkoły z ogromnym zasobem własnej kreatywności, ciekawości dla wszystkiego co nowe, zapału poznawczego, a później – w skodyfikowanym programowo procesie edukacji – zalety te traci. Piszący te słowa nie ma doświadczeń dydaktycznych z młodzieżą szkolną, szczęśliwie nie jest też samozwańczym teoretykiem dydaktyki matematyki. Za godne rozważenia uważa jednak umożliwienie uczniom zadziwienia się matematyką, m.in. poprzez ukazanie im przykładów obiektów określanych jako patologiczne. Nie muszą to być twory szalenie skomplikowane – nawet nie powinny być takie, bo przecież nie chodzi o to aby straszyć, lecz aby zachęcać.

Dla przykładu formułować można całkiem zgrabne zagadki matematyczne, w których uczeń mógłby pobawić się pojęciem nieskończoności – pojęciem, bez którego niewyobrażalna jest współczesna matematyka. Rozbieżność szeregu harmonicznego służyć może do formułowania takich zagadek, jak choćby ta dotycząca mrówki drepczącej po doskonale elastycznej linie o początkowej długości np. 1 km, która jednocześnie wydłuża się z (dużą, np. 1 km/sec) jednostajną prędkością, gdzie pytaniem jest, czy mrówka osiągnie w skończonym czasie koniec takiej liny, wyruszając z jej początku i poruszając się z (małą, np. 1 cm/sec) jednostajną prędkością względem liny. Już proste działania na ułamkach pozwalają na uzyskanie (twierdzącej) odpowiedzi na to pytanie, ukazując jednocześnie potęgę matematyki w analizie zjawiska fizycznego, co do przebiegu którego większość ludzi ma złudne przekonania. Innym intrygującym problemem, który powinien – naszym zdaniem – zaciekawić ucznia, jest np. gra planszowa *Armia Conwaya*, której reguły zasadniczo przypominają reguły gry w warcaby. Interesujące jest przy tym, że skończona armia osiągnąć może co najwyżej czwarty poziom w tej grze, a prostym (choć wykorzystującym sumowanie nieskończenie wielu wartości) argumentem wykazać można, że poziom piąty i wyższe są dla takiej armii nieosiągalne. Wydaje nam się, że warto zachęcać młodzież do zajmowania się zagadkami matematycznymi, także takimi, których rozwiązanie wymaga intuicyjnych prób poradzenia sobie np. z pojęciem nieskończoności. Używanie w szkole terminu *patologia* nie jest może wskazane, raczej należy chyba mówić o zagadkach, łamigłówkach, tajemnicach, zaskoczeniach, zadziwieniach itp.

Wśród niedawno opublikowanych zbiorów zagadek matematycznych, które mogą być w takim zaciekawianiu matematyką pomocne, warto naszym zdaniem zwrócić uwagę na: (Havil, 2007, 2008; A. Levitin, M. Levitin, 2011; Petković, 2009; Posamentier, Lehmann, 2013; Winkler, 2004, 2007). Piszący te słowa przygotowuje właśnie do druku zbiór zagadek matematycznych, którego myślą przewodnią jest znana maksyma: *Nic nie jest takie, jakim się wydaje*. Zagadki omawiane w owym tekście dotyczą bowiem przede wszystkim takich sytuacji, w których matematyczna strona badanego zagadnienia zaskakuje, ukazuje złudność iluzorycznych przekonań bazujących na intuicji doświadczenia potocznego.

* * *

Autor uprzejmie dziękuje organizatorom *I Interdyscyplinarnej Konferencji Naukowej Transgresje Matematyczne* (Instytut Matematyki im. KEN w Krakowie, 15–18 czerwca 2014) za umożliwienie mu wygłoszenia odczytu, stanowiącego pierwszą wersję niniejszego tekstu, a także obu anonimowym recenzentom, którzy sformułowali sugestie poprawek oraz inspirujące pytania dotyczące omawianej problematyki. Jeden z recenzentów sugerował próbę zmierzenia się z opracowaniem formalnej teorii, która rozjaśniałaby problemy ontologiczne oraz epistemologiczne dotyczące patologii w matematyce. Zwracaliśmy już uwagę, że obiekty matematyczne nie są patologiami jako takie, ale że *mówimy* o nich w ten sposób w określonym kontekście oraz momencie historycznym. Spoglądamy więc na obiekty badań matematyki zawsze z jakiegoś *punktu widzenia*, określonego werbalizacją żywionych aktualnie intuicji matematycznych. W cytowanej już wcześniej pracy Friedman 1992 autor wyróżnia m.in. następujące punkty widzenia dotyczące teorii mnogości: konstruktywny, borelowski oraz predykatywny. Zapewne także w przypadku innych teorii matematycznych można próbować wydobyć punkty widzenia, które jakoś sterowały rozwojem tych teorii. Wymagałoby to jednak sumiennych studiów historycznych oraz dostrzeżenia trendów tego rozwoju. W przypadku algebry ciekawie ujmuje się te zagadnienia w monografii (Corry, 2004). Punkty widzenia dotyczące rozumienia pojęcia ciągłości analizuje np. monografia (Błaszczyk, 2007).

Literatura

Błaszczyk, P.: 2007, *Analiza filozoficzna rozprawy Richarda Dedekinda Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Wydawnictwo Naukowe AP w Krakowie, Kraków.

Corry, L.: 2004, *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*, Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin.

Dehn, M.: 1902, Ũber den Rauminhalt, *Mathematische Annalen* **55**, 465-478.

Feferman, S., Friedman, H. M., Maddy, P., Steel, J. R.: 2000, Does mathematics need new axioms?, *The Bulletin of Symbolic Logic* **6**, 401-446.

Friedman, H. M.: 1992, The Incompleteness Phenomena, w: F. E. Bowder (ed.), *Mathematics into the Twenty-first Century. 1988 Centennial Symposium, August 8-12*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 49-84.

Gelbaum, B. R., Olmsted, J. M. H.: 1990, *Theorems and Counterexamples in Mathematics*, Springer-Verlag, New York.

Gelbaum, B. R., Olmsted, J. M. H.: 2003, *Counterexamples in Analysis*, Dover Publications, Inc., Mineola, New York.

Hahn, H.: 1956, The crisis of intuition, w: J. R. Newman (ed.), *The World of Mathematics*, vol. **3**, Dover Publications, Inc., Mineola, New York, 1957-1976.

Havil, J.: 2007, *Nonplussed! Mathematical Proof of Implausible Ideas*, Princeton University Press, Princeton and Oxford.

Havil, J.: 2008, *Impossible? Surprising Solutions to Counterintuitive Conundrums*, Princeton University Press, Princeton and Oxford.

Kanamori, A.: 1994, *The Higher Infinite. Large Cardinals in Set Theory from Their Beginnings*, Oxford University Press, New York, Oxford.

Kline, M.: 1994, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Springer-Verlag, Berlin.

Laczkovich, M.: 1990, Equidecomposability and discrepancy: a solution to Tarski's circle squaring problem, *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* **404**, 77-117.

Lakatos, I.: 1976, *Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery*, Cmbridge University Press, Cambridge.

Lakoff, G., Johnson, M.: 1980, *Metaphors we live by*, University of Chicago Press, Chicago.

Lakoff, G., Núñez, R.: 2000, *Where Mathematics Comes From. How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*, Basic Books, New York.

Levitin, A., Levitin, M.: 2011, *Algorithmic Puzzles*, Oxford University Press, New York.

Norwid, C. K.: 1964, Fatum, *Poeci polscy. Cyprian Norwid*, Czytelnik, 89.

Petković, M. S.: 2009, *Famous Puzzles of Great Mathematicians*, The American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.

Pogonowski, J.: 2011, Geneza matematyki wedle kognitywistów, *Investigationes Linguisticae* **23**, 106-147. http://inveling.amu.edu.pl/, http://www.logic.amu.edu.pl/images/3/3c/Littlejill01.pdf.

Pogonowski, J..: 2012, Matematyczne metafory kognitywistów. http://www.logic.amu.edu.pl/images/0/0e/Mmk2012.pdf.

Posamentier, A. S., Lehmann, I.: 2013, *Magnificent Mistakes in Mathematics*, Prometheus Books, Amherst, New York.

Scorpan, A.: 2005, *The Wild World of* 4*-Manifolds*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.

Steen, L. A., Seebach, J. A., Jr.: 1995, *Counterexamples in Topology*, Dover Publications, Inc., New York.

Tarski, A.: 1925, Probléme 38, *Fundamentha Mathematicae* **7**, 381.

Thurston, W.: 1997, *Three-Dimensional Geometry and Topology. Volume 1* (edited by Silvio Levy), Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

Winkler, P.: 2004, *Mathematical Puzzles. A Connoisseur's Collection*, A K Peters, Natick, Massachusetts.

Winkler, P.: 2007, *Mathematical Mind-Benders*, A K Peters, Ltd., Wellesley, MA.

Wise, G. L., Hall, E. B.: 1993, *Counterexamples in Probability and Real Analysis*, Oxford University Press, Oxford University Press.

Wojtylak, P.: 1979, An example of a finite though finitely non-axiomatizable matrix, *Fundamentha Mathematicae* **17**, 39-46.

Zakład Logiki Stosowanej UAM
Al. Niepodległości 4
PL-61-874 Poznań
http: www.logic.amu.edu.pl
e-mail: pogon@amu.edu.pl