FOLIA 163

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia VI (2014)

Anna Pyzara

Przyszli nauczyciele wobec modelowania matematycznego*

Abstract. The term mathematical modelling covers a wide range of activities. These are not only purely mathematical skills, but also skills referring to a framework of modelled situation. For this reason, acquiring the skills of mathematical modelling brings a number of teaching benefits. This ability is connected with necessary competencies related to mathematical modelling. Mathematics students – prospect teachers of mathematics, should acquire these skills before they start teaching mathematical modelling. Is it really so? The paper presents the results of the research on competencies in students' mathematical modelling abilities. We show in what way prospect teachers are able to learn the elements of mathematical modelling on their own. The research proves the need to review the issue of mathematical modelling in the training of mathematics teachers.

1. Modelowanie matematyczne

Modelowanie matematyczne jest jedną z głównych umiejętności matematycznych wymienionych w podstawie programowej (zob. Pod, 2008). Jest to uzasadnione zmieniającymi się celami nauczania matematyki. Wykształcony obywatel ma funkcjonować w kierunku poprawy rzeczywistości. Praktyczne stosowanie wiedzy teoretycznej ma duże znaczenie motywacyjne, co jest bardzo istotne w obliczu spadku motywacji do uczenia się matematyki. Należałoby się zatem spodziewać, iż przyszli nauczyciele posiadają niezbędną wiedzę i umiejętności z tego zakresu. Ale czy tak jest faktycznie? Okazuje się, że w polskiej literaturze dydaktycznej trudno znaleźć informacje na temat modelowania matematycznego. W programie studiów matematycznych równie rzadko pojawia się przedmiot „modelling". Jest to dość zaskakująca sytuacja, zważywszy na fakt, iż w literaturze światowej poświęca się temu zagadnieniu wiele uwagi, a nawet organizowane są konferencje dotyczące tylko tej tematyki.

Czym dokładnie jest modelownie matematyczne? Mogens Niss definiuje je następująco:

---

*Prospect teachers of mathematics and mathematical modelling

2010 Mathematics Subject Classification: Primary: 97M20

Key words and phrases: mathematical modelling, modelling competencies, quality teaching, higher education.

„Modelowanie matematyczne to umiejętność opisywania w języku matematyki rzeczywistej sytuacji, a następnie interpretowania i weryfikowania uzyskanych wyników matematycznych w języku naturalnym, dobierania gotowych modeli matematycznych do sytuacji realnych i poszukiwania sytuacji realnych właściwych dla danych modeli, poddawania refleksji, analizie i krytyce modeli matematycznych zbudowanych przez siebie i innych" (2012).

W innej części artykułu Niss pisze zwięźle: „Matematyczne modelowanie ma miejsce wtedy gdy wybieramy, modyfikujemy i konstruujemy matematyczny model poza-matematycznej sytuacji, począwszy od tworzenia jego zarysu aż do badania w zastosowaniu do tej sytuacji" (2012, s. 50).

W polskiej literaturze dydaktycznej modelowanie matematyczne wiązane jest z pojęciem *matematyzacji*. Ten ostatni termin może być rozumiany bardzo szeroko. Według A. Z. Krygowskiej (1977, s. 48) *matematyzacją* nazywamy między innymi: „konstrukcję matematycznego schematu dla jakiegoś układu stosunków, ujętego przez analizę rzeczywistej, wyobrażonej lub już abstrakcyjnej sytuacji, lub sprecyzowanego w innej dziedzinie pojęć, np. w innej nauce. . . .". M. Major i B. Nawolska (2010, s. 141) stwierdzają, iż „Modele matematyczne są produktem matematyzacji pewnych rzeczywistych sytuacji. . . ". Podobnie pojęcia te rozumie S. Turnau (1985, s. 71-72), który określa matematyzację jako „opisywanie sytuacji konkretnej za pomocą pojęć matematycznych, otrzymany zaś w wyniku matematyzacji opis modelem matematycznym tej sytuacji".

W tych opisach w ukryty sposób zawarta jest informacja o tym, że modelowanie jest procesem. Nie polega ono na jednostkowym akcie wyboru odpowiedniego narzędzia matematycznego (np. równania), za pomocą którego zagadnienie zostanie precyzyjnie opisane. W rzeczywistym procesie modelowania występuje konieczność ustalania zmiennych i stałych, dobierania odpowiednich parametrów, wielokrotne weryfikowanie raz przyjętych założeń, elastyczne rozważanie różnych opcji.

Blum i Ferri (2009) podkreślają znaczenie modelowania w nauczaniu, zwracając uwagę na fakt, iż w dzisiejszym świecie modelowanie matematyczne jest wykorzystywane niemal we wszystkich dziedzinach życia. Jest to efekt rozwoju technologicznego i konieczności połączenia ludzkiej kreatywności z możliwościami, jakie niesie nauka. Piszą (s. 47), iż modelowanie matematyczne:

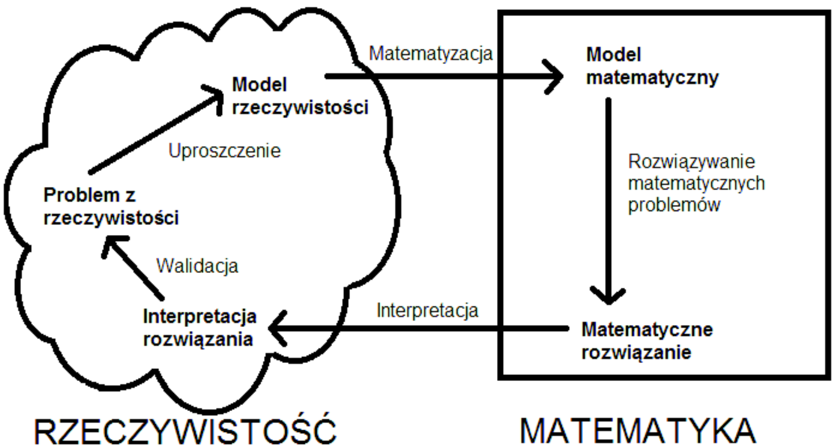
- pomaga uczniom w lepszym rozumieniu świata,
- wspiera nauczanie matematyki (motywacja, tworzenie koncepcji, zrozumienie),
- przyczynia się do rozwoju właściwych postaw oraz rozmaitych kompetencji matematycznych,
- kształtuje właściwy obraz matematyki jako aktywności.

Blum i Ferri zwracają także uwagę na rozdźwięk między postulatami dydaktyków i wskazaniami w programach nauczania a codziennością szkolną. Ich zdaniem znikoma ilość modelowania matematycznego na lekcjach matematyki może wynikać z faktu, iż jest ono trudne dla samych nauczycieli. Odwoływanie się do wiedzy z życia codziennego wiąże się z koniecznością selekcji informacji. Zadania z zakresu modelowania nie są zamknięte pod względem danych, a przez to są mniej przewidywalne co do kierunku pracy i proponowanych rozwiązań. Jednak to właśnie dzięki brakowi ograniczeń ten twórczy proces przynosi tak wiele korzyści.

Widzimy zatem, iż mianem modelowania matematycznego określany jest szeroki zakres aktywności. Kształtowanie tej umiejętności jest związane z nabywaniem różnorodnych kompetencji.

2. Kompetencje w modelowaniu matematycznym

Modelowanie matematyczne jest procesem przyjmującym formę cyklu. Maaß, opierając się na schemacie Bluma z 1996 r., przedstawił go w następującej postaci (patrz: ryc. 1).



Ryc. 1. Proces modelowania matematycznego (Maaß, 2006)

Schemat ukazuje relacje, jakie zachodzą w procesie modelowania między światem rzeczywistym a światem matematyki. Widoczne są etapy tego procesu i aktywności, pozwalające na przechodzenie na kolejne poziomy. Te aktywności związane są ściśle z kompetencjami dotyczącymi modelowania matematycznego. Jak rozumieć ten rodzaj kompetencji? Blum i Ferri (2009, s. 47) definiują *kompetencje modelowania* jako zdolność tworzenia modeli poprzez realizację różnych etapów (procesu modelowania), jak również zdolność do analizy lub porównywania podanych modeli.

Kompetencje związane z modelowaniem matematycznym wykraczają poza wiedzę i umiejętności związane z „czystą" matematyką. Obejmują zrozumienie realnego problemu, utworzenie modelu bazującego na rzeczywistości, utworzenie modelu matematycznego z modelu rzeczywistego, interpretowanie matematycznych wyników w odniesieniu do rzeczywistej sytuacji oraz zatwierdzanie modelu. Te kompetencje są szczegółowo opisywane w literaturze. Przykładowo Maaß (2006, s. 115), powołując się na pracę Blum i Kaiser (1997), podaje następującą listę kompetencji w modelowaniu matematycznym:

1. *Kompetencje w rozumieniu realnego problemu oraz tworzeniu modelu bazującego na rzeczywistości. Kompetencja w:*
   (a) *ustalaniu założeń dotyczących problemu oraz upraszczaniu sytuacji;*
   (b) *rozpoznaniu wielkości mających wpływ na rozpatrywaną sytuację, nazwaniu ich oraz identyfikowaniu kluczowych zmiennych;*
   (c) *konstruowaniu relacji miedzy zmiennymi;*
   (d) *poszukaniu dostępnych informacji oraz rozróżnieniu, które informacje są istotne, a które nie.*
2. *Kompetencje w tworzeniu modelu matematycznego z modelu rzeczywistego. Kompetencja w:*
   (a) *matematyzowaniu istotnych wielkości oraz zależności między nimi;*
   (b) *upraszczaniu istotnych wielkości oraz relacji między nimi, jeśli to konieczne, a także redukowaniu ich liczby oraz złożoności;*
   (c) *wyborze odpowiedniego zapisu matematycznego oraz graficznym przedstawieniu sytuacji.*
3. *Kompetencje w rozwiązywaniu matematycznych komponentów rozpatrywanego modelu matematycznego. Kompetencja w:*
   (a) *stosowaniu strategii heurystycznych takich, jak podział problemu na mniejsze fragmenty (problemy), znalezienie związków z podobnymi lub analogicznymi problemami, parafrazowanie problemu, rozpatrywanie zagadnienia w różnych formach, zmienianie wielkości lub dostępnych danych itd.;*
   (b) *wykorzystaniu wiedzy matematycznej do rozwiązania problemu.*
4. *Kompetencje w interpretowaniu matematycznych wyników w rzeczywistej sytuacji. Kompetencja w:*
   (a) *interpretowaniu matematycznych wyników w pozamatematycznych kontekstach;*
   (b) *uogólnianiu rozwiązań, które pojawiły się przy rozpatrywaniu sytuacji specjalnej;*
   (c) *weryfikowaniu rozwiązań problemu poprzez użycie właściwego matematycznego języka oraz/lub komunikowaniu o tych rozwiązaniach.*
5. *Kompetencje w zatwierdzaniu rozwiązania. Kompetencja w:*
   (a) *krytycznym sprawdzaniu oraz refleksji nad uzyskanymi rozwiązaniami;*
   (b) *przeanalizowaniu fragmentów modelu lub ponownym przejściu przez proces modelowania, jeśli rozwiązania nie pasują do sytuacji;*
   (c) *refleksji dotyczących innych sposobów rozwiązywania problemu, jeśli rozwiązania mogą być opracowane inaczej;*
   (d) *ogólnym kwestionowaniu modelu.*

Niss (2012, s. 51) podkreśla (powołując się także na publikacje Ikeda i Stephens, Stillman, Kaiser i Maaß), że wiedza czysto matematyczna jest niezbędna, lecz niewystarczająca do modelowania. Jego zdaniem nie ma gwarancji na to, że u uczniów pojawi się przełożenie (transfer) umiejętności matematycznych na umiejętności związane z modelowaniem. Stwierdza on, iż w literaturze znajdziemy wiele przykładów na to, że uczniowie z bardzo dobrą wiedzą matematyczną nie są czasami w stanie przełożyć jej na zdolność modelowania. Jednym z powodów tej sytuacji jest to, że założenia, uproszczenia i decyzje dokonywane w procesie modelowania związane są ściśle z pozamatematycznymi aspektami rozważanej sytuacji. Często konieczne jest samodzielne zdobycie danych, dokonanie pomiarów lub odkrycie zależności, opisujących modelowane zjawisko. Takich umiejętności nie kształtuje się u uczniów podczas tradycyjnych lekcji matematyki. Pocieszający jest fakt, iż modelowania (tym samym wspomnianych kompetencji) można efektywnie nauczać, co potwierdza Niss (2012), Warwick (2007), Blum i Ferri (2009) i inni badacze tego zagadnienia.

3. Umiejętności przyszłych nauczycieli matematyki związane z modelowaniem matematycznym – metodologia badań

Opisane powyżej rozważania teoretyczne były podstawą do zbadania, w jakim stopniu studenci kierunków nauczycielskich są w stanie realizować zagadnienia związane z modelowaniem matematycznym.

Badania zostały przeprowadzone w kwietniu 2013 i styczniu 2014 w ramach zajęć z dydaktyki matematyki (1 oraz 3 jednostki lekcyjne). W pierwszym etapie wzięło udział 28 studentów I roku uzupełniających studiów magisterskich o specjalizacji nauczycielskiej – matematyka z informatyką, w drugim etapie grupa badawcza składała się z 13 studentów kontynuujących studia na II roku.

Celem przeprowadzonych badań była wstępna weryfikacja pewnej koncepcji dydaktycznej, dotyczącej wprowadzania studentów w problematykę modelowania matematycznego. W obecnym programie studiów nie ma osobnego modułu, który umożliwiałby realizację tego zagadnienia, dlatego koncepcja musiała być skrótowa. Zamierzałam rozpoznać, czy przyszli nauczyciele matematyki są w stanie posiąść kompetencje związane z modelowaniem matematycznym, poświęcając temu zagadnieniu niewiele czasu (4 jednostki lekcyjne).

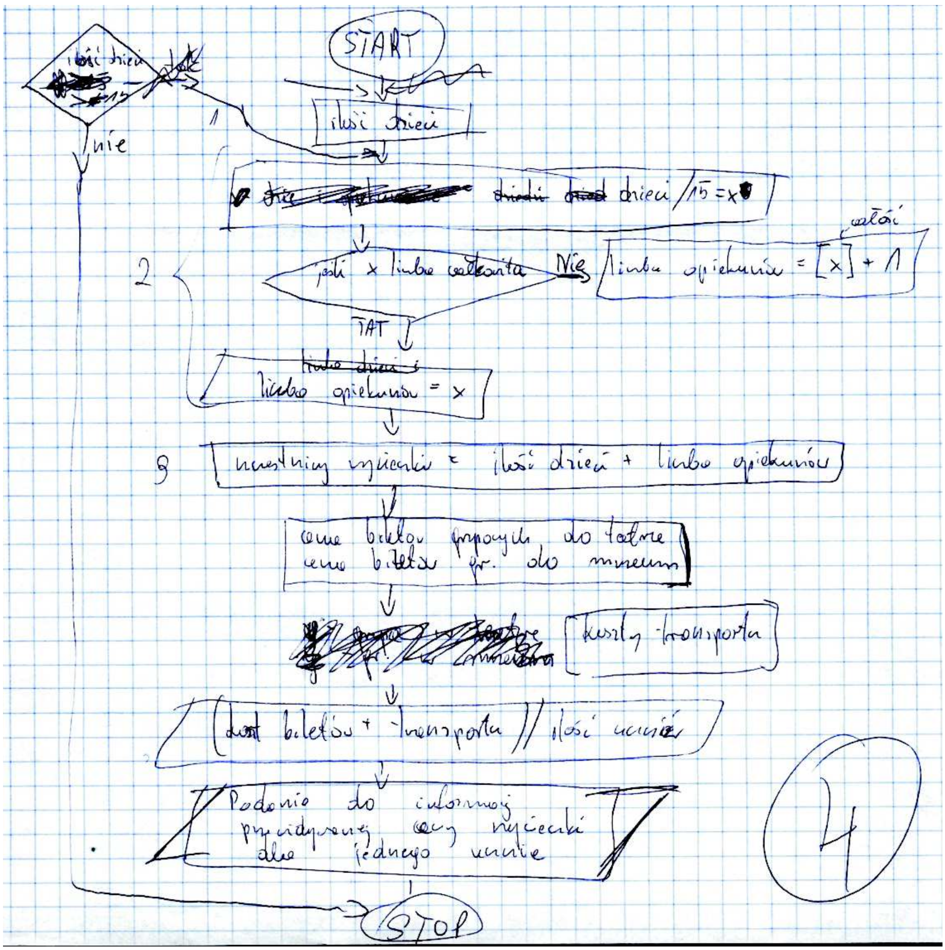
Praca w ramach każdego etapu badań skupiała się wokół sytuacji problemowej zawartej w poleceniu:

Proszę przygotować algorytm, pozwalający wyliczyć koszt jednodniowej wycieczki szkolnej. Schemat powinien być na tyle ogólny i czytelny, aby mógł go wykorzystać inny organizator, planując w następnym roku tę samą wycieczkę.

Dane wejściowe:

- *jest to wycieczka autokarowa,*
- *na 15 uczniów przypada jeden opiekun,*
- *na wycieczkę jadą dzieci z czterech klas,*
- *w programie wycieczki jest wyjście do muzeum i do teatru.*

Podczas pierwszego etapu (w kwietniku 2013) studenci opracowywali zgodny z poleceniem algorytm. Praca ich była anonimowa. W ten sposób zostało wytworzonych 28 propozycji opisu tej sytuacji[1].



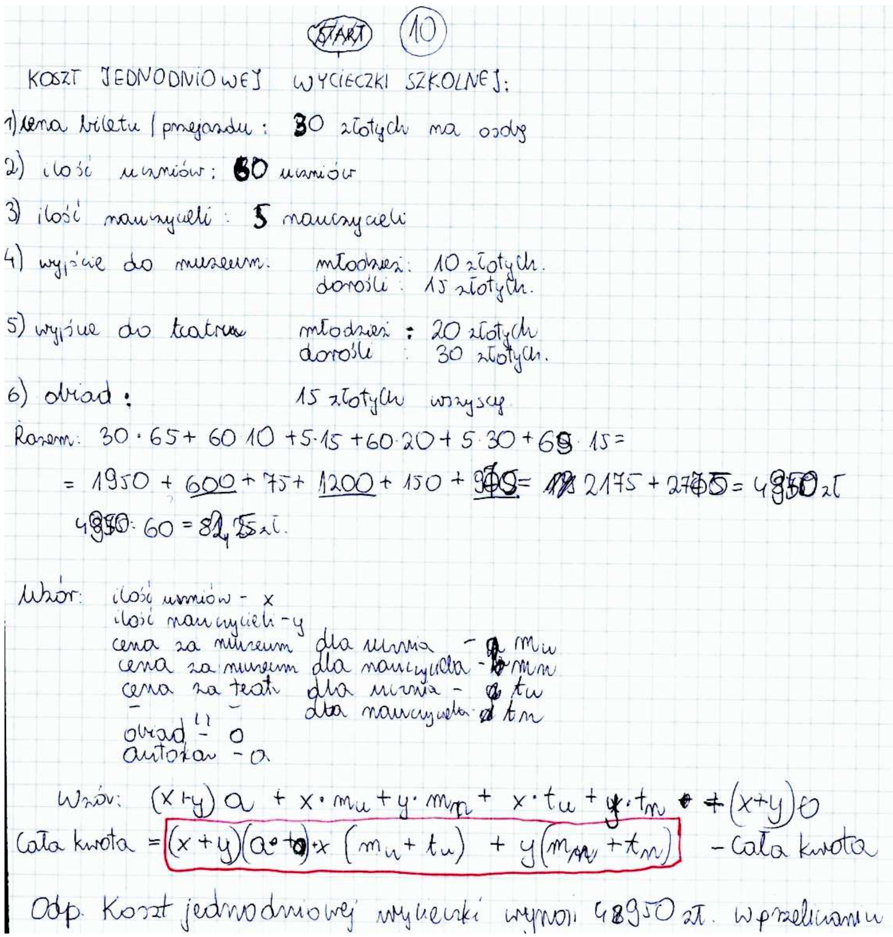
Ryc. 2. Model stworzony przez studenta w pierwszym etapie badań

W ramach drugiego etapu przeprowadziłam ze studentami 3 zajęcia dotyczące modelowania matematycznego.

Zajęcia pierwsze: Na początku studenci wypełniali anonimową ankietę, dotyczącą wiedzy z zakresu modelowania matematycznego (wyniki zostały opisane w osobnym artykule[2]. Następnie zostali podzieleni na trzy grupy i poproszeni o analizę przykładowych 5 modeli związanych z wyznaczaniem kosztu jednodniowej wycieczki szkolnej (tych samych w każdej grupie), które rok wcześniej sami stworzyli. Jeden z takich modeli przedstawiam poniżej.

[1] Analiza wspomnianych prac znajduje się w (Pyzara, 2014).

[2] A. Pyzara: Many faces of mathematical modelling w: *XIX Czech-Polish-Slovak Mathematical Conference. Karpacz 2014* (w druku).



START (10)

KOSZT JEDNODNIOWEJ WYCIECZKI SZKOLNEJ:

1) cena biletu / przejazdu: 30 złotych na osobę

2) ilość uczniów: 60 uczniów

3) ilość nauczycieli: 5 nauczycieli

4) wyjście do muzeum. młodzież: 10 złotych. dorośli: 15 złotych.

5) wyjście do teatru młodzież: 20 złotych dorośli: 30 złotych.

6) obiad: 15 złotych wszyscy

Razem: 30 · 65 + 60 10 + 5·15 + 60·20 + 5·30 + 65·15 =

= 1950 + 600 + 75 + 1200 + 150 + 975 = 2175 + 2775 = 4950 zł

4950 : 60 = 82,5 zł.

Wzór: ilość uczniów - x
ilość nauczycieli - y
cena za muzeum dla ucznia - m_u
cena za muzeum dla nauczyciela - m_n
cena za teatr dla ucznia - t_u
dla nauczyciela t_n
obiad - o
autokar - a

Wzór: $(x+y)a + x \cdot m_u + y \cdot m_n + x \cdot t_u + y \cdot t_n + (x+y)o$

Cała kwota = $\boxed{(x+y)(a+o) + x(m_u + t_u) + y(m_n + t_n)}$ - Cała kwota

Odp. Koszt jednodniowej wycieczki wynosi 4950 zł. w przeliczaniu

Ryc. 3. Model stworzony przez studenta w pierwszym etapie badań

Wybrane schematy różniły się poziomem poprawności. Zadaniem studentów było wypisanie błędów pojawiających się w tych pracach oraz podanie wskazówek, w jaki sposób należy pracować z tego typu zadaniami, aby unikać błędów. Propozycje studentów były potem dyskutowane na forum grupy. Po wskazaniu jakiegoś błędu formułowałam wraz ze studentami wskazówkę, w jaki sposób tego błędu unikać. Między innymi dyskutowaliśmy modele widoczne na rycinie 2 i 3.

Zajęcia drugie: Po omówieniu uwag studentów przedstawiłam prezentację, dotyczącą modelowania matematycznego. (Poruszałam w niej m.in. następujące zagadnienia: co to jest modelowanie matematyczne, jakie są etapy modelownia, wskazówki Warwicka[3] dotyczące umiejętności modelowania, co to jest algorytm, jego cechy i formy). Następnie studenci otrzymali karty z listą kompetencji związanych z modelowaniem matematycznym. Listę tę, pochodzącą z pracy Maaß (2006, s. 115), przedstawiłam w części teoretycznej tego artykułu.

[3]Patrz: (Warwick, 2007, s. 32-41).

W tej części zajęć badani zostali podzieleni na 4 grupy. Mieli podać, które z powyższych kompetencji są potrzebne podczas pracy z analogicznymi zadaniami do omawianego wcześniej.

Zajęcia trzecie: Podczas omawianych zajęć skupiłam się na ukazaniu modelowania matematycznego w formie algorytmu, w związku z czym w dalszej części pracy stworzyłam wspólnie ze studentami 3 algorytmy (modele matematyczne przedstawione w tej formie), rozwiązujące problemy matematyczne, np. rozpoznawanie wzajemnego położenia dwóch okręgów.

Studenci pracowali wspólnie nad algorytmem zapisywanym na tablicy, podczas gdy prowadząca zajęcia udzielała wskazówek i czuwała, aby ostateczna wersja algorytmu była poprawna.

W ramach pracy domowej studenci zostali poproszeni o ponowne stworzenie modelu, wyznaczającego koszt wycieczki szkolnej. Realizowali zadanie (to samo polecenie posłużyło do stworzenia modeli (kwiecień 2013)), które analizowali pod kątem poprawności.

Z każdym z tych etapów łączyły się pytania badawcze.

A. Pytania związane z pierwszymi zajęciami, szczególnie z częścią dotyczącą oceny przedstawionych prac:

Analiza przebiegu tej części zajęć posłużyła do odnalezienia odpowiedzi na pytanie: **Jakich elementów modelowania matematycznego mogą uczyć się studenci, analizując przykładowe prace?**

Pomocne były następujące szczegółowe pytania badawcze:

- Które błędy odnajdą studenci? Na co zwrócą uwagę?
- Czy badani wskażą wszystkie istotne błędy w pracach?
- Czy przyszli nauczyciele potrafią wyciągać wnioski bez pomocy prowadzącego zajęcia? Czy potrafią formułować wskazówki, a jeżeli tak, to jakie one będą?

Oczekiwałam, iż badani, analizując modele o różnych poziomach poprawności, wyciągną wnioski, co do sposobu pracy z tego typu poleceniami. Miałam nadzieję, iż wskazane zostaną wszystkie istotne błędy oraz zostaną zaproponowane sugestie, w jaki sposób należy pracować, aby uniknąć wskazanych błędów.

B. Pytania dotyczące refleksji przyszłych nauczycieli nad kompetencjami związanymi z modelowaniem matematycznym

Ten etap pracy miał za zadanie sprowokować do refleksji nad własną pracą i przygotować do budowania teoretycznego podejścia do modelowania. Pytania badawcze związane z tym etapem są następujące:

- Jakie kompetencje związane z modelowaniem studenci uznają za podstawowe?
- Które z kompetencji znajdujących się na liście zidentyfikowali studenci w swojej własnej pracy?
- Które z proponowanych kompetencji zostały odrzucone przez studentów i dlaczego?

Odpowiedzi studentów posłużyły do rozpoznania, z jakimi kompetencjami łączą oni problemy, wymagające modelowania matematycznego. Interesowało mnie, czy respondenci widzą potrzebę posiadania umiejętności z każdej z pięciu grup. Interesowało mnie także, czy deklarowane umiejętności (użyte w omawianym zadaniu) są zgodne z efektami pracy studentów.

C. Pytania związane z efektami zaznajamiania studentów z problemem modelowania matematycznego

Analiza ponownie stworzonych modeli matematycznych, wyznaczających koszt wycieczki szkolnej i porównanie ich z poprzednimi, posłużyła poszukiwaniu odpowiedzi na następujące pytania badawcze:

- Czy nowe modele wyznaczające koszt wycieczki są lepsze pod względem poprawności?
- Czy przyszli nauczyciele uwzględniali w swej pracy omawiane wskazówki?
- Jaki wpływ na pracę studentów ma zaznajomienie ich z teoretycznym ujęciem procesu modelowania?
- Czy studenci nadal popełniali te same błędy? Jeśli tak, to które?

Ten etap pracy miał być odpowiedzią, w jakim stopniu zaproponowany cykl zajęć spełnił swoje zadanie. Zdaję sobie sprawę, że proponowane zajęcia nie wyczerpują tematyki związanej z kształtowaniem postaw i umiejętności związanych z modelowaniem matematycznym. Jednak zajęcia odbywały się w obrębie takiego harmonogramu studiów, w którym nie został wydzielony czas, na pełne opracowanie tego zagadnienia.

4. Pierwsze modele studentów wyznaczające koszt wycieczki szkolnej

Analiza modeli stworzonych przez studentów w kwietniu 2013 r. ukazała liczne braki w umiejętnościach przyszłych nauczycieli z zakresu tworzenia matematycznego modelu sytuacji znanej z życia codziennego. Studenci matematyki potraktowali podane zagadnienie w sposób dość odległy od oczekiwań. Najczęściej ograniczyli swe rozwiązania do pierwszego matematycznego sformułowania modelu. Wielokrotnie wykorzystywali jedynie dane zamieszczone w zadaniu (i to nie zawsze poprawnie). Jeżeli wprowadzali dane dodatkowe, to często nie potrafili sobie poradzić z ich złożonością. Przykład jednego z takich podejść zaprezentowałam w części metodologicznej tego artykułu.

W żadnej z prac nie jest widoczny proces udoskonalania modelu, polegający na testowaniu i poprawianiu roboczego modelu (patrz: Warwick, 2007, s. 33). Wśród 28 schematów tylko 12 działa prawidłowo, co jest zdecydowanie niezadowalającym rezultatem. Pojawiającymi się błędami były:

- niedostrzeganie wszystkich zależności pomiędzy zmiennymi lub ich błędny zapis,
- ustalanie stałych wartości dla zmiennych, powodujące zawężenie sytuacji ogólnej do konkretnego przypadku,

- używanie tych samych oznaczeń dla różnych zmiennych,
- pomijanie rozważenia wszystkich możliwości, co przy pewnych danych powoduje, że nie można zakończyć działania algorytmu,
- nierozważenie konieczności zaokrąglenia liczby opiekunów, gdy wynik obliczeń nie był liczbą całkowitą,
- wieloznaczny, nieprecyzyjny, czasem niezrozumiały i potoczny zapis operacji,
- niepoprawny zapis algorytmu:
  - pomylone funkcje skrzynek blokowych;
  - brak początku i końca algorytmu;
  - brak wszystkich połączeń pomiędzy blokami (skrzynki decyzyjne z tylko jedną drogą wyjścia, gdyż druga opcja, nie została uwzględniona);
  - nieużywanie słów (sformułowań) kluczy, tj. dopóki…, wykonuj…; jeżeli…, to …, w przeciwnym wypadku (w formach opisowych),
- brak specyfikacji algorytmu.

Pomimo różnorodnych błędów pojawiających się w pracach wiele osób zaprezentowało model stworzony w oparciu o przemyślaną koncepcję, precyzyjnie ukazującą zależności między danymi przedstawionymi w postaci zmiennych. Reprezentują oni postawę typową dla matematyka, rozwiązującego problem metodami matematycznymi. Był to wynik, który dawał nadzieję na podniesienie kompetencji pozostałych studentów.

5. Analiza modeli z pierwszego etapu badań dokonana przez studentów

W drugim etapie uczestniczyło 13 osób. Studenci, pracując w trzech grupach, analizowali pod względem poprawności 5 modeli, stworzonych przez nich w pierwszym etapie. Teraz ich zadaniem było wypisanie listy błędów oraz podanie wskazówek, które byłyby pomocne przy pracy z tego typu zadaniami. Następnie liderzy grup mieli zaprezentować wyniki swej pracy. Miałam nadzieję, że badani dostrzegą, jakie błędy popełnili i wyciągną konstruktywne wnioski, przez co zwiększą się ich kompetencję związane z modelowaniem matematycznym.

Okazało się, iż przyszli nauczyciele skupili się tylko na wypisaniu błędów. Nie podali żadnych wskazówek dotyczących tego, jak należy pracować, aby uniknąć zauważonych pomyłek. Świadczy to o niewykształconym u nich podejściu dydaktycznym, które pozwala nie tylko punktować błędy, lecz zmusza do zastanowienia się nad tym, co zrobić, aby było lepiej.

Pocieszający jest fakt, iż każda z grup dostrzegła w analizowanych modelach niemal wszystkie istotne błędy. Porównywanie algorytmów pozwoliło badanym dostrzec szereg nieprawidłowości, które można podzielić na następujące grupy błędów:

- używanie nieuprawnionych stałych wartości,
- nieprawidłowy zapis związków między zmiennymi,
- niedostrzeganie wszystkich zależności,

- stosowanie takich samych oznaczeń dla różnych zmiennych,
- brak uwzględnienia rodzaju danych,
- problemy w graficznym zapisie modelu (nieczytelność),
- używanie niezrozumiałych poleceń,
- brak deklaracji zmiennych,
- niezrozumienie treści zadania,
- nieuwzględnianie rzeczywistego aspektu problemu.

Najczęściej wymienianym błędem było stosowanie stałych wartości, powodujące ograniczenie algorytmu do konkretnego przykładu. Studenci kilkakrotnie zwracali uwagę na nieuwzględnianie wszystkich zależności między zmiennymi oraz na problemy z graficznym zapisem algorytmu. Z dydaktycznego punktu widzenia niepokojące jest, że studenci nie zwracali uwagi na proces tworzenia modelu. Interesował ich jedynie gotowy produkt i tutaj wyróżniali błędy. Warto byłoby również szerzej przedyskutować zagadnienie wprowadzania stałych. Być może takie podejście można potraktować jako etap przejściowy przed stosowaniem zmiennych?

Badani dostrzegli także błędy wynikające z nieuwzględnienia realnego aspektu rozpatrywanej sytuacji. Świadczy to o zrozumieniu przez nich potrzeby odnoszenia modelu matematycznego do rzeczywistości, w której obsadzona jest rozpatrywana sytuacja. Tym samym wypowiedzi studentów sugerują, iż dostrzegają oni w procesie modelowania matematycznego kompetencje, wykraczające poza „czystą" matematykę.

6. Teoretyczne kompetencje związane z modelowaniem, które zaakceptowali studenci

Zanim przyszli nauczyciele zostali poproszeni o ponowne stworzenie modelu obliczającego koszt wycieczki, zapoznali się z listą kompetencji związanych z modelowaniem matematycznym, podaną przez Maaßa (2006). Pracując w trzyosobowych grupach, mieli zastanowić się i podać, które z tych kompetencji są potrzebne przy rozwiązywaniu problemów, takich jak ten z modelem dla obliczenia kosztu wycieczki. Odpowiedzi badanych widoczne są w tabeli 1.

Tab. 1. Kompetencje wskazane przez badanych

Grupa	1)				2)			3)		4)			5)			
	a	b	c	d	a	b	c	a	b	a	b	c	a	b	c	d
1			√	√	√											
2			√	√	√				√							
3			√	√	√		√		√							
4		√		√	√				√							

Pierwsze spojrzenie na tabelę pokazuje, że odpowiedzi studentów niemalże pokrywają się we wszystkich grupach. Dlatego wydaje się, że taki rozkład może świadczyć o ogólnym rozumieniu przez studentów zagadnienia modelowania matematycznego.

Zajmę się najpierw tymi obszarami, które nie zostały uwzględniane przez studentów. W grupie pierwszej, dotyczącej *rozumienia realnego problemu oraz tworzenia modelu bazującego na rzeczywistości,* nikt nie dostrzegł potrzeby (1a) *ustalania założeń dotyczących problemu oraz upraszczania sytuacji.* Tylko jedna grupa zaznaczyła ważność (1b) *rozpoznania wielkości mających wpływ na rozpatrywaną sytuację, nazwania ich oraz identyfikowania kluczowych zmiennych.* Wydaje się, że na taki wynik ma wpływ szkolne podejście do zadań, w których problem (i pytanie) jest wyraźnie sformułowane. Studentom prawdopodobnie brakuje rozeznania, że tworzenie modelu podyktowane jest potrzebą rozwiązania określonego problemu. Być może na taką postawę badanych wpływał też fakt, że w zadaniu pytanie było już sformułowane.

W drugiej grupie pytań znów nikt nie podkreślił konieczności (2b) *upraszczania istotnych wielkości oraz relacji między nimi, jeśli to konieczne, a także redukowania ich liczby oraz złożoności.* Jest to kolejny fakt mówiący, w jaki sposób studenci odnoszą się do istnienia założeń w procesie modelowania. Taka postawa znów wynika z doświadczeń przy rozwiązywaniu zadań szkolnych – tam wszystkie podane informacje musiały być uwzględniane. Równie charakterystyczne jest odrzucenie punktu (3a) mówiącego o *stosowaniu strategii heurystycznych, takich jak podział problemu na mniejsze fragmenty (problemy), znalezienie związków z podobnymi lub analogicznymi problemami, parafrazowanie problemu, rozpatrywanie zagadnienia w różnych formach, zmienianie wielkości lub dostępnych danych itd.* Taka postawa była zresztą widoczna w pracy studentów, gdzie trudno było się dopatrzeć stosowania jakichkolwiek technik heurystycznych.

Pozostałe obszary (4 i 5) dotyczyły weryfikowania modelu w rzeczywistości. Tutaj ani jeden student nie zaznaczył żadnego obszaru. Świadczy to o niedostrzeganiu przez badanych potrzeby weryfikacji i refleksji nad stworzonym modelem. Wygląda na to, że nie widzą oni potrzeby sprawdzania takich związków. To też być może skutek szkolnego nauczania, tzw. zadania o treści realistycznej nie musiały mieć związku z otaczającą rzeczywistością.

Co zatem studenci uznali za istotne? Wszyscy studenci zgodnie orzekli, iż do modelowania sytuacji znanej z życia codziennego potrzebna jest umiejętność poszukiwania dostępnych informacji oraz rozróżnienia, które informacje są istotne, a które nie, a także umiejętność matematyzowania istotnych wielkości oraz zależności między nimi. Większość przyszłych nauczycieli dostrzega potrzebę posiadania kompetencji do konstruowania relacji między zmiennymi oraz do wykorzystywania wiedzy matematycznej do rozwiązywania problemu. Można zatem podsumować, że studenci podkreślili te elementy aktywności, które kojarzą z zajęć matematycznych.

Okazuje się dodatkowo, iż kompetencje, które wskazali studenci, idealnie pokrywają się z tymi, które można dostrzec, analizując modele zbudowanie przez nich w dalszej pracy. Widzimy więc, iż przyszli nauczyciele potrafią bardzo dobrze rozpoznać wykorzystywane przez siebie umiejętności. Identyfikują się z nimi i realizują je we własnej pracy. Niestety brak wskazania kompetencji z grupy 4 i 5 także pokrywa się z nieobecnością tych działań podczas budowania modelu.

7. Efekty nauczania modelowania matematycznego w praktyce

Krytyczna obserwacja własnych modeli pozwoliła studentom zauważyć błędy, jakie popełnili. Zostali wyczuleni na to, czego powinni unikać podczas modelowania matematycznego. Studenci wprawdzie nie podali, w jaki sposób należy postępować przy tego typu zadaniach, ale wyciągnęli pewne wnioski.

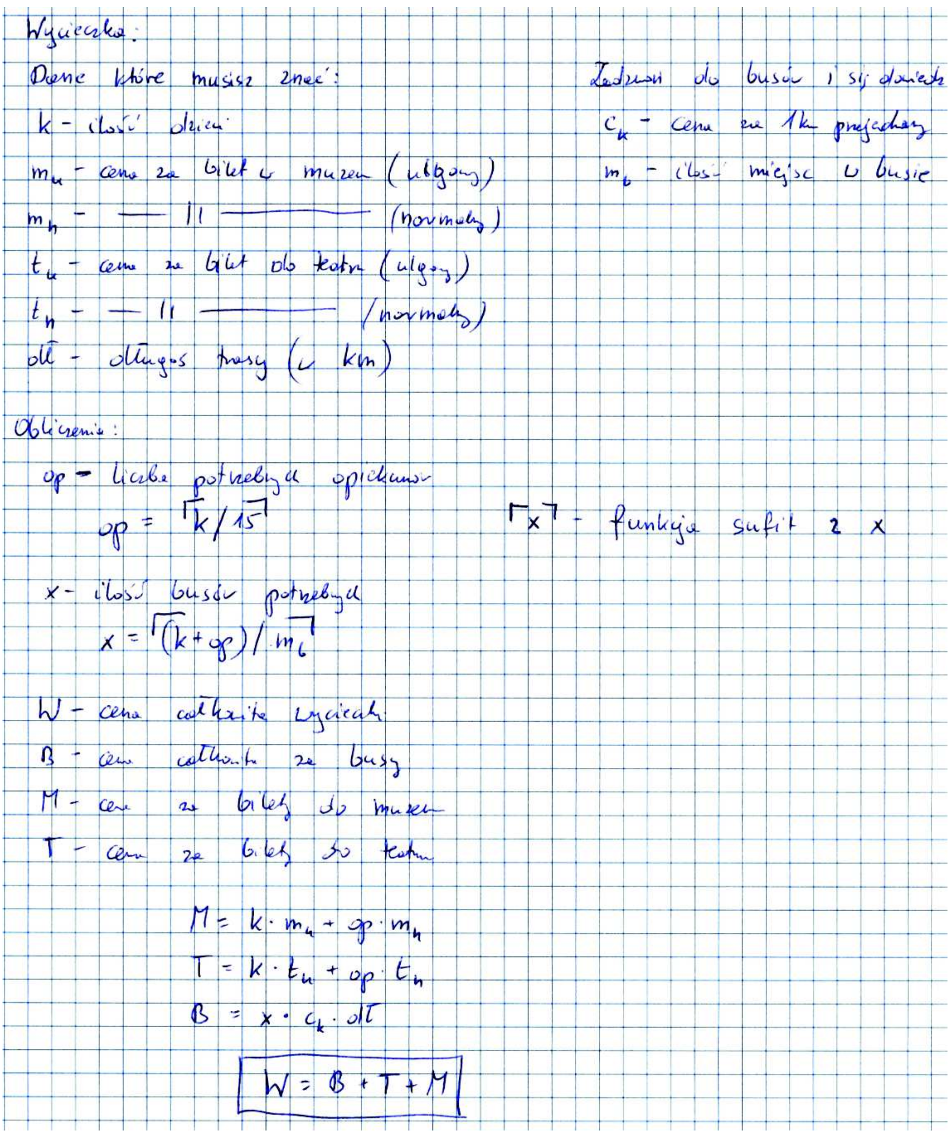
Analiza porównawcza dwóch grup rozwiązań pozwoliła zaobserwować pewne zmiany w sposobie pracy badanych nad modelem matematycznym wyznaczającym koszt wycieczki szkolnej. Nowe modele ukazują, iż większość badanych wzięła pod uwagę doświadczenie zdobyte podczas analizy przykładowych modeli, a tym samym świadczy to o poszerzeniu przez studentów swych kompetencji związanych z modelowaniem matematycznym.

Najbardziej widoczną zmianą jest sposób ukazywania danych. Teraz wszyscy badani wyjaśnili oznaczenia używanych zmiennych. Nikt już nie użył tych samych nazw dla różnych zmiennych. Wyraźnie zmniejszyła się liczba używanych nieuprawnionych stałych ograniczających ogólność modelu. Pomimo iż stałe wartości pojawiają się w 30% modeli z obu grup, to w drugiej pojawiają się one rzadziej i dotyczą mniejszej liczby danych. Studenci poprawili swe umiejętności dotyczące rozpoznawania wielkości, mających wpływ na rozpatrywaną sytuację, nazywania ich oraz identyfikowania kluczowych zmiennych. Badani rozwinęli także swe kompetencje konstruowania relacji między zmiennymi oraz matematyzowania istotnych wielkości i zależności między nimi. Świadczy o tym fakt, iż większość nowych prac stworzono w oparciu o dobrą koncepcję rozwiązania problemu, dostrzegano i precyzyjnie zapisywano zależności między zmiennymi.

Niestety, pomimo iż widać w algorytmach większą staranność w precyzyjnym zapisie zależności między zmiennymi, to w drugiej grupie tylko 25% algorytmów działa prawidłowo, podczas gdy w pierwszej poprawnych algorytmów było 43%. Jest to dość zaskakująca sytuacja, gdyż w nowych modelach pojawia się znacznie mniej istotnych błędów. Jednak drobne nieprawidłowości skutkują niepowodzeniem w działaniu algorytmów. Podczas tworzenia drugiej wersji modelu badani nie testowali ani nie weryfikowali algorytmów, ograniczając się jedynie do utworzenia modelu. Oznacza to, iż u badanych wciąż nie rozwinęły się kompetencje związane z zatwierdzaniem rozwiązania oraz z interpretowaniem matematycznych wyników w rzeczywistej sytuacji. Takie działania pozwoliłyby uniknąć błędów, dotyczących np. braku uzależnienia liczby autokarów od liczby uczestników wycieczki, czy też niezaokrąglenia liczby opiekunów do liczby całkowitej.

Została rozwinięta umiejętność wykorzystywania wiedzy matematycznej do rozwiązywania problemu. Częściej stosowano funkcję „sufit", zaokrąglającą z nadmiarem liczby mieszane do liczb całkowitych (tylko w jednej pracy pojawił się błąd związany z niedostosowaniem typu danych). Trudno jednak stwierdzić, czy ta zmiana była wynikiem zwiększenia kompetencji studentów w tym obszarze, czy też badani po analizie przykładowych prac uświadomili sobie, iż w ten sposób mogą zastąpić stosowane za pierwszym razem instrukcje warunkowe (w nowych modelach nie znalazła się żadna instrukcja warunkowa). W obu grupach prac widać, iż studenci posiadają kompetencję poszukiwania dostępnych informacji oraz do rozróżnienia, które informacje są istotne, a które nie. Potwierdza to fakt, iż w połowie wszystkich prac badani uwzględnili dodatkowe koszty, które uznali za istotne w rozpatrywanej sytuacji.

Zdecydowanej poprawie uległa czytelność modeli matematycznych. Badani postarali się o odpowiedni zapis matematyczny. Nie było już prac chaotycznych, nieczytelnych i trudnych do zrozumienia. Jednak wśród nowych modeli nie pojawiły się algorytmy w formie schematu blokowego, a więc nie można stwierdzić, czy badani potrafią przedstawić schemat w postaci graficznej. Przykład modelu matematycznego (wyznaczającego koszt wycieczki szkolnej), zbudowanego przez studenta w drugim etapie badań został przedstawiony na rycinie 4.


Wycieczka:

Dane które musisz znać:

k – ilość dzieci

m_u – cena za bilet w muzeum (ulgowy)

m_n – —— || —— (normalny)

t_u – cena za bilet do teatru (ulgowy)

t_n – —— || —— (normalny)

dl – długość trasy (w km)

Zadzwoń do busów i się dowiedz

c_k – cena za 1km przejazdu

m_b – ilość miejsc w busie

Obliczenia:

op – liczba potrzebnych opiekunów

$op = \lceil k/15 \rceil$

$\lceil x \rceil$ – funkcja sufit z x

x – ilość busów potrzebnych

$x = \lceil (k+op)/m_b \rceil$

W – cena całkowita wycieczki

B – cena całkowita za busy

M – cena za bilety do muzeum

T – cena za bilety do teatru

$M = k \cdot m_u + op \cdot m_n$

$T = k \cdot t_u + op \cdot t_n$

$B = x \cdot c_k \cdot dl$

$\boxed{W = B + T + M}$

Ryc. 4. Model matematyczny zbudowany przez studenta w drugim etapie badań

Analiza dwóch grup prac pokazała, iż badani poszerzyli swe kompetencje z zakresu modelowania matematycznego. Przyszli nauczyciele, dostrzegając wszystkie istotne błędy w przykładowych algorytmach, wyraźnie starali się ich nie popełniać. Te zmiany ukierunkowane były głównie na poprawność matematyczną. Jednak samo analizowanie przykładowych modeli nie umożliwia rozwoju wszystkich umiejętności potrzebnych do modelowania matematycznego. Porównując dawne prace, badani dostrzegali rolę rzeczywistych aspektów w budowaniu matematycznego modelu sytuacji znanej z codzienności. Nie miało to jednak przełożenia na weryfikowanie czy testowanie ponownie stworzonych modeli. Nie brali pod uwagę faktu, że budowanie modelu z konieczności musi wiązać się z upraszczaniem sytuacji, wprowadzaniem pewnych założeń. Nie podkreślali, że to od osoby tworzącej model wymaga się uzupełnienia danych. U badanych nie pojawiła się świadomość, iż można poszukiwać różnych rozwiązań tego problemu, w związku z czym ograniczyli się do stworzenia jednej propozycji modelu. Najważniejszy jest jednak fakt, iż studenci nadal nie przeprowadzają testowania zaproponowanego przez siebie rozwiązania – nie podstawiają rzeczywistych danych (nie wykonują swego algorytmu), co pomogłoby wykluczyć błędy pojawiające się w modelach. Jednak pomimo iż w pracy studentów nad tworzeniem modeli matematycznych w drugim etapie badań nadal pojawiają się liczne uchybienia, to widoczne są pozytywne zmiany, które pojawiły się wskutek przeprowadzonych zajęć.

8. Podsumowanie

Modelowanie matematyczne jest pojęciem kryjącym w sobie szereg aktywności. Dotyczą one nie tylko umiejętności czysto matematycznych, lecz odnoszą się także do rzeczywistości, w której rozpatrywana jest modelowana sytuacja. Z tego powodu umiejętność pracy nad modelowaniem matematycznym w środowisku szkolnym jest jedną z kompetencji, którą powinien posiadać nauczyciel.

Przeprowadzone badania pokazały, iż studenci mogą uczyć się elementów modelowania, analizując i porównując przykłady modeli tej samej sytuacji, będące na różnym poziomie poprawności. Dodatkowo można było zauważyć pozytywny wpływ zestawienia procesu modelowania z procesem algorytmizowania. Takie działanie pozwala dostrzec większość istotnych błędów pojawiających się w modelach i unikać ich w swej dalszej pracy, co też badani uczynili w dużym stopniu. Kompetencje ukazane przy modelowaniu idealnie pokrywają się z tymi, które sami wskazali jako przydatne przy tego typu problemach. Niestety te kompetencje, których są świadomi, pokrywają się na ogół z takimi, które można wykształcić, rozwiązując klasyczne zadania matematyczne. Studenci w bardzo małym stopniu są wyczuleni na weryfikację raz zbudowanego modelu. Nie pojawia się u nich refleksja nad raz rozwiązanym problemem. Badani poproszeni o wskazanie błędów w algorytmach i podanie wskazówek, w jaki sposób ich unikać, ograniczyli się jedynie do wypunktowania nieprawidłowości, bez podania, jak się ich wystrzegać. Analiza przeprowadzonego rozpoznania wskazuje, iż przyszli nauczyciele w swych działaniach skupiają się głównie na uzyskaniu „wyniku": czy to w formie liczby, modelu, czy listy błędów. Zapominają o dydaktycznych korzyściach płynących z analizy problemu, refleksji nad uzyskanym rozwiązaniem czy poszukiwania innych rozwiązań tego samego problemu. Warto w pracy zarówno ze studentami, jak i uczniami zwracać uwagę na te aspekty procesu rozwiązywania problemu, które wykraczają poza same obliczenia, a także poza czystą matematykę, a dotyczą rzeczywistości. Takie działania przyniosą wiele korzyści nie tylko na lekcjach matematyki, lecz także w codziennym życiu.

Literatura

Blum, W., Ferri, R.: 2009, Mathematical modelling: Can it be taught and learnt?, *Journal of Mathematical Modelling and Application* **1**(1), 45-58.

Krygowska, Z.: 1977, *Zarys dydaktyki matematyki,* cz. 1, WSiP, Warszawa.

Maaß, K.: 2006, What are modelling competencies?, *ZDM* **38**(2), 115-117.

Major, M., Nawolska, B.: 2010, Matematyzacja, modelowanie, model, *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **III**, 141-166.

Niss, M.: 2012, Models and modelling in mathematics education, *EMS Newsletter* **86**, 49-52.

Pod.: 2008, Podstawa programowa z komentarzami. T. 6. Edukacja matematyczna i techniczna w szkole podstawowej, gimnazjum i liceum: matematyka, zajęcia techniczne, zajęcia komputerowe, informatyka.

Pyzara, A.: 2014, Modelowanie matematyczne sytuacji znanej z życia codziennego, *Współczesne Problemy Nauczania Matematyki* **5**, 233-255.

Turnau, S.: 1985, Zadania tekstowe i nauczanie stosowania pojęć matematycznych, w: Z. Semadeni (red.), *Nauczanie początkowe matematyki. Podręcznik dla nauczyciela, tom 3*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa.

Warwick, J.: 2007, Some reflections on the teaching of mathematical modeling, *The Mathematics Educator* **17**(1), 32-41.

Instytut Matematyki
Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej w Lublinie
ul. Radziszewskiego 10
PL-20-030 Lublin
e-mail: anna.pyzara@gmail.com