FOLIA 196

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia VII (2015)

ISSN 2080-9751

Heinrich Weber

Podręcznik algebry. Wprowadzenie*

W naszych rozważaniach przyjmujemy, że *liczby naturalne* $1, 2, 3, \ldots$ oraz reguły, wedle których rachuje się na tych liczbach, są znane i wprzódy podane. Podstawowymi sposobami rachowania, tak zwanymi *czterema podstawowymi działaniami arytmetycznymi*, są: *dodawanie*, *mnożenie*, do którego przynależy też potęgowanie traktowane jako powtarzanie mnożenia, *odejmowanie* oraz *dzielenie*. Pierwsze dwa nazywają się bezpośrednimi sposobami rachowania; wyróżniają się one tym, że mogą być bez ograniczeń wykonywane w świecie liczb naturalnych. Pierwsza z niebezpośrednich lub odwrotnych operacji, odejmowanie, jest wykonalna jedynie wtedy, gdy odjemna jest większa od odjemnika.

Cel dzielenia można pojmować na dwa sposoby. W pierwszym elementarnym ujęciu pyta się, ile razy dzielnik *zawarty* jest w dzielnej. Liczba nie jest zawarta w liczbie od niej mniejszej. Jeśli jednak dzielna jest równa lub większa od dzielnika, to odpowiedź na pytanie o wynik dzielenia daje *iloraz* oraz w większości przypadków *resztę*, która jest mniejsza od dzielnika. Jeśli nie pozostaje żadna reszta, to mówi się o *dzieleniu bez reszty*, lub że *dzielna jest podzielna przez dzielnik*, lub że *dzielnik jest czynnikiem* liczby, która przedstawia dzielną.

Ten cel, który stawia się już na pierwszych poziomach sztuki rachowania, prowadzi do głębiej leżącego rozróżnienia liczb, będącego podstawą całej teorii liczb.

Ponieważ czynnik nigdy nie może być większy od liczby, której jest czynnikiem, każda liczba ma tylko skończoną liczbę czynników. Każda liczba jest podzielna przez 1 oraz przez siebie samą, a liczba, która nie ma poza tym żadnych dzielników, nazywa się *liczbą pierwszą*. Samej liczby 1 z określonych powodów nie zalicza się do liczb pierwszych. Jeżeli dwie liczby są podzielne przez trzecią, to również suma oraz różnica obu pierwszych jest podzielna przez trzecią; a jeśli jakaś liczba jest podzielna przez drugą, a ta druga przez trzecią, to także pierwsza jest podzielna przez trzecią.

Dwie liczby zawsze mają wspólny dzielnik 1. Gdy nie mają one żadnego innego wspólnego dzielnika, jak np. pary liczb 5 i 7 lub 21 i 38, to nazywają się te dwie liczby *względnie pierwszymi*, lub *liczbami bez wspólnych dzielników*.

Wśród wspólnych dzielników jakichkolwiek dwóch danych liczb jeden jest największy i jest bardzo ważnym zadaniem znalezienie tego największego wspólnego

*Textbook of Algebra. Introduction

dzielnika. Prowadzi do tego postępowanie, znane pod nazwą algorytmu wyszukiwania największego wspólnego dzielnika i znajdujące się już u Euklidesa[1].

Jeśli a, a_1 są dwiema liczbami, to bierze się większą z nich, niech będzie to a, jako dzielną, a mniejszą a_1 jako dzielnik oraz ustala iloraz q_1; a gdy dzielenie daje resztę, także resztę a_2, a zatem $a = q_1 a_1 + a_2$, przy czym $a_2 < a_1$. Każdy wspólny dzielnik a i a_1 jest wtedy wspólnym dzielnikiem a_1 i a_2 oraz na odwrót. Jeśli postąpi się z a_1 i a_2 tak samo jak z a oraz a_1 i otrzyma, gdy jest to dzielenie z resztą, $a_1 = q_2 a_2 + a_3$, to znowu mamy $a_3 < a_2$ i każdy wspólny dzielnik a_1 i a_2 jest wtedy wspólnym dzielnikiem a_2 i a_3 oraz na odwrót. Jeśli prowadzi się dalej dzielenie w ten sposób, to, ponieważ liczby $a, a_1, a_2, a_3, \ldots$ stale się zmniejszają, z konieczności po skończonej liczbie kroków otrzymamy dzielenie bez reszty, a więc na koniec wystąpić musi para równań $a_{\nu-2} = q_{\nu-1} a_{\nu-1} + a_\nu$, $a_{\nu-1} = q_\nu a_\nu$. Wtedy a_ν jest wspólnym dzielnikiem wszystkich poprzednich a, a więc także a oraz a_1 i każdy wspólny dzielnik a oraz a_1 jest dzielnikiem a_ν. Tak więc, a_ν jest *największym wspólnym dzielnikiem* a oraz a_1 i otrzymaliśmy tym samym twierdzenie, że każdy wspólny dzielnik dwóch liczb musi dzielić bez reszty ich największy wspólny dzielnik.

Jeśli a oraz a_1 są liczbami względnie pierwszymi, to ostatni dzielnik $a_\nu = 1$. Jeżeli przy tym założeniu pomnożymy otrzymane równania przez jakąkolwiek liczbę b, to wynika z tego, że b jest największym wspólnym dzielnikiem ab oraz $a_1 b$ i że każdy wspólny dzielnik ab oraz a_1 lub a oraz $a_1 b$ musi być dzielnikiem b. Jeśli zatem a_1 jest względnie pierwsza z a oraz z b, to jest też względnie pierwsza z ab, a ze szczególnego założenia, iż a_1 jest liczbą pierwszą otrzymuje się, że iloczyn tylko wtedy może być podzielny przez liczbę pierwszą, gdy co najmniej jeden z czynników jest przez nią podzielny.

Jeśli zatem iloczyn ab jest podzielny przez a_1 oraz a_1 jest względnie pierwsza z a, to b musi być podzielna przez a_1.

Jeśli a, b są jakimikolwiek liczbami o największym wspólnym dzielniku d oraz $a = da'$, $b = db'$, to a' oraz b' są wzajem względnie pierwsze. Każda liczba m, która jest jednocześnie wielokrotnością a oraz b ma postać $m = am' = da'm'$, a stąd $a'm'$ musi być wielokrotnością b', a zatem także m' musi być wielokrotnością b', tj. każda liczba, która jest wielokrotnością jednocześnie a oraz b, jest podzielna przez $a'b'd$. Ta liczba $a'b'd$, która sama jest wspólną wielokrotnością a oraz b nazywa się więc *najmniejszą wspólną wielokrotnością* a *oraz* b.

Gdy jakaś liczba jest podzielna przez dwie liczby względnie pierwsze, to jest też podzielna przez ich iloczyn, a zatem gdy liczba m jest podzielna przez więcej liczb, z których każde dwie są względnie pierwsze, to jest ona podzielna również przez ich iloczyn.

Na tym opiera się dowód ważnego twierdzenia, że liczba m może zostać przedstawiona zawsze i tylko w jeden sposób jako iloczyn liczb pierwszych. Ponieważ wtedy dzielnik nie może być większy od dzielnej, więc z pewnością m może być podzielna tylko przez skończoną liczbę liczb pierwszych. Jeśli a jest jedną z tych liczb pierwszych, a a^α najwyższą potęgą a, przez którą m dzieli się bez reszty, to α także jest określoną liczbą. Jeśli teraz $b^\beta, c^\gamma, \ldots$ będą, podobnie, najwyższymi potęgami pozostałych mieszczących się w m liczb pierwszych $b, c, \ldots$, przez które

[1] *Elementy*, księga VII, 2, tom drugi w wydaniu Heiberga.

m daje się dzielić, to wtedy, ponieważ każde dwie z liczb $a^\alpha, b^\beta, c^\gamma, \ldots$ są względnie pierwsze, m również musi być podzielna przez iloczyn $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$, oraz m musi być równa temu iloczynowi, gdyż w przeciwnym razie jakaś inna jeszcze liczba pierwsza lub wyższa potęga liczb pierwszych $a, b, c, \ldots$ mieściłaby się w m.

* * *

Podamy teraz przegląd niezbędnych w matematyce i wprowadzanych stopniowo rozszerzeń pojęcia liczby.

Przez *rozmaitość* lub *zbiór*, oznaczany w skrócie symbolem $\mathfrak{M}$, rozumiemy system obiektów lub elementów jakiegokolwiek rodzaju, który jest sam w sobie w ten sposób ograniczony oraz ukończony, że dla dowolnego podanego obiektu jest określone, czy należy on do tego systemu czy nie, wszystko jedno, czy jesteśmy w stanie w każdym poszczególnym przypadku rzeczywiście rozstrzygnąć tę sprawę czy nie.

Zbiór nazywa się *uporządkowanym*, gdy spośród jakichkolwiek dwóch różnych jego elementów zawsze jeden z nich uchodzi za większy, i to tak, iż z $a > b$, $b > c$ zawsze wynika $a > c$. Jeśli $a > b$ oraz $b > c$, lub, równoważnie, $a > b > c$, to mówimy, że b leży między a oraz c.

Liczby naturalne tworzą zbiór uporządkowany; między dwoma bezpośrednio po sobie następującymi jego elementami nie leży żaden inny element. Taką rozmaitość nazywa się *dyskretną*. Zbiór uporządkowany o tej własności, iż między każdymi dwoma elementami zawsze znajdą się jeszcze inne elementy nazywa się *gęstym*. Zbiór gęsty można utworzyć, gdy zbierze się liczby naturalne w pary i rozważy te pary jako elementy zbioru. Te pary nazywa się ułamkami i oznacza przez $m : n$ lub $\frac{m}{n}$, a dwa takie ułamki $m : n$ oraz $m' : n'$ uważa się za sobie równe, gdy $mn' = nm'$. Jeśli zbierze się wszystkie równe między sobą ułamki w jeden element, to otrzyma się rozmaitość, która jest uporządkowana, gdy ustali się, iż $m : n$ jest większy od $m' : n'$, gdy $mn' > nm'$. To, że ta rozmaitość jest gęsta, okazuje się tak oto: jeśli $\mu = m : n$, $\mu' = m' : n'$ są dwoma ułamkami oraz $\mu > \mu'$, to można przyjąć, dla dowolnej liczby h

$$\mu = \frac{hmn'}{hnn'}, \qquad \mu' = \frac{hm'n}{hnn'},$$

a stąd $hmn' > hm'n$. Zawsze można dobrać h tak, że między hmn' a $hm'n$ leżą jeszcze liczby, a gdy p jest taką liczbą, to $p : hnn'$ leży między μ a μ'.

Punkty linii prostej także można uważać za zbiór uporządkowany, gdy rozumie się przez większy i mniejszy jakiekolwiek oznaczenie miejsca, np. dalej na prawo i dalej na lewo lub wyżej i niżej.

* * *

Podział zbioru uporządkowanego $\mathfrak{M}$ na dwie części A, B tego rodzaju, że każdy element a z A jest mniejszy od każdego elementu b z B będzie nazywany *przekrojem* w $\mathfrak{M}$ i oznaczany, odpowiednio, przez (A, B). Przekrój taki powstaje, gdy wybierze się jakikolwiek element μ z $\mathfrak{M}$ i zaliczy wszystkie elementy od niego mniejsze do A, wszystkie większe do B, a sam element μ dowolnie, do A lub B. Powstają, dokładnie mówiąc, w zależności od tego, czy uczyni się to pierwsze czy drugie, dwa

przekroje, które chcemy jednak zawsze uważać za równe. Jeśli w przekroju (A, B) albo A zawiera element największy, albo B element najmniejszy, μ, to mówimy, że μ wytwarza przekrój (A, B). Może jednak wystąpić też przypadek, że ani A nie posiada elementu największego, ani B elementu najmniejszego.

Gdy każdy przekrój w zbiorze gęstym $\mathfrak{M}$ jest wytworzony przez określony element μ, to zbiór ten nazywa się ciągłym.

Ciągłość, tak jak gęstość, są własnościami, które z natury rzeczy są niedostępne naszemu postrzeganiu zmysłowemu; nie można ich zatem ściśle przypisać rzeczom świata zewnętrznego, wielkościom przestrzennym, okresom czasu, masom, jakkolwiek głęboko leżą one w istocie naszego oglądu. Można jednak swobodnie konstruować czyste systemy pojęć, którym przysługuje gęstość bez ciągłości, albo też gęstość oraz ciągłość[2].

Przykładu zbioru gęstego dostarczają ułamki wymierne. Ta rozmaitość, którą chcemy oznaczać przez $\mathfrak{R}$, nie jest ciągła. Jeśli bowiem weźmiemy jakikolwiek ułamek wymierny $\mu = m : n$, gdzie m oraz n nie mają żadnego wspólnego dzielnika i nie są oba kwadratami liczb, to μ nie jest kwadratem ułamka wymiernego. Gdyby bowiem było $\mu = p^2 : q^2$, to z tego wynikałoby $mq^2 = np^2$, a stąd $m = p^2$, $n = q^2$, co wykluczone jest przez założenie. Gdy więc tworzymy w $\mathfrak{R}$ przekrój (A, B), w którym do A zaliczamy każdy element a z $\mathfrak{R}$, którego kwadrat jest mniejszy od μ, a do B każdy element b, którego kwadrat jest większy od μ, to ani A nie zawiera elementu największego, ani B elementu najmniejszego, i przekrój (A, B) nie będzie wytworzony przez żaden element z $\mathfrak{R}$.

Jeżeli bowiem założymy, że $a = p : q$ jest jakimkolwiek elementem w A, a zatem $p^2 : q^2 < m : n$, lub $np^2 < mq^2$, to weźmy wtedy dowolną liczbę naturalną y oraz wybierzmy inną liczbę naturalną x tak, że $x > y$ oraz $x(mq^2 - np^2) > ny(2p + 1)$, z czego wynika:

$$x(mq^2 - np^2) > nxy(2p + 1) > n(2pxy + y^2),$$

a więc również

$$mq^2x^2 > n(px + y)^2.$$

Jeśli więc przyjmiemy $a' = (px+y) : qx$, to $a' > a$ oraz $(a')^2 < \mu$, czyli a' także jest zawarty w A; podobnie można pokazać, że w B nie ma elementu najmniejszego.

Rozmaitość $\mathfrak{R}$ może jednak służyć jako punkt wyjścia do konstrukcji zbioru ciągłego. Ogół wszystkich przekrojów w $\mathfrak{R}$ jest z pewnością rozmaitością, którą można oznaczyć przez $\mathfrak{S}$. Jeśli rozważymy dwa jej różne elementy $\alpha = (A, B)$ oraz $\alpha' = (A', B')$, to albo A będzie częścią A', albo A' częścią A. Jeśli bowiem jakikolwiek element a należy do A, to także każdy mniejszy od niego element z $\mathfrak{R}$

[2] Pokazał to Dedekind, któremu w ogóle zawdzięczamy podaną wyżej definicję ciągłości. Por. pisma Dedekinda, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Braunschweig 1872, 1892, *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Braunschweig 1888, 1893. Inne rozmaitości, którym przysługuje ciągłość, są stworzone przez Weierstrassa oraz Cantora.

Definicja ciągłości, którą za Dedekindem bierzemy tu za podstawę, jest tak dalece wyczerpująca, że zbiór ciągły w tym sensie, któremu przysługuje jeszcze za chwilę podana własność mierzalności, nie może być częścią bogatszego zbioru ciągłego. Nie wiem, czy własność ta jest gdziekolwiek dowiedziona i mam nadzieję wrócić do tego przy innej sposobności. Zauważę jednak, że taka własność dowodliwa jest jedynie dla zbiorów mierzalnych. Zbiór tylko uporządkowany może być zawsze, jakkolwiek by był gęsty, pojmowany jako część zbioru jeszcze bardziej gęstego.

należy do A. Jeśli A jest częścią A', to chcemy nazywać α mniejszym od α', przez co zbiór $\mathfrak{S}$ staje się *uporządkowany*.

Jeśli uznamy przekroje wytworzone przez ułamki wymierne za równe samym tym ułamkom wymiernym i nazwiemy je krótko przekrojami wymiernymi, to zbiór $\mathfrak{S}$ zawiera zbiór $\mathfrak{R}$ i zbiór $\mathfrak{S}$ jest w każdym bądź razie zbiorem gęstym. Zbiór $\mathfrak{S}$ jest jednak także *ciągły*; oznaczmy bowiem przekroje przez duże litery gotyckie $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots$ i rozważmy jakikolwiek przekrój $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ w rozmaitości przekrojów, wtedy możemy ustalić w $\mathfrak{S}$ element $\alpha = (A, B)$, przy czym przyjmujemy do A każdy ułamek wymierny, który wytwarza przekrój z $\mathfrak{A}$, a wrzucamy do B wszystkie inne ułamki wymierne, które wytwarzają przekroje w $\mathfrak{B}$. Ten przekrój α w $\mathfrak{R}$ *wytwarza* przekrój $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ w $\mathfrak{S}$. Zostanie to udowodnione, gdy pokaże się, że każdy element α' w $\mathfrak{S}$, który jest mniejszy od α, należy do $\mathfrak{A}$ oraz każdy element β' w $\mathfrak{S}$, który jest większy od α, należy do $\mathfrak{B}$.

Niech zatem $\alpha' = (A', B')$ oraz $\alpha' < \alpha$, wtedy istnieją ułamki wymierne w A, które nie są zawarte w A'; istnieje więc wymierny μ taki, że $\alpha' < \mu < \alpha$ i ten μ wytwarza przekrój, który zawarty jest w $\mathfrak{A}$, a więc sam należy do $\mathfrak{A}$; ponieważ $\alpha' < \mu$, więc również α' należy do $\mathfrak{A}$. Całkiem podobnie pokazuje się, że każdy β', który jest większy od α, należy do $\mathfrak{B}$, a tym samym ciągłość $\mathfrak{S}$ została udowodniona.

Ten bardzo abstrakcyjny tok rozważań daje nam pewność, że przyjęcie istnienia zbioru ciągłego nie zawiera żadnej sprzeczności, że takie zbiory istnieją co najmniej w królestwie myśli. Geometria, jak też analiza, które zawsze chętnie nawiązują do oglądu geometrycznego, od dawna milcząco przyjmowały jako swego rodzaju aksjomat istnienie zbiorów ciągłych, np. punktów linii prostej lub jakiejkolwiek innej linii ciągłej. Także rozróżnienie pomiędzy zbiorami gęstymi a ciągłymi, które leży u podstaw rozróżnienia odcinków współmiernych i niewspółmiernych nie pojawiło się u starożytnych.[3]

My również nie chcemy rezygnować w dalszym ciągu z pomocy oglądu geometrycznego i traktować np. punktów linii prostej bez zastrzeżeń jako zbioru ciągłego.

* * *

Zbiór uporządkowany $\mathfrak{M}$ nazywa się *mierzalnym* przy następujących założeniach: dodawanie oraz zwielokrotnienie są w ogólności wykonalne w $\mathfrak{M}$, podobnie jak odejmowanie mniejszego od większego elementu, tj. z jakichkolwiek dwóch elementów a, b (które mogą też być sobie równe) można utworzyć, wedle określonego przepisu, nowy element $a+b$ z $\mathfrak{M}$ tak, że $a+b$ jest większy od a i od b i że zachodzą znane reguły, wyrażone formułami $a+b = b+a$, $(a+b)+c = a+(b+c)$; a dla dwóch elementów a, c, z których drugi jest większy, można znaleźć trzeci element b tak, że $a + b = c$, co będzie także wyrażane znakiem odejmowania $b = c - a$. Dwa nierówne elementy $\mathfrak{M}$ mają zatem zawsze określoną *różnicę*. Z tych założeń wynika, że zwiększa się suma, gdy zwiększa się jeden z jej składników. Powtórzone, powiedzmy m-razy dodawanie tego samego elementu nazywa się zwielokrotnieniem, a jego wynik będzie oznaczany przez ma.

Dochodzi w końcu jeszcze jedno założenie, a mianowicie to, że dla każdego danego a wystarczająco duże zwielokrotnienie ma jest większe od dowolnie danego

[3] Euklides, *Elementy*, księga X.

innego elementu b. Wśród elementów zbioru mierzalnego nie ma zatem elementu największego.

W gęstym zbiorze mierzalnym nie ma też elementu najmniejszego; gdyby bowiem a był najmniejszym, a b dowolnym elementem, to między b oraz $b+a$ nie mogłyby leżeć żadne elementy, ponieważ, gdy $b < c < b+a$, to z definicji mierzalności wynikałoby, że $a' = c - b$ byłby mniejszy od a. Zachodzi też wynikanie odwrotne: zbiór mierzalny, w którym nie występuje element najmniejszy, jest gęsty. Jeśli bowiem a oraz $a+b$ są jakimikolwiek dwoma elementami, to wystarczy przecież dodać do a tylko jeden element, który jest mniejszy od b, aby otrzymać element między a oraz $a+b$.

Jeśli zbiór jest ciągły, to założenia dotyczące mierzalności mogą zostać jeszcze uproszczone, ponieważ wtedy odejmowanie jest konsekwencją dodawania. Jeśli mianowicie a oraz c są dwoma elementami ciągłego zbioru uporządkowanego $\mathfrak{M}$, w którym wykonalne jest dodawanie, oraz $c > a$, to otrzymujemy przekrój (A, B) w $\mathfrak{M}$, gdy skierujemy do A wszystkie elementy x, dla których $a + x \leqslant c$, a do B te, dla których $a + x > c$. Ten przekrój będzie wytworzony przez element b, dla którego musi być $a + b = c$.

Liczby naturalne wedle naszej definicji tworzą zbiór mierzalny, w którym występuje najmniejszy element, a mianowicie 1. Rozmaitość ułamków wymiernych także staje się mierzalna, gdy określi się dodawanie oraz odejmowanie wedle znanych reguł rachowania na ułamkach. Szczególnie ważna, a przy tym typowa dla zbiorów mierzalnych jest rozmaitość odcinków prostoliniowych lub długości linii, które są dodawane po prostu przez leżenie przy sobie. Również zbiory materiałów, porównywanych przez ważenie oraz okresy czasu, mierzone zegarem dostarczają przykładów zbiorów mierzalnych. Sposób mierzenia nie leży tu w naturze samej rozmaitości, lecz jest wprowadzony przez myślącego obserwatora; tak więc, dla przykładu, byłoby równie dobrze rozumieć przez sumę $a + b$ dwóch odcinków a oraz b przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych a oraz b zamiast, jak to zwykle bywa przyjęte, odcinek złożony z przyłożonych do siebie odcinków a i b.

Aby ciągły zbiór $\mathfrak{S}$ przekrojów w rozmaitości $\mathfrak{R}$ ułamków wymiernych uczynić mierzalnym, należy najpierw zauważyć co następuje.

Jeśli $\alpha = (A, B)$ jest elementem $\mathfrak{S}$, a μ dowolnym danym ułamkiem wymiernym, to zawsze można określić w A element a' tak, że $a' + \mu = b'$ jest zawarty w B. Wybierzmy bowiem dwa dowolne elementy a, b, a wtedy można tak określić liczbę naturalną m, że $m\mu > b - a$, a więc $a + m\mu$ jest zawarty w B. Jeśli potem h jest najmniejszą liczbą całkowitą, dla której $a + h\mu$ jest zawarty w B, to $a + (h-1)\mu = a'$ jest w A, a więc $a' + \mu = b'$ jest w B.

Rozumiemy teraz przez sumę $(A, B) + (A', B') = (A'', B'')$ lub $\alpha + \alpha' = \alpha''$ ten przekrój w $\mathfrak{R}$, który otrzymuje się, gdy do A'' skieruje się ułamek wymierny α'' tylko wtedy, gdy istnieje α w A oraz α' w A' o tej własności, że $\alpha'' \leqslant \alpha + \alpha'$. W istocie, (A'', B'') jest przekrojem; jeśli bowiem α'' jest zawarty w A'', to to samo zachodzi również dla każdego mniejszego ułamka oraz istnieją ułamki, które są zawarte w A'' i ułamki, które nie są zawarte w A'', a mianowicie ułamki o postaci $a + a'$ oraz $b + b'$. Dalej, α'' jest większy od α oraz od α'. Albowiem A'' zawiera najpierw wszystkie A, a gdy a' jest dowolnym ułamkiem w A', to można wybrać a

w A tak, iż element $a+a'$ z A'' jest zawarty w B; a zatem A'' jest obszerniejszy od A. Przekroje wytworzone przez ułamki wymierne μ, μ' dają w wyniku dodawania przekrój wytworzony przez $\mu+\mu'$.

* * *

Przechodzimy teraz do definicji *stosunków*, które od starożytności były uważane za podstawę nauki o liczbach, a które najpierw występują u Euklidesa[4].

Gdy połączy się w pary elementy zbioru mierzalnego $\mathfrak{M}$ i same te pary te potraktuje jako elementy, to powstaje nowa rozmaitość; oznaczamy taką parę przez $a:b$ lub też przez $\frac{a}{b}$, odróżniamy jednak $a:b$ od $b:a$, gdy a i b są różnymi elementami i nazywamy a licznikiem, a b mianownikiem $a:b$. Chcemy nazywać te pary stosunkami i chcemy teraz ów nowy zbiór uporządkować i uczynić mierzalnym.

Załóżmy najpierw, że istnieją dwie liczby całkowite m, n takie, że $na=mb$, jak to np. zawsze ma miejsce, gdy $\mathfrak{M}$ jest systemem liczb naturalnych, lub gdy a, b są dwoma współmiernymi odcinkami; gdy wtedy p, q są innymi liczbami całkowitymi, to $qa=pb$ wtedy i tylko wtedy, gdy $mq=np$. Para liczb p, q jest całkowicie określona poprzez to żądanie, o ile dojdzie jeszcze warunek, iż p, q mają być liczbami względnie pierwszymi. Może być wtedy $m=hp$, $n=hq$, gdzie h jest dowolną liczbą całkowitą. W tym przypadku nazywamy stosunek $a:b$ wymiernym i uważamy go za równy ułamkowi wymiernemu $m:n$ lub $p:q$. Te ułamki wymierne mogą odtąd być uważane za stosunki liczb całkowitych.

Wszystkie równe między sobą stosunki wymierne tworzą *liczbę wymierną*, a liczby wymierne tworzą, podobnie jak ułamki wymierne, rozmaitość uporządkowaną, gęstą i mierzalną.

* * *

W rozmaitości liczb wymiernych liczby naturalne same się porządkują, gdy przez liczbę naturalną m rozumie się stosunek $m:1$.

Wracamy teraz do jakiejkolwiek rozmaitości mierzalnej $\mathfrak{M}$ i bierzemy z niej jakiekolwiek elementy a oraz b. Jeśli wybierze się, co zawsze jest możliwe, dwie liczby naturalne m, n tak, że $na>mb$, to stosunek $a:b$ jest nazywany większym od stosunku wymiernego $m:n$, lub

$$\frac{a}{b}>\frac{m}{n},$$

a gdy $m:n>p:q$, to również $a:b>p:q$.

Podobnie wynika, że jeśli $n'a<m'b$, to

$$\frac{a}{b}<\frac{m'}{n'}.$$

Jeśli $a:b>m:n$, to można znaleźć jedną, a w konsekwencji również dowolnie wiele liczb wymiernych $m_1;n_1$ takich, że

$$\frac{a}{b}>\frac{m_1}{n_1}>\frac{m}{n},$$

[4] *Elementy*, księga V.

tj. można *między* $a : b$ oraz $m : n$ wstawić dowolnie wiele stosunków wymiernych. Aby to pokazać, wybiera się dowolną liczbę całkowitą k oraz ustala liczbę całkowitą h tak, że $h(na - mb) > kb$, co zawsze jest możliwe; wtedy

$$\frac{a}{b} > \frac{hm + k}{hn} > \frac{m}{n}.$$

Podobnie wynika, że gdy $n'a < m'b$, $h'(m'b - n'a) > k'a$, to

$$\frac{a}{b} < \frac{h'm'}{h'n' + k'} < \frac{m'}{n'}.$$

Jeśli teraz $a : b$ oraz $\alpha : \beta$ są dwoma jakimikolwiek stosunkami, które dla zwięzłości chcemy oznaczać przez e, ε, i których elementy należą do tych samych lub różnych rozmaitości, to możliwe są dwa przypadki: 1) między e oraz ε nie leży żaden stosunek wymierny μ lub 2) stosunek wymierny leży między e oraz ε.

W przypadku 1) oba stosunki e oraz ε nazywają się *wzajem równymi* i widać, że dwa stosunki, które równe są trzeciemu, są także wzajem równe; jeśli bowiem $e < \mu < \varepsilon$, to każdy inny stosunek e' jest albo mniejszy, albo równy, albo większy od μ. Jeśli e' jest równy μ, to zarówno między e i e', jak i między e' i ε leżą stosunki wymierne. Jeśli jednak e' jest mniejszy od μ, to μ leży między e' oraz ε, a jeśli e' jest większy od μ, to μ leży między e oraz e'; a więc e' nie może być jednocześnie równy e oraz ε.

W przypadku 2) stosunki e, ε nazywają się *nierównymi*. Może zatem być albo $\alpha)$ $e < \mu < \varepsilon$, albo $\beta)$ $e > \mu' > \varepsilon$ i oba te przypadki nawzajem się wykluczają, ponieważ z $e < \mu < \varepsilon$, $\varepsilon < \mu'$ wynika, że $\mu < \mu'$, a w konsekwencji dostaje się $e < \mu'$.

Zależność między wielkościami 2 $\alpha)$ lub 2 $\beta)$ zachodzi także, gdy e lub ε zostaną zastąpione równym im elementem. Jeśli bowiem $\mu < \varepsilon$ oraz $\mu \geqslant \varepsilon'$, to między ε oraz ε' leży stosunek wymierny i ε, ε' nie są równe.

W przypadku 2 $\alpha)$ e nazywa się *mniejszym od* ε, w przypadku 2 $\beta)$ e nazywa się *większym od* ε.

Między dwa nierówne stosunki można wstawić dowolną liczbę stosunków wymiernych.

Gdy teraz zbierzemy razem wszystkie równe między sobą stosunki, to otrzymamy pojęcie gatunkowe, które oznaczamy jako *liczbę* w sensie ogólnym. Liczba jest zatem nazwą lub znakiem dla pewnej rozmaitości, której elementami są właśnie te stosunki, które równe są jednemu spośród nich[5]. W tym pojęciu liczby są zawarte stosunki wymierne, a w konsekwencji również liczby naturalne, jako stosunki $m : 1$; owe stosunki wymierne tworzą *liczby wymierne*.

Liczby, które nie wywodzą się ze stosunków wymiernych, nazywają się *liczbami niewymiernymi*.

Na mocy tego, co dotąd powiedziano, liczby tworzą *zbiór uporządkowany*, a ich porządek można ustalić, gdy dla każdej liczby wybierze się jako reprezentanta jakikolwiek zawarty w niej stosunek.

[5] Przez to pojęcie gatunkowe można też wprowadzić w prostszy i bardziej konsekwentny sposób liczby naturalne.

* * *

Spośród dwóch stosunków o tym samym mianowniku oraz różnych licznikach ten jest większy, którego licznik jest większy, a spośród dwóch stosunków o tym samym liczniku oraz różnych mianownikach ten jest mniejszy, którego mianownik jest większy.

Jeśli mianowicie a, a', b są dowolnymi elementami zbioru mierzalnego oraz $a' > a$, to najpierw wybiera się liczbę całkowitą n tak, że $na > b$ oraz $n(a'-a) > b$. Potem bierze się *najmniejszą* liczbę całkowitą m, która spełnia warunek $mb > na$; wtedy $na < mb$, ale $mb < na'$. Gdyby bowiem $mb \geqslant na' \geqslant na + n(a' - a)$, to byłoby $mb > na + b$; a więc byłoby $(m-1)b > na$, wbrew założeniu. Dalej,

$$\frac{a}{b} < \frac{m}{n} < \frac{a'}{b},$$

a więc $a : b < a' : b$; całkiem podobnie można udowodnić, że gdy $b' > b$, to $a : b > a : b'$.

Można to twierdzenie wyrazić również tak, że stosunek rośnie wraz ze wzrostem licznika, a maleje wraz z rosnącym mianownikiem.

Łatwo otrzymuje się z tego także następujące twierdzenie: Jeśli a, b, c, d są elementami tego samego zbioru mierzalnego oraz $a : b = c : d$, to również $a : c = b : d$.

Załóżmy bowiem, że $a : b = c : d$, wtedy muszą istnieć dwie liczby całkowite m, n takie, że

$$na < mc$$

$$nb > md.$$

Wtedy jednak byłoby, na mocy właśnie udowodnionego twierdzenia, $na : nb < mc : md$, a więc także $a : b < c : d$, wbrew założeniu.

Wynika z tego teraz następujące *główne twierdzenie. Jeśli spośród czterech wielkości a, b, c, d jakiekolwiek trzy z nich są dane w ciągłym zbiorze mierzalnym, to również czwartą ustalić można w tym samym zbiorze tak, że* $a : b = c : d$.

Twierdzenie jest bezpośrednią konsekwencją założonej ciągłości. Albowiem gdy weźmie się np. element x w $\mathfrak{M}$ z A lub B, odpowiednio do tego, czy $x : b$ jest mniejszy czy większy od od $c : d$, to otrzyma się przekrój, który jest wytworzony przez element a taki, że spełniony jest warunek $a : b = c : d$. Twierdzenie to zachodzi jednak również dla pewnych zbiorów nieciągłych, np. dla ułamków wymiernych.

Wynika z tego, że za reprezentantów dwóch liczb zawsze można wybrać dwa stosunki, których elementy należą do tej samej rozmaitości oraz mają ten sam dowolnie wybrany mianownik. Dodawanie jest wtedy tak zdefiniowane, że zachodzi

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}.$$

Ta reguła obejmuje, jako szczególny przypadek, dodawanie ułamków wymiernych, a żeby uzasadnić ją w ogólności trzeba potem jeszcze tylko pokazać, że jeśli $a : c = a' : c'$ oraz $b : c = b' : c'$, to musi być również $(a + b) : c = (a' + b')c'$. Dowodzimy

tego, pokazując, że gdy $a : c = a' : c'$ oraz $(a + b) : c > (a' + b')c'$, to musi być też $b : c > b' : c'$. Niech zatem, gdy m oraz n są dwiema liczbami całkowitymi, będzie

$$\frac{a+b}{c} > \frac{m}{n} > \frac{a'+b'}{c'},$$

wtedy $n(a + b) > mc$, a więc

$$\frac{b}{c} > \frac{mc - na}{nc}, \qquad \frac{mc' - na'}{nc'} > \frac{b'}{c'}.$$

Z drugiej strony, łatwo jednak wynika z założenia $a : c = a' : c'$, że także

$$\frac{mc - na}{nc} = \frac{mc' - na'}{nc'},$$

a więc $b : c > b' : c'$, c.b.d.u.

Tym samym dowiedziono, że także liczby, tak, jak je zdefiniowaliśmy, tworzą zbiór mierzalny. Jeśli a oraz c są wzięte z rozmaitości ciągłej, to stosunki $a : c$ tworzą zbiór ciągły, także przy ustalonym c, a ponieważ istnieją w ogóle zbiory ciągłe, więc również liczby tworzą zbiór ciągły.

Jeśli teraz α, β, γ, δ są liczbami, to z proporcji $\alpha : \beta = \gamma : \delta$ można ustalić dowolną z tych czterech liczb poprzez trzy pozostałe. Jeśli przyjmie się $\delta = 1$, to otrzyma się *mnożenie* $\alpha = \beta\gamma$, a przemienność czynników jest konsekwencją twierdzenia, że $\alpha : \gamma = \beta : \delta$ wynika z $\alpha : \beta = \gamma : \delta$. Jeśli szuka się γ, to otrzymuje się dzielenie; a z podanej wyżej definicji dodawania wynika podstawowa formuła $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$. Cztery sposoby rachowania są zatem wykonalne w dziedzinie liczb, z jedynym ograniczeniem, iż przy odejmowaniu odjemnik musi być mniejszy od odjemnej.

* * *

Konstrukcja przekroju w ciągu liczb dostarcza zawsze dowodu istnienia liczby, która czyni zadość określonym żądaniom. Otrzymuje się więc przekrój (A, B), gdy przyjmie się do A wszystkie i tylko te liczby, których kwadrat jest mniejszy od ustalonej liczby α; temu przekrojowi odpowiada określona liczba, której kwadrat jest równy α i która będzie oznaczana przez $\sqrt{\alpha}$ i przez to udowodnione zostaje istnienie pierwiastków kwadratowych.

Do przekrojów sprowadzić można także ciągi liczbowe wprowadzone przez G. Cantora w jego definicji liczb niewymiernych[6].

Wedle Cantora przez ciąg liczbowy należy rozumieć jakikolwiek nieograniczony i w określony sposób uporządkowany system liczb:

$$S = x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$$

o tej własności, że istnieje określona liczba g, poniżej której nie opada żadna liczba z S i taka, że gdy δ jest dowolnie wybraną liczbą, a x_n, x_m różnymi elementami z S,

[6] Cantor, Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, *Mathematische Annalen* **5** (1872); por. też Heine, *Elemente der Functionenlehre*, Journal für Mathematik **74** (1872).

to $x_n - x_m$ lub $x_m - x_n$ pozostaje zawsze mniejsza od δ, gdy m oraz n przekroczą wystarczająco dużą liczbę.

Zawsze istnieją liczby, których nie przekraczają liczby takiego ciągu; jeśli bowiem ustalona została δ oraz odpowiednia n, to x_m, którego wartość może być też równa m, nigdy nie przekracza największej z liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_n + \delta$. Otrzymuje się teraz przekrój (A, B), gdy do B wrzuci się te liczby, których nie przekracza żadna x_n, dla wystarczająco dużych wartości n, a wszystkie pozostałe liczby (które zatem przekracza nieskończenie wiele x_n) do A. Jeśli ten przekrój będzie wytworzony przez liczbę α, to jakkolwiek mała jest ε, zawsze istnieje nieskończenie wiele liczb x_n między $\alpha - \varepsilon$ oraz α i można powiedzieć, że ta całkowicie określona przez S liczba α jest wytworzona przez ciąg liczbowy S. Wedle CANTORA, ciąg liczbowy S jest po prostu definicją liczby α. Oczywiście jedna i ta sama liczba może zostać wytworzona przez bardzo różne ciągi liczbowe. Te ciągi liczbowe należy jednak traktować jako między sobą równe. Między innymi, można liczby w S brać wszystkie jako ułamki wymierne. Również na odwrót, łatwo pokazać, że dla każdej podanej liczby α zawsze można podać ciągi liczbowe S, przez które α jest wytworzona tak, że ogół tych ciągów liczbowych S również tworzy zbiór ciągły.

* * *

Przy objaśnianiu podstawowych sposobów rachowania wynikło niewygodne ograniczenie odejmowania, od którego się teraz uwolnimy poprzez wprowadzenie *zera* oraz *liczb ujemnych*.

Niech x oznacza każdy element dotąd zdefiniowanego systemu liczbowego, który teraz chcemy określać jako system *liczb dodatnich*. Bierzemy ten system liczbowy po raz drugi i dla odróżnienia, w tym drugim systemie, który określany ma być jako system *liczb ujemnych*, każdy element oznaczamy przez $-x$. Drugi system porządkujemy teraz dokładnie odwrotnie niż pierwszy, tak, że wszędzie, gdzie w pierwszym systemie x występuje jako „większa", w tym drugim ustalamy $-x$ jako „mniejszą", i na odwrót. Dodawanie oraz odejmowanie dla $-x$ są objaśnione podobnie jak dla x, tak, że ma być $(-x)+(-y) = -(x+y)$; $(-x)-(-y) = -(x-y)$.

Chcemy jednak oba te systemy uporządkować razem w taki sposób, aby każda $-x$ była mniejsza od każdej x. Otrzymujemy wtedy zbiór uporządkowany, w którym nie ma największego ani najmniejszego elementu. System ten jest też w ogólności ciągły, tylko jedyny przekrój $(-x, x)$ nie będzie wytworzony przez żaden element i tu, gdzie oba systemy się stykają występuje jeszcze naruszenie ciągłości. Aby zapewnić tu ciągłość, musimy zatem dodać odpowiadającą przekrojowi $(-x, x)$ jeszcze jedną liczbę *zero* lub 0, która zdefiniowana jest właśnie przez ów przekrój. Mamy wtedy uporządkowany zbiór ciągły, z obu stron nieograniczony, pełny ciąg liczb *rzeczywistych*.

W tak rozszerzonej dziedzinie liczbowej objaśniamy teraz ogólnie dodawanie, ustalając na drodze definicji:

$$x + (-x) = 0, \qquad x + 0 = x,$$

$x + (-y) = x - y$, gdy $x > y$,
$x + (-y) = -(y - x)$, gdy $x < y$.

Przy tak określonym dodawaniu zachodzą następujące prawa, gdy z_1, z_2, z_3 są jakimikolwiek liczbami z całej dziedziny liczbowej:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \quad (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3),$$

które nazywa się prawami przemienności oraz łączności. Sumę dowolnej liczby składników tworzy się, łącząc w sumy w dowolnej kolejności po dwa składniki. O odejmowanie nie trzeba się już szczególnie troszczyć, gdy określi się $z_1 - z_2$ jako $z_1 + (-z_2)$ oraz ustali, że $-(-z) = z$.

Poglądowo przedstawia się ciąg liczbowy przez punkty, wychodząc od ustalonego i oznaczonego przez 0 punktu prostej i nanosząc liczby dodatnie jako odcinki z jednej, powiedzmy prawej, strony, a liczby ujemne z drugiej (lewej) strony. Obraz sumy dwóch odcinków $z_1 + z_2$ otrzymuje się, gdy począwszy od punktu z_1 naniesie się w prawą lub lewą stronę odcinek o długości $\pm z_2$, w zależności od tego, czy z_2 jest dodatnia czy ujemna.

Mnożenie oraz dzielenie w rozszerzonej dziedzinie liczbowej zostaje określone przez równania

$$x(-y) = (-x)y = -xy$$

$$(-x)(-y) = xy, \qquad 0x = 0.$$

Dzielenie jako odwrotność mnożenia jest zawsze możliwe, poza przypadkiem, gdy dzielnik jest zerem.

* * *

Dalsze rozszerzenie pojęcia liczby polega na wprowadzeniu *wielkości zespolonych*. Łączymy każde dwie liczby całego ciągu liczbowego w pary (x, y) i traktujemy dwie takie pary (x, y) oraz (a, b) jako równe tylko wtedy, gdy $x = a$, $y = b$. Pary te tworzą rozmaitość, której elementy nie są co prawda uporządkowane, ale dla których operacje rachowania: dodawanie, odejmowanie, mnożenie oraz dzielenie mają być określone wedle następujących reguł. Niech

$$(x, y) + (a, b) = (x + a, y + b),$$

$$(x, y)(a, b) = (xa - yb, xb + ya),$$

i ustalamy poza tym, że ma być $(x, 0) = x$, co nie przeczy tym równaniom. Tylko wtedy jest $(x, y) = 0$, gdy x oraz y obie są równe zero. Dalej, dla zwięzłości oznaczamy $(0, 1)$ przez i. Wtedy powyższe równości mają następujące konsekwencje:

$$(x, 0)(0, 1) = (0, x) \quad \text{lub} \quad = ix,$$

$$(x, 0) + (0, y) = (x, y) = x + yi,$$

$$x + yi + a + bi = (x + a) + (y + b)i,$$

a dla odwrotności dodawania:

$$x + yi - (a + bi) = (x - a) + i(y - b),$$

a dalej mnożenie:

$$(x+yi)(a+bi) = xa - yb + i(xb+ya), \qquad i^2 = -1,$$

$$(x+yi)(x-yi) = x^2 + y^2,$$

$$x+yi = (a+bi)\frac{(a-bi)(x+yi)}{(a^2+b^2)}$$

lub

$$\frac{x+yi}{a+bi} = \frac{ax+by+i(ay-bx)}{a^2+b^2},$$

przez co określone jest dzielenie, oprócz przypadku, gdy $a+bi = 0$. Liczby o postaci ix nazywają się *liczbami czysto urojonymi*, a i urojoną jednostką. Liczby $a+bi$ nazywają się *urojonymi* lub *zespolonymi*. Liczby *rzeczywiste* oraz *czysto urojone* są w tym zawarte jako przypadki szczególne.

Podstawowe sposoby rachowania są zatem w dziedzinie *liczb zespolonych* $x+yi$ wykonalne bez ograniczeń (z wyjątkiem dzielenia przez zero), a rachowanie na liczbach rzeczywistych jest ich szczególnym przypadkiem.

Za Gaussem przedstawia się liczby zespolone $z = x+yi$ jako punkty płaszczyzny, przyjmując u podstaw prostokątny układ współrzędnych i traktując punkt o współrzędnych x, y jako obraz wartości liczbowej z. Punkty osi x przedstawiają w wyżej opisany sposób liczby rzeczywiste. Punkty osi y są obrazami liczb czysto urojonych yi. Początek układu współrzędnych jest obrazem liczby 0. Wektor promienia z punktu zerowego do punktu z ma wartość liczbową $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, która jest nazywana *wartością bezwzględną*, wartością lub, wedle starszego sposobu wyrażania się, modułem liczby zespolonej z.

Jedynie liczba 0 ma wartość bezwzględną 0. Każda liczba dodatnia występuje jako wartość bezwzględna nieskończenie wielu liczb zespolonych, a obrazy punktowe wszystkich liczb o tej samej wartości bezwzględnej leżą na okręgu, którego środek leży w początku układu współrzędnych.

Dwie liczby urojone, które różnią się tylko znakiem przy i, a zatem $x+yi$ oraz $x-yi$ nazywają się urojonymi sprzężonymi. Ich iloczyn jest kwadratem wartości bezwzględnej każdej z nich.

Jeśli jedna z dwóch sprzężonych liczb urojonych jest równa zero, to także pozostała jest równa zero, a więc można w każdym prawdziwym równaniu liczbowym zastąpić i przez $-i$, bez naruszenia prawdziwości.

Chcemy jeszcze udowodnić często stosowane twierdzenie, że wartość bezwzględna sumy dwóch różnych od zera liczb zespolonych nigdy nie jest większa od sumy bezwzględnych wartości obu składników, a równa tylko wtedy, gdy stosunek (iloraz) obu składników jest rzeczywisty i dodatni. Niech mianowicie

$$\begin{array}{lll} z = x+yi & c = a+bi & Z = (x+a)+(y+b)i \\ \rho^2 = x^2+y^2 & r^2 = a^2+b^2 & R^2 = (x+a)^2+(y+b)^2, \end{array}$$

wtedy

$$(r+\rho-R)(r+\rho+R) = (r+\rho)^2 - R^2 = 2(r\rho - ax - by),$$

co z pewnością jest dodatnie, gdy $ax + by \leqslant 0$. Jeśli jednak $ax + by > 0$, to z

$$r^2\rho^2 - (ax + by)^2 = (ay - bx)^2$$

wynika, że $r\rho \geqslant ax + by$, a równość zachodzi tylko wtedy, gdy $ay - bx = 0$. Wynika z tego zatem, że $r + \rho > R$ i tylko w szczególnym przypadku, gdy $ay - bx = 0$, $ax + by > 0$ mamy $r + \rho = R$, z czego wynika, co powiedziano.

W przedstawieniu geometrycznym twierdzenie to jest wyrazem tego, że w trójkącie jeden bok jest mniejszy od sumy obu pozostałych. Twierdzenie ma inną jeszcze konsekwencję, że wartość bezwzględna sumy nie może być mniejsza od różnicy wartości bezwzględnych składników. Jeśli bowiem zastosujemy poprzednie twierdzenie do sumy $c = Z - z$, to wynika z tego, że $r \leqslant R + \rho$ lub

$$R \geqslant r - \rho.$$

Równość ma miejsce tylko wtedy, gdy iloraz $z : c$ jest rzeczywisty oraz ujemny.

* * *

Trzeba jeszcze powiedzieć słowo o najważniejszym środku pomocniczym algebry, rachowaniu na literach. Stosowanie tego środka pomocniczego jest tak ogólne, że niekiedy terminu rachowanie na literach używa się jako synonimu dla terminu algebra. Reguły, mówiące jak rachować na takich wyrażeniach literowych przyjmujemy za wprzódy znane. Równania między wyrażeniami literowymi mogą być dwóch rodzajów; albo, po pierwsze, są to tak zwane identyczności, tj. dwa wyrażenia przyjmowane za równe mogą zostać tak przekształcone za pomocą reguł rachowania, że oba wyrażenia są dokładnie zgodne. Otrzymuje się potem z takich równań literowych prawdziwe równania liczbowe, gdy litery zostaną zastąpione przez jakiekolwiek liczby, powiedzmy rzeczywiste bądź zespolone, przy założeniu, że nie występuje przy tym żądanie dzielenia przez zero. Litery w takich równaniach są często oznaczane też jako zmienne, ponieważ można sobie wyobrazić, bez popadnięcia w sprzeczność, że za litery można podstawiać coraz to inne i inne wartości liczbowe.

Równania drugiego rodzaju między wyrażeniami literowymi nie mają tego charakteru identyczności. O wiele bardziej zawierają one żądanie stawiane liczbom, które można bez popełnienia błędu podstawić za litery. Zadanie wykrycia wartości liczbowych, które czynią zadość takim żądaniom algebra nazywa *rozwiązaniem równania*. W tych równaniach litery oznaczane są także jako „*niewiadome*". Bardzo często w jednym i tym samym równaniu występują litery dwóch rodzajów, takie, za które można podstawiać dowolne wartości liczbowe oraz inne, których wartość liczbowa ma dopiero zostać wykryta.

* * *

Podstawa tłumaczenia: Weber, H.: 1895, *Lehrbuch der Algebra. Einleitung*, Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1-20.

Tłumaczenie: *Jerzy Pogonowski*
22 października 2010