



203

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

ISSN 2080-9751

**Studia ad Didacticam
Mathematicae Pertinentia VIII
(2016)**

203

**Annales
Universitatis
Paedagogicae
Cracoviensis**

**Studia ad Didacticam
Mathematicae Pertinentia VIII
(2016)**

Editor-In-Chief

Piotr Błaszczuk, Pedagogical University of Cracow, Poland

Vice Editor-In-Chief

Maciej Klakla, Paweł Włodkowiec University College in Płock, Poland

Assistant Editors

Ireneusz Krech, Pedagogical University of Cracow, Poland

Miroslawa Sajka, Pedagogical University of Cracow, Poland

Technical Editor

Marek Janasz

Editorial Board

Ján Gunčaga, Catholic University in Ruzomberok, Slovakia

Valery A. Gusev, Moscow State Pedagogical University, Russia

Eszter Herendiné-Kónya, University of Debrecen, Hungary

Henryk Kałol, Teacher Training College in Bielsko-Biała, Poland

Leonid M. Kotlyar, Kama State Engineering and Economics Academy (INEKA), Russia

Jan Melichar, Jan Evangelista Purkyně University in Ústí nad Labem, Czech Republic

Josef Molnár, Palacký University in Olomouc, Czech Republic

Bogdan J. Nowecki, Pedagogical University of Cracow, Poland

Antoni Pardała, University of Rzeszów, Poland

Svetlana A. Rozanova, Moscow State Institute of Radio-engineering Electronics and Automation (MIREA), Russia

Ingrid Semanišínová, Pavol Jozef Safarik University in Košice, Slovakia

Vladimir G. Shibakov, Kama State Engineering and Economics Academy (INEKA), Russia

Galina Sinkevich, Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, Russia

Helena Siwek, Pedagogical University of Cracow, Poland

Shlomo Vinner, Hebrew University of Jerusalem, Israel

Eda Vula, University of Prishtina, Republic of Kosovo

Erich Ch. Wittmann, Technical University of Dortmund, Germany

Reviewers

Maria Ciosek, Pedagogical University of Cracow, Poland

Monika Czajkowska, The Maria Grzegorzewska University in Warsaw, Poland

Ján Gunčaga, Catholic University in Ruzomberok, Slovakia

Maciej Klakla, Paweł Włodkowiec University College in Płock, Poland

Taras Kudryk, L'viv National University, Ukraine

Wojciech Krysztofiak, University of Szczecin, Poland

Zbigniew Leśniak, Pedagogical University of Cracow, Poland

Antoni Pardała, University of Rzeszów, Poland

Zdzisław Pogoda, Jagiellonian University, Cracow, Poland

Yarema Prykarpatsky, University of Agriculture in Cracow, Poland

Marek Ptak, University of Agriculture in Cracow, Poland

Kamil Rusek, Pedagogical University of Cracow, Poland

Zbigniew Semadeni, University of Warsaw, Poland

Robert Sochacki, University of Opole, Poland

Ewa Swoboda, University of Rzeszów, Poland

Edward Tutaj, Jagiellonian University, Cracow, Poland

Witold Wiśław, University of Wrocław, Poland

Krzysztof Wójtowicz, University of Warsaw, Poland

Pavol Zlatoš, Comenius University in Bratislava, Slovakia

www.didacticamath.up.krakow.pl

e-mail: annalesd@up.krakow.pl

© Copyright by Wydawnictwo Naukowe UP, Kraków 2016

ISSN 2080-9751

Wydawca

Wydawnictwo Naukowe UP

30-084 Kraków, ul. Podchorążych 2

tel./faks: 12 662-63-83, tel. 12 662-67-56

e-mail: wydawnictwo@up.krakow.pl

<http://www.wydawnictwoup.pl>

druk i oprawa Zespół Poligraficzny UP

NINIEJSZY TOM DEDYKUJEMY
DOKTOROWI ANTONIEMU CHRONOWSKIEMU
Z OKAZJI JUBILEUSZU 40 LAT PRACY NA UCZELNI

NINIEJSZY TOM DEDYKUJEMY
DOKTOROWI ANTONIEMU CHRONOWSKIEMU
Z OKAZJI JUBILEUSZU 40 LAT PRACY NA UCZELNI

Spis treści

Piotr Błaszczyk, <i>A Purely Algebraic Proof of the Fundamental Theorem of Algebra</i>	7
Antoni Chronowski, Zbigniew Powązka, <i>Twórcza aktywność matematyczna uczniów związana z rozwiązywaniem pewnych zadań na zastosowanie wzorów Viète'a</i>	25
Monika Czajkowska, <i>Kompetencje geometryczne nauczycieli matematyki</i>	51
Edyta Fidyk, Stanisław Siudut, <i>Propozycja wyzwalania twórczości matematycznej studentów przy pomocy pewnej nierówności funkcyjnej</i>	69
Jan Górowski, Adam Łomnicki, <i>O pewnej implikacji</i>	77
Izabela Jóźwik, Małgorzata Terepeta, <i>Symbolika matematyczna związana z pojęciem funkcji</i>	87
Joanna Major, Bożena Olik-Pawlik, Tadeusz Ratusiński, Lidia Zaręba, <i>Wybrane uwagi na temat roli zadań matematycznych w procesie nauczania-uczenia się matematyki</i>	101
Jerzy Pogonowski, <i>Kontekst Przekazu w Matematyce</i>	119
Damian Wiśniewski, Krzysztof Żyjewski, <i>Metoda Frobeniusa, czyli o rozwiązywaniu pewnej klasy równań różniczkowych</i>	139
Historia matematyki, Konferencje	
Piotr Błaszczyk, <i>Nota o Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen Georga Cantora</i>	159
Georg Cantor, <i>O rozszerzeniu pewnego twierdzenia z teorii szeregów trygonometrycznych</i>	169
Людмила Боженкова, Марина Егупова, <i>Актуальные проблемы обучения математике в школе и вузе в свете идей Л. С. Выготского</i>	179
Jerzy Pogonowski, <i>Recenzja z Charles Parsons, Philosophy of Mathematics in the Twentieth Century: Selected Essays</i>	185
Mirosława Sajka, <i>Dwudziesty jubileusz istnienia European Society for Research in Mathematics Education i dziesiąty międzynarodowy kongres CERME</i>	189

Contents

Piotr Błaszczyk, <i>A Purely Algebraic Proof of the Fundamental Theorem of Algebra</i>	7
Antoni Chronowski, Zbigniew Powązka, <i>Creative mathematical mental activity of students while solving problems requiring use of Vieta's formulas.</i>	25
Monika Czajkowska, <i>Geometric competences of mathematics teachers</i>	51
Edyta Fidyk, Stanisław Siudut, <i>Proposition of triggering of mathematical creativity of students by a functional inequality</i>	69
Jan Górowski, Adam Łomnicki, <i>On some implication</i>	77
Izabela Jóźwik, Małgorzata Terepeta, <i>Mathematical notation related to the concept of function</i>	87
Joanna Major, Bożena Olik-Pawlik, Tadeusz Ratusiński, Lidia Zaręba, <i>Selected comments on the role of mathematical tasks in the process of teaching-learning mathematics</i>	101
Jerzy Pogonowski, <i>The context of sharing mathematical knowledge, skills and abilities</i>	119
Damian Wiśniewski, Krzysztof Żyjewski, <i>Frobenius method, or on solving a certain class of differential equations</i>	139

History of Mathematics, Conferences

Piotr Błaszczyk, <i>Note on Georg Cantor's Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen</i>	159
Georg Cantor, <i>The generalization of a theorem in the theory of trigonometric series</i>	169
Людмила Боженкова, Марина Егупова, <i>Actual problems of teaching mathematics at school and university in the light of the ideas of L. S. Vygotsky</i>	179
Jerzy Pogonowski, <i>Review of Charles Parsons, Philosophy of Mathematics in the Twentieth Century: Selected Essays</i>	185
Mirosława Sajka, <i>European Society for Research in Mathematics Education 20th Anniversary. The international congress CERME 10</i>	189

Piotr Błaszczyk

A Purely Algebraic Proof of the Fundamental Theorem of Algebra*

Abstract. Proofs of the fundamental theorem of algebra can be divided up into three groups according to the techniques involved: proofs that rely on real or complex analysis, algebraic proofs, and topological proofs. Algebraic proofs make use of the fact that odd-degree real polynomials have real roots. This assumption, however, requires analytic methods, namely, the intermediate value theorem for real continuous functions. In this paper, we develop the idea of algebraic proof further towards a purely algebraic proof of the intermediate value theorem for real polynomials. In our proof, we neither use the notion of continuous function nor refer to any theorem of real and complex analysis. Instead, we apply techniques of modern algebra: we extend the field of real numbers to the non-Archimedean field of hyperreals via an ultraproduct construction and explore some relationships between the subring of limited hyperreals, its maximal ideal of infinitesimals, and real numbers.

1. Introduction

In 1799, Gauss gave the first widely accepted proof of the fundamental theorem of algebra, FTA for short: Every nonconstant complex polynomial has a complex root. Since then, many new proofs have appeared, including new insights, as well as a diversity of tricks, techniques and general methods. Nearly a hundred proofs of FTA were published up to 1907 (see Remmert, 1995, p. 98). Another hundred proofs were released in the period 1933 to 2009 (see *The Bibliography for the Fundamental Theorem of Algebra*). This unusual number of proofs compares with the multitude of proofs of the Pythagorean theorem (see Maor, 2007).

Fine and Rosenberg (Fine, Rosenberger, 1997) take a more general, qualitative perspective and present six exemplary proofs of FTA classified according to the techniques involved. They pair these proofs in accordance with the basic areas of

*Czysto algebraiczny dowód zasadniczego twierdzenia algebry

2010 Mathematics Subject Classification: Primary: 12D10, 03C20; Secondary: 12D15, 26E35

Key words and phrases: fundamental theorem of algebra, continuity, real closed field, intermediate value theorem, ultrapower

mathematics and present these pairs as models of analytic, algebraic and topological proofs. The first two proofs require real and complex analysis, the third and fourth ones apply algebraic methods: splitting fields and the fundamental theorem of symmetric polynomials, or the Galois theory and the Sylow theorem. The fifth proof involves the notion of the winding number of a closed, continuously differentiable curve $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ around 0. The sixth one relies on the algebraic topology and applies the Brouwer fixed point theorem.¹

After the presentation of analytic and algebraic proofs, Fine and Rosenberg observe:

”We have now seen four different proofs of the Fundamental Theorem of Algebra. The first two were purely analysis, while the second pair involved a wide range collection of algebraic ideas. However, we should realize that even in these proofs we did not totally leave analysis. Each of these proofs used the fact the odd-degree real polynomials have real roots. This fact is a consequence of the intermediate value theorem, which depends on continuity. Continuity is a topological property and we now proceed to our final pair of proofs, which involve topology.” (Fine, Rosenberger, 1997, p. 134)

All these proofs mentioned above involve, however, two kinds of continuity: the continuity of total order and the continuity of function. The first one is the characteristic feature of real numbers, and since we deal with real polynomials, we cannot ignore the continuity of the reals. The second one refers to a function – one can call the continuity of this kind a *topological property*. In our proof of FTA, the continuity of a function is omitted. In the next section, we develop this distinction further.

2. Two kinds of continuity

The continuity of the field of real numbers can be formulated in many equivalent ways. In this paper, we apply what we believe to be the simplest development – the one introduced by Richard Dedekind in his 1872 (Dedekind, 1872). To this end, we need a notion of Dedekind cut.

DEFINITION 1

A pair of sets (L, U) is a Dedekind cut of a totally ordered set $(X, <)$ if (1) $L, U \neq \emptyset$, (2) $L \cup U = X$, (3) $(\forall y \in L)(\forall z \in U)(y < z)$. A cut (L, U) is called a gap if there exists neither a maximum in L nor a minimum in U . A cut (L, U) is called a jump if there exists both a maximum in L and a minimum in U .

Now, depending on whether we consider the real line $(\mathbb{R}, <)$ or the field of reals $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$, we get different continuity axioms. The categorical characteristics of a continuously ordered set $(X, <)$, due to George Cantor’s (Cantor, 1895), consists of three conditions: (1) the order is dense, (2) no Dedekind cut of $(X, <)$ is

¹Some of the recent results use linear algebra (Derksen, 2003) and nonstandard analysis (Libman, 2006). The first one relies on the intermediate value theorem for real continuous functions, the second one exploits the Brouwer fixed point theorem.

a gap, (3) the order is separable, i.e., there exists such a countable subset $Z \subset X$ that is dense in X ,

$$(\forall x, y \in X)(\exists z \in Z)(x < y \Rightarrow x < z < y).^2$$

In other words, any ordered set $(X, <)$ that satisfies the three above conditions is isomorphic to the line of real numbers $(\mathbb{R}, <)$.

The continuity axiom for ordered fields is significantly simpler, for it consists of the requirement (2) alone. This is, because the density of the field order follows from ordered field axioms, while the continuity axiom itself implies that the order is separable (see below).

From now on, $\mathcal{F}$ denotes a totally ordered field $(\mathbb{F}, +, \cdot, 0, 1, <)$, that is a commutative field with a total order that is compatible with addition and multiplication,

- i) $(\forall x, y \in \mathbb{F})(x < y \Rightarrow x + z < y + z)$,
- ii) $(\forall x, y, z \in \mathbb{F})(x < y, 0 < z \Rightarrow x \cdot z < y \cdot z)$.

DEFINITION 2

The field of real numbers is an ordered field $\mathcal{F}$, in which every Dedekind cut (L, U) of $(\mathbb{F}, <)$ satisfies the condition

$$(\exists x \in \mathbb{F})(\forall y \in L)(\forall z \in U)(y \leq x \leq z). \quad (\text{C1})$$

The categoricity theorem states that any two ordered fields satisfying axiom (C1) are isomorphic (Cohen, Ehrlich, 1963, p. 105). In other words, any ordered field satisfying (C1) is isomorphic to the field of real numbers $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$.

The well-known constructions of the reals, e.g. the one that identifies real numbers with cuts of the line of rational numbers $(\mathbb{Q}, <)$ due to Dedekind, show that there exists at least one field of real numbers. On the other hand, the categoricity theorem implies that there exists at most one, up to isomorphism, field of real numbers.

The order of an ordered field is dense: it follows from the simple observation that if $x < y$, then $(x+y)/2$ lies between x and y . On the other hand, the density of a field order is equivalent to the claim that no cut of $(\mathbb{F}, <)$ is a jump. As a result, (C1) is reduced to the fact that no Dedekind cut of $(\mathbb{F}, <)$ is a gap.³ With this knowledge we can easily visualize the continuity of the real line.

On the diagram below a black dot corresponds to the maximal element of the class L , or the minimal element of the class U . If there are, accordingly, no maximum or minimum, then we put a white dot. In this way the diagram *Dedekind cuts* represents the only possible kinds of cuts of the line $(\mathbb{F}, <)$. Cut (1) is a jump, cut (2) is a gap. Axiom (C1) states that cuts (3) and (4) are the only possible cuts on the line of real numbers $(\mathbb{R}, <)$.

²Next to (Cantor, 1895), § 11. *Der Ordnungstypus θ des Linearkontinuums X* , see also (Kuratowski, Mostowski, 1966, ch. VI), § 3. *Order types ω , η , and λ* .

³It follows from the axiom (C1) that the set of fractions, $\mathbb{Q}$, is dense in $(\mathbb{R}, <)$; in fact, it is an equivalent form of the Archimedean axiom (see § 4 below). Thus, for ordered fields, (C1) suffice to characterize the continuity of the order.

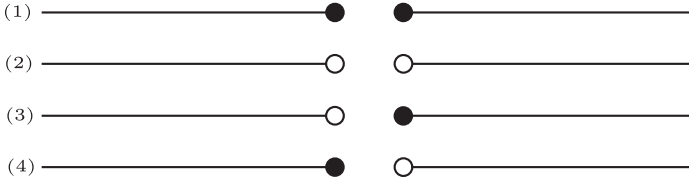


Fig. 1. Dedekind cuts

(C1) is called the continuity axiom.⁴ In fact, it is one of the many equivalent formulations of the continuity of the reals. Here are some other popular versions:

(C2) If $A \subset \mathbb{F}$ is a nonempty set which is bounded above, then there exists $a \in \mathbb{F}$ such that $a = \sup A$.

(C3) Field $\mathcal{F}$ is Archimedean and every Cauchy (fundamental) sequence $(a_n) \subset \mathbb{F}$ has a limit in $\mathbb{F}$.

Cohn and Ehrlich (Cohen, Ehrlich, 1963, p. 95-96), present other standard formulations of the continuity axiom which appeared at the turn of 19th and 20th century. Due to their existential character (“there exists $x \in \mathbb{F}$ such that”), they all make it possible to determine specific real numbers – each version with a different technique, e.g., via Dedekind cuts, bounded sets, or fundamental sequences. In a sense, each form of the continuity axiom corresponds to a specific technique. In the next section we present a new version of the continuity axiom that reflects the technique we adopt in our proof of FTA.

2.1. Now we turn to the continuity of function.

DEFINITION 3

A function $f : \mathbb{F} \mapsto \mathbb{F}$ is continuous at a point $a \in \mathbb{F}$ if the following condition holds

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{F})(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

To elaborate, first, observe that the definition of a continuous function can be formulated in any ordered field. Similarly, we can develop the theory of limits of sequences in any order field (see Cohen, Ehrlich, 1963, chap. 3). Moreover, in any ordered field we can also formulate the intermediate value theorem (IVT for short).

Secondly, the standard proof of IVT for a real continuous function proceeds as follows: Let $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ be a continuous function with $f(0) < 0$ and $f(1) > 0$. Putting $A = \{x \in [0, 1] : f(x) < 0\}$, by (C2), we can take $a = \sup A$. The continuity of f implies $f(a) = 0$. The final step in this argument is based on the rule stating that a real continuous function preserves the sign:

$$f(c) \neq 0 \Rightarrow (\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R})(|c - x| < \delta \Rightarrow f(c) \cdot f(x) > 0). \quad (\text{SR})$$

Thus, if $f(a) < 0$, then, by (SR), for some $\delta > 0$ and every x such that $0 < x - a < \delta$ holds $f(x) < 0$, contrary to the assumption $a = \sup A$; the same

⁴In a topology induced by the order of reals, the property (C1) means connectedness.

argument applies to the case $f(a) > 0$. Hence, via the trichotomy law of the total order, $f(a)$ equals 0.

This proof clearly manifests the combination of the continuity of the reals and the continuity of a function: we apply the (SR) rule to the point defined by (C2).⁵

Thirdly, from the logical point of view, the difference between the continuity of an ordered field and the continuity of function is not an absolute one. Axiom (C1) turns out to be equivalent to many statements of real analysis which are typically presented as theorems and involve the notion of a function. Teismann (Teismann, 2013) proves that IVT, as well as the mean value theorem, is equivalent to (C1).⁶ Riemenschneider (Riemenschneider, 2001) lists 37 versions of the continuity axiom, mostly theorems of one-variable real analysis.

3. Real closed fields

The theory of real closed fields, started by Emil Artin and Otto Schreier in the 1920s, provides a general framework for this paper. Our sketchy account of this theory starts with a technical notion of a formally real field.⁷ At the end of this section we show that in order to prove FTA it suffices to prove IVT for polynomials.

DEFINITION 4

A field $(\mathbb{F}, +, \cdot, 0, 1)$ is formally real if the sum of squares is zero only if each summand is zero.⁸

An equivalent formulation of this definition is this: A field is formally real if -1 cannot be written as a sum of squares, that is $-1 \notin \{ \sum a_i^2 : a_i \in \mathbb{F} \}$. Thus, any ordered field is obviously formally real.

DEFINITION 5

A field $(\mathbb{F}, +, \cdot, 0, 1)$ is real closed if it is formally real and every proper algebraic extension of the field is not formally real.

A real closed field is in fact an ordered field. Setting

$$x < y \Leftrightarrow y - x \in \{ \sum a_i^2 : a_i \in \mathbb{F} \}$$

we obtain a total order compatible with the addition and multiplication on $\mathbb{F}$.

The real number field and the real algebraic number field are both really closed, so the order of a real closed field is not necessarily continuous. Next, some

⁵Essentially, this argument goes back as far as Bolzano (Bolzano, 2004).

⁶The proof of the first equivalence can be easily based on our diagram *Dedekind cuts*. If a field $\mathcal{F}$ does not satisfy (C1), then there is a cut of $(\mathbb{F}, <)$ which yields a gap (L, U) , as the one marked by (2). A function given by $f(x) = 0$, for $x \in L$, and $f(x) = 1$, for $x \in U$, is continuous and does not satisfy IVT. If $\mathcal{F}$ is the real number field, then we can adopt the proof presented above to show that a real continuous function satisfies IVT.

⁷The general reference here is (Artin, Schreier, 2007; Cohen, 1991, chap. 8; Jacobson, 1975, chap. 6); see also (Zassenhaus, 1967) as it applies the theory of real closed field to give a constructive proof of FTA.

⁸We assume that all fields considered are commutative.

theorems concerning real polynomials, like the intermediate value theorem, mean value theorem, extreme value theorem, Rolle's theorem, or theorem of Sturm about the number of zeros in an interval, also hold in a real closed field.⁹ These results suggest that the algebraic features of the real number field alone imply IVT.

3.1. The theory of real closed fields provides a criterion for a field to be algebraically closed. Artin and Schreier (Artin, Schreier, 2007) show that: "In a real closed field, every polynomial of odd degree has at least one root." (Artin, Schreier, 2007, p. 275)

Then, they proceed to prove the proposition that constitutes the basis for our argument, namely:

"A real closed field is not algebraically closed. On the other hand, the field obtained by adjoining i ($= \sqrt{-1}$) is algebraically closed." (Artin, Schreier, 2007, p. 275)¹⁰

In fact, Artin and Schreier present two proofs which make the essence of what Fine and Rosenberg call the algebraic proofs of FTA.

The above result supports the conclusion that FTA is equivalent to the claim that real numbers form a real closed field.

3.2. The definition of a real closed field does not provide simple criteria for a field to be really closed. Yet, real closed fields can be described more explicitly. Cohn (Cohen, 1991) shows that an ordered field $(\mathbb{F}, +, \cdot, 0, 1, <)$ is real closed if and only if it is closed under a square root operation and odd-degree polynomials have roots in $\mathbb{F}$, that is

$$(R1) (\forall x > 0)(\exists y \in \mathbb{F})(y^2 = x),$$

$$(R2) (\forall a_1 \in \mathbb{F}) \dots (\forall a_{2n} \in \mathbb{F})(\exists x \in \mathbb{F})(x^{2n+1} + \sum_{i=1}^{2n} a_i x^i = 0).$$

Indeed, these properties, along with ordered field axioms, constitute the set of axioms for ordered real closed fields (see Marker, 2002, p. 94–95).¹¹ It is also easily seen that properties (R1), (R2) can be combined into this one:

"An ordered field is real closed if and only if it has the intermediate value property for polynomials." (Cohen, 1991, p. 315)

As a result we obtain:

PROPOSITION 1

If an ordered field has the intermediate value property for polynomials, then the field obtained by adjoining $\sqrt{-1}$ is algebraically closed.

Thus, to prove FTA it is sufficient to prove IVT for real polynomials.

⁹See Jacobson, 1975, chap. VI, § 3.

¹⁰The converse of this theorem also holds: If $\mathcal{F}$ is such an ordered field that the field obtained by adjoining $\sqrt{-1}$ is algebraically closed, then $\mathcal{F}$ is real closed (see Jacobson, 1975, p. 277).

¹¹Given $(\mathbb{F}, +, \cdot, 0, 1)$ is formally real, the axiom (R1) has to take the following form: $(\forall x \in \mathbb{F})(\exists y \in \mathbb{F})(y^2 = x \vee y^2 = -x)$.

4. Archimedean fields

In the next section we will deal with a non-Archimedean field, so now we restate the definition and some basic facts concerning Archimedean fields.

DEFINITION 6

A totally ordered field $\mathcal{F}$ is Archimedean if it satisfies the condition

$$(\forall x \in \mathbb{F})(\exists n \in \mathbb{N})(n > x). \quad (\text{A1})$$

Axiom (A1) is called the Archimedean axiom. Here is its equivalent version

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0. \quad (\text{A2})$$

Yet another equivalent formulation of the Archimedean axiom is the following one: If (L, U) is a Dedekind cut of $(\mathbb{F}, <)$, then

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists x \in L)(\exists y \in U)(y - x < 1/n). \quad (\text{A3})$$

Given (L, U) is a Dedekind cut of $(\mathbb{F}, <)$, by (A3), we can find such a sequence $(r_n) \subset \mathbb{F}$ that satisfies conditions

$$r_{2k-1} \in L, \quad r_{2k} \in U, \quad r_{2k} - r_{2k-1} < \frac{1}{k}, \quad (1)$$

$$r_1 \leq r_3 \leq \dots \leq r_{2k-1} \leq \dots \leq r_{2k} \leq \dots \leq r_4 \leq r_2.$$

We refer to this fact proving proposition 3 below.

The real number field is the *biggest* Archimedean field, that is any Archimedean field can be embedded into the field of reals; on the other hand, any extension of the reals is a non-Archimedean field (see Cohen, Ehrlich, 1963).

5. Extending the real number field

In this section we introduce the construction called the ultraproduct to extend the field of reals to the field of hyperreals (nonstandard real numbers). We apply this construction directly to the field of reals to build a special kind of ultraproduct called an ultrapower. This presentation follows (Cohen, 1991; Goldblatt, 1998).

To start with, we give the definition of an ultrafilter.

DEFINITION 7

A family of sets $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ is an ultrafilter on $\mathbb{N}$ if (1) $\emptyset \notin \mathcal{U}$, (2) if $A, B \in \mathcal{U}$, then $A \cap B \in \mathcal{U}$, (3) if $A \in \mathcal{U}$ and $A \subset B$, then $B \in \mathcal{U}$, (4) for each $A \subset \mathbb{N}$, either A or its complement $\mathbb{N} \setminus A$ belongs to $\mathcal{U}$.

It follows from this definition that either the set of odd numbers or the set of even numbers belongs to an ultrafilter.

Now, take the family of sets with finite complements. It obviously satisfies conditions (1)–(3) listed in the definition of an ultrafilter. By Zorn's lemma, this

family can be extended to an ultrafilter $\mathcal{U}$ on $\mathbb{N}$ (see Cohen, 1991, p. 29; Goldblatt, 1998, p. 20–21).

From now on, $\mathcal{U}$ denotes a fixed ultrafilter on $\mathbb{N}$ containing every subset with a finite complement.¹²

In the product $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ we define a relation

$$(r_n) \equiv (s_n) \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} : r_n = s_n\} \in \mathcal{U}.$$

This is easily seen to be an equivalence relation. Let $\mathbb{R}^*$ denote the reduced product $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\equiv$.

The equality relation in $\mathbb{R}^*$ is obviously given by

$$[(r_n)] = [(s_n)] \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} : r_n = s_n\} \in \mathcal{U}.$$

It follows from the notion of ultrafilter that

$$[(r_n)] \neq [(s_n)] \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} : r_n \neq s_n\} \in \mathcal{U}.$$

Algebraic operations on $\mathbb{R}^*$ are defined pointwise, that is

$$[(r_n)] + [(s_n)] = [(r_n + s_n)], \quad [(r_n)] \cdot [(s_n)] = [(r_n \cdot s_n)].$$

And a total order on $\mathbb{R}^*$ is given by the following definition

$$[(r_n)] < [(s_n)] \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} : r_n < s_n\} \in \mathcal{U}.$$

13

We embed the set of reals $\mathbb{R}$ into the set of hyperreals $\mathbb{R}^*$ by identifying the standard real number r with the hyperreal determined by the constant sequence $(r, r, r, \dots)$. Thus, setting $r^* = [(r, r, r, \dots)]$, the embedding is given by the following map

$$\mathbb{R} \ni r \mapsto r^* \in \mathbb{R}^*.$$

To end this part of our development, we would like to ease our notation: from now on we use r for hyperreal number r^* . In fact, it is a consequence of the convention that $\mathbb{R}$ is a *subset* of $\mathbb{R}^*$.

PROPOSITION 2

$(\mathbb{R}^*, +, \cdot, 0, 1, <)$ is non-Archimedean ordered field.

Proof. Goldblatt (Goldblatt, 1998, p. 23–24) gives a straightforward proof that the hyperreals form a totally ordered field.¹⁴ In addition, by (A2), for any $r \in \mathbb{R}$ the inequality holds $r \neq [(1/n)]$, which means that the field of hyperreals extends the field of reals. Thus, the field of hyperreals is non-Archimedean.

¹²The reader can find the same reasoning in the literature encoded in one short sentence: Let $\mathcal{U}$ be a fixed nonprincipal ultrafilter on $\mathbb{N}$.

¹³In the above definitions, we adopt a standard convention to use the same signs for the relations and operations on $\mathbb{R}$ and $\mathbb{R}^*$; see (Goldblatt, 1998), chap. 3, § 3.6.

¹⁴This claim is also a straightforward consequence of the Łoś theorem (Łoś, 1955), also known as the transfer principle; however, in this paper we avoid arguments relying on mathematical logic.

□

In the last section, we will also show that the field of hyperreals is real closed.

5.1. We define, in a standard way, subsets of $\mathbb{R}^*$ – sets of infinitesimals, limited and infinitely large hyperreals, namely¹⁵

$$\begin{aligned} x \in \Omega &\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})(|x| < 1/n), \\ x \in \mathbb{L} &\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N})(|x| < n), \\ x \in \Psi &\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})(|x| > n). \end{aligned}$$

The set of positive hyperintegers (hypernaturals) $\mathbb{N}^*$ is defined by

$$\mathbb{N}^* = \{[(r_n)] \in \mathbb{R}^* : \{n \in \mathbb{N} : r_n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{U}\}.$$

Roughly speaking, the set $\mathbb{N}^*$ consists of elements $[(n_j)]$, where $(n_j) \subset \mathbb{N}$.

Next, on the set $\mathbb{R}^*$ we define a relation x is *infinitely close to* y by putting

$$x \approx y \Leftrightarrow x - y \in \Omega.$$

This is easily seen to be an equivalence relation.

Following are some elementary facts concerning these concepts. For the sake of completeness, we present a short justification for each one, though they are almost obvious.

(F1) A standard real is a limited hyperreal, $\mathbb{R} \subset \mathbb{L}$.

It is the consequence of the Archimedean axiom.

(F2) Two standard real numbers r, s do not lie infinitely close to each other.

It follows from the Archimedean axiom that the real number $|r - s|$ is greater than $1/k$ for some $k \in \mathbb{N}$. Thus this number is not infinitesimal, and neither $r - s$ nor $s - r$ belongs to Ω .

(F3) Limited numbers form an ordered ring $(\mathbb{L}, +, \cdot, 0, 1, <)$ with Ω being its maximal ideal. Particulary, the following condition is satisfied

$$(\forall x \in \Omega)(\forall y \in \mathbb{L})(x \cdot y \in \Omega).$$

The first part of this claim is a consequence of the interplay between the quantifiers “for all” and “exists” occurring in the definitions of sets Ω and $\mathbb{L}$. To show that Ω is the maximal ideal of the ring $\mathbb{L}$, suppose, to obtain a contradiction, that G is an ideal of $\mathbb{L}$ such that $\Omega \subsetneq G$ and $G \subsetneq \mathbb{L}$. Take $x \in G \setminus \Omega$. Since x is limited, for some $m \in \mathbb{N}$ holds $|x| < m$; since it is not infinitesimal, for some k holds $|x| > 1/k$. Then

$$1/k < |x| < m.$$

¹⁵Our definitions agree with the those given by Artin and Schreier (Artin, Schreier, 2007). However, we can offer some simple examples of infinitesimals and infinitely large numbers, namely $[(1/n)] \in \Omega$, $[(n)] \in \Psi$, moreover, it is easy to demonstrate that if $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$, then $[(r_n)] \in \Omega$, and if $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \infty$, then $[(r_n)] \in \Psi$.

Hence, via the rules of an ordered field, we obtain

$$1/m < |x^{-1}| < k,$$

which means that x^{-1} is a limited hyperreal. Since x belongs to the ideal G , the element $1 = x \cdot x^{-1}$ also belongs to G , a contradiction.¹⁶

(F4) If $x \in \mathbb{R}^*$ and $x \neq 0$, then the equivalence holds

$$x \in \Omega \Leftrightarrow x^{-1} \in \Psi.$$

$x \in \Omega \setminus \{0\}$ and $x^{-1} \notin \Psi$, then $x^{-1} \in \mathbb{L}$. By (F3), $x \cdot x^{-1} \in \Omega$, contrary to the fact that 1 is not an infinitesimal. Next, if $|x^{-1}| > n$, for every $n \in \mathbb{N}$, then $x < 1/n$, for every $n \in \mathbb{N}$. It is equivalent to the claim that if x^{-1} is infinitely large, then x is infinitely small.

To summarize this subsection, we present a diagram representing the ultrapower construction.

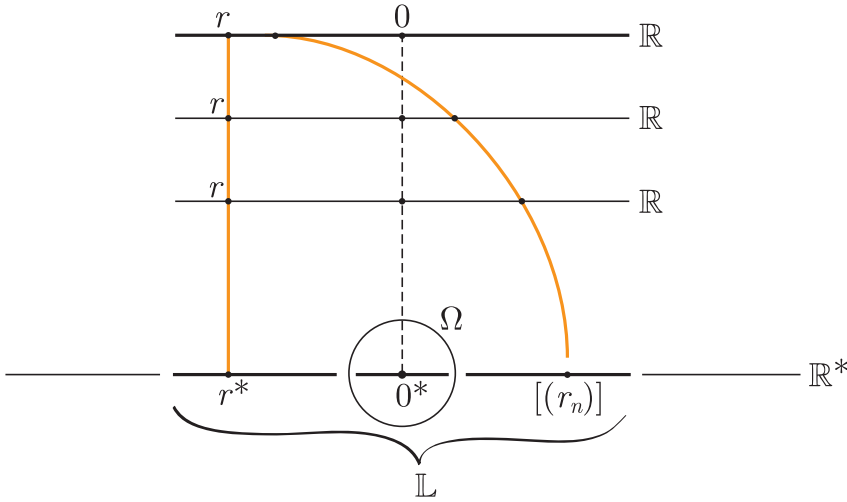


Fig. 2. The ultrapower construction

5.2. We can apply the ultrapower construction to any ordered field $\mathcal{F}$. Thereby we obtain the set $\mathbb{F}^*$ and its subsets Ω , $\mathbb{L}$, Ψ , as well as the relation x is infinitely close to y . With these notions we can formulate yet another version of the continuity axiom, namely

$$(\forall a \in \mathbb{L})(\exists! z \in \mathbb{F})(a \approx z). \quad (C4)$$

PROPOSITION 3

The statements (C1) and (C4) are equivalent.

¹⁶By proposition 3, one can show that the quotient ring $\mathbb{L}/\Omega$ is isomorphic to the real number field. As a result, we can represent the set $\mathbb{L}$ as the union of disjoint sets $r + \Omega$, the so-called *monads*, for $r \in \mathbb{R}$.

Proof. The first part of this claim – if $\mathcal{F} = (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$, then each limited number a is infinitely close to exactly one real number z – is the well-known Standard Part Principle (see Bair et al., 2013; Goldblatt, 1998, p. 53). In the proof that follows, we apply the Archimedean axiom in the version (A3).

The limited number $a \in \mathbb{R}^*$ determines a Dedekind cut of $(\mathbb{R}, <)$

$$L = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}, \quad U = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}.$$

By (C1), the cut (L, U) determines the real number z . By (1), we find a sequence $(r_n) \subset \mathbb{R}$ such that $r_{2k-1} \in L$, $r_{2k} \in U$ and $r_{2k} - r_{2k-1} < 1/k$. Hence,

$$z, a \in \bigcap_{k=1} [r_{2k-1}, r_{2k}],$$

which gives $z \approx a$.

Since two standard reals do not lie infinitely close to each other, only one real is infinitely close to a . This unique number is called the standard part, or the shadow, of a and is denoted by a^o . Thus $a^o \approx a$, or $a = a^o + \varepsilon$, for some $\varepsilon \in \Omega$. Also, note that if $a \approx b$, then, by the uniqueness of the standard part, we obtain $a^o = b^o$.

For the second part of the proof, we first show that (C4) implies (A2).¹⁷ Suppose, on the contrary, that (A2) does not hold. Then, for some $\varepsilon > 0$ and for every n holds $\varepsilon < 1/n$. Hence $0 \approx [(1/n)] \approx \varepsilon$, which contradicts the claim that there is only one element in $\mathbb{F}$ infinitely close to $[(1/n)]$.

Thus we come to the main part of the proof. Let (L, U) be a Dedekind cut of $(\mathbb{F}, <)$ and $(r_n) \subset \mathbb{F}$ satisfy condition (1). Then $r_1 < [(r_n)] < r_1 + 1$. Since $\mathcal{F}$ is Archimedean, for some $n \in \mathbb{N}$ holds $[(r_n)] < n$. As a result we obtain that $[(r_n)] \in \mathbb{L}$. By (C4), there exists $z \in \mathbb{F}$ such that $z \approx [(r_n)]$. We show that z is the greatest element in L , or the least element in U .

Seeking a contradiction, suppose that (L, U) is a gap. We need to consider four possibilities resulting from a combination of the following conditions: (1) $z \in L$, (2) $z \in U$, (a) the set of odd numbers belongs to $\mathcal{U}$, (b) the set of even numbers belongs to $\mathcal{U}$.

(Ad 1a.) Suppose $z \in L$ and the set of odd numbers belongs to $\mathcal{U}$. There exists $x \in L$, such that $z < x$, for (L, U) is a gap. Set

$$\theta = \frac{x - z}{2}. \quad (2)$$

Since $z \approx [(r_n)]$, it follows that

$$\{n \in \mathbb{N} \mid |r_n - z| < \theta\} \in \mathcal{U}.$$

Put

$$A = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ is odd}\} \cap \{n \in \mathbb{N} \mid |r_n - z| < \theta\} \cap \{n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \theta\}.$$

¹⁷For another proof of proposition 3 see (Hall, 2011), however, it implicitly relies on the assumption that $\mathcal{F}$ is Archimedean.

First, $A \in \mathcal{U}$. Second, if $k \in A$, then $r_k - z < \theta$; in consequence

$$r_k < x - \theta. \quad (3)$$

By (2), we have $r_k < x$. Thus $r_k \in L$.

On the other hand, it follows from (1) that

$$r_{k+1} - r_k < \frac{1}{k} < \theta. \quad (4)$$

By adding inequalities (3) and (4) we obtain $r_{k+1} < x$. Hence $r_{k+1} \in L$. But $k+1$ is even, so $r_{k+1} \in U$, contrary to the assumption $L \cap U = \emptyset$.

(Ad 1b.) In the same manner, suppose $z \in L$ and the set of even numbers belongs to $\mathcal{U}$. Let $x \in L$ be such that $z < x$; set $\theta = \frac{x-z}{2}$. Put

$$A = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ is even}\} \cap \{n \in \mathbb{N} \mid |r_n - z| < \theta\} \cap \{n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \theta\}.$$

Let $k \in A$. As before, $r_k < x$, which gives $r_k \in L$. Since k is even, the term r_k belongs to U . Thus $r_k \in L \cap U$, a contradiction.

The same reasoning applies to cases (2a), (2b). $\square$

5.3. Let $r \in \mathbb{R}$. In our proof of FTA, we will also need these simple facts:¹⁸

If $r > 0$, then for every $\varepsilon \in \Omega$ the relation obtains $r + \varepsilon > 0$.

If $r < 0$, then for every $\varepsilon \in \Omega$ the relation obtains $r + \varepsilon < 0$.

For the proof of the first fact, note that if $r > 0$, then for $\varepsilon \in \Omega$ holds $|\varepsilon| < r/2$. Hence $r + \varepsilon > r/2$, and $r + \varepsilon > 0$.

These two facts imply the third result:

If $x \approx y$ and $x \cdot y < 0$, then $x, y \in \mathbb{L}$ and the standard part of x is equal to 0,

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}^*)(x \approx y, x \cdot y < 0 \Rightarrow x^o = 0). \quad (5)$$

6. Polynomials

Let $f \in \mathbb{R}[x]$ be a real polynomial,

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m, \quad \text{where } a_i \in \mathbb{R}.$$

By f^* we mean a hyperreal polynomial $f^* : \mathbb{R}^* \mapsto \mathbb{R}^*$ with real coefficients a_i ,

$$f^*(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m,$$

defined by

$$f^*([(r_n)]) = [(f(r_1), f(r_2), \dots)]. \quad (6)$$

If $r \in \mathbb{R}$, then $f^*(r) = [(f(r), f(r), \dots)]$. Since we identify real number r with hyperreal r^* , the equality $f^*(r) = f(r)$ obtains.

¹⁸One can consider these facts a nonstandard counterpart of the rule (SR), given above in section 2.

LEMAT 1

Let $f \in \mathbb{R}[x]$ and $a \in \mathbb{L}$. If $a \approx b$, then $f^*(a) \approx f^*(b)$.

Proof. Set

$$f^*(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m, \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

Let r be the standard part of a , that is $r = a^\circ$. Thus $r \approx a$, and for some $\varepsilon \in \Omega$ we have $a = r + \varepsilon$.

Now, for the real number r , the following equalities hold

$$\begin{aligned} f^*(r + \varepsilon) &= a_0 + a_1(r + \varepsilon) + \dots + a_m(r + \varepsilon)^m \\ &= f^*(r) + \varepsilon \cdot w(a_1, \dots, a_m, r, \varepsilon), \end{aligned}$$

where $w(a_1, \dots, a_m, r, \varepsilon) \in \mathbb{L}$. Since infinitesimals form an ideal of the ring $\mathbb{L}$, the hyperreal number $\varepsilon \cdot w(a_1, \dots, a_m, r, \varepsilon)$ belongs to Ω . Hence $f^*(r + \varepsilon) - f^*(r) \in \Omega$. The identification $f^*(r) = f(r)$ clearly forces $f^*(r + \varepsilon) \approx f(r)$. Since $a = r + \varepsilon$, we obtain

$$f^*(a) \approx f(r).$$

If $a \approx b$, then via the transitivity of the relation *is infinitely close*, we get $r \approx b$. By the uniqueness of the standard part, we also have $r = b^\circ$. The reasoning applied to the pair r, a works for the pair r, b too, thus

$$f^*(b) \approx f(r).$$

Finally, once more applying the transitivity of the relation *is infinitely close*, we have

$$f^*(a) \approx f^*(b).$$

□

One can consider this lemma as a nonstandard counterpart of the standard claim that a real polynomial is a continuous function. Indeed, Birkhoff and Mac Lane, in Chapter 4, entitled *Real Numbers*, of their (Birkhoff, Mac Lane, 1977) provide a proof for this claim which applies the $\varepsilon - \delta$ technique. In the next chapter, introducing the proof of FTA they write: “Many proofs of this celebrated theorem are known. All proofs involve nonalgebraic concepts like those introduced in Chap 4” (Birkhoff, Mac Lane, 1977, p. 114).

We consider the proof of the following proposition purely algebraic. By Proposition 1, this proposition is equivalent to FTA.

PROPOSITION 4

Let $f \in \mathbb{R}[x]$ and $a, b \in \mathbb{R}$. If $f(a) \cdot f(b) < 0$, then for some $c \in (a, b)$ holds $f(c) = 0$.

Proof. Obviously, we can take $a = 0$, $b = 1$. Suppose $f(0) < 0$ and $f(1) > 0$. By (6) the same relation obtains in the realm of hyperreals, that is $f^*(0) < 0$ and $f^*(1) > 0$.

Let $N = [(n_j)] = [(n_1, n_2, \dots)]$ be an infinitely large hyperinteger; we can take, for example, $N = [(n)]$. Set

$$I_N = \{K/N : 0 \leq K \leq N\} = \left\{0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}, 1\right\}.$$

In a similar way we define sets I_{n_j} ,

$$I_{n_j} = \{k/n_j : 0 \leq k \leq n_j\} = \left\{0, \frac{1}{n_j}, \frac{2}{n_j}, \dots, \frac{n_j-1}{n_j}, 1\right\}.$$

However, while sets I_{n_j} are finite, the set I_N is infinite; in fact, it has cardinality continuum.¹⁹

The image of I_{n_j} under the map f is a finite set

$$f(I_{n_j}) = \{f(0), f(1/n_j), \dots, f(1)\}.$$

If for some k we have $f(k/n_j) = 0$, then the proof is done. Thus, we can assume the elements of $f(I_{n_j})$ are either negative or positive. Let k_j , where $0 \leq k_j < n_j$, be the first integer such that $f(k/n_j) < 0$ and $f((k+1)/n_j) > 0$,

$$f(k_j/n_j) < 0, \quad f((k_j+1)/n_j) > 0. \quad (7)$$

We can always find such k_j , for the sets I_{n_j} are finite.

Put $K = [(k_j)]$. Since $0 \leq k_j < n_j$, hyperinteger K satisfies the inequalities $0 \leq K < N$. Moreover, $K+1 = [(k_j+1)]$.

By (6) and (7) we have

$$f^*(K/N) < 0, \quad f^*((K+1)/N) > 0. \quad (8)$$

Number K/N is a limited hyperreal. Let c be its standard part, that is $c = (K/N)^o$.

Since N is infinitely large, the element $1/N$ belongs to Ω . Thus $K/N \approx (K+1)/N$, and via the transitivity of the relation *is infinitely close* we obtain

$$K/N \approx c \approx (K+1)/N. \quad (9)$$

Next, by the lemma, it follows that

$$f^*(K/N) \approx f(c) \approx f^*((K+1)/N). \quad (10)$$

Now we come to the final part of the proof. By (10) hyperreals $f^*(K/N)$ and $f^*((K+1)/N)$ are infinitely close; by (8) they have opposite signs. Then, by (5), the standard part of $f^*(K/N)$ is equal to 0, that is

$$(f^*(K/N))^o = 0.$$

On the other hand, by Proposition 3, there exists one and only one standard real number infinitely close to $f^*(K/N)$; by (10) it is the number $f(c)$, that is

$$(f^*(K/N))^o = f(c).$$

Hence then $f(c) = 0$.

To end the proof, observe that the hyperreal K/N belongs to the segment $(0, 1)$, so its standard part, c , lies in the segment $[0, 1]$. Since $f(0) \cdot f(1) < 0$, the real number c equals neither 0 nor 1. As a result, c lies in the segment $(0, 1)$. $\square$

Following, we show that a polynomial with hyperreal coefficients has the intermediate value property.

¹⁹The set I_N is usually called a *hyperfine grid*.

PROPOSITION 5

Let $f \in \mathbb{R}^*[x]$ and $a, b \in \mathbb{R}^*$. If $f(a) \cdot f(b) < 0$, then for some $c \in (a, b)$ holds $f(c) = 0$.

Proof. Let a hyperreal polynomial

$$f(x) = A_0 + A_1x + \dots + A_mx^m, \quad A_i \in \mathbb{R}^*, \quad m \in \mathbb{N},$$

be such that $f(a) < 0$ and $f(b) > 0$, with $a = [(a_n)]$ and $b = [(b_n)]$. Suppose $A_i = [(r_{i,n})]$, where $0 \leq i \leq m$. The hyperreal polynomial f is accompanied by a family of real polynomials $f_n \in \mathbb{R}[x]$, where

$$f_n(x) = r_{0,n} + r_{1,n}x + \dots + r_{m,n}x^m, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Indeed, what we really have is a function $f = [f_n]$, where $[f_n] : \mathbb{R}^* \mapsto \mathbb{R}^*$ is defined by

$$[f_n]([(d_n)]) = [(f_1(d_1), f_2(d_2), \dots)]. \quad (11)$$

Set

$$I = \{n \in \mathbb{N} : f_n(a_n) < 0\}, \quad J = \{n \in \mathbb{N} : f_n(b_n) > 0\}.$$

Since $I, J \in \mathcal{U}$, the intersection $I \cap J$ also belongs to $\mathcal{U}$. We can take into consideration only real polynomials f_n with indexes $n \in I \cap J$. Thus, for any f_n , where $n \in I \cap J$, we have

$$f_n(a_n) \cdot f_n(b_n) < 0.$$

By Proposition 4, there exists $c_n \in (a_n, b_n)$ such that $f_n(c_n) = 0$, for $n \in I \cap J$. For indices $n \in \mathbb{N} \setminus I \cap J$, we can take $c_n = 0$.²⁰ Put $c = [(c_n)]$. By (11), the equality $f(c) = 0$ holds.

Since

$$a_n < c_n < b_n, \quad \text{with } n \in I \cap J,$$

we have the inequalities

$$[(a_n)] < [(c_n)] < [(b_n)].$$

Hence $c \in (a, b)$.

□

To end the paper, by Propositions (1) and (5), we obtain

COROLLARY 1

The hyperreal number field is real closed and the field $\mathbb{R}^(\sqrt{-1})$ is algebraically closed.*

²⁰The equality $[(r_n)] = [(s_n)]$ holds if $r_n = s_n$ for indices n , which belong to some element of the ultrafilter $\mathcal{U}$. Thus, defining a hyperreal $[(c_n)]$ only those terms c_n matter, of which indices n belong to the same element of the ultrafilter $\mathcal{U}$.

References

- Artin, E., Schreier, O.: 2007, Algebraische Konstruktion reeller Körper, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität 5 (1926), 85–99; The algebraic construction of real fields, in: M. Rosen (ed.), *Exposition by Emil Artin*, AMS-LMS, 107–118.
- Bair, J., et al.: 2013, Is mathematical history written by the victors?, *Notices of The American Mathematical Society* **7**, 886–904.
- Błaszczyk, P.: 2007, *Analiza filozoficzna rozprawy Richarda Dedekinda Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Wydawnictwo Naukowe AP w Krakowie, Kraków.
- Birkhoff, G., Mac Lane, S.: 1977, *A Survey of Modern Algebra*, Macmillan Publishing, New York.
- Bolzano, B.: 2004, Purely analytic proof of the theorem that between any two values which give results of opposite signs, there lies at least one real root of the equation, in: S. Russ (ed.), *The Mathematical Works of Bernard Bolzano*, Oxford University Press, Oxford, 251–263.
- Cantor, G.: 1895, Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, *Mathematische Annalen* **46**, 481–512.
- Cohen, L. W., Ehrlich, G.: 1963, *The Structure of the Real Number System*, Van Nostrand Co., Princeton, New Jersey.
- Cohen, P. M.: 1991, *Algebra, Vol. III*, John Wiley & Sons, Chichester.
- Dedekind, R.: 1872, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig.
- Derksen, H.: 2003, The fundamental theorem of algebra and linear algebra, *The American Mathematical Monthly* **11**, 620–623.
- Fine, B., Rosenberger, B.: 1997, *The Fundamental Theorem of Algebra*, Springer, New York.
- Goldblatt, R.: 1998, *Lectures on the Hyperreals*, Springer, New York.
- Hall, J. F.: 2011, Completeness of ordered fields, <http://arxiv.org/abs/1101.5652v1>.
- Jacobson, N.: 1975, *Lectures in Abstract Algebra*, Vol. III, Van Nostrand Co., Princeton, New Jersey.
- Kuratowski, K., Mostowski, A.: 1966, *Set Theory*, North-Holland, PWN, Amsterdam, Warsaw.
- Libman, G.: 2006, A Nonstandard Proof of the Fundamental Theorem of Algebra, *The American Mathematical Monthly* **4**, 347–348.
- Maor, E.: 2007, *The Pythagorean Theorem: A 4,000-Year History*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- Marker, D.: 2002, *Model Theory. An introduction*, Springer, New York.
- Łoś, J.: 1955, Quelques remarques, théorèmes et problèmes sur les classes définissables d'algèbres, in: T. Skolem et al. (ed.), *Mathematical interpretation of formal systems*, North-Holland, Amsterdam, 98–113.
- Remmert, R.: 1995, The Fundamental Theorem of Algebra, in: H. D. Ebbinghaus et al. (ed.), *Numbers*, Springer, New York, 97–122.
- Riemenschneider, O.: 2001, 37 elementare axiomatische Charakterisierungen des reellen Zahlkörpers, *Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg* **20**, 71–95.

Teismann, H.: 2013, Toward a More Complete List of Completeness Axioms, *The American Mathematical Monthly* **2**, 99–114.

The Bibliography for the Fundamental Theorem of Algebra.:

http://mathfaculty.fullerton.edu/mathews/c2003/FunTheoremAlgebraBib/Links/FunTheoremAlgebraBib_lnk_3.html.

Zassenhaus, H.: 1967, On the Fundamental Theorem of Algebra, *The American Mathematical Monthly* **74**, 485–497.

*Instytut Matematyki
Uniwersytet Pedagogiczny
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
e-mail pb@up.krakow.pl*

Antoni Chronowski, Zbigniew Powązka

Twórcza aktywność matematyczna uczniów związana z rozwiązywaniem pewnych zadań na zastosowanie wzorów Viète'a*

Abstract. In this article we propose ways of developing the active and creative attitude of students towards solving mathematical problems. The tasks were sourced from various mathematical competitions for secondary school students, such as the so-called Mathematical Olympiad, and require the use of Vieta's formulas for third-degree polynomials. These problems inspire students to conduct their own elementary research work and foster their creative attitude towards mathematics. This article is dedicated mainly to students who are pre-service mathematics teachers, but may also be of use to in-service teachers.

1. Wstęp

Niniejszy artykuł jest próbą pokazania na przykładach sposobów opracowywania z uczniami szkół średnich pewnych zagadnień matematycznych prowadzących do ważnych elementów rozwijania twórczego działania w zakresie matematyki. Naszym zdaniem proponowane w tej pracy metody wskazują na możliwość skutecznego nauczania matematyki, zamiast odtwarzania algorytmów na potrzeby zadań egzaminacyjnych. Z punktu widzenia przeciętnego ucznia ten egzaminacyjny trening jest zapewne pożądanym, ale na ogół nie prowadzi do rozwijania matematycznego myślenia.

We wstępie do książki (Mikołajczyk, 2012, s. 5) czytamy:

Matematyczne zainteresowania i talenty uczniów rzadko są nauczycielom dane. W większości przypadków muszą oni solidnie na nie zapracować swoim entuzjazmem, zaangażowaniem, pomysłowością i profesjonalizmem.

*Creative mathematical mental activity of students while solving problems requiring use of Vieta's formulas

2010 Mathematics Subject Classification: Primary: 97D40, Secondary: 97H30

Key words and phrases: Vieta's formulas, solving mathematical problems

Dlatego pracę tę adresujemy głównie do studentów matematyki, mających w przyszłości być nauczycielami, a także do nauczycieli matematyki. Pragniemy pokazać w niej, na stosunkowo niewielkim wycinku zagadnień matematycznych, jak można, pracując z uczniami, postępować tak, aby:

- a) kształtować kluczowe dla matematyki umiejętności: logicznego myślenia, precyzyjnego argumentowania, posługiwania się technikami algebraicznymi i dostrzegania geometrycznych zależności;
- b) zaszczepiać w uczniach matematyczne pasje i rozwijać zainteresowania;
- c) kształcić uczniów myślących, twórczych i pomysłowych.

Umiejętności wymienione powyżej w punkcie a) mają związek z aktywnością, na którą zwraca uwagę Z. Krygowska (Krygowska, 1986). Aktywność ta, zdaniem autorki, wspomaga akt twórczy myśli matematycznej. W pracy Z. Krygowskiej znajdujemy następujące stwierdzenie:

Jak przynajmniej sami matematycy, akt iluminacji następuje zwykle po ogromnej pracy wstępnej oraz poprzedza następny etap pracy, organizowanej świadomie. Do pracy tej niezbędne są pewne narzędzia, do których w matematyce zalicza się stosowne zadania.

W swojej książce (Krygowska, 1977c) Z. Krygowska wskazuje, że bardzo dobre w tym względzie dla uczniów są otwarte zadania problemowe i zadania metodologiczne. Dają one możliwość zapoznania uczniów ze specyfiką pracy matematyka, w której definiuje się pewne pojęcia, formułuje się hipotezy z nimi związane, dowodzi ich prawdziwości lub je odrzuca konstruując stosowne przykłady.

Mason, Burton, Stacey (2005, s. 8) sformułowali następujące postulaty dotyczące myślenia matematycznego:

1. *Jesteś w stanie myśleć matematycznie.*
2. *Matematyczne myślenie można usprawnić dzięki praktyce połączonej z refleksją.*
3. *Matematyczne myślenie prowokują sprzeczności, napięcia i niespodzianki.*
4. *Matematycznemu myśleniu sprzyja atmosfera swobodnego zadawania pytań, rzucania wyzwań i refleksji.*
5. *Matematyczne myślenie pomaga w zrozumieniu siebie i świata.*

Z powyższych refleksji wynika, że forma myślenia matematycznego może być dostępna każdemu, kto ma motywację do podejmowania wysiłku intelektualnego.

Uważamy, że tematyka tej naszej pracy egzemplifikuje pewne idee teoretyczne opisane w artykule A. Pardały (2009). Autor w tym artykule, nawiązując do doświadczeń francuskiego stowarzyszenia *Math Pour Tous*, które przedstawione są w pracy L. Beddou, C. Mauduit (2001), pisze:

Nauczanie matematyki opiera się w ich koncepcji na aktywności badawczej w matematyce i zaangażowaniu jak największej liczby uczniów i studentów. Próbuje się tu przestrzegać bądź kopiować pewne zachowania, wzorce i zasady specyficzne badaniom naukowym, takie jak: odkrywać pytając, uczyć się badając, ożywiać kreatywność i wyobraźnię, doceniać rolę błędu w uczeniu się, nauczyć słuchania, wymiany i komunikowania idei. Nauczyciel akademicki sprawuje tu patronat, przedkłada pewną liczbę zadań i problemów, takich by ich rozwiązanie nie angażowało „znanej wiedzy”. Nauczyciel prowadzący taki seans zajęć obowiązany jest, by ta praca uczniów bądź grup uczniów (także bliźniaczych) posuwała się do przodu.

Prezentowany artykuł ma następującą strukturę:

- 1) Podstawowymi elementami tej konstrukcji są zadania, a często również ich rozwiązania, zawarte głównie w literaturze matematycznej przeznaczonej dla uczniów przygotowujących się do konkursów i olimpiad matematycznych.
- 2) Wszystkie podstawowe zadania dotyczą zastosowania wzorów Viète’a dla wielomianów trzeciego stopnia o współczynnikach rzeczywistych.
- 3) Na bazie tych podstawowych zadań formułowane i rozwiązywane są problemy i zagadnienia matematyczne związane w sposób naturalny z tymi zadaniami, a dotyczące:
 - a) matematycznej sensowności rozważanych w zadaniach wyrażeń algebraicznych;
 - b) istnienia i liczby obiektów matematycznych rozważanych w zadaniach;
 - c) krotności pierwiastków wielomianów i interpretacji geometrycznej wykresów wielomianów mających pierwiastki wielokrotne;
 - d) istnienia i postaci wielomianów rozważanych w danym zadaniu, które mają pierwiastki wielokrotne;
 - e) roli i znaczenia współczynników wielomianów rozważanych w zadaniu;
 - f) zastosowania matematycznych programów komputerowych do rozwiązywania równań trzeciego stopnia;
 - g) wzorów Viète’a w zagadnieniach geometrycznych;
 - h) sposobów rozwiązywania zadania bez użycia wzorów Viète’a oraz z zastosowaniem wzorów Viète’a;
 - i) badania istotności i niezależności założeń twierdzeń rozważanych w zadaniach;
 - j) naturalnych uogólnień zagadnień (wzorów) występujących w zadaniach i ich zastosowań do konstrukcji nowych interesujących zadań.
- 4) Zadania i ich rozwiązania na ogół zaopatrzone są w odpowiednie komentarze dydaktyczne.

2. Wiadomości wstępne

Paragraf ten zawiera najważniejsze definicje i twierdzenia wykorzystywane w rozwiązaniach zadań. Część z nich na ogół nie znajduje się w klasycznych podręcznikach szkolnych, ale są stosowane w rozwiązaniach zadań konkursowych i olimpijskich. Twierdzenia dotyczące ciała liczb zespolonych, a w szczególności pierwiastków zespolonych wielomianów o współczynnikach rzeczywistych, nie są bezpośrednio stosowane w tekstach zadań i ich rozwiązaniach, ale zostały zamieszczone w tym paragrafie w celu pełniejszej informacji o pierwiastkach wielomianów.

Poniższe dwa twierdzenia są szczególnymi przypadkami ogólnego twierdzenia Viète'a (Pawłowski, 1994, s. 159).

Twierdzenie 1 (Wzory Viète'a dla trójmianu kwadratowego)

Niech $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, gdzie $a_2 \neq 0$, będzie wielomianem o współczynnikach rzeczywistych. Liczby x_1, x_2 są pierwiastkami rzeczywistymi wielomianu $f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące równości:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -\frac{a_1}{a_2}, \\ x_1x_2 &= \frac{a_0}{a_2}. \end{aligned} \tag{1}$$

Twierdzenie 2 (Wzory Viète'a dla wielomianu trzeciego stopnia)

Niech $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, gdzie $a_3 \neq 0$, będzie wielomianem o współczynnikach rzeczywistych. Liczby x_1, x_2, x_3 są pierwiastkami rzeczywistymi wielomianu $f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące równości:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -\frac{a_2}{a_3}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= \frac{a_1}{a_3}, \\ x_1x_2x_3 &= -\frac{a_0}{a_3}. \end{aligned} \tag{2}$$

Definicja 1 (Mostowski, Stark, 1970, s. 191)

Niech $f(x)$ będzie wielomianem jednej zmiennej x o współczynnikach rzeczywistych. Liczbę rzeczywistą x_0 nazywamy *k-krotnym pierwiastkiem*, gdzie k jest niezerową liczbą naturalną, wielomianu $f(x)$, jeżeli wielomian $f(x)$ jest podzielny przez $(x - x_0)^k$ i $f(x)$ nie jest podzielny przez $(x - x_0)^{k+1}$.

Pierwiastki 1-, 2-, 3-krotne nazywamy również pierwiastkami odpowiednio *pojedynczymi*, *podwójnymi*, *potrójnymi*.

Twierdzenie 3 (Mostowski, Stark, 1970, s. 191)

Liczba rzeczywista x_0 jest *k-krotnym pierwiastkiem* wielomianu $f(x)$ o współczynnikach rzeczywistych wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wielomian $g(x)$ o współczynnikach rzeczywistych taki, że $f(x) = (x - x_0)^k g(x)$ i $g(x_0) \neq 0$.

Niech liczba rzeczywista x_0 będzie *k-krotnym*, gdzie $k \geq 2$, pierwiastkiem wielomianu $f(x)$ o współczynnikach rzeczywistych. Z twierdzenia 3 wynika, że $f(x) = (x - x_0)^k g(x)$ i $g(x_0) \neq 0$. Stosując do wielomianu $f(x)$ twierdzenie o pochodnej iloczynu otrzymujemy:

$$f'(x) = (x - x_0)^{k-1}(kg(x) + (x - x_0)g'(x)).$$

Oznaczmy: $h(x) = kg(x) + (x - x_0)g'(x)$. Zauważmy, że $h(x_0) \neq 0$ oraz $f'(x) = (x - x_0)^{k-1}h(x)$. Zatem na mocy twierdzenia 3 udowodniliśmy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4 (MOSTOWSKI, STARK, 1970, s. 192)

Jeżeli liczba rzeczywista x_0 jest k -krotnym, gdzie $k \geq 2$, pierwiastkiem wielomianu $f(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, to liczba x_0 jest $(k - 1)$ -krotnym pierwiastkiem pochodnej $f'(x)$.

Poniższe twierdzenie jest szczególnym przypadkiem (cała liczba rzeczywista) twierdzenia zamieszczonego w książce: Gleichgewicht (2004, s. 309).

Twierdzenie 5

Każdy wielomian jednej zmiennej o współczynnikach rzeczywistych stopnia n , gdzie $n \in \mathbb{N}$, ma w zbiorze liczb rzeczywistych co najwyżej n pierwiastków rzeczywistych, jeśli liczymy każdy pierwiastek tyle razy, jaka jest jego krotność.

Poniższe twierdzenie jest szczególnym przypadkiem twierdzenia 1 zamieszczonego w książce: Kostrikin (2004, s. 224).

Twierdzenie 6

Każdy wielomian jednej zmiennej o współczynnikach rzeczywistych stopnia n , gdzie $n \geq 1$, ma w zbiorze liczb zespolonych dokładnie n pierwiastków zespolonych, jeśli liczymy każdy pierwiastek tyle razy, jaka jest jego krotność.

Twierdzenie 7 (GLEICHGEWICHT, 2004, s. 314)

Każdy wielomian jednej zmiennej o współczynnikach rzeczywistych stopnia nieparzystego ma w zbiorze liczb rzeczywistych co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty.

Pierwiastki wielokrotne mają następującą interpretację geometryczną. Niech liczba rzeczywista x_0 będzie k -krotnym, gdzie $k \geq 2$, pierwiastkiem wielomianu $f(x)$ o współczynnikach rzeczywistych. Przyjmujemy, że $y_0 = f(x_0)$. Prosta o równaniu

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \quad (3)$$

jest styczna do wykresu funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 . Ponieważ $y_0 = f(x_0) = f'(x_0) = 0$ na podstawie twierdzenia 4, więc prosta (3) ma równanie

$$y = 0.$$

Zatem wykres wielomianu $f(x)$ jest styczny do osi x układu współrzędnych w punkcie x_0 .

Ponieważ w dalszej części artykułu będziemy głównie zajmować się wielomianami trzeciego stopnia, więc najpierw założmy, że liczba rzeczywista x_0 jest podwójnym pierwiastkiem wielomianu $f(x)$ trzeciego stopnia o współczynnikach rzeczywistych. Zatem wielomian $f(x)$ można zapisać w postaci

$$f(x) = a(x - x_0)^2(x - x_1),$$

gdzie a jest liczbą rzeczywistą różną od zera oraz $x_1 \neq x_0$. Wtedy $f(x_0) = f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) \neq 0$. Zatem otrzymaliśmy następujący wniosek.

WNIOSEK 1

Niech liczba rzeczywista x_0 będzie podwójnym pierwiastkiem wielomianu $f(x)$ trzeciego stopnia o współczynnikach rzeczywistych. Wtedy wykres wielomianu $f(x)$ jest styczny do osi x w punkcie x_0 i w punkcie x_0 wielomian $f(x)$ ma ekstremum lokalne.

Następnie założmy, że liczba rzeczywista x_0 jest potrójnym pierwiastkiem wielomianu $f(x)$ trzeciego stopnia o współczynnikach rzeczywistych. Zatem wielomian $f(x)$ można zapisać w postaci

$$f(x) = a(x - x_0)^3,$$

gdzie a jest liczbą rzeczywistą różną od zera. Zauważmy, że $f(x_0) = f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ i $f'''(x_0) \neq 0$. Zatem otrzymaliśmy następujący wniosek.

WNIOSEK 2

Niech liczba rzeczywista x_0 będzie potrójnym pierwiastkiem wielomianu $f(x)$ trzeciego stopnia o współczynnikach rzeczywistych. Wtedy wykres wielomianu $f(x)$ jest styczny do osi x w punkcie x_0 i w punkcie x_0 wykres ma punkt przegięcia.

Przypomnijmy pewne potrzebne w tym artykule fakty dotyczące równań trzeciego stopnia (Mostowski, 1967).

Dane jest równanie trzeciego stopnia postaci:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad (4)$$

gdzie współczynniki a, b, c, d są rzeczywiste i $a \neq 0$.

Równanie (4) można sprowadzić do prostszej postaci:

$$x^3 + px + q = 0, \quad (5)$$

gdzie

$$p = \frac{-b^2 + 3ac}{3a^2}, \quad q = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3}. \quad (6)$$

Wyróżnikiem równania (5) nazywamy

$$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}. \quad (7)$$

TWIERDZENIE 8 (MOSTOWSKI, 1967, s. 111 - 112)

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby równanie (5) o współczynnikach rzeczywistych p i q miało wszystkie trzy pierwiastki rzeczywiste i różne, jest, aby wyróżnik

$$\Delta < 0.$$

TWIERDZENIE 9 (MOSTOWSKI, 1967, s. 112)

Na to, by równanie (5), o współczynnikach rzeczywistych p oraz q miało wszystkie pierwiastki rzeczywiste i któryś z nich był wielokrotny, potrzeba i wystarcza, aby wyróżnik

$$\Delta = 0.$$

Twierdzenie 10 (Mostowski, 1967, s. 114)

Na to, by równanie (5) o współczynnikach rzeczywistych p i q miało tylko jeden pierwiastek rzeczywisty, dwa zaś inne zespolone sprzężone, potrzeba i wystarcza, aby wyróżnik

$$\Delta > 0.$$

3. Przykłady zadań inspirujących aktywność twórczą

W tym paragrafie podamy przykłady zadań, w których wykorzystane są wzory Viète'a. Analiza tematów tych zadań nasuwa wiele ciekawych i niebanalnych problemów. Rozważanie tych zagadnień daje uczniom okazję do stawiania sobie pytań dotyczących istnienia pewnych obiektów matematycznych lub sensowności rozważanych wyrażeń. Podejmowanie przez uczniów dyskusowania takich problemów jest wyrazem twórczej matematycznej aktywności uczniów.

ZADANIE 1 (PAWŁOWSKI, 1994, s. 172, ZAD. 14)

Dany jest wielomian

$$f(x) = ax^3 - ax^2 + bx + b \quad (8)$$

o współczynnikach rzeczywistych a i b różnych od zera. Jeżeli x_1, x_2, x_3 są pierwiastkami rzeczywistymi wielomianu $f(x)$, to

$$(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = -1.$$

R.: Ze wzorów Viète'a wynika, że:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -\frac{-a}{a} = 1, \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 &= \frac{b}{a}, \\ x_1x_2x_3 &= -\frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Wobec tego

$$(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = (x_1 + x_2 + x_3) \frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{x_1x_2x_3} = \frac{\frac{b}{a}}{-\frac{b}{a}} = -1.$$

Zgodnie z typologią zadań matematycznych zaproponowaną przez Z. Krygowską (1977c, s. 20–38), zadanie powyższe, to zwykle zastosowanie teorii. Nie wymaga skomplikowanych rachunków, ale jest okazją do interesujących dyskusji.

Po pierwsze, analizując treść zadania 1 należy postawić pytanie o sens wyrażenia

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}, \quad (9)$$

gdzie x_i dla $i = 1, 2, 3$ są pierwiastkami rozważanego wielomianu (8).

Wyrażenie (9) ma sens, gdyż liczba 0 nie jest pierwiastkiem wielomianu (8).

Ze względu na treść zadania 1 interesujące jest pytanie o istnienie wielomianu postaci (8), który ma trzy pierwiastki rzeczywiste (zob. twierdzenia 5 i 7).

Odpowiedź jest pozytywna. Wielomian $f(x) = 6x^3 - 6x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ ma trzy pierwiastki rzeczywiste:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}, \\ x_2 = \frac{3+\sqrt{33}}{12}, \\ x_3 = \frac{3-\sqrt{33}}{12}. \end{cases}$$

Aby znaleźć przykład wielomianu postaci (8) o trzech pierwiastkach rzeczywistych uczniowie mogą zastosować metodę „prób i błędów”:

- wybrać liczbę rzeczywistą x_1 , np. $x_1 = \frac{1}{2}$, i założyć, że liczba x_1 jest pierwiastkiem wielomianu (8);
- z założenia, że x_1 jest pierwiastkiem wielomianu (8), wywnioskować jaka jest zależność między współczynnikami a i b wielomianu (8);
- dobrać wartości liczbowe współczynników a i b w ten sposób, aby trójmian kwadratowy otrzymany w wyniku podzielenia wielomianu $f(x)$ przez dwumian $x - x_1$ miał dwa pierwiastki rzeczywiste.

W przypadku, gdy powyższa próba doboru liczb nie prowadzi do oczekiwanego rezultatu, uczniowie powinni analizować przyczyny niepowodzenia i wyciągać stosowne wnioski dotyczące dalszych prób. Łatwo zauważyć, że warto zaproponować uczniom pracę w grupach nad rozwiązaniem powyższego zagadnienia.

W różnych sytuacjach dydaktycznych przykłady odgrywają ważną rolę. M. Ciosek (1995) pisze:

W badaniu matematycznym, z jakim niewątpliwie mamy do czynienia w trakcie rozwiązywania zadania-problemu czy inaczej zadania otwartego (Krygowska, 1977b; Ciosek, 1988), przykład bywa wykorzystywany w różnych fazach procesu rozwiązywania zadania, i to do różnych celów. Wśród tych ostatnich można wymienić:

- (1) zrozumienie problemu,*
- (2) odkrycie ogólnego rozwiązania problemu,*
- (3) weryfikację hipotezy odnoszącej się do rozwiązania ogólnego,*
- (4) sprawdzenie poprawności rachunku algebraicznego.*

[...] Wykorzystanie przykładu do wspomnianego powyżej celu (2) wiąże się ze strategią rozwiązywania zadań jaką jest „rozważanie przypadków szczególnych” (examining special cases), którą krótko możemy nazwać strategią S. A. Schoenfeld ujmuje tę strategię w formę polyowskiej dyrektywy heurystycznej: „Dla lepszego zrozumienia nieznanego ci problemu, spróbuj go zegzemplifikować przez rozważenie różnych przypadków szczególnych. Może ci to zasugerować kierunek poszukiwania lub wskazać prawdopodobne rozwiązanie” (Schoenfeld, 1985, s. 76).

Zauważmy, że mnożąc wielomian $f(x) = 6x^3 - 6x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ przez dowolną liczbę rzeczywistą różną od zera, otrzymujemy nieskończenie wiele wielomianów postaci (8), ale wszystkie otrzymane wielomiany mają te same trzy pierwiastki rzeczywiste.

Aby zagadnienie rozważane w zadaniu 1 miało istotne znaczenie warto odpowiedzieć na następujące pytanie:

Czy istnieje nieskończony zbiór wielomianów postaci (8), które mają trzy pierwiastki rzeczywiste, a dowolne dwa różne wielomiany z tego zbioru mają różne zbiory pierwiastków?

Odpowiedź na to pytanie zawiera się w poniższych zadaniach: 1.1–1.4.

ZADANIE 1.1

Dany jest wielomian $f(x) = ax^3 - ax^2 + bx + b$, gdzie $a, b \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$. Wykazać, że liczba $c \in \mathcal{R}$ jest pierwiastkiem wielomianu $f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{a}{b} = \frac{c+1}{c^2-c^3}. \quad (10)$$

R.: (i) Zakładamy, że liczba $c \in \mathcal{R}$ jest pierwiastkiem wielomianu $f(x)$ (zob. twierdzenie 7). Zauważmy, że $c \in \mathcal{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. Ponadto $ac^3 - ac^2 + bc + b = 0$, czyli $a(c^3 - c^2) + b(c+1) = 0$, a więc

$$\frac{a}{b} = \frac{c+1}{c^2-c^3}.$$

Otrzymaliśmy równość (10).

(ii) Zakładamy, że spełniona jest równość (10). Stąd wynika, że $c \in \mathcal{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. Łatwo sprawdzić, że na podstawie równości (10) otrzymujemy równość:

$$ac^3 - ac^2 + bc + b = 0.$$

Zatem liczba c jest pierwiastkiem wielomianu $f(x)$.

ZADANIE 1.2

Dany jest wielomian $f(x) = ax^3 - ax^2 + bx + b$, gdzie $a, b \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$. Wykazać, że jeżeli liczba $c \in \mathcal{R}$ spełnia warunki:

(a) $0 < c < 1$,

(b) $\frac{a}{b} = \frac{c+1}{c^2-c^3}$,

to:

(i) Liczba c jest pierwiastkiem rzeczywistym wielomianu $f(x)$.

(ii) Wielomian $f(x)$ ma trzy pierwiastki rzeczywiste.

R.: ad (i). Z zadania 1.1 bezpośrednio wynika, że liczba c jest pierwiastkiem rzeczywistym wielomianu $f(x)$.

ad (ii). Zakładamy, że x_1 i x_2 są pierwiastkami rzeczywistymi wielomianu $f(x)$ (zob. twierdzenie 5). Przyjmijmy oznaczenie: $x_3 = c$. Stosując wzory Viète'a mamy:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + c = 1, \\ x_1 x_2 c = -\frac{b}{a}. \end{cases}$$

Wobec tego:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 - c, \\ x_1 x_2 = -\frac{c-c^2}{c+1}, \end{cases} \\ x_2 = 1 - c - x_1, \\ x_1(1 - c - x_1) + \frac{c-c^2}{c+1} = 0, \\ (1 - c)x_1 - x_1^2 + \frac{c-c^2}{c+1} = 0, \\ x_1^2 + (c - 1)x_1 + \frac{c^2 - c}{c+1} = 0. \end{aligned}$$

A więc x_1 jest pierwiastkiem równania kwadratowego:

$$x^2 + (c - 1)x + \frac{c^2 - c}{c+1} = 0.$$

Zauważmy, że:

$$\Delta = (c - 1)^2 - \frac{4(c^2 - c)}{c+1} = (c - 1)^2 + \frac{4(c - c^2)}{c+1}.$$

Ponieważ $0 < c < 1$, więc $\frac{4(c - c^2)}{c+1} > 0$, czyli $\Delta > 0$. Zatem

$x_1 = \frac{(1-c)-\sqrt{\Delta}}{2}$ lub $x_1 = \frac{(1-c)+\sqrt{\Delta}}{2}$. Wiemy, że $x_2 = 1 - c - x_1$. Zatem, jeżeli $x_1 = \frac{(1-c)-\sqrt{\Delta}}{2}$, to $x_2 = \frac{(1-c)+\sqrt{\Delta}}{2}$, a jeżeli $x_1 = \frac{(1-c)+\sqrt{\Delta}}{2}$, to $x_2 = \frac{(1-c)-\sqrt{\Delta}}{2}$.

Wobec tego możemy przyjąć, że: $x_1 = \frac{(1-c)-\sqrt{\Delta}}{2}$, $x_2 = \frac{(1-c)+\sqrt{\Delta}}{2}$ i $x_3 = c$.

Udowodnimy, że liczby rzeczywiste x_1 i x_2 są istotnie pierwiastkami wielomianu $f(x)$. Oczywiście wiemy, że liczba rzeczywista $x_3 = c$ jest pierwiastkiem wielomianu $f(x)$. W tym celu na podstawie twierdzenia 2 wystarczy wykazać, że liczby x_1 , x_2 i x_3 spełniają wzory Viète'a dla wielomianu $f(x)$. Istotnie, mamy:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= \frac{(1-c)-\sqrt{\Delta}}{2} + \frac{(1-c)+\sqrt{\Delta}}{2} + c = (1 - c) + c = 1; \\ x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 &= x_1 x_2 + (x_1 + x_2)c = \\ \frac{(1-c)-\sqrt{\Delta}}{2} \cdot \frac{(1-c)+\sqrt{\Delta}}{2} + \left(\frac{(1-c)-\sqrt{\Delta}}{2} + \frac{(1-c)+\sqrt{\Delta}}{2} \right) c &= \frac{(1-c)^2 - \Delta}{4} + (1 - c)c = \\ \frac{(1-c)^2 - (c-1)^2 - \frac{4(c-c^2)}{c+1}}{4} + (1 - c)c &= \frac{c^2 - c}{c+1} + (1 - c)c = \frac{c^2 - c^3}{c+1} = \frac{b}{a}; \\ x_1 x_2 x_3 &= (x_1 x_2)c = \frac{c^2 - c}{c+1} \cdot c = \frac{c^3 - c^2}{c+1} = -\frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Wobec tego $x_1, x_2, x_3 = c$ są pierwiastkami rzeczywistymi wielomianu $f(x)$.

Warto aby uczniowie zbadali, czy istnieje liczba rzeczywista $c \notin (0, 1)$ taka, że przy założeniu (b) spełnione są tezy (i) oraz (ii) w zadaniu 1.2. A może istnieje nieskończony zbiór takich liczb c ?

ZADANIE 1.3

Korzystając z zadania 1.2 skonstruować wielomian postaci $f(x) = ax^3 - ax^2 + bx + b$, gdzie $a, b \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$, mający trzy pierwiastki rzeczywiste.

R.: Niech $c = \frac{1}{3}$. Wtedy

$$\frac{c+1}{c^2-c^3} = 18.$$

Stąd $\frac{a}{b} = 18$. Można przyjąć $a = 18$ i $b = 1$. Wówczas

$$f(x) = 18x^3 - 18x^2 + x + 1.$$

Oczywiście $f(\frac{1}{3}) = 0$ na mocy własności własności (i) w zadaniu 1.2. Następnie mamy:

$$(18x^3 - 18x^2 + x + 1) : (x - \frac{1}{3}) = 18x^2 - 12x - 3.$$

Rozwiązując równanie

$$18x^2 - 12x - 3 = 0,$$

otrzymujemy pierwiastki: $x = \frac{2+\sqrt{10}}{6}$ lub $x = \frac{2-\sqrt{10}}{6}$.

Zatem wielomian $f(x)$ ma następujące pierwiastki:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}, \\ x_2 = \frac{2+\sqrt{10}}{6}, \\ x_3 = \frac{2-\sqrt{10}}{6}. \end{cases}$$

ZADANIE 1.4

Wykazać, że istnieje nieskończony zbiór wielomianów postaci $f(x) = ax^3 - ax^2 + bx + b$, gdzie $a, b \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$, które mają trzy pierwiastki rzeczywiste, a dowolne dwa różne wielomiany z tego zbioru mają różne zbiory pierwiastków.

R.: Rozważmy ciąg $c_n = \frac{1}{n}$ dla $n > 1$. Oczywiście $0 < c_n < 1$ dla $n > 1$. Przyjmijmy, że $a_n = c_n + 1$ i $b_n = c_n^2 - c_n^3$. Niech

$$f_n(x) = a_n x^3 - a_n x^2 + b_n x + b_n,$$

gdzie $n > 1$. Ponieważ

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{c_n + 1}{c_n^2 - c_n^3},$$

więc na mocy zadania 1.2 liczba c_n jest pierwiastkiem wielomianu $f_n(x)$ oraz wielomian $f_n(x)$ ma trzy pierwiastki rzeczywiste dla $n > 1$. Niech $n > 1$, $m > 1$ i $n \neq m$. Wówczas oczywiście $a_n \neq a_m$. Wobec tego $f_n(x) \neq f_m(x)$. Zatem zbiór $A = \{f_n(x) : n > 1\}$ jest nieskończony oraz oczywiście dowolne dwa różne wielomiany z tego zbioru mają różne zbiory pierwiastków.

Często stawiane jest również pytanie o krotność pierwiastków wielomianów (zob. wnioski 1 i 2). Analiza tego zagadnienia dla wielomianu (8) znajduje się w rozwiązaniach następujących dwóch zadań: 1.5 i 1.6.

Korzystając z wyników dyskusji przeprowadzonej po rozwiązaniu zadania 1.2 można zachęcić uczniów, aby wskazali inny nieskończony zbiór wielomianów postaci $f(x) = ax^3 - ax^2 + bx + b$, gdzie $a, b \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$, spełniających warunki podane w zadaniu 1.4.

ZADANIE 1.5

Zbadać, czy wielomian $f(x) = ax^3 - ax^2 + bx + b$, gdzie $a, b \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$, ma rzeczywisty pierwiastek potrójny?

R.: Przypuśćmy, że $x_0 \in \mathcal{R}$ jest potrójnym pierwiastkiem wielomianu $f(x)$. Na podstawie wzorów Viète'a mamy:

$$\begin{cases} 3x_0 = 1, \\ 3x_0^2 = \frac{b}{a}, \\ x_0^3 = -\frac{b}{a}. \end{cases}$$

Wobec tego

$$\begin{cases} x_0 = \frac{1}{3}, \\ \frac{b}{a} = \frac{1}{3}, \\ \frac{b}{a} = -\frac{1}{27}. \end{cases}$$

Otrzymaliśmy sprzeczność. Zatem wielomian $f(x)$ nie ma rzeczywistego pierwiastka potrójnego.

ZADANIE 1.6

Wykazać, że wielomian $f(x) = ax^3 - ax^2 + bx + b$, gdzie $a, b \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$, ma rzeczywisty pierwiastek podwójny wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$(a) \quad f(x) = a(x^3 - x^2 - \frac{11+5\sqrt{5}}{2}x - \frac{11+5\sqrt{5}}{2}) \text{ dla } a \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$$

lub

$$(b) \quad f(x) = a(x^3 - x^2 + \frac{-11+5\sqrt{5}}{2}x + \frac{-11+5\sqrt{5}}{2}) \text{ dla } a \in \mathcal{R} \setminus \{0\}.$$

R.: I sposób.

Zakładamy, że $x_1, x_2 \in \mathcal{R}$ są rzeczywistymi pierwiastkami wielomianu $f(x)$, przy czym x_1 jest pierwiastkiem podwójnym. Wielomian $f(x)$ zapiszemy w postaci:

$$f(x) = a(x^3 - x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b}{a}).$$

Przyjmijmy, że

$$g(x) = x^3 - x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b}{a}.$$

Zatem

$$g(x) = (x - x_1)^2(x - x_2) = x^3 - (2x_1 + x_2)x^2 + (x_1^2 + 2x_1x_2)x - x_1^2x_2.$$

Stąd

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1, \\ x_1^2 + 2x_1x_2 = -x_1^2x_2, \end{cases}$$

czyli

$$\begin{cases} x_2 = 1 - 2x_1, \\ x_1 + 2x_2 = -x_1x_2, \end{cases}$$

bo $x_1 \neq 0$. Wobec tego

$$x_1 + 2(1 - 2x_1) = -x_1(1 - 2x_1),$$

a więc

$$x_1^2 + x_1 - 1 = 0.$$

Stąd wynika, że x_1 jest pierwiastkiem równania kwadratowego $x^2 + x - 1 = 0$, czyli

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \text{ lub } x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

A zatem

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \\ x_2 = 2 + \sqrt{5} \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \\ x_2 = 2 - \sqrt{5}. \end{cases}$$

Wobec tego

$$g(x) = (x + \frac{1+\sqrt{5}}{2})^2(x - (2 + \sqrt{5})) = x^3 - x^2 - \frac{11+5\sqrt{5}}{2}x - \frac{11+5\sqrt{5}}{2}$$

lub

$$g(x) = (x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2})^2(x - (2 - \sqrt{5})) = x^3 - x^2 + \frac{-11+5\sqrt{5}}{2}x + \frac{-11+5\sqrt{5}}{2}.$$

Zatem

$$f(x) = a(x^3 - x^2 - \frac{11+5\sqrt{5}}{2}x - \frac{11+5\sqrt{5}}{2}) \text{ dla } a \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$$

lub

$$f(x) = a(x^3 - x^2 + \frac{-11+5\sqrt{5}}{2}x + \frac{-11+5\sqrt{5}}{2}) \text{ dla } a \in \mathcal{R} \setminus \{0\}.$$

Wykazaliśmy, że spełnione są warunki (a), (b).

Odwrotnie, na podstawie powyższych rozważań łatwo sprawdzić, że wielomian: $f(x) = a(x^3 - x^2 - \frac{11+5\sqrt{5}}{2}x - \frac{11+5\sqrt{5}}{2})$ dla $a \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$, ma pierwiastek podwójny $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, natomiast wielomian

$f(x) = a(x^3 - x^2 + \frac{-11+5\sqrt{5}}{2}x + \frac{-11+5\sqrt{5}}{2})$ dla $a \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$ ma pierwiastek podwójny $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

II sposób.

W tym sposobie rozwiązywania zadania wykorzystamy teorię rozwiązywania równań trzeciego stopnia. Aby wyznaczyć pierwiastki wielomianu $f(x)$ wystarczy rozwiązać równanie

$$ax^3 - ax^2 + bx + b = 0.$$

Sprowadzimy powyższe równanie do postaci (zob. (5)):

$$x^3 + px + q = 0.$$

Stosując wzory (zob. (6)) na współczynniki p i q otrzymujemy:

$$p = \frac{3b - a}{3a}, \quad q = \frac{36b - 2a}{27a}.$$

Wtedy wyróżnik Δ (zob. (7)) jest równy:

$$\Delta = \frac{b(b^2 + 11ab - a^2)}{27a^3}.$$

Wobec tego stosując twierdzenie 9 otrzymujemy:

$$\Delta = 0 \iff b^2 + 11ab - a^2 = 0 \iff (b = \frac{-11-5\sqrt{5}}{2}a \vee b = \frac{-11+5\sqrt{5}}{2}a.$$

Zatem wielomian $f(x)$ ma postać:

$$f(x) = a(x^3 - x^2 - \frac{11+5\sqrt{5}}{2}x - \frac{11+5\sqrt{5}}{2}) \text{ dla } a \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$$

lub

$$f(x) = a(x^3 - x^2 + \frac{-11+5\sqrt{5}}{2}x + \frac{-11+5\sqrt{5}}{2}) \text{ dla } a \in \mathcal{R} \setminus \{0\}.$$

Stosując podobne rozumowanie jak w sposobie I można wykazać, że wielomian:

$$f(x) = a(x^3 - x^2 - \frac{11+5\sqrt{5}}{2}x - \frac{11+5\sqrt{5}}{2})$$

dla $a \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$, ma pierwiastek podwójny $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, natomiast wielomian

$$f(x) = a(x^3 - x^2 + \frac{-11+5\sqrt{5}}{2}x + \frac{-11+5\sqrt{5}}{2}) \text{ dla } a \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$$

ma pierwiastek podwójny $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Z wniosku 1 wynika, że:

(a) wykres wielomianu $f(x) = a(x^3 - x^2 - \frac{11+5\sqrt{5}}{2}x - \frac{11+5\sqrt{5}}{2})$ dla $a \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$ jest styczny do osi x w punkcie $x_0 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ i w tym punkcie x_0 wielomian $f(x)$ ma ekstremum lokalne;

(b) wykres wielomianu $f(x) = a(x^3 - x^2 + \frac{-11+5\sqrt{5}}{2}x + \frac{-11+5\sqrt{5}}{2})$ dla $a \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$ jest styczny do osi x w punkcie $x_0 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ i w tym punkcie x_0 wielomian $f(x)$ ma ekstremum lokalne.

W II sposobie rozwiązywania zadania 1.6 zastosowaliśmy elementy ogólnej teorii rozwiązywania równań trzeciego stopnia, uzyskując stosunkowo łatwo pożądane rezultaty. Okazuje się, że zastosowanie tej ogólnej teorii w pozostałych zadaniach zamieszczonych w tym artykule jest metodą złożoną i skomplikowaną, a więc nieprzydatną dla uczniów, tym bardziej, że w programie szkolnym nie ma ogólnej teorii rozwiązywania równań trzeciego stopnia.

Ważną umiejętnością dydaktyczną jest takie sformułowanie tekstu zadania i dobranie współczynników, przy których można, bez niepotrzebnej komplikacji rachunków, uzyskać pożądany rezultat. Ilustruje to następujące zadanie.

ZADANIE 2 (PŁONKA, 2000, ZAD. 15, s. 248)

Wyznaczyć liczby rzeczywiste a, b, c , jeśli wiadomo, że są to pierwiastki wielomianu:

$$f(x) = x^3 - ax^2 + bx + c. \quad (11)$$

R.: Ze wzorów Viète'a mamy:

$$\begin{aligned} a + b + c &= -(-a), \\ ab + bc + ca &= b, \\ abc &= -c. \end{aligned}$$

Wobec tego

$$\begin{aligned}b + c &= 0, \\ a(b + c) + bc &= b, \\ bc &= b.\end{aligned}$$

Rozważmy dwa przypadki:

$$1) \ b = 0,$$

$$2) \ b \neq 0.$$

ad 1. Jeżeli $b = 0$, to $c = 0$. Wielomian podany w zadaniu ma postać:

$$f(x) = x^3 - ax^2.$$

Ponieważ a jest pierwiastkiem tego wielomianu, czyli $a^3 - a^3 = 0$, więc w tym przypadku mamy: $b = c = 0$, natomiast a jest dowolnie ustaloną liczbą rzeczywistą.

ad 2. Jeżeli $b \neq 0$, to $c = 1$. Ponieważ $b = -c$, więc $b = -1$. Wobec tego $a \cdot (-1) \cdot 1 = -1$, czyli $a = 1$. Zatem $a = 1, b = -1, c = 1$. Wielomian podany w zadaniu ma postać:

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1.$$

Zadanie to również można zaliczyć do zadań typu: zwykłe zastosowanie teorii (Krygowska, 1977c, s. 20–38). Wymaga ono jedynie zastosowania wzorów Viète’a dla wielomianu trzeciego stopnia i przeprowadzenia dyskusji rozwiązań otrzymanego układu równań. Ciekawym wydaje się pytanie, dlaczego współczynnik przy x^2 ma postać $-a$, gdzie $a \in \mathcal{R}$. Poszukując odpowiedzi na to pytanie, rozważmy wielomian:

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c.$$

Odpowiedź na to pytanie otrzymamy w rozwiązaniach zadań: 2.1–2.5.

ZADANIE 2.1

Wyznaczyć liczby rzeczywiste a, b, c , jeśli wiadomo, że są to pierwiastki wielomianu:

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c, \tag{12}$$

przy czym $abc = 0$.

R.: Wzory Viète’a dla wielomianu $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$:

$$\begin{cases} a + b + c = -a, \\ ab + bc + ca = b, \\ abc = -c. \end{cases} \tag{13}$$

Stosując założenie, że $abc = 0$ i rozwiązując układ równań (13) otrzymujemy rozwiązania:

$$\begin{cases} a = 0, \\ b = 0, \\ c = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1, \\ b = -2, \\ c = 0. \end{cases}$$

W pierwszym przypadku wielomian (12) ma postać $f(x) = x^3$, a w drugim wielomian (12) ma postać $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$. Łatwo stwierdzić, że $a = b = c = 0$ jest pierwiastkiem potrójnym wielomianu $f(x) = x^3$, natomiast $a = 1$, $b = -2$ i $c = 0$ są pierwiastkami wielomianu $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$.

Z założeń w zadaniu 2.1 wynika, że co najmniej jeden ze współczynników a, b, c jest równy 0. W następnym zadaniu rozważamy przypadek, gdy wszystkie współczynniki a, b, c są niezerowe.

ZADANIE 2.2

Dany jest wielomian $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, gdzie $a, b, c \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$. Wykazać, że liczby a, b, c są pierwiastkami wielomianu $f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$(a) \quad a = 1 \text{ lub } 2a^3 + 2a^2 - 1 = 0,$$

$$(b) \quad b = -\frac{1}{a},$$

$$(c) \quad c = \frac{1-2a^2}{a}.$$

R.: (i) Zakładamy, że liczby a, b, c są pierwiastkami wielomianu $f(x)$. Wtedy

$$\begin{cases} 2a^3 + ab + c = 0, \\ a + b + c = -a, \\ abc = -c. \end{cases}$$

Otrzymujemy:

$$\begin{cases} 2a^3 + ab + c = 0, \\ a + b + c = -a, \\ ab = -1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 1 - 2a^3, \\ c = \frac{1-2a^2}{a}, \\ b = -\frac{1}{a}. \end{cases}$$

Wobec tego

$$1 - 2a^3 = \frac{1-2a^2}{a},$$

a więc

$$2a^4 - 2a^2 - a + 1 = 0.$$

Stąd

$$\begin{aligned} 2a^2(a^2 - 1) - (a - 1) &= 0, \\ 2a^2(a + 1)(a - 1) - (a - 1) &= 0, \\ (a - 1)(2a^3 + 2a^2 - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Zatem $a = 1$ lub $2a^3 + 2a^2 - 1 = 0$.

Wobec tego spełnione są warunki (a), (b), (c).

(ii) Odwrotnie, zakładamy, że spełnione są warunki (a), (b), (c). Jeżeli $a = 1$, to $b = -1$ i $c = -1$. Stąd $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$. Zauważmy, że $f(a) = f(1) = 0$

oraz $f(b) = f(-1) = 0$ i $f(c) = f(-1) = 0$. Niech $a \neq 1$ i $2a^3 + 2a^2 - 1 = 0$. Stąd $(a-1)(2a^3 + 2a^2 - 1) = 0$, czyli

$$2a^4 - 2a^2 - a + 1 = 0, \quad (14)$$

a więc $1 - 2a^3 = \frac{1-2a^2}{a}$. Z warunku (c) wynika, że $c = 1 - 2a^3$. Wobec tego $f(a) = a^3 + a^3 + (-\frac{1}{a})a + 1 - 2a^3 = 2a^3 - 1 + 1 - 2a^3 = 0$. Następnie mamy:

$$f(b) = f(-\frac{1}{a}) = (-\frac{1}{a})^3 + a(-\frac{1}{a})^2 + (-\frac{1}{a})(-\frac{1}{a}) + \frac{1-2a^2}{a} = -\frac{1}{a^3} + \frac{a}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a} - \frac{2a^2}{a} = \frac{-1+a^2+a+a^2-2a^4}{a^3} = \frac{2a^4-2a^2-a+1}{-a^3} = 0 \text{ na mocy (14), czyli } f(b) = 0;$$

$$f(c) = f(\frac{1-2a^2}{a}) = (\frac{1-2a^2}{a})^3 + a(\frac{1-2a^2}{a})^2 + (-\frac{1}{a})\frac{1-2a^2}{a} + \frac{1-2a^2}{a} = \frac{1-2a^2}{a}[(\frac{1-2a^2}{a})^2 + a\frac{1-2a^2}{a} - \frac{1}{a} + 1] = \frac{1-2a^2}{a}[\frac{1-4a^2+4a^4}{a^2} + \frac{a-2a^3}{a} - \frac{1}{a} + 1] = \frac{1-2a^2}{a} \cdot \frac{2a^4-2a^2-a+1}{a^2} = 0 \text{ na mocy (14), czyli } f(c) = 0.$$

Wobec tego liczby a, b, c są pierwiastkami wielomianu $f(x)$.

ZADANIE 2.3

Wykazać, że liczba rzeczywista a spełnia warunek

$$2a^3 + 2a^2 - 1 = 0$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a = \sqrt[3]{\frac{23}{108} + \frac{\sqrt{57}}{36}} + \sqrt[3]{\frac{23}{108} - \frac{\sqrt{57}}{36}} - \frac{1}{3}.$$

Rozwiązanie tego zadania najłatwiej otrzymać stosując odpowiedni matematyczny program komputerowy (np. *Derive*, *Mathematica*), w którym można rozwiązywać równania, w szczególności równania trzeciego stopnia. Pewne teoretyczne aspekty tego zagadnienia można znaleźć w pracach: Gunčaga, Fulier, Eisenmann (2009) oraz Gunčaga, Majherová (2012).

ZADANIE 2.4

Dany jest wielomian $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, gdzie $a, b, c \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$. Wykazać, że liczby a, b, c są pierwiastkami wielomianu $f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$(a) \quad a = 1 \text{ lub } a = \sqrt[3]{\frac{23}{108} + \frac{\sqrt{57}}{36}} + \sqrt[3]{\frac{23}{108} - \frac{\sqrt{57}}{36}} - \frac{1}{3},$$

$$(b) \quad b = -\frac{1}{a},$$

$$(c) \quad c = \frac{1-2a^2}{a}.$$

R.: Rozwiązanie tego zadania wynika bezpośrednio z wyników uzyskanych w zadaniach 2.2 i 2.3.

Oczywistym wnioskiem z zadania 2.4 jest następujące zadanie.

ZADANIE 2.5

Dany jest wielomian $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, gdzie $a, b, c \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$. Wykazać, że liczby a, b, c są pierwiastkami wielomianu $f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$f(x) = x^3 + ax^2 - \frac{1}{a}x + \frac{1-2a^2}{a},$$

gdzie $a = 1$ lub $a = \sqrt[3]{\frac{23}{108} + \frac{\sqrt{57}}{36}} + \sqrt[3]{\frac{23}{108} - \frac{\sqrt{57}}{36}} - \frac{1}{3}$.

Na koniec warto zauważyć, jak zaskakujące rezultaty daje zamiana współczynnika $-a$ na współczynnik a przy x^2 w wielomianie (11).

Kolejny przykład jest w typologii Z. Krygowskiej zadaniem metodologicznym (1977c, s. 18–20). Wymaga ono dowodu twierdzenia dotyczącego porównywania własności dwóch prostopadłościanów.

Treść zadania 3 i jego rozwiązanie (pierwszym sposobem) oraz treść zadania 4 pochodzą z tekstu Jędrzeja Garnka pt. *Wzory Viete'a*, który był zamieszczony w Internecie.

ZADANIE 3

Udowodnić, że jeżeli dwa prostopadłościany mają równe sumy długości krawędzi, pola powierzchni oraz objętości, to są one przystające.

R.: Oznaczmy długości krawędzi jednego prostopadłościanu przez a, b, c , drugiego zaś przez k, l, m . Zgodnie z treścią zadania mamy:

$$\begin{cases} a + b + c = k + l + m, \\ ab + bc + ca = kl + lm + mk, \\ abc = klm. \end{cases} \quad (15)$$

Oznaczmy: $\alpha = a + b + c$, $\beta = ab + bc + ca$, $\gamma = abc$. Rozważmy wielomiany:

$$w_1(x) = (x - a)(x - b)(x - c),$$

$$w_2(x) = (x - k)(x - l)(x - m)$$

o pierwiastkach odpowiednio a, b, c oraz k, l, m . Korzystając ze wzorów Viète'a stwierdzamy, że $w_1(x) = w_2(x) = x^3 - \alpha x^2 + \beta x - \gamma$, czyli wielomiany $w_1(x)$ i $w_2(x)$ są równe, a więc mają równe zbiory pierwiastków, tzn. $\{a, b, c\} = \{k, l, m\}$. Wobec tego rozważane prostopadłościany są przystające. Zauważmy, że liczby a, b, c (analogicznie k, l, m) nie muszą być różne, ale taki sposób zapisu zbiorów również jest stosowany w matematyce (zob. Ross, Wright, 1996, s. 16).

S. Turnau (1990, s. 48–49) zauważył, że:

Każde twierdzenie matematyczne jest odpowiedzią na różne pytania i rozwiązaniem różnych zadań. [...] Dowód twierdzenia jest odpowiedzią na pytanie Dlaczego?, lub Skąd wiadomo, że tak jest?, lub jeszcze Jak można to wyprowadzić z dotychczasowych wiadomości?

Przy analizie powyższego zadania i jego rozwiązania warto postawić następujące pytania:

- 1) Czy w zamieszczonym rozwiązaniu zadania niezbędne jest zastosowanie wzorów Viète'a?
- 2) Jak zmodyfikować rozwiązanie tego zadania, aby w sposób istotny wykorzystać wzory Viète'a?

ad 1. Zastosowanie wzorów Viète'a w tym rozwiązaniu nie jest konieczne. Wystarczy wielomiany $w_1(x)$ i $w_2(x)$ zapisać w klasycznej postaci algebraicznej i wykorzystać równości (15). Natomiast wzory Viète'a w tym sposobie rozwiązania zadania mogą być wskazówką, że warto rozważyć wielomiany postaci $w_1(x)$ i $w_2(x)$.

ad 2. Rozwiążemy zadanie z zastosowaniem wzorów Viète'a.

Przyjmijmy oznaczenia:

$$\begin{cases} a + b + c = -a_1, \\ ab + bc + ca = b_1, \\ abc = -c_1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} k + l + m = -a_2, \\ kl + lm + mk = b_2, \\ klm = -c_2. \end{cases}$$

Z twierdzenia 2 wynika, że liczby a, b, c są pierwiastkami wielomianu

$$w_1(x) = x^3 + a_1x^2 + b_1x + c_1,$$

a liczby k, l, m są pierwiastkami wielomianu

$$w_2(x) = x^3 + a_2x^2 + b_2x + c_2.$$

Ze wzorów (15) wynika, że $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$, czyli $w_1(x) = w_2(x)$. Wobec tego $\{a, b, c\} = \{k, l, m\}$. Zatem rozważane prostopadłościany są przystające.

Wnikliwa dyskusja nad różnymi sposobami rozwiązania tego zadania wpłynie na głębsze zrozumienie przez uczniów twierdzenia o wzorach Viète'a. Z równości sum długości krawędzi, pól powierzchni całkowitych i objętości wynika przystawanie prostopadłościanów. Łatwo zauważyć, że twierdzenie odwrotne do twierdzenia w zadaniu 3 jest również prawdziwe. Zatem te trzy równości można uznać za cechę przystawania tych brył. Natomiast żadna z pojedynczych równości, ani żadne dwie równości na ogół nie implikują przystawania prostopadłościanów. Dla przykładu, jeżeli $a = 2$, $b = 4$, $c = 6$ oraz $k = 8$, $l = 2$, $m = 3$, to objętości obu prostopadłościanów są równe, a sumy długości krawędzi i pola powierzchni całkowitych nie są równe, a więc bryły nie są przystające.

Następnie podamy przykład dwóch prostopadłościanów, które mają równe sumy długości krawędzi oraz równe objętości, natomiast pola powierzchni całkowitych mają różne. Rozważmy prostopadłościan o następujących długościach krawędzi: $a = 1$, $b = 5$, $c = 8$. Wobec tego

$$\begin{cases} a + b + c = 14, \\ 2(ab + bc + ca) = 106, \\ abc = 40. \end{cases}$$

Niech k, l, m oznaczają długości krawędzi drugiego prostopadłościanu. Przyjmijmy, że $m = 2$. Zatem

$$\begin{cases} k + l = 12, \\ kl = 20. \end{cases}$$

Rozwiązując ten układ równań otrzymujemy:

$$\begin{cases} k = 2, \\ l = 10 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} k = 10, \\ l = 2. \end{cases}$$

Zatem przyjmijmy, że: $k = 2, l = 10, m = 2$. Mamy:

$$\begin{cases} k + l + m = 14, \\ klm = 40. \end{cases}$$

Natomiast $2(kl + lm + mk) = 88$, czyli rozważane prostopadłościany mają różne całkowite pola powierzchni. Można uczniom zaproponować podanie przykładów dla pozostałych przypadków dotyczących rozważanych wyżej zależności między dwoma prostopadłościanami.

Jednym z elementów matematycznej aktywności jest dostrzeganie i wykorzystywanie analogii (Krygowska, 1986). Okazją do wykazania się tą umiejętnością może być następujące zadanie.

ZADANIE 4

Udowodnić, że jeżeli dwa prostokąty mają równe obwody i pola, to są one przystające.

Innym elementem matematycznej aktywności jest uogólnianie. W literaturze matematycznej można znaleźć następujące określenie tego pojęcia.

Przez uogólnianie wyniku lub metody rozumie się sytuację, w której z zadania danego tworzymy nowe ogólniejsze zadanie, tzn. takie, którego rozwiązanie sprowadza się do skorzystania z wyniku bądź metody zadania wyjściowego, dzięki zauważeniu w zadaniu nowym (lub jego fragmencie) zadania wyjściowego (Zaręba, 2012, s. 31).

Wynika stąd, że jeżeli opracuje się z uczniami najpierw zadanie 4, to wtedy zadanie 3 jest jego uogólnieniem.

Rezultaty zawarte w zadaniach 5, 6 i 6.1 zostaną wykorzystane w zadaniu 7, w którego rozwiązaniu korzysta się w sposób istotny ze wzorów Viète'a.

ZADANIE 5

Niech $a, b \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$. Wykazać, że:

(i) Jeżeli $a > 0$ i $b > 0$ lub $a < 0$ i $b < 0$,

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$

Ponadto,

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2 \iff a = b.$$

(ii) Jeżeli $a > 0$ i $b < 0$ lub $a < 0$ i $b > 0$,

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2.$$

R.: ad (i). Zakładamy, że $a > 0$ i $b > 0$ lub $a < 0$ i $b < 0$. Mamy:

$$(a - b)^2 \geq 0 \implies a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \implies a^2 + b^2 \geq 2ab \implies \frac{a^2 + b^2}{ab} \geq 2 \implies \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$

Jeżeli $a = b$, to $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a}{a} + \frac{a}{a} = 2$. Odwrotnie, jeżeli $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2$, to $\frac{a^2 + b^2}{ab} = 2 \implies a^2 + b^2 = 2ab \implies a^2 - 2ab + b^2 = 0 \implies (a - b)^2 = 0 \implies a - b = 0 \implies a = b$.

ad (ii). Zakładamy, że $a > 0$ i $b < 0$ lub $a < 0$ i $b > 0$. Mamy:

$$(a + b)^2 \geq 0 \implies a^2 + 2ab + b^2 \geq 0 \implies a^2 + b^2 \geq -2ab \implies \frac{a^2 + b^2}{ab} \leq -2 \implies \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2.$$

ZADANIE 6 (GDOWSKI, PLUCIŃSKI, 1999, ZAD. 217, s. 27)

Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich x_1, x_2, x_3 spełniona jest następująca nierówność:

$$(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) \geq 9. \quad (16)$$

R.: Korzystając z nierówności $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a, b (zob. zadanie 5(i)) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) &= \frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_1} + \frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_2} + \frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_3} = \frac{x_2 + x_3}{x_1} + 1 + \frac{x_1 + x_3}{x_2} + \\ &+ 1 + \frac{x_1 + x_2}{x_3} + 1 = \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_3}{x_2} + \frac{x_1}{x_3} + \frac{x_2}{x_3} + 3 = \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}\right) + \left(\frac{x_1}{x_3} + \frac{x_3}{x_1}\right) + \left(\frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_2}\right) + 3 \geq 9. \end{aligned}$$

Jest to kolejny przykład zadania metodologicznego (Krygowska, 1977c, s. 18–20). Warto zachęcać uczniów do analizy istotności założeń twierdzenia, gdyż takie postępowanie jest elementarną aktywnością stosowaną podczas prowadzenia badań naukowych w matematyce. W przypadku powyższego zadania powstaje naturalne pytanie: Czy nierówność (16) jest prawdziwa dla dowolnych niezerowych liczb rzeczywistych x_1, x_2, x_3 ?

Rozwiązanie zagadnienia prawdziwości nierówności (16) dla dowolnych niezerowych liczb rzeczywistych x_1, x_2, x_3 zostanie przedstawione w poniższych zadaniach 6.1 i 6.2.

W rozwiązaniu następnego zadania wykorzystuje się wyniki uzyskane w zadaniu 5.

ZADANIE 6.1

Wykazać, że jeżeli x_1, x_2, x_3 są trzema dodatnimi lub trzema ujemnymi liczbami rzeczywistymi, to

$$(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) \geq 9. \quad (17)$$

Ponadto,

$$(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = 9 \iff x_1 = x_2 = x_3. \quad (18)$$

R.: Stosując wyniki uzyskane w zadaniu 5(i), dowód nierówności (17) jest analogiczny do dowodu nierówności (16) w zadaniu 6.

Uzasadnimy warunek (18). Przyjmijmy, że $x_1 = x_2 = x_3 = x_0$. Wtedy $(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = 3x_0 \cdot \frac{3}{x_0} = 9$.

Odwrotnie, niech $(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = 9$. Korzystając ze sposobu rozwiązania zadania 6 otrzymujemy: $\left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}\right) + \left(\frac{x_1}{x_3} + \frac{x_3}{x_1}\right) + \left(\frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_2}\right) = 6$.

Z rezultatów uzyskanych w zadaniu 5(i) wynika, że

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 2, \quad \frac{x_1}{x_3} + \frac{x_3}{x_1} = 2, \quad \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_2} = 2,$$

a stąd $x_1 = x_2 = x_3$.

W zadaniach 6.2 i 7.1 ponownie wskazujemy uczniom na ważne zagadnienie badania istotności założeń twierdzenia.

ZADANIE 6.2

Wykazać na przykładach, że istnieją liczby rzeczywiste x_1, x_2, x_3 o różnych znakach takie, że nierówność (17) jest spełniona oraz istnieją liczby rzeczywiste x_1, x_2, x_3 o różnych znakach takie, że nierówność (17) nie jest spełniona.

R.: Przykłady:

$$\begin{aligned} 1) & x_1 = 20, x_2 = 1, x_3 = -10, \\ (x_1 + x_2 + x_3) & \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \right) = 11 \cdot \left(\frac{1}{20} + 1 - \frac{1}{10} \right) = \frac{209}{20} = 10,45 > 9; \\ 2) & x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = -1, \\ (x_1 + x_2 + x_3) & \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \right) = 1 \cdot 1 = 1 < 9; \\ 3) & x_1 = -20, x_2 = -1, x_3 = 10, \\ (x_1 + x_2 + x_3) & \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \right) = (-11) \cdot \left(-\frac{1}{20} - 1 + \frac{1}{10} \right) = \frac{209}{20} = 10,45 > 9; \\ 4) & x_1 = -1, x_2 = -1, x_3 = 1, \\ (x_1 + x_2 + x_3) & \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \right) = (-1) \cdot (-1) = 1 < 9. \end{aligned}$$

ZADANIE 7

Niech $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, gdzie $a_3 \neq 0$, będzie wielomianem o współczynnikach rzeczywistych. Wykazać, że:

(i) Jeżeli wielomian $f(x)$ ma trzy dodatnie pierwiastki rzeczywiste, to

$$a_1a_2 \leq 9a_0a_3. \quad (19)$$

(ii) Jeżeli wielomian $f(x)$ ma trzy ujemne pierwiastki rzeczywiste, to

$$a_1a_2 \geq 9a_0a_3. \quad (20)$$

(iii) Jeżeli wielomian $f(x)$ ma trzy dodatnie lub trzy ujemne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2, x_3 , to

$$a_1a_2 = 9a_0a_3 \iff x_1 = x_2 = x_3. \quad (21)$$

R.: ad (i). Niech x_1, x_2, x_3 będą dodatnimi pierwiastkami rzeczywistymi wielomianu $f(x)$. Z rezultatów otrzymanych w zadaniu 6.1 wynika, że

$$(x_1 + x_2 + x_3) \cdot \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \right) \geq 9.$$

Stąd

$$(x_1 + x_2 + x_3) \cdot \frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{x_1x_2x_3} \geq 9.$$

Korzystając ze wzorów Viète'a mamy:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_2}{a_3}, \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{a_1}{a_3}, \\ x_1x_2x_3 = -\frac{a_0}{a_3}. \end{cases} \quad (22)$$

Zauważmy ponadto, że $a_0 \neq 0$. Wobec tego

$$\left(-\frac{a_2}{a_3}\right) \cdot \frac{\frac{a_1}{a_3}}{-\frac{a_0}{a_3}} \geq 9,$$

$$\frac{a_1a_2}{a_0a_3} \geq 9,$$

$$a_1a_2 \leq 9a_0a_3,$$

gdź z trzeciej równości układu (22) wynika, że $\frac{a_0}{a_3} < 0$, czyli $a_0a_3 < 0$.

ad (ii). Rozwiązanie analogiczne do przypadku (i).

ad (iii). W rozwiązaniu wystarczy wykorzystać warunek (18).

ZADANIE 7.1

Niech

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad (23)$$

gdzie $a_3 \neq 0$, będzie wielomianem o współczynnikach rzeczywistych. Wykazać, że istnieją wielomiany postaci (23) mające trzy pierwiastki rzeczywiste o różnych znakach, dla których nierówność (19) (nierówność (20)) jest spełniona oraz istnieją wielomiany postaci (23) mające trzy pierwiastki rzeczywiste o różnych znakach, dla których nierówność (19) (nierówność (20)) nie jest spełniona.

R.: Przykłady:

$$\begin{aligned} 1) \quad & x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = -1, \\ & f(x) = (x-1)^2(x+1) = x^3 - x^2 - x + 1, \\ & a_3 = 1, a_2 = -1, a_1 = -1, a_0 = 1, \\ & a_1a_2 = 1, 9a_0a_3 = 9, \\ & a_1a_2 < 9a_0a_3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & x_1 = 20, x_2 = 1, x_3 = -10, \\ & f(x) = (x-20)(x-1)(x+10) = x^3 - 11x^2 - 190x + 200, \\ & a_3 = 1, a_2 = -11, a_1 = -190, a_0 = 200, \\ & a_1a_2 = (-190)(-11) = 2090, 9a_0a_3 = 9 \cdot 200 = 1800, \\ & a_1a_2 > 9a_0a_3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad & x_1 = -20, x_2 = -1, x_3 = 10, \\ & f(x) = (x+20)(x+1)(x-10) = x^3 + 11x^2 - 190x - 200, \\ & a_3 = 1, a_2 = 11, a_1 = -190, a_0 = -200, \\ & a_1a_2 = (-190) \cdot 11 = -2090, 9a_0a_3 = 9 \cdot (-200) = -1800, \\ & a_1a_2 < 9a_0a_3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \quad & x_1 = -1, x_2 = -1, x_3 = 1, \\ & f(x) = (x+1)^2(x-1) = x^3 + x^2 - x - 1, \\ & a_3 = 1, a_2 = 1, a_1 = -1, a_0 = -1, \end{aligned}$$

$$a_1 a_2 = -1, 9a_0 a_3 = -9, \\ a_1 a_2 > 9a_0 a_3.$$

W trzeciej części tej pracy podaliśmy siedem zadań olimpijskich lub konkursowych i sformułowaliśmy dla każdego z nich pewną liczbę pytań, problemów lub zadań otwartych. Uważamy, że nauczyciel prowadzący zajęcia z tego zakresu może zorganizować taką sytuację dydaktyczną, aby uczniowie (studenci) samodzielnie podejmowali próby formułowania i rozwiązywania problemów i zadań otwartych na bazie tych podstawowych zadań przedstawionych w artykule. Warto tutaj zacytować słowa A. Pardały (2009): *Uczeń, otrzymując zadanie otwarte, ma wrażenie robienia rzeczy nowych oraz bardzo emocjonalnie podchodzi do osiągniętych tu wyników stwierdzając jedynie: „rozwiązałem”, „znalazłem”*. Jeżeli rzeczywiście uczeń w ten sposób potrafi przeżywać satysfakcję z osiąganych wyników, oznacza to dobrą prognozę dotyczącą podejmowania przez niego dalszej działalności twórczej w matematyce.

Literatura

- Beddou, L., Mauduit, C.: 2001, Research as a method of the teaching mathematics (Descriptions of the program “Math en Jeans”), *Proceedings of the conference: Science and mathematics teaching for the information society, Toruń, Poland, 19-22 July 2000*, 11–25.
- Ciosek, M.: 1988, Poszukiwanie rozwiązania zadania na różnych poziomach matematycznego doświadczenia, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **9**, 125–172.
- Ciosek, M.: 1995, O roli przykładów w badaniu matematycznym, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **17**, 5–85.
- Gdowski, B., Pluciński, E.: 1999, *Zbiór zadań z matematyki dla kandydatów na wyższe uczelnie*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa.
- Gleichgewicht, B.: 2004, *Algebra*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław.
- Gunčaga, J., Fulier, J., Eisenmann, P.: 2009, Modernisation and Innovation of the Calculus Teaching, in: M. Billich, M. Papčo, Z. Takáč (ed.), *Teaching Mathematics: innovation, new trends, research*, Katolícka univerzita, Ružomberok, 89–103.
- Gunčaga, J., Majherová, J.: 2012, GeoGebra as a motivational tool for teaching and learning in Slovakia, *North American GeoGebra Journal* **1**(1), 45–48.
- Kostrikin, A. I.: 2004, *Wstęp do algebry. Podstawy algebry*, PWN, Warszawa.
- Krygowska, Z.: 1977a, *Zarys dydaktyki matematyki, cz. 1*, WSiP, Warszawa.
- Krygowska, Z.: 1977b, *Zarys dydaktyki matematyki, cz. 2*, WSiP, Warszawa.
- Krygowska, Z.: 1977c, *Zarys dydaktyki matematyki, cz. 3*, WSiP, Warszawa.
- Krygowska, Z.: 1986, Elementy aktywności matematycznej, które powinny odgrywać znaczącą rolę w matematyce dla wszystkich, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **6**, 25–41.
- Mason, J., Burton, L., Stacey, K.: 2005, *Matematyczne myślenie*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne Spółka Akcyjna, Warszawa.
- Mikołajczyk, M.: 2012, *Jak pracować z uczniem zdolnym? Poradnik nauczyciela matematyki (praca zbiorowa)*, Ośrodek Rozwoju Edukacji, Warszawa.

- Mostowski, A., Stark, M.: 1970, *Elementy algebry wyższej*, PWN, Warszawa.
- Mostowski, A. W.: 1967, *Rozwiązywanie równań algebraicznych*, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa.
- Pardała, A.: 2009, Praktyka kształtowania matematycznej twórczości uczniów, *Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **II**, 159–181.
- Pawłowski, H.: 1994, *Kółko matematyczne dla olimpijczyków*, TURPRESS, Toruń.
- Płonka, E.: 2000, *Wykłady z algebry wyższej I*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice.
- Ross, K. A., Wright, C. R. B.: 1996, *Matematyka dyskretna*, PWN, Warszawa.
- Schoenfeld, A. H.: 1985, *Mathematical Problem Solving*, Academic Press Inc., Orlando.
- Turnau, S.: 1990, *Wykłady o nauczaniu matematyki*, PWN, Warszawa.
- Zaręba, L.: 2012, *Matematyczne uogólniania. Możliwości uczniów i praktyka nauczania*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Pedagogicznego, Kraków.

*Instytut Matematyki
Uniwersytet Pedagogiczny
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
e-mail antoni.chronowski@interia.pl
e-mail zpowazka@gmail.com*

Monika Czajkowska

Kompetencje geometryczne nauczycieli matematyki*

Abstract. Practice proves that students tend to face difficulties in learning geometry. This observation is partially confirmed by the results of educational research as well as external exams. It happens repeatedly that students get lower marks in arithmetic or algebra tasks. The causes of such situation are complex. One of the reasons is that teaching geometry requires special teaching skills characteristic for this specific teaching branch as well as the need for “specific vision”. Therefore, I decided to study the geometric skills of mathematics teachers more carefully. For this purpose, I made use of two research results: *international research TEDS-M 2008* as well as nationwide research *The research of needs the elementary education teachers as well as mathematics teachers have in the scope of their professional development*. This article presents the results of the analysis together with my personal thoughts on education and improvement of teachers’ skills in the area of geometry.

1. Uwagi o specyfice uczenia się i nauczania geometrii

Praktyka pokazuje, że nauka geometrii często sprawia uczniom trudności. Z rozwiązywaniem zadań geometrycznych radzą sobie oni gorzej, niż z rozwiązywaniem zadań z innych działów matematyki szkolnej. Powyższe stwierdzenia potwierdzają w pewnym stopniu wyniki egzaminów zewnętrznych. Na przykład na egzaminie gimnazjalnym w 2015 r. jednymi z najtrudniejszych okazały się zadania dotyczące zagadnień z geometrii. Poziom wykonania najtrudniejszego zadania z planimetrii wynosił 24%, a najłatwiejszego – 60%. W przypadku zadań ze stereometrii wskaźniki te były odpowiednio równe 32% i 57% (CKE, 2015, s. 72–76). Podobna sytuacja wystąpiła na egzaminie gimnazjalnym w 2016 roku. Najtrudniejszym okazało się zadanie geometryczne, wymagające zastosowania twierdzenia

*Geometric competences of mathematics teachers

2010 Mathematics Subject Classification: Primary: 97C70; Secondary: 97G99.

Key words and phrases: teacher competences, geometry

Pitagorasa w nietypowej sytuacji; poprawnie rozwiązało je 30% gimnazjalistów (CKE, 2016, s. 79).

Niektóre trudności uczniów mogą wynikać ze specyfiki uczenia się i nauczania geometrii. Panek i Pardała (1999) stwierdzają, że zadania geometryczne wymagają „specyficznego widzenia”. To „specyficzne widzenie” polega na manipulowaniu obiektami geometrycznymi w umyśle oraz dostrzeganiu, wydzielaniu i skupianiu uwagi tylko na istotnych informacjach. Nie wystarczy przy tym tylko „widzieć”, trzeba wiedzieć jak zinterpretować to, co się widzi (tamże, s. 65–69). Wsparciem dla takiego manipulowania jest dobra wyobraźnia przestrzenna (de Lange Jzn, 1986; Panek, Pardała, 1999) i intuicja geometryczna (Fischbein, 1987; Jones, 1998; Fujita, Jones, Yamamoto, 2004). Z kolei Duval (1998, s. 37) zauważa, że nauczanie geometrii jest bardziej skomplikowane i często mniej skuteczne niż nauczanie arytmetyki czy szkolnej algebry.

Powyższe uwagi wskazują na to, że nauczanie geometrii wymaga szczególnych kompetencji nauczyciela. Powszechnie wiadomo bowiem, że efektywność nauczania w dużej mierze od nich zależy. Wobec tego, postanowiłam przyjrzeć się kompetencjom z zakresu geometrii przyszłych i czynnych nauczycieli matematyki. Do określenia ich poziomu wykorzystałam dostępne, dzięki IFIS PAN i IBE, wyniki badania TEDS-M 2008 (Czajkowska, Jasińska, Sitek, 2010) i badania potrzeb nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej i nauczycieli matematyki w zakresie rozwoju zawodowego (Czajkowska, Grochowalska, Orzechowska, 2015). Ponadto mój udział w zespołach badawczych obu wymienionych badań pozwolił mi na przeprowadzenie głębszych analiz i spojrzenie na problem z szerszej perspektywy. Zanim jednak przedstawię wyniki moich dociekań, wyjaśnię, co rozumiem przez kompetencje nauczyciela matematyki.

2. Kompetencje nauczycieli matematyki

Pojęcie kompetencji, w tym również kompetencji nauczycieli, jest zazwyczaj używane w dwóch znaczeniach – jako kwalifikacji niezbędnych do wykonywania zawodu lub jako zakresu uprawnień. W niniejszym artykule, pisząc o kompetencji, mam na myśli pierwsze z wymienionych określeń. Kompetencję rozumiem jako połączenie trzech atrybutów: wiedzy, umiejętności i postaw.

W literaturze pedagogicznej wymienia się różne kategorie lub obszary kompetencji nauczyciela. Na przykład Dylak (1995, s. 38–39) dzieli je na: bazowe, konieczne, pożądane. Taraszkiewicz-Kotońska (2001, s. 175) mówi o kompetencjach merytorycznych, psychologiczno-pedagogicznych i wychowawczych. Banach (2004, s. 551) wyróżnia kompetencje poznawczą, językową, wartościująco-komunikacyjną, interpersonalną, kulturową, życiowego doradztwa, praktyczno-moralną i organizacyjno-techniczną. Strykowski (2000, s. 18–27) charakteryzuje kompetencje merytoryczne (rzeczowe), psychologiczno-pedagogiczne, diagnostyczne, planistyczne i projektowe, dydaktyczno-metodyczne, komunikacyjne, medialne, kontrolne i ewaluacyjne, oceniania programów i podręczników szkolnych, autoedukacyjne. Zespół Przygotowania Pedagogicznego Nauczycieli przy Radzie ds. Kształcenia Nauczycieli w MEN (za: Szempruch, 2000, s. 123) wyodrębnia kompetencje interpretacyjno-komunikacyjne, kreatywne, współdziałania, pragmatyczne i informatyczno-medialne.

W literaturze dydaktycznej, mówiąc o kompetencjach nauczyciela matematyki, wskazuje się najczęściej na kompetencje matematyczne i kompetencje dydaktyczne. Kompetencja matematyczna to, jak pisze Niss (2003, s. 218), *zdolność rozumienia, osądzania, wykonywania i wykorzystywania matematycznych czynności w kontekście matematycznym i pozamatematycznym*. Niss wymienia osiem składowych kompetencji matematycznej. Są to: 1) myślenie matematyczne, 2) stawianie i rozwiązywanie problemów matematycznych, 3) modelowanie matematyczne, 4) rozumowanie matematyczne, 5) reprezentowanie bytów matematycznych, 6) posługiwanie się matematyczną symboliką i formalizmami, 7) komunikowanie się w matematyce, o matematyce i z użyciem matematyki, 8) używanie środków pomocniczych i narzędzi (tamże, s. 218–219). Kompetencja dydaktyczna w literaturze jest różnie charakteryzowana. Nie przedstawiając i nie rozważając na łamach tego artykułu podobieństw i różnic w opisach tej kompetencji, w niniejszym tekście przez kompetencję dydaktyczną nauczyciela rozumiem ogólną zdolność do organizowania procesu nauczania i uczenia się. Jej składowymi są m.in.: 1) wiedza o prawidłowościach rozwojowych człowieka, 2) znajomość podstawy programowej i programów nauczania (dostrzeganie powiązań treści programowych, znajomość podręczników szkolnych i innych materiałów dydaktycznych oraz umiejętność dokonywania ich krytycznej analizy), 3) planowanie lekcji (planowanie pojedynczej i kilku lekcji, wiedza o różnych sposobach organizacji lekcji, umiejętność stawiania właściwych celów nauczania, znajomość metod nauczania, umiejętność dokonywania ich krytycznej analizy i wykorzystania w praktyce, znajomość zasad nauczania, umiejętność doboru metod i środków dydaktycznych odpowiednich do postawionych celów nauczania, umiejętność wykorzystania TI w nauczaniu, umiejętność indywidualizacji nauczania), 4) umiejętność odbierania informacji od ucznia i przekazywania mu informacji zwrotnej (umiejętność wsłuchiwanie się w to, o czym mówi uczeń, umiejętność śledzenia toku myślenia ucznia zarówno w bezpośrednim kontakcie z uczniem, jak i na podstawie wytworów jego pracy, umiejętność przewidywania typowych błędów uczniowskich i zapobiegania błędom uczniowskim, umiejętność doboru odpowiednich wskazówek dydaktycznych, umiejętność informowania ucznia o lukach w jego wiedzy i czynionych przez niego postępach, umiejętność komunikowania się z uczniem, grupą uczniowską i rodzicami), 5) umiejętność oceny pracy ucznia (umiejętność analizowania i rzetelnego oceniania pracy ucznia), 6) umiejętność pracy z uczniami o różnych potrzebach edukacyjnych (umiejętność wspierania ucznia, mającego trudności w nauce i rozwijania uzdolnień ucznia o ponadprzeciętnych umiejętnościach, wiedza o różnych stylach uczenia się i nauczania).

Choć badacze podkreślają znaczenie obu kategorii kompetencji, to nie ma wśród nich pełnej zgodności co do tego, która z nich ma największy wpływ na jakość nauczania matematyki (Czajkowska, 2013, s. 73). Fennema i Franke (1992) piszą, że ważnymi komponentami specjalistycznej wiedzy nauczycielskiej są: znajomość samej matematyki, wiedza o matematycznych reprezentacjach, znajomość procesów poznawczych uczniów oraz znajomość metodyki. Podkreślają jednak, że podstawą jest rozumienie matematyki i umiejętność tworzenia matematycznych reprezentacji. Podobnego zdania są Ball, Thames i Phelps (2008, s. 404), którzy uważają, że to wiedza matematyczna nauczyciela jest warunkiem koniecznym i fun-

damentem skutecznego nauczania. Nie jest bowiem możliwe, aby nauczyciel, który sam nie posiada wiadomości i umiejętności na odpowiednim poziomie mógł pomóc uczniom w ich zrozumieniu i opanowaniu. Co więcej, wysokie kompetencje matematyczne nauczyciela wspierają rozwój jego kompetencji dydaktycznych, a deficyty w kompetencjach matematycznych mogą ten rozwój hamować. Natomiast wysokie kompetencje dydaktyczne nie mogą zrównoważyć braków w kompetencjach matematycznych (Krauss, Brunner, Kunter, Baumert, Blum, Neubrand, Jordan, 2008, s. 722–724; Baumert, Kunter, Blum, Brunner, Voss, Jordan, Klusmann, Krauss, Neubrand, Tsai, 2010, s. 166–167).

Z kolei Davis (2011, s. 1506–1507) uważa, że na jakość nauczania matematyki największy wpływ mają predyspozycje do wykonywania zawodu i talent pedagogiczny. Jego zdaniem nauczyciele o wysokich kompetencjach dydaktycznych posiadają specjalistyczną wiedzę, nie zawsze dostępną ich świadomości (*tacit knowledge*), dzięki której umiejętnie przedstawiają treści matematyczne, stosując analogie, metafory i przykłady ukazujące praktyczne wykorzystanie matematyki. To właśnie kompetencje dydaktyczne nauczyciela mają istotny wpływ na osiągnięcia uczniów (Baumert, Kunter, Blum, Brunner, Voss, Jordan, Klusmann, Krauss, Neubrand, Tsai, 2010, s. 166).

Natomiast Shulman (1986, s. 9–11) pisze, że warunkiem skutecznego nauczania matematyki, a zwłaszcza właściwego konstruowania pojęć matematycznych w umyśle ucznia, jest zintegrowanie nauczycielskich kompetencji matematycznych i dydaktycznych.

Bazując na stanowisku Shulmana, przyjmuję, że obie wymienione kategorie kompetencji mają istotny wpływ na jakość nauczania matematyki, są ściśle ze sobą powiązane i wzajemnie się przenikają. Wiedza matematyczna stanowi bazę, na której, przy udziale odpowiedniej wiedzy dydaktycznej, a także wiedzy z psychologii czy komunikacji międzyludzkiej, „nabudowywana” jest wiedza o zupełnie nowej jakości (wiedza z dydaktyki matematyki). To „nadbudowywanie” polega na swoistym zespoleniu wiedzy matematycznej z dydaktyczną. Ta specyficzna wiedza odnosi się *stricte* do nauczania matematyki i uwzględnia specyfikę tego przedmiotu. Natomiast, moim zdaniem, pewne predyspozycje do wykonywania zawodu nauczyciela matematyki, talent pedagogiczny i wiedza ukryta, o których pisze Davis, powodują różnice w szybkości i poziomie opanowania wiedzy z dydaktyki matematyki. Analogicznie, swoiste połączenie umiejętności matematycznych i dydaktycznych generuje nowe, specyficzne umiejętności (umiejętności z dydaktyki matematyki). Kompetencje z dydaktyki matematyki są zatem połączeniem wiedzy i umiejętności z dydaktyki matematyki oraz postaw wobec uczenia się i nauczania tego przedmiotu.

Z powyższych rozważań wynika, że jeśli nauczyciel nie ma odpowiednich kompetencji matematycznych, nie może posiadać kompetencji z dydaktyki matematyki. Sama wiedza matematyczna (będąca składową kompetencji matematycznych), nawet bardzo rozległa i wysoce specjalistyczna, nie jest wystarczająca. Ważne jest bowiem nie tylko to, jak dużo dana osoba wie, ale jak korzysta z posiadanej wiedzy matematycznej i w jakim stopniu rozumie jej sens (Hill, Schilling, Ball, 2004, s. 27). Istotne jest też, czy potrafi dokonać jej elementaryzacji, stosownie do poziomu rozwojowego i intelektualnego uczniów oraz wyrazić myśl matematyczną

w języku dla nich zrozumiałym (Shulman, 1987; An, Kulm, Wu, 2004). A zatem każdy, kto zajmuje się edukacją matematyczną powinien mieć wykształcenie matematyczne, ale nie każdy matematyk może zajmować się nauczaniem matematyki. Tym bardziej, same kwalifikacje pedagogiczne, a nawet wysokie kompetencje dydaktyczne, bez odpowiedniego wykształcenia matematycznego, nie wystarczą do nauczania matematyki. Nie wystarczy też wykształcenie matematyczne i przygotowanie pedagogiczne, jeśli osoba nie będzie potrafiła w specyficzny sposób połączyć posiadanej wiedzy i umiejętności z obu dziedzin, czyli nie nabędzie kompetencji z dydaktyki matematyki na odpowiednim poziomie.

Stwierdzenia te nie tylko nie pozostają w sprzeczności z dotychczasowymi ustaleniami dotyczącymi kompetencji nauczycieli matematyki, ale wręcz w pewien sposób je syntetyzują i wzmacniają.

3. Kompetencje geometryczne studentów matematyki – przyszłych nauczycieli

Jednym z ważniejszych międzynarodowych badań kompetencyjnych przyszłych nauczycieli zajmujących się edukacją matematyczną było badanie TEDS-M 2008 (Czajkowska, Jasińska, Sitek, 2010). Wzięli w nim udział studenci matematyki specjalności nauczycielskiej, ostatnich lat studiów (3 roku studiów pierwszego stopnia i 5 roku, wtedy już wygaszanych, studiów jednolitych magisterskich). Zadania z testu *podstawowego*, opracowanego z myślą o przyszłych nauczycielach matematyki szkół podstawowych, rozwiązywało 300 studentów, a z testu *rozszerzonego* przygotowanego dla przyszłych nauczycieli niższych szkół średnich (odpowiadających polskiemu gimnazjum) – 298. Zadania były dwóch rodzajów: jedne sprawdzały kompetencje matematyczne studentów (*Mathematical Content Knowledge* – MCK), inne kompetencje z dydaktyki matematyki (*Mathematical Pedagogical Content Knowledge* – PCK). Zadania z obszaru dydaktyki matematyki zostały tak skonstruowane, aby mierzyły nie tylko znajomość matematyki, w takim zakresie, w jakim powinien znać ją każdy absolwent studiów matematycznych, ale specjalistyczną wiedzę i umiejętności nauczycielskie.

W obu testach użyto zadań dotyczących zagadnień geometrycznych. Zakres treściowy zadań geometrycznych, mierzących kompetencje matematyczne zarówno w teście *podstawowym*, jak i *rozszerzonym* obejmował: figury geometryczne, pomiar geometryczny (długości odcinków, obwody i pola powierzchni figur na płaszczyźnie, pola powierzchni i objętości brył) oraz przekształcenia geometryczne. Ponadto, każde zadanie zostało scharakteryzowane ze względu na dominujący charakter umiejętności matematycznych, koniecznych do jego rozwiązania. I tak wyróżniono: stosowanie wiedzy (*applying*), posiadanie wiedzy (*knowing*) oraz rozumowanie (*reasoning*) (Tab. 1). Liczbę zadań z geometrii w każdym z testów w podziale na wyróżniony rodzaj umiejętności zamieściłam w tabeli (Tab. 2).

Dokonano również klasyfikacji zadań mierzących kompetencje z dydaktyki matematyki, wyróżniając w tym zakresie: zadania dotyczące znajomości powiązań treści programowych (*curriculum*), planowania nauczania (*planning*), przekazywania wiedzy i odbierania jej od uczniów (*enacting*) (Tab. 3). W teście *podstawowym* znajomość powiązań treści programowych oraz umiejętności planowania nauczania

zostały połączone w jedną kompetencję. Liczbę zadań z geometrii w każdym z testów w podziale na wyróżniony rodzaj umiejętności zamieściłam w tabeli (Tab. 4).

Tab. 1. Zakres treściowy kompetencji matematycznych

Rodzaj kompetencji matematycznych	Zakres treściowy
posiadanie wiedzy	znajomość definicji, terminów matematycznych, twierdzeń, własności figur, powszechnie stosowanych symboli; rozpoznawanie figur geometrycznych; rozpoznawanie definicji (twierdzeń) równoważnych danej definicji (danemu twierdzeniu); klasyfikowanie figur zgodnie z przyjętym kryterium; posługiwanie się przyrządami pomiarowymi, stosowanie jednostek miar
stosowanie wiedzy	rozwiązywanie typowych zadań geometrycznych; korzystanie z własności figur geometrycznych; tworzenie modeli matematycznych w sytuacjach typowych
rozumowanie	rozwiązywanie nietypowych zadań geometrycznych; badanie zależności między figurami geometrycznymi; wizualizacja przekształceń geometrycznych; uogólnianie; specyfikowanie; badanie powiązań między pojęciami geometrycznymi; weryfikowanie hipotez, badanie czy podane stwierdzenie jest prawdziwe czy fałszywe; dowodzenie twierdzeń

Źródło: Opracowanie własne na podstawie Tatto, Schwille, Senk, Ingvarson, Peck, Rowley (2008), Czajkowska, Jasińska, Sitek (2010).

Tab. 2. Liczba zadań z geometrii mierzących kompetencje matematyczne studentów w teście podstawowym i rozszerzonym

	stosowanie wiedzy	posiadanie wiedzy	rozumowanie	razem
test <i>podstawowy</i>	11	3	7	21
test <i>rozszerzony</i>	9	6	8	23

Źródło: Opracowanie własne na podstawie Tatto, Schwille, Senk, Ingvarson, Peck, Rowley (2008), Czajkowska, Jasińska, Sitek (2010).

Tab. 3. Zakres treściowy kompetencji z dydaktyki matematyki

Rodzaj kompetencji z dydaktyki matematyki	Zakres treściowy
znajomość powiązań treści programowych	dostrzeganie powiązań treści w ramach jednego programu nauczania; określanie najważniejszych zagadnień w danym programie nauczania
planowanie nauczania	stawianie właściwych celów nauczania (celów operacyjnych); dobór odpowiednich metod nauczania; dobór odpowiednich wskazówek dydaktycznych; znajomość i ocenianie różnych sposobów wprowadzania pojęć matematycznych; przewidywanie typowych odpowiedzi uczniów, w tym typowych odpowiedzi błędnych; szczegółowe planowanie lekcji matematyki

przekazywanie wiedzy i odbieranie jej od uczniów	analizowanie i ocenianie uczniowskich rozwiązań zadań; śledzenie i ocenianie rozumowań prowadzonych przez uczniów; ocenianie i właściwe reagowanie na wypowiedzi uczniów, przewidywanie typowych odpowiedzi błędnych; formułowanie właściwych pytań; właściwe reagowanie na nieprzewidziane trudności uczniów; dostarczanie informacji zwrotnej uczniowi
--	--

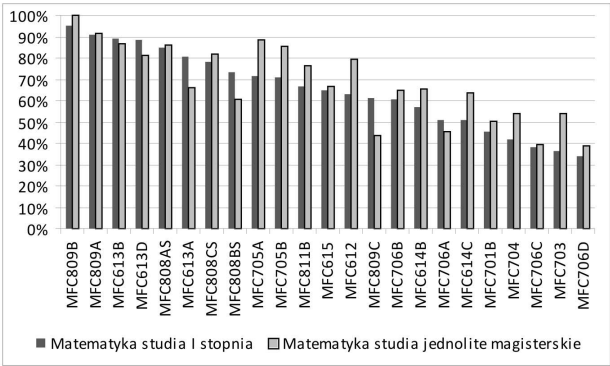
Źródło: Opracowanie własne na podstawie Tatto, Schwille, Senk, Ingvarson, Peck, Rowley (2008), Czajkowska, Jasińska, Sitek (2010).

Tab. 4. Liczba zadań z geometrii mierzących kompetencje matematyczne studentów w teście podstawowym i rozszerzonym

	znajomość po- wiązań treści programo- wych	planowanie nauczania	przekazywanie wiedzy i od- bieranie jej od uczniów	razem
test podstawowy	2		5	7
test rozszerzony	1	0	6	7

Źródło: Opracowanie własne na podstawie Tatto, Schwille, Senk, Ingvarson, Peck, Rowley (2008), Czajkowska, Jasińska, Sitek (2010).

Przyszli nauczyciele matematyki, którzy rozwiązywali test *podstawowy*, wykazali się wiedzą i umiejętnościami matematycznymi z zakresu geometrii (Ryc. 1). Tylko w przypadku dwóch zadań, poziomy ich wykonania są mniejsze od 50%.



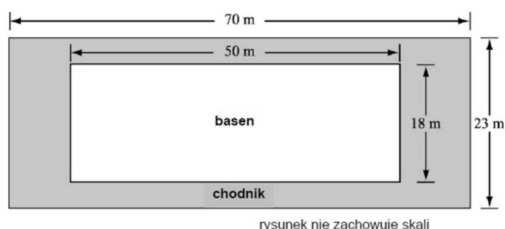
Ryc. 1. Procentowe wyniki polskich studentów w zadaniach geometrycznych mierzących wiedzę i umiejętności matematyczne w teście *podstawowym*

Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych z badania TEDS-M 2008.

Badani najlepiej poradzili sobie z zadaniami, w których należało wykazać się znajomością pojęć, twierdzeń, faktów i procedur, a także z zadaniami typowymi, wymagającymi postępowania schematycznego, algorytmicznego. Więcej trudności napotykali w zadaniach rzadziej spotykanych, wymagających łączenia różnych elementów wiedzy, czy wypracowania strategii. Przyjrzyjmy się dwóm zadaniom z testu *podstawowego*, które zamieszczam poniżej.

Zadanie 1. *Pole powierzchni chodnika wokół prostokątnego basenu (geometria, stosowanie wiedzy)*

Wokół prostokątnego basenu znajduje się wyłożony płytkami chodnik (na rysunku zacieniowany), tak jak pokazano poniżej.

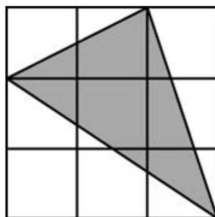


Ryc. 2.

Jaka jest powierzchnia tego chodnika? *Zaznacz jedną odpowiedź.*

- ☐ A. 100 m² ☐ B. 161 m² ☐ C. 710 m² ☐ D. 1610 m²

Zadanie 2. *Pole trójkąta (geometria, stosowanie wiedzy)*



Ryc. 3.

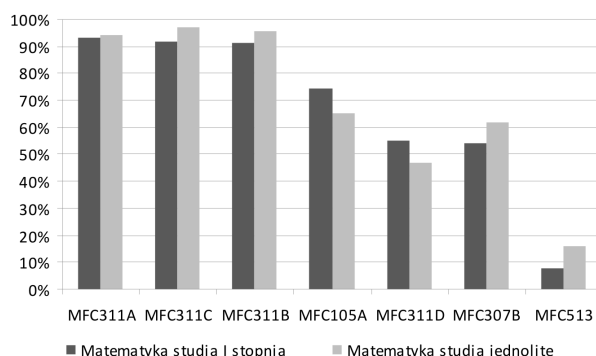
Pole każdego z małych kwadratów to 1 cm². Ile cm² ma pole zacieniowanego trójkąta? *Zaznacz jedną odpowiedź.*

- ☐ A. 3,5 cm² ☐ B. 4 cm² ☐ C. 4,5 cm² ☐ D. 5 cm²

Oba zadania wymagały umiejętności liczenia pól wielokątów. Jednak o ile zadanie 1. zostało rozwiązane poprawnie przez prawie wszystkich studentów (odsetki poprawnych odpowiedzi były równe 95,7% w przypadku studentów studiów I stopnia i 97,4% w przypadku studentów studiów jednolitych magisterskich), to już w zadaniu 2. odsetki poprawnych odpowiedzi były odpowiednio równe 70,9% i 89,8%. Pomimo, że w obu zadaniach można było zastosować podobny schemat postępowania – szukane pole figury można było wyznaczyć jako różnicę pól innych figur – zmiana sytuacji znacząco obniżyła frakcję poprawnych odpowiedzi. Możliwe jest też, że skupiano się na obliczaniu, przy użyciu odpowiednich wzorów, pól zacieniowanych figur. O ile w zadaniu 1. wystarczyło obliczyć pola prostokątów, na jakie można było podzielić chodnik, to w przypadku drugiego zadania nie dało się już tak łatwo zastosować wzoru na pole trójkąta. Najczęściej wybieraną błędną odpowiedzią była odpowiedź C (odpowiednio: 16% i 6%).

Dość dobrze poradzili sobie studenci piszący test *podstawowy* z zadaniami geometrycznymi z zakresu przekazywania wiedzy i odbierania jej od uczniów. Nato-

miast dwa zadania, w których badani uzyskali najniższe wyniki dotyczyły znajomości powiązań treści programowych i planowania nauczania (Ryc. 4).



Ryc. 4. Procentowe wyniki polskich studentów w zadaniach geometrycznych mierzących wiedzę i umiejętności z dydaktyki matematyki w teście *podstawowym*

Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych z badania TEDS-M 2008.

Zadanie, z którym poradziło sobie tylko ok. 13% wszystkich studentów piszących ten test przedstawiam poniżej.

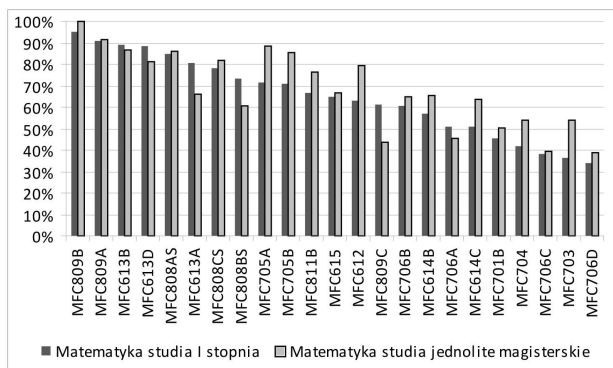
Zadanie 3. Dwa powody (*geometria, znajomość treści programowych i planowanie nauczania*)

Gdy pani Hoffman zaczyna uczyć dzieci, jak się mierzy długość, prosi je, aby zmierzili szerokość książki za pomocą spinaczy do papieru, a następnie za pomocą ołówków. Jak myślisz, dlaczego nauczycielka woli rozpoczynać właśnie w ten sposób, zamiast od razu nauczyć dzieci, jak się posługiwać linijką? Podaj DWA powody.

Odpowiedź na powyższe zadanie uznawano za poprawną, jeśli student wymienił dwa spośród trzech następujących powodów, i stwierdził, że przedstawiony sposób: ułatwia zrozumienie czym jest mierzenie (używanie różnych jednostek umożliwia zrozumienie czym jest mierzenie, wskazuje na fakt, że każdy przedmiot może być użyty do mierzenia), powoduje pojawienie się potrzeby wprowadzenia jednostki standardowej (użycie jednostek niestandardowych może stworzyć potrzebę wprowadzenia standardowej jednostki oraz dać okazję do dyskusji na temat (historycznego) rozwoju mierzenia), powoduje pojawienie się potrzeby wyboru najbardziej odpowiedniej jednostki (użycie przedmiotów różnej długości pomaga dzieciom nauczyć się podejmowania decyzji, która jednostka (przedmiot) jest najbardziej odpowiednia w konkretnej sytuacji). Rozwiązanie zawierające tylko jeden z powodów uznawano za częściowo poprawne. Do błędnych zaliczano te odpowiedzi, w których skupiono się na rozrywce, motywacji (np. *Używanie konkretnych przedmiotów jest bardziej przyjemne, motywujące, interesujące i angażujące*) lub innych, nieistotnych aspektach (np. *Po to by dzieci wiedziały jak mierzyć za pomocą spinaczy do papieru i ołówków*). Niskie wyniki, jakie uzyskali studenci w tym zadaniu mogą wynikać z braku odpowiednich kompetencji matematycznych (np. z braku rozumienia sensu mierzenia), z braku odpowiednich kompetencji dydaktycznych (np. braku rozumienia, czym jest motywacja, braku umiejętności stawiania właściwych celów

nauczania), ale także braku umiejętności swoistego połączenia posiadanej wiedzy dydaktycznej i matematycznej przy realizacji konkretnego zagadnienia z matematyki szkolnej.

Gorzej kształtują się wyniki studentów, którzy pisali test *rozszerzony* (Ryc. 5). Zarówno w przypadku studentów studiów I stopnia, jak i studentów studiów jednolitych magisterskich poziom wykonania trzynastu zadań jest niższy niż 70%.



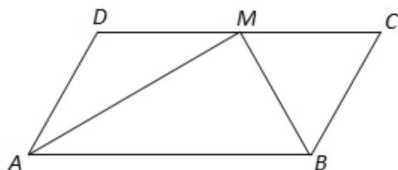
Ryc. 5. Procentowe wyniki polskich studentów w zadaniach geometrycznych mierzących wiedzę i umiejętności matematyczne w teście *rozszerzonym*

Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych z badania TEDS-M 2008.

Studenci, którzy pisali test *rozszerzony*, podobnie jak studenci, którzy wypełniali test *podstawowy*, nie napotkali trudności z rozwiązaniem zadań rutynowych, wymagających wiedzy odtwórczej. Natomiast w zadaniach mniej typowych ich wyniki są niższe. Poniżej prezentuję zadanie (zadanie 4.), z którego rozwiązaniem nie poradziła sobie około połowa polskich studentów piszących test *rozszerzony*.

Zadanie 4. *Trójkąt w równoległoboku (geometria, stosowanie wiedzy)*

$ABCD$ jest równoległobokiem, AM i BM są dwusiecznymi kątów odpowiednio $\angle BAD$ i $\angle ABC$. Wiedząc, że obwód równoległoboku $ABCD$ wynosi 6 cm, oblicz długości boków trójkąta ABM .



Ryc. 6.

Wpisz odpowiedzi poniżej.

$|AB| = \dots\dots\dots$ cm

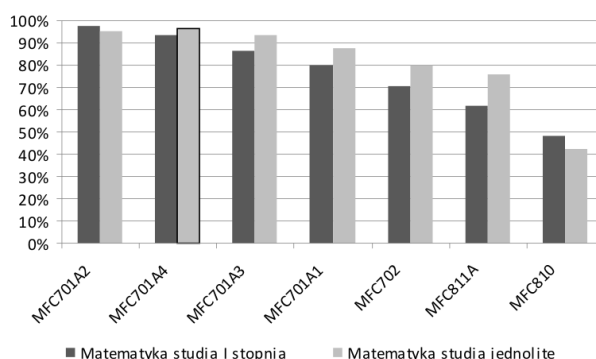
$|AM| = \dots\dots\dots$ cm

$|BM| = \dots\dots\dots$ cm

Świadczyć to może o tym, że studenci pomimo, iż znają odpowiednie fakty, to budując rozwiązanie zadania, nie potrafią odpowiednio korzystać z posiadanej wiedzy i łączyć ze sobą różnych treści. Brak odpowiednich kompetencji matematycznych pociąga za sobą brak kompetencji z dydaktyki matematyki.

Poprawnie rozwiązało to zadanie 41,7% studentów studiów pierwszego stopnia i 54,0% studentów studiów jednolitych magisterskich. Natomiast co trzeci student, zarówno studiów licencjackich, jak i magisterskich napisał wszystkie trzy odpowiedzi błędnie.

Dość dobrze badani poradzili sobie z zadaniami mierzącymi wiedzę i umiejętności z zakresu przekazywania wiedzy i odbierania jej od uczniów. Natomiast łatwość jedynego zadania sprawdzającego znajomość powiązań treści programowych jest mniejsza niż 50%, zarówno w przypadku studentów studiów pierwszego stopnia, jak i studentów studiów jednolitych magisterskich (Ryc. 7). W zadaniu tym badani mieli wśród podanych treści (twierdzeń, wzorów, reguł postępowania) wskazać te, które będą najbardziej pomocne w zrozumieniu przez uczniów pewnego twierdzenia o dwusiecznej kąta wewnętrznego w trójkącie równoramiennym.



Ryc. 7. Procentowe wyniki polskich studentów w zadaniach geometrycznych mierzących umiejętności z dydaktyki matematyki w teście *rozszerzonym*

Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych z badania TEDS-M 2008

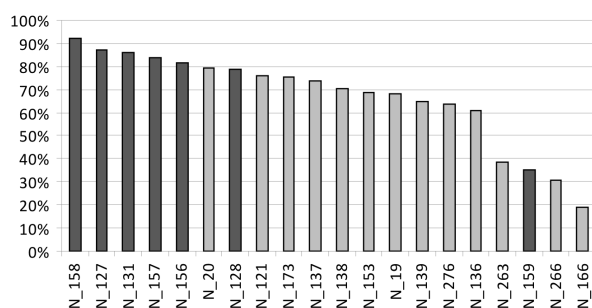
Podsumowując, badanie TEDS-M 2008 pokazało, że wielu przyszłych polskich nauczycieli matematyki nie radzi sobie ze szkolnymi zadaniami matematycznymi z zakresu geometrii. Warto zauważyć, że brak kompetencji z dydaktyki matematyki może wynikać zarówno z braku odpowiednich kompetencji matematycznych, braku kompetencji dydaktycznych lub też nieporadności i braku wprawy w swobodnym łączeniu wiedzy i umiejętności matematycznych i dydaktycznych.

Nie wiadomo, czy wejście do zawodu, pomoc ze strony innych nauczycieli zlikwiduje ewentualne luki w ich wiedzy i umiejętnościach, spowoduje, że staną się oni wysokiej klasy specjalistami, czy też będzie wręcz przeciwnie – rutyna i codzienne obowiązki szkolne sprawią, że ich wiedza z upływem lat stanie się coraz bardziej niepewna, a działania schematyczne i jednokierunkowe.

4. Kompetencje geometryczne czynnych nauczycieli matematyki

Do identyfikacji poziomu kompetencji geometrycznych czynnych nauczycieli matematyki wykorzystałam wyniki *badania potrzeb nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej i nauczycieli matematyki w zakresie rozwoju zawodowego*. Zostało ono przeprowadzone przez Instytut Badań Edukacyjnych w latach 2012–2014. Wzięło w nim udział 381 nauczycieli matematyki w klasach 4–6 i 378 nauczycieli matematyki gimnazjów. W badaniu użyto specjalnie skonstruowanych testów, za pomocą których sprawdzano poziom specjalistycznej wiedzy nauczycielskiej. Większość zadań była charakterystyczna dla etapu edukacyjnego, na którym nauczał badany nauczyciel, ale obok tych zadań umieszczono również takie, które występują na etapach niższych i wyższych (Czajkowska, Grochowalska, Orzechowska, 2015).

W teście przygotowanym z myślą o nauczycielach klas 4–6 szkół podstawowych zamieszczono 20 zadań geometrycznych, w tym 7 zadań z obszaru matematyki i 13 z dydaktyki matematyki. Ich łatwość podaję na diagramie (Ryc. 8).



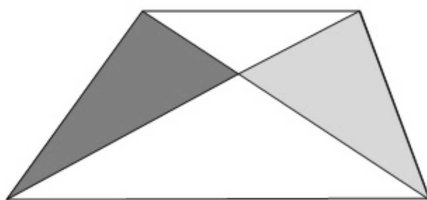
Ryc. 8. Łatwość zadań geometrycznych
(nauczyciele matematyki klas 4–6 szkół podstawowych)

Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych z badania BPN. Na czarno zaznaczono zadania z zakresu matematyki, a na szaro – z dydaktyki matematyki.

Nauczyciele matematyki klas 4–6 szkół podstawowych wykazali się dość dobrą znajomością treści geometrycznych. Łatwość tego podtestu jest równa 77,8%. Badani nie napotkali większych trudności z rozwiązywaniem typowych zadań geometrycznych. Np. na pytanie, czy *kula o promieniu 5 cm zmieści się w prostopadłościennym pudełku o wymiarach 8 cm x 10 cm x 12 cm*, poprawnej odpowiedzi udzieliło 86% nauczycieli. Ten pozytywny obraz burzy fakt, iż aż 62% nauczycieli podało, że wyrażenie *wielokąt, który ma wszystkie boki równe i wszystkie kąty równe* jednoznacznie określa kwadrat, nie zwracając uwagi, że własność ta przysługuje wszystkim wielokątom foremnym. Tym samym za poprawną uznało błędną definicję kwadratu. Świadczyć to może o ich trudnościach w definiowaniu pojęć matematycznych. Co piąty nauczyciel nie potrafił też dokończyć rysunku graniastosłupa, na którym były zaznaczone cztery z sześciu jego wierzchołków. Analiza prac tych osób pozwala wnosić, że nie mieli oni wystarczająco rozwiniętej wyobraźni przestrzennej lub nie zwracali uwagi na warunki podane w zadaniu (np. dorysowywali więcej wierzchołków).

Wyraźnie gorzej nauczyciele klas 4–6 poradzi sobie z zadaniami wymagającymi wiedzy i umiejętności z dydaktyki matematyki. Łatwość tego podtestu jest równa 59,3%. Jedno z takich zadań prezentuję poniżej.

Zadanie 5. Na rysunku przedstawiono trapez. Proszę uzasadnić, że zacieniowane na rysunku trójkąty mają równe pola.



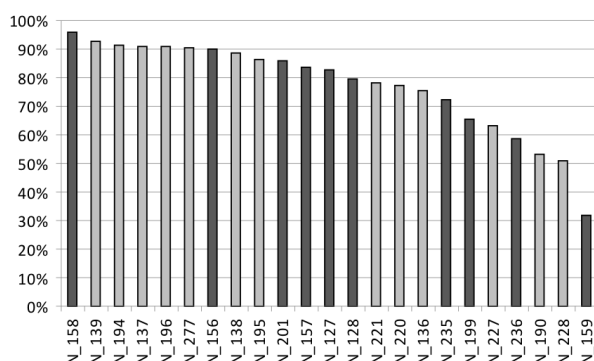
Ryc. 9.

Proszę opisać, na czym polega zasadnicza trudność zadania.

Tylko nieco ponad 19% nauczycieli prawidłowo odpowiedziało, że zasadniczą trudność zadania polega na dostrzeżeniu trójkątów o tej samej podstawie i równych wysokościach oraz trójkąta, który jest ich częścią wspólną. Około 31% stwierdziło, że w tekście zadania brakuje informacji, że przedstawiony na rysunku trapez jest równoramienny (choć trapez nie jest i nie musi być równoramienny) lub trójkąty są przystające, a 20%, że brakuje konkretnych danych liczbowych. Na podstawie odpowiedzi nauczycieli można stwierdzić, że dla znaczącej ich części samo pojęcie „zasadnicza trudność zadania” (powszechnie używane przy ocenie rozwiązań zadań otwartych na egzaminach zewnętrznych oraz przy holistycznej ocenie pracy ucznia) było obce. Niektórzy z nich utożsamiali „zasadniczą trudność zadania” z „przewidywaną trudnością dla ucznia”, choć wyrażenia te znaczeniowo nie są tożsame.

W innym zadaniu przedstawiono w różnych położeniach pary prostych równoległych. Nauczyciel miał ustalić hipotetyczne przyczyny wątpliwości ucznia związane z oceną równoległości tych par prostych, które były ułożone w orientacji innej niż pozioma czy pionowa. Około 68% badanych ustaliło, że prawdopodobną przyczyną wątpliwości ucznia, może być najczęściej prezentowana podczas lekcji matematyki orientacja pionowa lub pozioma dwóch prostych równoległych – stąd przyzwyczajenie i wątpliwości ucznia podczas prezentacji prostych równoległych ułożonych inaczej. Jednak, co trzeci nauczyciel nie potrafił odpowiedzieć na postawione pytanie, bądź jego odpowiedź była w stylu: „bo uczeń ma wadę wzroku” lub „bo uczeń nie nauczył się, co to są proste równoległe”. Oznacza to, że całkiem spora grupa nauczycieli przyczyn trudności ucznia prędzej upatruje w różnych dysfunkcjach dziecka lub jego lenistwie niż wadliwie prowadzonym procesie dydaktycznym.

Nauczyciele uczący w gimnazjach rozwiązywali 23 zadania geometryczne (10 zadań z obszaru matematyki i 13 z dydaktyki matematyki). Poziom wykonania zadań matematycznych jest równy 75%, a z dydaktyki matematyki – 79%. Poziomy łatwości poszczególnych zadań zamieściłam na diagramie (Ryc. 10).



Ryc. 10. Łatwość zadań geometrycznych (nauczyciele matematyki gimnazjów)

Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych z badania BPN. Na czarno zaznaczono zadania z zakresu matematyki, a na szaro - z dydaktyki matematyki.

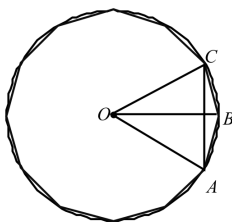
Nauczyciele dobrze poradzili sobie z rozwiązaniem połowy zadań, sprawdzających ich wiedzę matematyczną z zakresu geometrii. Napotkali jednak trudności z rozwiązaniem mniej typowych zadań. Na przykład na pytanie o graficzną ilustrację rozwiązania równania $5x = 7$ w układzie współrzędnych w przestrzeni, poprawnej odpowiedzi udzieliło ok. 58,6% osób. Prawie 15% odpowiedziało, że jest to punkt, 9% – prosta, a 10,2% – płaszczyzna. Pozostali podali jeszcze inne błędne odpowiedzi lub opuścili zadanie. Nieco lepiej poradzili sobie badani w przypadku pytania o ilustrację graficzną rozwiązania tego równania w układzie współrzędnych na płaszczyźnie. Tu odsetek poprawnych odpowiedzi jest równy 72,4%. Jednak aż 23,7% nauczycieli podało, że jest to punkt.

Nauczyciele wykazali się wiedzą i umiejętnościami z zakresu planowania pracy dydaktycznej. Nie wszyscy jednak potrafili właściwie oceniać uczniowskie, zwłaszcza nietypowe, rozwiązania zadań. Przyjrzyjmy się zadaniu poniżej.

Zadanie 6. Gimnazjalista otrzymał do rozwiązania zadanie.

Oblicz pole dwunastokąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu równym 1.

Przedstawił następujące rozwiązanie tego zadania:



Ryc. 11.

Trójkąt OAC jest równoboczny, więc $AC = 1$ i odcinki OB i AC są prostopadłe.

$P = 6 \cdot 0,5 \cdot 1 \cdot 1 = 3$.

Proszę ocenić rozwiązanie zadania przedstawione przez ucznia. Proszę wyjaśnić, na czym polegał pomysł rozwiązania zadania podany przez ucznia.

Tylko 63,1% badanych stwierdziło, że rozwiązanie podane przez ucznia jest poprawne, a prawie 50,8% potrafiło wyjaśnić ideę tego rozwiązania. Z tej grupy 41,1% nauczycieli stwierdziło, że uczeń podzielił dwunastokąt foremny na 6 deltoidów i skorzystał ze wzoru na pole deltoidu. Ok. 1,6% uznało, że uczeń najpierw podzielił dwunastokąt foremny na 6 deltoidów, a potem każdy z nich na dwa trójkąty równoramienne i skorzystał ze wzoru na pole trójkąta. Nieco ponad 8% badanych stwierdziło, że pomysł ucznia polegał na podziale dwunastokąta na 12 przystających trójkątów, o podstawie równej 1 i wysokości 0,5. Niepokojące jest jednak to, że prawie co trzeci nauczyciel uznał rozwiązanie przedstawione przez ucznia za błędne.

5. Podsumowanie

Prezentowane wyniki wskazują na konieczność zmiany systemu kształcenia i doskonalenia nauczycieli. Znacząca grupa zarówno studentów jak i nauczycieli, pomimo że posiada wiedzę i umiejętności matematyczne nie ma wystarczającej wiedzy i umiejętności z dydaktyki matematyki.

Chociaż ogólne wyniki studentów były wysokie, to jednak mają oni pewne braki w zakresie łączenia różnych treści i dostrzegania między nimi powiązań. Co więcej, jak pokazują badania nauczycieli (Grzęda, 2009; Czajkowska, Grochowalska, Orzechowska, 2015) ich wiedza teoretyczna nie ma przełożenia na praktykę. Nauczyciele nie czują się dobrze przygotowani do wykonywania zawodu, nie widzą związków pomiędzy tą wiedzą i umiejętnościami, które zdobyli na studiach, a tymi, które są im konieczne i potrzebne w codziennej pracy. Nie zawsze wiedzą jakich zadań należy użyć, aby rozwijać określone, w tym geometryczne, umiejętności uczniów. Wskazana wydaje się zatem taka organizacja zajęć na studiach matematycznych, by studenci specjalizacji nauczycielskiej mogli spojrzeć na matematykę szkolną z punktu widzenia matematyki wyższej, aby widzieli powiązania pomiędzy tym, czego się uczą na studiach, a tym czego sami będą nauczać. Należy im możliwie często stwarzać okazję do przekładu treści wyrażonych w języku matematyki wyższej na język zrozumiały dla ucznia lub dla osoby, która nie zajmuje się zawodowo matematyką. A zatem, jak słusznie uważają Turnau (2003) i Żeromska (2012), konieczne jest wprowadzenie zmian w kształceniu przyszłych nauczycieli na studiach matematycznych. Powinno być ono ukierunkowane inaczej i zorientowane na inne cele niż kształcenie osób, które nie będą zawodowo zajmowały się nauczaniem. Nie wystarczy tutaj tylko zamieszczenie w planach studiów przedmiotów pedagogicznych i dydaktycznych – to ukierunkowanie powinno być widoczne w treściach i metodach nauczania stosowanych na wszystkich zajęciach, również w „czystej matematyki”.

Natomiast wielu czynnych nauczycieli matematyki, nawet jeśli ma kompetencje matematyczne i dydaktyczne na odpowiednim poziomie, to nie potrafi ich zintegrować. Tym samym nauczyciele ci nie posiadają odpowiednich kompetencji z dydaktyki matematyki. Jak wynika z badań, nie zawsze oni wiedzą jak organizować proces nauczania, aby rozwijać określone umiejętności uczniów. Często potrzebują wsparcia w zakresie metodyki nauczania tego przedmiotu. Jednak nie mogą to być zajęcia w formie wykładów, tylko warsztatów. Rozwiązywanie problemów

i dyskusja nad nimi ma większe znaczenie niż słuchanie i bierna obserwacja.

W szczególności, zarówno studenci, jak i czynni nauczyciele matematyki, napotkali trudności z doбором zadań, za pomocą których można kształtować wyobraźnię przestrzenną uczniów, a jej brak może być jednym z głównych powodów niepowodzeń w nauce geometrii. Wydaje się zatem istotne, aby inaczej organizować zajęcia z geometrii na studiach matematycznych, ponieważ dotychczasowe sposoby nauczania są mało skuteczne. Pewną propozycję kursu przedstawił Turnau (2003). Ponadto studenci na zajęciach uniwersyteckich oraz nauczyciele na kursach doskonalących powinni pracować nad takimi zadaniami, które z jednej strony będą rozwijać ich umiejętności geometryczne, z drugiej będą mogły być przez nich wykorzystane w pracy z uczniami.

Innym, zdiagnozowanym problemem jest to, że nauczyciele swoiście „specjalizują się” w nauczaniu na konkretnym etapie edukacyjnym. Na przykład niektórzy uczestniczący w badaniu nauczyciele matematyki uczący w szkole podstawowej napotkali duże trudności w zadaniu, w którym mieli wskazać, czy rozwiązując podane problemy matematyczne należy skorzystać z twierdzenia Pitagorasa, czy z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa. Problem ten jest istotny zwłaszcza teraz, w dobie zmian systemowych. Znacząca grupa nauczycieli, uczących obecnie w szkołach podstawowych nie jest przygotowana do nauczania matematyki uczniów 13–16 letnich; podobnie niektórzy nauczyciele uczący w gimnazjach nie posiadają odpowiednich umiejętności z dydaktyki matematyki, aby nauczać tego przedmiotu w klasach 4–6 szkoły podstawowej.

Literatura

- An, S., Kulm, G., Wu, Z.: 2004, The pedagogical content knowledge of middle school, mathematics teachers in China and the U. S., *Journal of Mathematics Teacher Education* **7**, 145–172.
- Ball, D. L., Thames, M. H., Phelps, G.: 2008, Content knowledge for teaching, *Journal of Teacher Education* **59**(5), 389–407.
- Banach, C.: 2004, Nauczyciel, w: T. Pilch (red.), *Encyklopedia pedagogiczna XXI wieku, t. III*, Wydawnictwo Akademickie „Żak”, Warszawa, 548–553.
- Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., Klusmann, U., Krauss, S., Neubrand, M., Tsai, Y.: 2010, Teachers’ mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom and student progress, *American Educational Research Journal* **47**(1), 133–180.
- CKE: 2015, Wyniki krajowe egzaminu gimnazjalnego w 2015 roku, https://www.cke.edu.pl/images/_EGZAMIN_GIMNAZJALNY/Informacje_o_wynikach/Sprawozdanie_z_egzaminu_gimnazjalnego_2015.pdf.
- CKE: 2016, Wyniki krajowe egzaminu gimnazjalnego w 2016 roku, https://www.cke.edu.pl/images/_EGZAMIN_GIMNAZJALNY/Informacje_o_wynikach/2016/Sprawozdanie%20z%20egzaminu%20gimnazjalnego_2016.pdf.
- Czajkowska, M.: 2013, Pomiar kompetencji nauczycieli matematyki, *Edukacja* **1**, 73–88.
- Czajkowska, M., Grochowalska, M., Orzechowska, M.: 2015, *Potrzeby nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej i nauczycieli matematyki w zakresie rozwoju zawodowego*, IBE, Warszawa.

<http://eduentuzjasci.pl/images/stories/publikacje/IBE-raport-potrzeby-nauczycieli-edukacji-wczesnoszkolnej-i-matematyki.pdf>.

- Czajkowska, M., Jasińska, A., Sitek, M.: 2010, *Kształcenie nauczycieli w Polsce. Wyniki międzynarodowego badania TEDS-M 2008*, Warszawa.
- Davis, B.: 2011, *Mathematics teachers' subtle, complex disciplinary knowledge*, Educationforum.
- <http://search.sciencemag.org/?q=Mathematics%20teachers%E2%80%9920subtle%2C%20complex%20>.
- de Lange Jzn, J.: 1986, Geometria dla wszystkich, czy w ogóle nie geometria?, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **6**, 43–82.
- Duval, R.: 1998, Geometry from a cognitive point of view, in: C. Mammana, V. Villani (ed.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, 37–52.
- Dylak, S.: 1995, *Wizualizacja w kształceniu nauczycieli*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań.
- Fennema, E., Franke, M.: 1992, Teachers' knowledge and its impact, in: D. A. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Macmillan Publishing, New York, 147–164.
- Fischbein, E.: 1987, *Intuition in Science and Mathematics: an educational approach*, Reidel, Dordrecht.
- Fujita, T., Jones, K., Yamamoto, S.: 2004, Geometrical Intuition and the Learning and Teaching of Geometry, *10th International Congress on Mathematical Education (ICME10), Topic Study Group 10 (TSG10) on Research and Development in the Teaching and Learning of Geometry*, Copenhagen, Denmark.
- http://eprints.soton.ac.uk/14687/1/Fujita_Jones_Yamamoto_ICME10_TSG10_2004.pdf.
- Grzęda, M.: 2009, *Nauczyciele matematyki w Polsce - raport z badania TEDS-M*, Instytut Filozofii i Socjologii PAN, Warszawa.
- http://www.ifispan.waw.pl/pliki/raport_z_badiana_nauczycieli.pdf.
- Hill, H. C., Schilling, S. G., Ball, D. L.: 2004, Developing measures of teachers' mathematics knowledge for teaching, *The Elementary School Journal* **105**(1), 11–30.
- Jones, K.: 1998, Deductive and Intuitive Approaches to Solving Geometrical Problems, in: C. Mammana, V. Villani (ed.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21 st Century*, Kluwer Academic Publisher Dordrecht, 78–83.
- Krauss, S., Brunner, M., Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M., Jordan, A.: 2008, Pedagogical content knowledge and content knowledge of secondary mathematics teachers, *Journal of Educational Psychology* **100**(3), 716–725.
- Niss, M.: 2003, Quantitative Literacy and Mathematical Competencies, w: B. L. Madison, L. A. Steen (red.), *Quantitative Literacy: Why Numeracy Matters for Schools and Colleges*, Proceedings of the National Forum on Quantitative Literacy, 215–220.
- https://www.maa.org/external_archive/QL/pgs215_220.pdf.
- Panek, D., Pardała, A.: 1999, Diagnozowanie wyobraźni przestrzennej uczniów i studentów, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **21**, 65–83.

- Shulman, L. S.: 1986, Those who understand: Knowledge growth in teaching, *Educational Researcher* **15**(2), 4–14.
- Shulman, L. S.: 1987, Knowledge and Teaching: Foundations for the new reform, *Harvard Educational Review* **57**(1), 1–22.
- Strykowski, W.: 2000, Kompetencje współczesnego nauczyciela, *Neodidagmata* **27**(28), 15–28.
- Szempruch, J.: 2000, *Pedagogiczne kształcenie nauczycieli wobec reformy edukacji w Polsce*, WSP, Rzeszów.
- Taraszkiewicz-Kotońska, M.: 2001, *Jak uczyć jeszcze lepiej! Szkoła pełna ludzi*, Wydawnictwo ARKA, Poznań.
- Tatto, M. T., Schwille, J., Senk, S., Ingvarson, L., Peck, R., Rowley, G.: 2008, Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M), Policy, practice, and readiness to teach primary and secondary mathematics. Conceptual framework, East Lansing, MI: Teacher Education and Development International Study Center, College of Education, Michigan State University.
https://teds.educ.msu.edu/20080206_TEDS-M_conceptual_framework.pdf.
- Turnau, S.: 2003, Kształcenie nauczycieli matematyki – u nas i gdzie indziej, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **25**, 231–240.
- Żeromska, A. K.: 2012, Kształcenie przyszłych nauczycieli matematyki – wyzwanie edukacyjne, *Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **IV**, 175–188.

Akademia Pedagogiki Specjalnej
im. Marii Grzegorzewskiej
ul. Szczęśliwicka 40
PL-02-353 Warszawa
e-mail: czajkowskamonika@gmail.com

Edyta Fidyk, Stanisław Siudut

Propozycja wyzwania twórczości matematycznej studentów przy pomocy pewnej nierówności funkcyjnej*

Abstract. T. Szostok and Sz. Wąsowicz in (Szostok, Wąsowicz, 2011) studied the following functional inequality: $|F(y) - F(x) - (y - x)f\left(\frac{x+y}{2}\right)| \leq \varepsilon$ stemming from the Lagrange mean value theorem. They proved that the function f is affine, provided $f, F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfy the above inequality for all $x, y \in \mathbb{R}$. The aim of our paper is to extend the results of (Szostok, Wąsowicz, 2011) to more general situations (for example, we change $\mathbb{R}$ to $\mathbb{C}$ or $\mathbb{H}$).

Tomasz Szostok i Szymon Wąsowicz w pracy (Szostok, Wąsowicz, 2011) rozważali następującą nierówność funkcyjną, wywodzącą się z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej

$$|F(y) - F(x) - (y - x)f\left(\frac{x + y}{2}\right)| \leq \varepsilon \quad (1)$$

dla funkcji $f, F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i udowodnili następujące twierdzenie (Szostok, Wąsowicz, 2011, Th. 3.2):

Jeżeli funkcje $f, F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniają (1) dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$, gdzie ε jest pewną liczbą dodatnią, to istnieją stałe $c, b \in \mathbb{R}$ takie, że $f(x) = cx + b$ ($x \in \mathbb{R}$).

Następujący lemat jest kluczowy w dowodzie powyższego twierdzenia Lemma 2.1 (zob. Szostok, Wąsowicz, 2011):

Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, $M > 0$. Jeżeli nierówność $|\Delta_h^2 f(x)| \leq \varepsilon$ jest spełniona dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$, $h > M$ to $|\Delta_h^2 f(x)| \leq 2\varepsilon$ dla wszystkich $x, h \in \mathbb{R}$.

Te i inne wyniki z artykułu (Szostok, Wąsowicz, 2011) nadają się bardzo dobrze do stymulowania twórczości matematycznej studentów. Postawiłem Pani Edycie Fidyk następujące zadanie: uzupełnić i uogólnić wyniki z pracy (Szostok, Wąsowicz, 2011) na przypadek funkcji zespolonych. Realizując to zadanie E. Fidyk

*Proposition of triggering of mathematical creativity of students by a functional inequality 2010 Mathematics Subject Classification: Primary: 39B82; Secondary: 39B62

Key words and phrases: nierówność funkcyjna, równanie funkcyjne, $\mathbb{H}$, algebra unormowana

w swojej pracy magisterskiej (2014) zauważyła najpierw, że w przypadku rzeczywistym, jeśli $h < 0$, to $|\Delta_h^2 f(x)| = |\Delta_{|h|}^2 f(x - 2|h|)|$. Dlatego założenie $h > M$ w powyższym lemacie można zastąpić założeniem $|h| > M$, tak zmieniony lemat jest równoważny lematowi wypisanemu powyżej.

Ta obserwacja pozwala na uogólnienie lematu 2.1 i twierdzenia 3.2 zawartych w artykule Szostok, Wąsowicz (2011) na funkcje określone w $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$ i przyjmujące wartości w $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$. Na przykład, jeżeli $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, to lematowi można nadać postać:

Niech $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$, $M > 0$. Jeżeli nierówność $|\Delta_h^2 f(x)| \leq \varepsilon$ jest spełniona dla wszystkich $x \in \mathbb{C}$ i h takich, że $|h| > M$ to $|\Delta_h^2 f(x)| \leq 2\varepsilon$ dla wszystkich $x, h \in \mathbb{C}$.

Lemat ten udowodniła Fidyk (2014) (dowód wykorzystuje własności modułu i jest zbliżony do dowodu lematu 2.1 z artykułu Szostok, Wąsowicz (2011)) i korzystając z niego wykazano następujące:

Twierdzenie 1 (Fidyk, 2014, Tw. 3.2')

Jeżeli funkcje $f, F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ spełniają nierówność (1) dla wszystkich $x, y \in \mathbb{C}$, gdzie ε jest pewną liczbą dodatnią, to istnieją stałe $c, b \in \mathbb{C}$ dla których $f(x) = cx + b$ ($x \in \mathbb{C}$).

W swojej pracy magisterskiej E. Fidyk wykazała dwa inne twierdzenia tego typu (2014, tw. 3.2" i tw. 3.2"'), które można wypowiedzieć następująco:

Twierdzenie 2

Jeżeli funkcje $f, F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniają nierówność (1) dla wszystkich $x, y \in \mathbb{C}$, gdzie ε jest pewną liczbą dodatnią, to f jest funkcją stałą.

Twierdzenie 3

Jeżeli funkcje $f, F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ spełniają nierówność (1) dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$, gdzie ε jest pewną liczbą dodatnią, to istnieją stałe $c, b \in \mathbb{C}$ dla których $f(x) = cx + b$ ($x \in \mathbb{R}$).

Korzystając z tak uogólnionych wyników E. Fidyk wyciągnęła wnioski dla równania funkcyjnego $F(y) - F(x) = (y - x)f\left(\frac{x+y}{2}\right)$. Przypomnijmy, że J. Aczèl (1985) wykazał, że jeżeli $\mathbb{K}$ jest ciałem o charakterystyce różnej od 2, to ogólnymi rozwiązaniami równania $\frac{f(x)-g(y)}{x-y} = h(x+y)$ ($x \neq y$, $f, g, h : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$) są funkcje $f(x) = g(x) = ax^2 + bx + c$, $h(x) = ax + b$, gdzie a, b, c są dowolnymi stałymi z ciała $\mathbb{K}$. Stąd wynika, że wszystkie rozwiązania $f, F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ równania:

$$F(y) - F(x) = (y - x)f\left(\frac{x+y}{2}\right) \quad (2)$$

są postaci: $F(t) = at^2 + bt + c$, $f(t) = 2at + b$, gdzie a, b, c są stałymi rzeczywistymi.

E. Fidyk osiągnęła ten wynik inną metodą niż J. Aczèl - zauważyła, że twierdzenia 1, 2, 3 pozwalają w pełni opisać rozwiązania równania (2) dla funkcji określonych na $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$ z wartościami w $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$. Dla przykładu, rozważmy równanie (2) dla funkcji zespolonych F, f określonych na $\mathbb{C}$.

Jeśli funkcje $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ spełniają to równanie, to oczywiście $|F(y) - F(x) - (y-x)f\left(\frac{x+y}{2}\right)| \leq \varepsilon$ dla każdego $\varepsilon > 0$. Stąd i z twierdzenia 1 $f(x) = cx + b$, dlatego (2) przyjmuje postać:

$$F(y) - F(x) = (y-x) \left(c \cdot \frac{x+y}{2} + b \right)$$

Po podstawieniu $x = 0$ otrzymujemy $F(y) = \frac{1}{2}cy^2 + by + F(0)$ i dla $\alpha = \frac{1}{2}c, \beta = b, \gamma = F(0)$ mamy $F(y) = \alpha y^2 + \beta y + \gamma$, $f(y) = 2\alpha y + \beta$.

Rozumując, podobnie z wykorzystaniem twierdzenia 2 dochodzimy do wniosku, że funkcje $f, F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające (2) muszą być stałe.

Zaprezentowane wyżej wyniki Fidyk zachęciły do dalszego badania nierówności (1) i pewnych uogólnień tej nierówności. Najpierw zaobserwowałem, że kluczowy lemat jest prawdziwy dla funkcji $F, f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, gdzie $\mathbb{H}$ oznacza algebrę kwaternionów, a mianowicie:

Niech $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, $\varepsilon > 0$, $M > 0$. Jeżeli nierówność $|\Delta_h^2 f(x)| \leq \varepsilon$ jest spełniona dla wszystkich $x \in \mathbb{H}$ i h takich, że $|h| > M$ to $|\Delta_h^2 f(x)| \leq 2\varepsilon$ dla wszystkich $x, h \in \mathbb{H}$.

Podobnie jak w pracy Szostoka i Wąsowicza oraz w pracy magisterskiej Fidyk (2014) można udowodnić następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE 4

Jeżeli funkcje $f, F : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ spełniają nierówność (1) dla wszystkich $x, y \in \mathbb{H}$, gdzie ε jest pewną liczbą dodatnią, to istnieją stałe $c, b \in \mathbb{H}$ dla których $f(x) = xc + b$ ($x \in \mathbb{H}$).

Dowód. Istotnie, dochodząc w dowodzie do równości $y \cdot a(x) = x \cdot a(y)$ ($x, y \in \mathbb{H}$), gdzie $a : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ jest funkcją addytywną i podstawiając $y = 1$ mamy $a(x) = x \cdot c$, gdzie $c = a(1)$. Ponieważ $f(x) = a(x) + b$, to musi być $f(x) = x \cdot c + b$.

Podobne twierdzenia można otrzymać gdy: $f, F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$, $f, F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H}$, $f, F : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$, $f, F : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$. Teraz wykażę, że twierdzenie 4 można wzmocnić następująco.

TWIERDZENIE 5

Założmy, że $\varepsilon > 0$, $f, F : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ i spełniona jest następująca nierówność

$$|F(y) - F(x) - (y-x)f\left(\frac{x+y}{2}\right)| \leq \varepsilon \quad (x, y \in \mathbb{H}) \quad (3)$$

Wówczas istnieje $b \in \mathbb{H}$ takie, że $f(x) = b$.

Z twierdzenia 4 $f(u) = u \cdot c + b$. Po podstawieniu nx w miejsce x , ny w miejsce y w (3) otrzymujemy:

$$\left| F(ny) - F(nx) - (ny - nx) \left(\frac{nx + ny}{2} \cdot c + b \right) \right| \leq \varepsilon,$$

$$\left| \frac{F(ny) - F(nx)}{n^2} - \frac{1}{2} (y-x)(x+y) \cdot c + \frac{(y-x) \cdot b}{n} \right| \leq \frac{\varepsilon}{n^2}.$$

Stąd $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{F(ny)}{n^2} - \frac{F(nx)}{n^2} \right) = \frac{1}{2} (y - x) (y + x) \cdot c$. Gdy $x = 0$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(ny)}{n^2} = \frac{1}{2} y^2 c$, podobnie gdy $y = 0$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(nx)}{n^2} = \frac{1}{2} x^2 c$.

Mamy więc:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{F(ny)}{n^2} - \frac{F(nx)}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(ny)}{n^2} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(nx)}{n^2} = \frac{1}{2} y^2 c - \frac{1}{2} x^2 c,$$

a wiemy już, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{F(ny)}{n^2} - \frac{F(nx)}{n^2} \right) = \frac{1}{2} (y - x) (y + x) \cdot c$ i dlatego $\frac{1}{2} (y - x) (y + x) \cdot c = \frac{1}{2} y^2 c - \frac{1}{2} x^2 c$, a stąd

$$y^2 c + yx \cdot c - xy \cdot c - x^2 c = y^2 c - x^2 c,$$

$$yx \cdot c - xy \cdot c = 0,$$

$$yx \cdot c = xy \cdot c.$$

Gdyby było $c \neq 0$, to byłyby $yx = xy$ dla każdych $x, y \in \mathbb{H}$, co jest sprzeczne z nieprzemiennością mnożenia w $\mathbb{H}$.

Uwaga 1. Funkcja G określona wzorem $G(x) = x \cdot b$ spełnia równanie $G(y) - G(x) - (y - x) f\left(\frac{x+y}{2}\right) = 0$, oraz $|F(x) - F(0) - x \cdot b| \leq \varepsilon$ dla każdego $x \in \mathbb{H}$.

Wniosek 1. Jeżeli $f, F : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ spełniają równanie

$$F(y) - F(x) = (y - x) f\left(\frac{x + y}{2}\right) \quad (x, y \in \mathbb{H}) \quad (4)$$

to istnieje stała $b \in \mathbb{H}$ taka, że $f(x) = b$, a ponadto $F(x) = xb + c$ dla pewnego $c \in \mathbb{H}$.

Uwaga 2. Funkcje $f, F : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ postaci $F(x) = xb + c$, $f(x) = b$ dla pewnych $b, c \in \mathbb{H}$, spełniają równanie

$$F(y) - F(x) = (y - x) f\left(\frac{x + y}{2}\right) \quad (x, y \in \mathbb{H}).$$

Ważnym środkiem dowodowym wymienionym przez Szostok i Wąsowicz (2011) (powtórzonym później w innej sytuacji przez Fidyk (2014)) była możliwość wyeliminowania - po pewnych przekształceniach - funkcji F z nierówności (1), co pozwoliło wykorzystać kluczowy lemat w nowo otrzymanej nierówności. Warto zauważyć, że metodę eliminacji funkcji F użytą przez Szostoka i Wąsowicza (2011) można zastosować w wielu innych sytuacjach (zob. np. Tomasz Szostok, Functional equations stemming from numerical analysis, Dissertationes Math. 508 (2015)). Pokażę dalej, że można wyeliminować funkcje F, G w przypadku spexideryzowanej wersji nierówności (1).

LEMAT 1

Jeżeli $f, F, G : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$, gdzie $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$, $\varepsilon > 0$ oraz

$$|F(y) - G(x) - (y - x) f\left(\frac{x + y}{2}\right)| \leq \varepsilon \quad (x, y \in \mathbb{K}) \quad (5)$$

to $|h\Delta_h^2 f(x)| \leq 2\varepsilon$ dla każdego $h \in \mathbb{K}$.

Dowód. Podstawiając w (5) $y = x + h$ otrzymujemy:

$$\left| F(x+h) - G(x) - h \cdot f\left(x + \frac{1}{2}h\right) \right| \leq \varepsilon, \quad (6)$$

teraz podstawiając w powyższej nierówności $x + h$ zamiast x otrzymujemy:

$$\left| F(x+2h) - G(x+h) - h \cdot f\left(x + \frac{3}{2}h\right) \right| \leq \varepsilon, \quad (7)$$

z (6) i (7):

$$\begin{aligned} & |F(x+2h) - G(x+h) + F(x+h) - G(x) - \\ & h \left[f\left(x + \frac{3}{2}h\right) + f\left(x + \frac{1}{2}h\right) \right]| \leq 2\varepsilon. \end{aligned} \quad (8)$$

Podstawiając w (5) $y = x + 2h$ otrzymujemy:

$$|F(x+2h) - G(x) - 2h \cdot f(x+h)| \leq \varepsilon, \quad (9)$$

z (8) i (9) (mnożąc (9) pod modułem przez -1 i z nierówności trójkąta) otrzymujemy:

$$\left| -G(x+h) + F(x+h) + h[2f(x+h) - f\left(x + \frac{3}{2}h\right) - f\left(x + \frac{1}{2}h\right)] \right| \leq 3\varepsilon, \quad (10)$$

ale z (5), po podstawieniu $x + h$ zamiast y , $x + h$ zamiast x mamy:

$$|F(x+h) - G(x+h)| \leq \varepsilon. \quad (11)$$

Z (10), (11) (mnożąc (11) pod modułem przez -1 i z nierówności trójkąta) otrzymujemy:

$$\left| h[2f(x+h) - f\left(x + \frac{3}{2}h\right) - f\left(x + \frac{1}{2}h\right)] \right| \leq 4\varepsilon, \quad (12)$$

po podstawieniu $2h$ zamiast h otrzymujemy:

$$|2h[2f(x+2h) - f(x+3h) - f(x+h)]| \leq 4\varepsilon. \quad (13)$$

Stąd dzieląc przez 2 i podstawiając x w miejsce $x + h$ otrzymujemy:

$$|h[2f(x+h) - f(x+2h) - f(x)]| \leq 2\varepsilon, \quad (14)$$

mnożąc (14) pod modułem przez -1 otrzymujemy:

$$|h[f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)]| \leq 2\varepsilon,$$

zatem: $|h\Delta_h^2 f(x)| \leq 2\varepsilon$.

Wniosek 2. Jeżeli $\varepsilon > 0$, $f, F, G : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$, gdzie $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ spełniają nierówność

$$|F(y) - G(x) - (y-x)f\left(\frac{x+y}{2}\right)| \leq \varepsilon \quad (x, y \in \mathbb{K}) \quad (5)$$

to istnieją $c, b \in \mathbb{K}$ takie, że $f(x) = x \cdot c + b$, $x \in \mathbb{K}$. Ponadto w przypadku $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ musi być $c = 0$.

W dowodzie tego wniosku wykorzystamy wniosek 2.2' (Fidyk, 2014):

„Wniosek 2.2'. Jeśli dla pewnego $\varepsilon > 0$ $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ spełnia nierówność $|h\Delta_h^2 f(x)| \leq \varepsilon$ dla wszystkich $x, h \in \mathbb{C}$, to istnieją funkcja addytywna $a : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ i stała $b \in \mathbb{C}$ takie, że $f(x) = a(x) + b$ ($x \in \mathbb{C}$)”.

Dowód wniosku 2. Z poprzedniego lematu $|h\Delta_h^2 f(x)| \leq 2\varepsilon$ dla każdego $h, x \in \mathbb{K}$. Z wniosku 2,2' (Fidyk, 2014) (który pozostaje prawdziwy również w sytuacji $\mathbb{K} = \mathbb{H}$), istnieje funkcja addytywna $a : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ oraz $b \in \mathbb{K}$ takie, że

$$f(x) = a(x) + b, \quad x \in \mathbb{K}. \quad (15)$$

Z (5) podstawiając $y = 0$ mamy:

$$\left| F(0) - G(x) + xf\left(\frac{x}{2}\right) \right| \leq \varepsilon. \quad (16)$$

Z (5) podstawiając $x = 0$ mamy:

$$\left| F(y) - G(0) - yf\left(\frac{y}{2}\right) \right| \leq \varepsilon. \quad (17)$$

Z (5), (16), (17) otrzymujemy

$$\left| F(0) - G(0) + xf\left(\frac{x}{2}\right) - yf\left(\frac{y}{2}\right) + (y-x)f\left(\frac{x+y}{2}\right) \right| \leq 3\varepsilon,$$

stąd i z postaci f (patrz (15)):

$$\begin{aligned} & \left| F(0) - G(0) + xa\left(\frac{x}{2}\right) + xb - ya\left(\frac{y}{2}\right) - yb + (y-x)\left(a\left(\frac{x+y}{2}\right) + b\right) \right| \leq 3\varepsilon, \\ & \left| F(0) - G(0) + \frac{1}{2}x \cdot a(x) - \frac{1}{2}y \cdot a(y) + \frac{1}{2}y \cdot a(x) + \frac{1}{2}y \cdot a(y) - \frac{1}{2}x \cdot a(x) - \frac{1}{2}x \cdot a(y) \right| \\ & \leq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Zatem:

$$\left| F(0) - G(0) + \frac{1}{2}y \cdot a(x) - \frac{1}{2}x \cdot a(y) \right| \leq 3\varepsilon. \quad (18)$$

Podstawiając w (18) nx w miejsce x , ny w miejsce y otrzymujemy:

$$\left| F(0) - G(0) + \frac{1}{2}n^2y \cdot a(x) - \frac{1}{2}n^2x \cdot a(y) \right| \leq 3\varepsilon,$$

a stąd:

$$\left| 2\frac{F(0) - G(0)}{n^2} + y \cdot a(x) - x \cdot a(y) \right| \leq \frac{6\varepsilon}{n^2}.$$

Po przejściu do granicy przy $n \rightarrow \infty$:

$$y \cdot a(x) = x \cdot a(y). \quad (19)$$

Zatem dla $y = 1$ otrzymujemy: $a(x) = x \cdot c$, gdzie $c = a(1)$. Pozostaje wykazać, że dla $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ musi być $c = 0$. Gdyby było $c \neq 0$, to z (19) byłoby: $y \cdot x \cdot c = x \cdot y \cdot c$ ($x, y \in \mathbb{H}$), czyli $y \cdot x = x \cdot y$ dla każdych $x, y \in \mathbb{H}$ – sprzeczność. Z (15) mamy $f(x) = a(x) + b = x \cdot c + b$ dla pewnych $c, b \in \mathbb{K}$. Zatem $f(x) = x \cdot c + b$ ($x \in \mathbb{K}$) dla pewnych $c, b \in \mathbb{K}$. Przy czym dla $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ musi być $c = 0$.

Wniosek 3. Przy założeniach poprzedniego wniosku, jeżeli funkcje f, F, G spełniają nierówność (5), to:

$f(x) = x \cdot c + b$ dla pewnych $c, b \in \mathbb{K}$, z tym, że dla $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ musi być $c = 0$,

$$|F(x) - G(0) - \frac{1}{2}x^2c - xb| \leq \varepsilon \quad (x \in \mathbb{K}),$$

$$|G(x) - F(0) - \frac{1}{2}x^2c - xb| \leq \varepsilon \quad (x \in \mathbb{K}).$$

Z powyższych nierówności $|F(0) - G(0)| \leq \varepsilon$ oraz $|F(x) - G(x) + (F(0) - G(0))| \leq 2\varepsilon$.

Niech $\mathbf{F}$ będzie ciałem o charakterystyce różnej od 2 lub algebrą unormowaną z jedyneką. Jung i Sahoo (2000) zajmowali się stabilnością równania funkcyjnego

$$f(x) - g(y) = (x - y) \cdot h(x + y),$$

gdzie $f, g, h : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}$. W dowodzie twierdzenia 2 jest usterka – autorzy skorzystali z przemienności mnożenia w $\mathbf{F}$, a algebra unormowana nie musi być przemienna (zob. Jung, Sahoo, 2000, s. 795, $w_{15} - w_6$) – usterka jest jednak łatwa do skorygowania, wystarczy pisać w iloczynach współczynniki na drugim miejscu (np. xa, x^2a, xb zamiast ax, ax^2, bx).

Wniosek 3 wynikający z pracy Junga i Sahoo (2000) jest zatem – w takiej postaci w jakiej wspomniani autorzy go wpisali – słuszny dla przemiennych algebr unormowanych z jedyneką, a po wyżej opisanej zmianie kolejności czynników jest słuszny dla wszystkich algebr unormowanych z jedyneką. Wniosek ten dla algebr unormowanych z jedyneką można znacznie wzmocnić, stosując opisaną wcześniej w dowodzie lematu 1 metodę eliminacji dwóch funkcji (bez pośrednictwa twierdzenia 2 (Jung, Sahoo, 2000)). Wzmocniona wersja ma następującą postać:

Jeżeli $\mathbf{F}$ jest algebrą unormowaną z jedyneką oraz funkcje $f, g, h : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}$ spełniają nierówność

$$\|f(x) - g(y) - (x - y) \cdot h(x + y)\| \leq \varepsilon \quad (x, y \in \mathbf{F}),$$

to istnieją stałe $a, b, c, d \in \mathbf{F}$ z $\|c - d\| \leq \varepsilon$ takie, że:

$$\|f(x) - x^2a - xb - c\| \leq \varepsilon,$$

$$\|g(x) - x^2a - xb - d\| \leq \varepsilon,$$

$$h(x) = xa + b$$

dla wszystkich $x \in \mathbf{F}$.

Obserwacja ta sugeruje możliwość przeniesienia wyników opisanych wcześniej na funkcje określone na algebrze unormowanej z jedyneką i przyjmujące wartości

w tej algebrze. Wypisanie stosownych uogólnień i sprawdzenie wszystkich szczegółów dowodowych jest dobrą zachętą do twórczości matematycznej studentów wyższych roczników studiów matematyki.

Literatura

- Aczèl, J.: 1985, A mean value property of the derivative of quadratic polynomials - without mean values and derivatives, *Math. Mag.* **58**(1), 42–45.
- Fidyk, E.: 2014, *O stabilności pewnego równania funkcyjnego związanego z twierdzeniem lagrange’a*, Praca magisterska, Instytut Matematyki Uniwersytetu Pedagogicznego w Krakowie, Kraków.
- Jung, S., Sahoo, P.: 2000, On the stability of a mean value type functional equation, *Demonstr. Math.* **XXXIII**(4), 793–796.
- Szostok, T., Wąsowicz, S.: 2011, On the stability of the equation stemming from Lagrange MVT, *Appl. Math. Lett.* **24**, 541–544.

*Instytut Matematyki
Uniwersytet Pedagogiczny
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
e-mail edyta.fidyk@onet.com.pl,
e-mail siudut@up.krakow.pl*

Jan Górowski, Adam Łomnicki

O pewnej implikacji*

Abstract. The purpose of this paper is to show how the process of proving a theorem in different ways or proving generalized versions of the theorem, after learning one its proofs, influences the development of the skills of proving theorems and analysing proofs by the students of mathematics. To illustrate this process we use an elementary theorem about numbers and its generalizations, giving fourteen proofs. Proving theorems we use methods and facts which are available to high school students.

1. O pewnej implikacji

W ostatnich latach w kilku poważniejszych materiałach, kierowanych do nauczycieli matematyki z gimnazjów i szkół ponadgimnazjalnych (Guzicki, 2013), znaleźć można wiele argumentów za tym, że należy uczyć dowodzenia twierdzeń, uczyć analizowania dowodów (trudnych do odkrycia czy tylko zrozumienia, a przecież znanych od setek, a nawet tysięcy lat). Dydaktycy matematyki zawsze podkreślali rozliczne wartości tego celu nauczania matematyki, ale był on bardzo skromnie artykułowany w podstawach programowych tego przedmiotu i programach nauczania, bo „budził strach” u uczniów (a może i nauczycieli).

Zadań problemowych było i jest bardzo mało w większości podręczników i zbiorów zadań. Z naszych doświadczeń nauczycielskich wynika, że dostrzeganie problemów, stawianie hipotez jest aktywnością matematyczną dostępną nawet dla przeciętnie uzdolnionego matematycznie ucznia. Jak pięknie pisze Jarosław Górnicki na okładce książki „Okrucy matematyki”: „Sztuką jest mówić o matematyce w sposób zrozumiały. Sztuką jest dostrzec niebanalny problem. Sztuką jest go rozwiązać „elementarnie” (Górnicki, 1995). Historia matematyki pokazuje, że po postawieniu problemu, po sformułowaniu hipotezy, upływało zwykle kilka (kilkanaście, kilkaset) lat do jej rozstrzygnięcia. Pojawiało się twierdzenie, jego dowód, a nieraz kilka dowodów w różnych częściach świata. Nie martwmy się więc, że nasi

*On some implication

2010 Mathematics Subject Classification: Primary: 39B27, Secondary: 12J15

Key words and phrases: homographic function, inequality

uczniowie z pokorą pochylać się będą nad zadaniami problemowymi, nad zadaniami „na dowodzenie” i „z marszu” nie znajdą rozwiązania.

Bardzo cenne dla wzbogacenia wiedzy i rozwoju umiejętności matematycznych jest analizowanie różnych dowodów tego samego twierdzenia, znanych z literatury (też z Internetu). Przemysłanych materiałów dydaktycznych, ułatwiających realizowanie tego celu nauczania, właściwie nie ma w podręcznikach szkolnych, a nauczyciele - pasjonaci - muszą sami ich szukać (Górowski, Łomnicki, 2012, Kourliandtchik, 2002). Piszemy szukać, bo jeden nauczyciel (matematyk) w krótkim czasie różnych dowodów nie wymyśli. Autor jednego dowodu na ogół nie może się od niego oderwać, dopóki go nie zapomni. A sztuka szybkiego zapominania czeka jeszcze na jej odkrycie. Czasem kilkanaście elementarnych dowodów jednego twierdzenia uzyskiwali dydaktycy matematyki na jakiejś konferencji, prosząc kolegów, by w wolnym czasie zajęli się znalezieniem rozwiązania (rozwiązań) zaproponowanego problemu.

W tym artykule chcieliśmy dać materiał do analizowania różnych dróg rozumowania, do analizowania tekstu matematycznego, do analizowania, które prowadzi też do odkrycia twierdzeń. Materiał ten mógłby być - naszym zdaniem - wykorzystywany w procesie kształcenia przyszłych nauczycieli matematyki, a nawet w szkołach niższych szczebli.

W czasopiśmie *Matematyka* w kilku artykułach (Bednarek, 2006, Janowicz, 2006) zamieszczono trzy dowody implikacji:

$$\frac{a}{b+c+d} > 1 \wedge \frac{d}{b+c+a} > 1 \implies \frac{a+d}{b+c} < 0, \quad (1)$$

(gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $b+c+d \neq 0$, $b+c+a \neq 0$, $b+c \neq 0$)

oraz wyrażono nadzieję, że uda się znaleźć prostsze jej uzasadnienie.

W tym artykule podamy kilkanaście innych dowodów implikacji (1).

Przyjmijmy oznaczenie $x := b+c$. Przy nim implikacja (1) jest równoważna implikacji

$$\frac{a}{x+d} > 1 \wedge \frac{d}{x+a} > 1 \implies (a+d)x < 0. \quad (2)$$

W implikacji (2) i w całym artykule pominęliśmy oczywiste założenie, że wyrażenia występujące w tekście mają sens.

Wykażemy najpierw

LEMAT 1

Jeżeli $\frac{a}{x+d} > 1$ i $\frac{d}{x+a} > 1$, to $ad > 0$.

Z założeń wynika, że $a \neq 0$ i $d \neq 0$, więc i $ad \neq 0$.

Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że $ad < 0$. Stąd

$$(a > 0 \text{ i } d < 0) \text{ lub } (a < 0 \text{ i } d > 0).$$

Gdy $a > 0$ i $d < 0$, to $x+d > 0$ (bo $\frac{a}{x+d} > 1$), zatem

$$x > -d, \quad x > 0, \quad x+a > 0,$$

a skoro

$$\frac{d}{x+a} > 1,$$

to

$$d > 0.$$

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że przypadek $a > 0$ i $d < 0$ zajść nie może. Z „symetrii” założeń wnioskujemy, że przypadek $a < 0$ i $d > 0$ też nie może zajść. Tym samym dowód lematu 1 został zakończony.

Przedstawimy teraz kilkanaście dowodów implikacji (2) (jak zaznaczyliśmy równoważnej implikacji (1)), czyli w istocie dowodów następującego twierdzenia:

TWIERDZENIE 1

Jeżeli $a, b, x \in \mathbb{R}$, $x + a \neq 0$, $x + d \neq 0$ oraz $\frac{a}{x+d} > 1$ i $\frac{d}{x+a} > 1$, to $(a + d)x < 0$.

W dowodach (I) - (XIII) będziemy korzystali z lematu 1.

Dowód (I). W przypadku $a > 0$ i $d > 0$ oczywiście $a + d > 0$, a z założenia $\frac{a}{x+d} > 1$ i $\frac{d}{x+a} > 1$ dostajemy $x + d > 0$, $x + a > 0$, $x + d < a$ i $x + a < d$. Stąd $x < a - d$ i $x < d - a$ oraz $2x < 0$, $x < 0$, zatem ostatecznie $(a + d)x < 0$.

W przypadku $a < 0$ i $d < 0$ z założenia $\frac{a}{x+d} > 1$ i $\frac{d}{x+a} > 1$ otrzymujemy $x + d < 0$, $x + a < 0$, $a < x + d$ i $d < x + a$. Stąd $x > a - d$ i $x > d - a$, więc $x > 0$, zatem ostatecznie $(a + d)x < 0$.

To kończy dowód twierdzenia 1.

Dowód (II). Przypuśćmy, że $(a + d)x \geq 0$. Z założenia $\frac{a}{x+d} > 1$ i $\frac{d}{x+a} > 1$ otrzymujemy kolejno

$$\frac{ad}{(x+d)(x+a)} > 1, \quad \frac{ad}{x^2 + (a+d)x + ad} > 1.$$

Ale $(a + d)x \geq 0$ i $ad > 0$, więc

$$\frac{ad}{x^2 + (a+d)x + ad} \leq 1.$$

Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

Dowód (III). Z założenia $\frac{a}{x+d} > 1$ i $\frac{d}{x+a} > 1$ dostajemy $\frac{ad}{x^2 + (a+d)x + ad} > 1$. Ale $ad > 0$ (z lematu 1) i $x^2 + ad \geq ad$, więc skoro $\frac{ad}{x^2 + (a+d)x + ad} > 1$, to $(a + d)x < 0$.

Dowód (IV). W przypadku $a > 0$ i $d > 0$ oczywiście $a + d > 0$, a z założenia $\frac{a}{x+d} > 1$ i $\frac{d}{x+a} > 1$ dostajemy $a > x + d > 0$ oraz $d > x + a > 0$. Stąd $a > x + d > x + (x + a)$, więc $x < 0$ i ostatecznie $(a + d)x < 0$.

W przypadku $a < 0$ i $d < 0$ z założenia $\frac{a}{x+d} > 1$ i $\frac{d}{x+a} > 1$ dostajemy $a < x + d < 0$ oraz $d < x + a < 0$. Stąd $a < x + d < x + (x + a)$, więc $0 < x$ i ostatecznie $(a + d)x < 0$.

Dowód (V). Z założenia $\frac{a}{x+d} > 1$ i $\frac{d}{x+a} > 1$ otrzymujemy $0 < \frac{x+d}{a} < 1$ i $0 < \frac{x+a}{d} < 1$, a stąd kolejno

$$0 < \frac{x+d}{a} + \frac{x+a}{d} < 2,$$

$$\frac{x}{a} + \frac{d}{a} + \frac{x}{d} + \frac{a}{d} < 2,$$

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{d} < 2 - \left(\frac{a}{d} + \frac{d}{a} \right).$$

Ponieważ $\lambda + \frac{1}{\lambda} \geq 2$ dla $\lambda > 0$ i $\frac{a}{d} > 0$ (to też z lematu 1), to $\frac{x}{a} + \frac{x}{d} < 0$ i $(\frac{x}{a} + \frac{x}{d})ad < 0$. Stąd $(a+d)x < 0$.

Dowód (VI). Z założenia $\frac{a}{x+d} > 1$ i $\frac{d}{x+a} > 1$ dostajemy kolejno:

$$0 < \frac{x+d}{a} < 1 \text{ i } 0 < \frac{x+a}{d} < 1, \frac{x}{a} < \frac{a-d}{a} \text{ i } \frac{x}{d} < \frac{d-a}{d},$$

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{d} < \frac{a-d}{a} + \frac{d-a}{d}, \frac{x}{a} + \frac{x}{d} < \frac{-(a-d)^2}{ad}.$$

Ale $ad > 0$, więc dalej $\frac{x}{a} + \frac{x}{d} < 0$, stąd ostatecznie $(a+d)x < 0$.

Dowód (VII). Z założenia $\frac{a}{x+d} > 1$ i $\frac{d}{x+a} > 1$ otrzymujemy $0 < \frac{x+d}{a} < 1$ i $0 < \frac{x+a}{d} < 1$. Stąd $\frac{(x+d)(x+a)}{ad} < 1$, ale $ad > 0$, zatem $x^2 + (a+d)x < 0$, więc $(a+d)x < 0$.

Dowód (VIII). Z założenia $\frac{a}{x+d} > 1$ i $\frac{d}{x+a} > 1$ dostajemy kolejno:

$$0 < \frac{x+d}{a} < 1 \text{ i } 0 < \frac{x+a}{d} < 1, \frac{\frac{x+d}{a} + \frac{x+a}{d}}{2} < 1,$$

$$\frac{(a+d)x + a^2 + d^2}{2ad} < 1, \frac{(a+d)x + (a-d)^2}{2ad} < 0,$$

ale $ad > 0$, więc $(a+d)x < 0$.

Dowód (IX). Z założenia $\frac{a}{x+d} > 1$ i $\frac{d}{x+a} > 1$ otrzymujemy

$$\frac{x+d}{a} + \frac{x+a}{d} < 2$$

stąd

$$\frac{(a+d)x + (a-d)^2}{ad} < 0.$$

Zatem ostatecznie $(a+d)x < 0$.

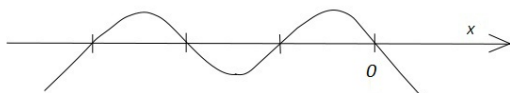
Dowód (X). Z założenia $\frac{a}{x+d} > 1$ i $\frac{d}{x+a} > 1$ dostajemy kolejno:

$$\frac{ad}{(x+d)(x+a)} > 1, \frac{ad - (x+d)(x+a)}{(x+d)(x+a)} > 0,$$

$$\frac{-x^2 - (a+d)x}{(x+d)(x+a)} > 0, -x(x+a+d)(x+a)(x+d) > 0.$$

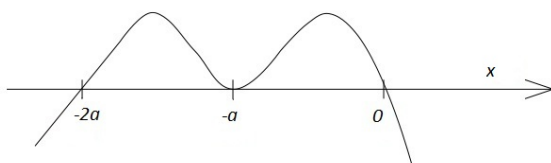
Potraktujmy ostatni warunek jako nierówność o niewiadomej x ; zbiór jej rozwiązań odczytamy ze schematu graficznego.

Gdy $a > 0, d > 0$ i $a \neq d$ ten schemat jest przedstawiony na rysunku 1.



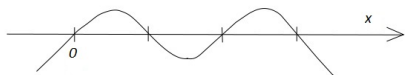
Rys. 1

Gdy $a > 0, d > 0$ i $a = d$ ten schemat jest przedstawiony na rysunku 2.

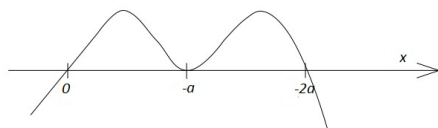


Rys. 2

Pozostałe dwa przypadki (schematy) $a < 0, d < 0$ i $a \neq d$ oraz $a < 0, d < 0$ i $a = d$ przedstawione są na rysunkach 3 i 4.



Rys. 3



Rys. 4

Te cztery sytuacje wyczerpują wszystkie możliwości. Zauważamy, że w każdej z rozważonych sytuacji $(a+d)x < 0$.

Dowód (XI). Określmy funkcje homograficzne h_1, h_2 wzorami:

$$h_1(x) = \frac{-x + a - d}{x + d}, h_2(x) = \frac{-x + d - a}{x + a}.$$

Zauważmy, że układ założeń

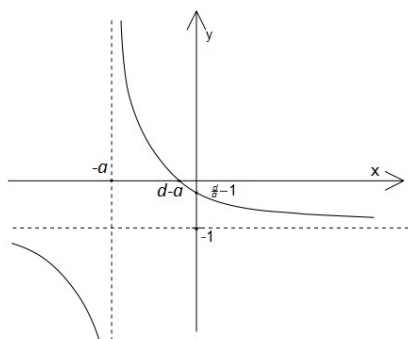
$$\frac{a}{x+d} > 1 \text{ i } \frac{d}{x+a} > 1$$

jest równoważny układowi warunków

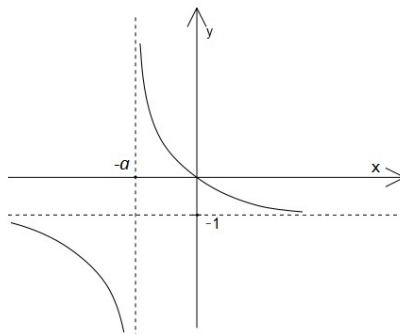
$$h_1(x) > 0 \text{ i } h_2(x) > 0.$$

Z lematu 1 wynika, że a i d są tych samych znaków. Nie zmniejszając ogólności rozumowania można przyjąć, że $a \geq d$.

Gdy $a > 0$ i $d > 0$, to szkic wykresu funkcji homograficznej h_2 jest następujący (rys. 5 dla $a \neq d$; rys. 6 dla $a = d$).



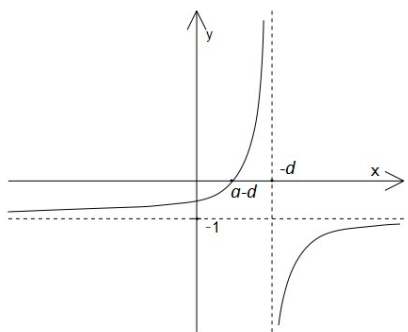
Rys. 5



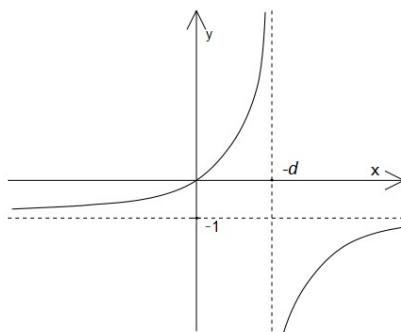
Rys. 6

Z założenia $h_2(x) > 0$ wynika, że $x < 0$, a stąd $(a + d)x < 0$ (ponieważ $a + d > 0$).

Gdy $a < 0$ i $d < 0$, to szkic wykresu funkcji homograficznej h_1 jest następujący (rys. 7 dla $d \neq a$; rys. 8 dla $d = a$):



Rys. 7



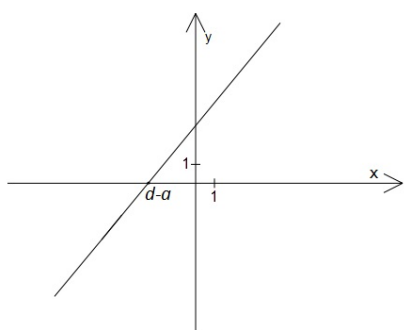
Rys. 8

Z założenia $h_1(x) > 0$ wynika, że $x > 0$, a stąd $(a + d)x < 0$ (ponieważ $a + d < 0$). To kończy dowód twierdzenia 1.

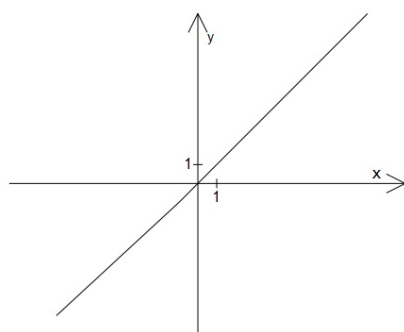
Dowód (XII). Określmy funkcje f i g wzorami $f(x) = \frac{x+a-d}{d}$, $g(x) = \frac{x+d-a}{a}$. Zauważmy, że układ założeń $\frac{d}{x+a} > 1$ i $\frac{a}{x+d} > 1$ jest równoważny układowi warunków $-1 < f(x) < 0$ i $-1 < g(x) < 0$.

Z lematu 1 wynika, że a i d są tych samych znaków. Ze względu na „symetrię” założeń, nie zmniejszając ogólności rozumowania, można przyjąć, że $a \geq d$.

Gdy $a > 0$ i $d > 0$, to szkic wykresu funkcji f jest następujący (rys. 9 dla $d \neq a$; rys. 10 dla $d = a$):

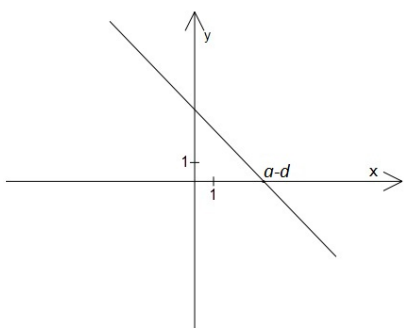


Rys. 9

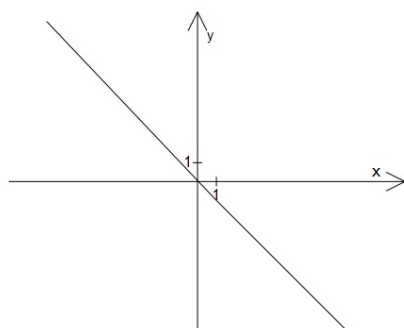


Rys. 10

Z założenia $f(x) < 0$ wynika, że $x < 0$, a stąd $(a+d)x < 0$ (ponieważ $a+d > 0$). Gdy $a < 0$ i $d < 0$, to szkic wykresu funkcji g przedstawiają rysunki 11 i 12 (rys. 11 dla $a \neq d$; rys. 12 dla $a = d$).



Rys. 11



Rys. 12

Z założenia $g(x) < 0$ wynika, że $x > 0$, a stąd $(a+d)x < 0$, ponieważ $a+d < 0$. To kończy dowód twierdzenia 1.

Dowód (XIII). Z założenia $\frac{a}{x+d} > 1$ i $\frac{d}{x+a} > 1$ otrzymujemy $\frac{ad}{(x+a)(x+d)} > 1$, a stąd $\frac{(x+a)(x+d)}{ad} < 1$ lub też $(x+a)(x+d) < ad$ (ponieważ $ad > 0$). Przy oznaczeniu $k(x) = (x+a)(x+d)$ ostatnia nierówność przyjmie postać $k(x) < k(0)$. Szkicując wykres funkcji kwadratowej k w przypadkach:
i) $a > 0, d > 0$, ii) $a < 0, d < 0$ wnioskujemy, że skoro $k(x) < k(0)$, to $(a+d)x < 0$.

Dowód (XIV). W tym dowodzie skorzystamy ze znanej i łatwej do uzasadnienia implikacji

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}_+ \quad \frac{\alpha}{\beta} \leq \frac{\gamma}{\delta} \implies \frac{\alpha}{\beta} \leq \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta} \leq \frac{\gamma}{\delta}. \quad (3)$$

Z założenia $\frac{a}{x+d} > 1$ i $\frac{d}{x+a} > 1$ otrzymujemy $0 < \frac{x+d}{a} < 1, 0 < \frac{x+a}{d} < 1$. Ponadto a i $x+d$ oraz d i $x+a$ są tych samych znaków. Ze względu na „symetrię” założeń wystarczy rozważyć trzy przypadki:

1. $a > 0$ i $x + d > 0$ i $d > 0$ i $x + a > 0$,
2. $a < 0$ i $x + d < 0$ i $d > 0$ i $x + a > 0$,
3. $a < 0$ i $x + d < 0$ i $d < 0$ i $x + a < 0$.

W przypadku 1. korzystając z (3) oraz założeń mamy

$$0 < \frac{2x + a + d}{a + d} < 1, \text{ a stąd } \frac{2x}{a + d} < 0 \text{ i ostatecznie } (a + d)x < 0.$$

W przypadku 2. z założenia mamy $0 < \frac{-x-d}{-a} < 1, 0 < \frac{x+a}{d} < 1$ i dalej po skorzystaniu z (3): $0 < \frac{a-d}{d-a} < 1$, a więc sprzeczność. Oznacza to, że przypadek 2. zajść nie może.

W przypadku 3. z założeń uzyskujemy $0 < \frac{-x-d}{-a} < 1, 0 < \frac{-x-a}{-d} < 1$.

Korzystając teraz z (3) dostajemy $0 < \frac{-2x-a-d}{-a-d} < 1$, a stąd $\frac{-2x}{-a-d} < 0$. To oznacza, że $(a + d)x < 0$.

Dowód (XV). Zauważmy, że układ warunków $\frac{a}{x+d} > 1$ i $\frac{d}{x+a} > 1$ jest równoważny układowi

$$0 < \frac{x+d}{a} < 1 \text{ i } 0 < \frac{x+a}{d} < 1.$$

Stąd otrzymujemy kolejno:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x+d}{a}\right)^2 &< 1 \text{ i } \left(\frac{x+a}{d}\right)^2 < 1, \\ \left(\frac{x+d}{a}\right)^2 + \left(\frac{x+a}{d}\right)^2 &< 2, \\ d^2x^2 + 2d^3x + d^4 + a^2x^2 + 2a^3x + a^4 &< 2a^2d^2, \\ (a^2 + d^2)x^2 + 2(a^3 + d^3)x &< -(a^2 - d^2)^2, \\ (a+d)(a^2 - ad + d^2)x &< 0, \\ (a+d)\left(a - \frac{1}{2}d\right)^2 + \frac{3}{4}d^2 &< 0, \\ x(a+d) &< 0. \end{aligned}$$

Uwaga 1: Analizując dowód XI otrzymujemy

LEMAT 2

Jeśli $a > 0, d > 0, a \geq d$, to $\frac{d}{x+a} > 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in (-a, d-a)$. Jeśli $a < 0, d < 0, a \geq d$, to $\frac{a}{x+d} > 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in (a-d, -d)$.

Z lematu 2 wynika wprost implikacja (2).

Uwaga 2: Analizując dowody VI lub VIII lub IX twierdzenia 1 możemy zauważyć, że prawdziwa jest implikacja

$$\frac{a}{x+d} > 1 \text{ i } \frac{d}{x+a} > 1 \Rightarrow x(a+d) + (a-d)^2 < 0 \quad (4)$$

Obserwacja ta prowadzi do następującego wzmocnienia twierdzenia 1.

TWIERDZENIE 2

Jeżeli $\frac{a}{x+d} > 1$ i $\frac{d}{x+a} > 1$, to $x(a+d) + (a-d)^2 < 0$.

Uwaga 3: Adaptując rozumowanie podane w dowodzie II oraz w dowodzie lematu 1 można uzasadnić następujące implikacje

Jeżeli $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, $\frac{a}{\alpha x + d} > 1$ i $\frac{d}{\beta x + a} > 1$, to $x(\alpha a + \beta d) < 0$.

Jeżeli $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, $\alpha\beta \geq 1$, $\frac{a}{x + \beta d} > 1$ i $\frac{d}{x + \alpha a} > 1$, to $x(\alpha a + \beta d) < 0$.

Udowodnimy teraz

TWIERDZENIE 3

Jeżeli $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ i $\alpha\beta \geq 1$ oraz $\frac{a}{x+d} > \alpha$ i $\frac{d}{x+a} > \beta$, to $(a+d)x < 0$.

Rozumując podobnie jak w dowodzie lematu 1 można uzasadnić, że $ad > 0$. Z założeń $\frac{a}{x+d} > \alpha$ i $\frac{d}{x+a} > \beta$ dostajemy kolejno

$$\frac{ad}{(x+d)(x+a)} > \alpha\beta,$$

$$\frac{ad - \alpha\beta(x^2 + (a+d)x + ad)}{(x+d)(x+a)} > 0,$$

$$\frac{(-\alpha\beta x^2 - ad(\alpha\beta - 1)) - \alpha\beta(a+d)x}{(x+d)(x+a)} > 0.$$

Ponieważ $ad > 0$, to $(x+d)(x+a) > 0$. Istotnie, z założeń $\frac{a}{x+d} > \alpha$ i $\frac{d}{x+a} > \beta$ mamy $\frac{a}{x+d} > 0$ i $\frac{d}{x+a} > 0$, a stąd $(x+d)(x+a) > 0$.

Ponadto

$$-\alpha\beta x^2 - ad(\alpha\beta - 1) - \alpha\beta(a+d)x > 0, \text{ ale } \alpha\beta \geq 1,$$

więc

$$(a+d)x < 0,$$

gdyż

$$-\alpha\beta x^2 - ad(\alpha\beta - 1) \leq 0.$$

To kończy dowód twierdzenia 3.

Uwaga 4: Zauważmy, że założenie $\alpha\beta \geq 1$ w twierdzeniu 3 jest istotne. Dla $\alpha = \beta = \frac{99}{101}$ oraz $a = d > 0$ i $x = 0,01a$ mamy bowiem $\frac{a}{x+d} > \alpha$, $\frac{d}{x+a} > \beta$ i $(a+d)x > 0$.

Uwaga 5: Analizując dowody I lub XI lub XII lub dowód lematu 2 dostajemy

TWIERDZENIE 4

Jeżeli $\frac{a}{x+d} > 1$ i $\frac{d}{x+a} > 1$, to $x^2 > (a-d)^2$.

I jeszcze jeden dowód twierdzenia 4.

Z założeń $\frac{a}{x+d} > 1$ i $\frac{d}{x+a} > 1$ dostajemy kolejno:

$$\begin{aligned}
0 < \frac{x+d}{a} < 1 \text{ i } 0 < \frac{x+a}{d} < 1, \\
\left(1 - \frac{x+d}{a}\right) \left(1 - \frac{x+a}{d}\right) > 0, \\
\frac{-x+a-d}{a} \cdot \frac{-x-(a-d)}{d} > 0, \\
\frac{x^2 - (a-d)^2}{ad} > 0.
\end{aligned}$$

Ponieważ $ad > 0$ (na mocy lematu 1), to $x^2 > (a-d)^2$.

Kończy to dowód twierdzenia 4.

Wstawienie w twierdzeniu 4 w miejsce x sumy $b+c$ daje natychmiast

Twierdzenie 5

Jeżeli $\frac{a}{b+c+d} > 1$ i $\frac{d}{b+c+a} > 1$, to $(b+c+a-d)(b+c+d-a) > 0$ oraz $\frac{b+c+a-d}{b+c+d-a} > 0$.

Przeprowadzenie dowodu twierdzenia 5 bez zebrania doświadczeń przy dowodzeniu twierdzenia 1 byłoby - naszym zdaniem - dość trudne.

Literatura

Bednarek, W.: 2006, Prostsze rozwiązanie, *Matematyka* **8**, 464.

Górnicki, J.: 1995, *Okruchy matematyki*, PWN, Warszawa.

Górowski, J., Łomnicki, A.: 2012, Cechy równoboczności trójkątów, *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **IV**, 83–92.

Guzicki, W.: 2013, *Rozszerzony program matematyki w gimnazjum. Poradnik nauczyciela matematyki*, Ośrodek Rozwoju Edukacji, Warszawa.

Janowicz, J.: 2006, Oznaczenie ma znaczenie, *Matematyka* **2**, 88–89.

Kourliandtchik, L.: 2002, *Słynne nierówności*, Aksjomat, Toruń, 9–40, 187–206.

*Instytut Matematyki
Uniwersytet Pedagogiczny
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
e-mail jangorowski@interia.pl
e-mail alomnicki@poczta.fm*

Izabela Jóźwik, Małgorzata Terepeta

Symbolika matematyczna związana z pojęciem funkcji*

Abstract. Mathematical texts are characterised by the occurrence of specific symbols. They may be letters (as applied, for example, by Euclid), number symbols or graphic signs with context-independent meaning. Mathematical symbols store knowledge of previous generations that provides frameworks with which to examine history of mathematical problems. In this paper, we deal with symbols related to the concept of function and related concepts like limit, and some other set theoretical or logical concepts. We focus on symbols that have survived unchanged into the present day and are commonly used. In part, we rely on the well-known book by Florian Cajori, "History of Mathematical Notations", first published in 1928-1929. Since mathematical notation is still growing, we also present symbols emerged after [Cajori 1928-1929].

Wstęp

Jedną z charakterystycznych cech matematyki jest stosowanie symboli. Część z nich jest oznaczeniem literowym (takim, jakie stosował na przykład Euklides w swoich *Elementach* (Fitzpatrick, 2008); (Błaszczyk, Mrówka, 2013) lub ma charakter numeryczny (np. wszelkie znaki służące do oznaczania liczb). W niniejszej pracy pod pojęciem symbolu matematycznego będziemy rozumieć powszechnie stosowany i utrwalony znak graficzny, który zawiera w sobie pewien zasób wiedzy utrwalonej przez kilka generacji, zaś jego znaczenie nie zależy od kontekstu, w którym symbol ten się znajduje.

W pracy chcemy przedstawić symbole i pojęcia dotyczące funkcji lub blisko z nią związane (granica, pewne terminy z zakresu teorii zbiorów czy logiki). Skoncentrujemy się na tych symbolach, które w niezmienionej formie przetrwały do dziś i są stosowane na całym świecie. Część przedstawionych informacji nie jest nowa. Można je znaleźć w wielu opracowaniach, np. w klasycznej pracy Floriana

*Mathematical notation related to the concept of function

2010 Mathematics Subject Classification: Primary: 01A05; Secondary: 01A60

Key words and phrases: mathematical symbol, function, limit, q.e.d.

Cajori (Cajori, 1993). Przytaczamy je, aby dokładniej opisać, jak tworzyła się współczesna symbolika matematyczna oraz podkreślić, że jest ona żywym, ciągle rozwijającym się językiem. Wyżej wspomniana książka Cajori została po raz pierwszy wydana w 1929 roku i od tej pory powstało wiele nowych oznaczeń. Niektóre z nich przedstawimy w niniejszej pracy.

1. Funkcja

Według Youschkevitch (1976) rozwój pojęcia funkcji można podzielić na trzy etapy:

- starożytność, nie było wówczas formuł algebraicznych, dokładnych algorytmów, wyrażeń analitycznych; rozważano poszczególne przypadki zależności pewnych dwóch wielkości bez wprowadzenia ogólnego pojęcia zmiennej i funkcji,
- średniowiecze, w którym ogólne pojęcia zostały wyrażone nie poprzez wzór, ale poprzez słowny opis, wykres lub tablice, najczęściej w praktycznych zastosowaniach, np. w zagadnieniach geometrycznych i mechanicznych,
- okres od końca XVI wieku, gdy zaczęły przeważać analityczne sposoby przedstawiania funkcji (za pomocą sum nieskończonych szeregów potęgowych).

W Kleiner (1989) przedstawiony jest pogląd, że głównym powodem braku jasno sformułowanego pojęcia funkcji w starożytności i średniowieczu był przede wszystkim brak wymagań wstępnych oraz symboliki. Drugą przyczyną stanowił niedostatek motywacji wprowadzenia abstrakcyjnych pojęć. Dopiero w wiekach XV-XVII doszło do takiego rozwoju matematyki, który okazał się fundamentalny dla wprowadzenia koncepcji funkcji. Wprowadzono w tym czasie liczby rzeczywiste i zespolone, powstawała symboliczna algebra (np. Viete, Kartezjusz), rozważania dotyczące ruchu stały się podstawowym elementem nauki (np. Kepler, Galileusz), doszło do połączenia algebry i geometrii (np. Fermat, Kartezjusz). Jednym z fundamentalnych dzieł tego okresu był traktat matematyczny *Geometria* Kartezjusza. Początkowo był on częścią rozprawy *Discours de la Méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences, plus la Dioptrique, les Météores et la Géométrie qui sont des essais de cette Méthode*¹ wydanej w 1637 roku w Lejdzie. Dzieło zredagowane w języku francuskim nie osiągnęło wielkiego sukcesu. Dopiero oddzielenie *Geometrii* i opublikowanie jej w języku łacińskim w 1649 roku spotkało się z szerokim odzewem. Nowością tego dzieła było powiązanie krzywej z równaniem wielomianowym. Kartezjusz definiował krzywe jako zbiór przecięć dwóch poruszających się krzywych, a każdy punkt przecięcia opisywał równaniem $\varphi(x, y)$, przy czym zakładał, że na otrzymanej w ten sposób krzywej nie ma punktów innych, niż opisane tym równaniem. Mimo, że Kartezjusz powiązał ruch z równaniem algebraicznym, to nie widział związku między definicją krzywej (np. poprzez przecięcia krzywych lub za pomocą mezolabium) i jej równaniem. Jednakże po raz

¹Rozprawa o Metodzie, w celu prawidłowego kierowania swym rozumem i poszukiwania prawdy w naukach oraz Dioptryka, Meteory i Geometria, które są esejami tej Metody (wg Błaszczuk, Mrówka, 2015)

pierwszy krzywą rozumiał nie jako linię ciągłą (tak, jak to było u starożytnych Greków) a jako obiekt złożony z punktów opisanych parą liczb (x, y) .

Idee Kartezjusza były rozwijane przez wielu matematyków i stały się inspiracją do wprowadzenia pojęcia funkcji. Według Kleiner (1989) kluczowym momentem było wprowadzenie *zmiennej* i wyrażanie relacji pomiędzy zmiennymi za pomocą *równań*. Ponieważ nie było rozróżnienia pomiędzy *zmienną niezależną* a *zmienną zależną*, więc podawane równania nie były rozumiane jako funkcja, ale jako związek pomiędzy dwiema wielkościami tak, jak to przedstawiał Kartezjusz.

Wydaje się, że potrzeba zdefiniowania funkcji pojawiła się dopiero w XVII wieku. Wtedy dzięki dwóm matematykom: Gottfriedowi Wilhelmowi Leibnizowi (1646 - 1716) oraz Izaakowi Newtonowi (1642 - 1727) powstał dział matematyki, który dziś nazywamy *rachunkiem różniczkowym i całkowym* (polskie nazwy wprowadził Jan Śniadecki (1756 - 1830), na świecie w powszechnie używane są nazwy pochodzące od Leibniza: *calculi differentialis*, *calculi integralis*). Słowo *funkcja* pojawiło się po raz pierwszy w 1673 roku w pracy *Methodus tangentium inversa, seu de fuctionibus* (*Metoda stycznych odwrotna, czyli o funkcjach*) napisanej przez Leibniza (wg. Kline, 1972, s. 340). Leibniz stosował je mając na uwadze relacje między krzywymi oraz stycznymi. Uważał, że jest to wielkość, która spełnić szczególne zadanie. Kilka lat później, w 1694 roku w *Nova Calculi differentialis...* Leibniz (1694) Leibniz używał słowa funkcja definiując ją jako

J'appelle fonction un segment de droite déterminable exclusivement à partir de droites menés entre un point fixe et un point donné de la courbe et de sa courbure².

W tym czasie znane już były pojęcia: stała, zmienna, współrzędna, parametr. Używano ich np. w de l'Hôpital (1696). W tym samym 1694 roku, Johann Bernoulli (1667 - 1748) w liście do Leibniza napisał, że funkcja to *ilość jakoś utworzona ze zmiennych i stałych*. Dopiero w 1698 roku, w innym liście do Leibniza, Johann Bernoulli pierwszy raz użył słowa funkcja w sensie analitycznym, tzn. opisał funkcję jako jedno wyrażenie złożone z liczb oraz działań arytmetycznych dodawania, odejmowania, mnożenia, dzielenia, potęgowania i pierwiastkowania, przy czym dopuszczone były szeregi nieskończone i granice. W 1718 roku Bernoulli próbował sprecyzować co należy rozumieć pod pojęciem funkcji. Uważał, że jest to związek pomiędzy dwiema wielkościami: zmienną i drugą, która wyraża jakąś zależność od tej pierwszej (Bernoulli, 1718, s. 108):

On appelle ici fonction d'une grandeur variable, une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes³.

Próby precyzyjnej definicji funkcji były podejmowane przez wielu matematyków i w 1779 roku, w angielskiej encyklopedii (*Chambers' Cyclopaedia*) pojawiło się hasło:

²Funkcją nazywam część linii prostej, która jest odcinana prostymi liniami wyłącznie za pomocą ustalonego punktu oraz punktu krzywej, który jest dany wraz ze stopniem krzywizny. Wszystkie tłumaczenia, o ile nie jest inaczej zaznaczone, pochodzą od autorek artykułu.

³Funkcją wielkości zmiennej nazywa się wielkość liczbową zestawioną w dowolny sposób z owej wielkości zmiennej i stałych (tłum. Duda (2015)).

The term function is used in algebra, for an analytical expression any way compounded of a variable quantity, and of numbers, or constant quantities⁴.

Leibniz i Bernoulli używali różnych oznaczeń na funkcję. Bernoulli oznaczał ją literą n , zaś zmienną literą z , potem funkcję literą X zaś zmienną ξ , zaś jej wartość dla tej zmiennej symbolem ξX . W 1697 roku napisał do Leibniza (wg. Cajori, 1993, vol. 2, s. 267):

for denoting any function of a variable quantity x , I rather prefer to use the capital letter having the same name X or the Greek ξ , for it appears at once of what variable it is a function; this relieves the memory⁵.

W odpowiedzi, Leibniz zauważył, że jeśli jest kilka funkcji zależnych od tego samego x , to można je dla ułatwienia ponumerować (wg. Cajori, 1993, vol. 2, s. 268). Od 1718 roku Bernoulli używał litery φ , aby oznaczyć funkcję, a jej wartość dla zmiennej z oznaczał φz . Aż do 1734 roku nie pisano argumentu funkcji w nawiasach, ani nie używano litery f jako nazwy funkcji. Dopiero w 1734 roku Leonhard Euler (1707–1783) wprowadził symbol $f(x)$, w swojej pracy (1740, s. 186, 187) napisał:

Si $f(\frac{x}{a} + c)$ denotet functionem quacunquę ipsius $\frac{x}{a} + c$ ⁶.

W tym samym czasie Alexis Claude de Clairault (lub Clairaut) (1713–1765) i Jean le Rond d'Alembert (1717–1783) funkcje zmiennej x oznaczali przez Πx , Φx , φx lub Δx , bez nawiasów przy argumentach, zaś d'Alembert nawiasy zaczął stosować w swoich pracach dopiero w 1754 roku.

Oczywiście te oznaczenia nie od razu się przyjęły. Matematycy często stosowali swoje własne, ale coraz częściej w literaturze można było spotkać małą literę oznaczającą funkcję i w nawiasach jej argument. Natomiast nie zajmowano się zupełnie dziedziną funkcji (jako zbiorem) i zbiorem wartości funkcji. W 1888 roku Richard Dedekind (1831 – 1916) sformułował definicję funkcji jako „przekształcenie zbioru S w inny zbiór”. W „Abbildung einer Menge” Dedekind (1887, s. 10–11) napisał:

Unter einer Abbildung φ einer Menge S wird Gesetz verstanden, nach welchem zu jedem bestimmten Element s von S ein bestimmtes Ding gehört, welches das Bild von s heißt und mit $\varphi(s)$ bezeichnet wird; wir sagen auch, daß $\varphi(s)$ dem Element s entspricht, daß $\varphi(s)$ durch die Abbildung φ aus s entsteht oder erzeugt wird, daß s durch die Abbildung φ in $\varphi(s)$ übergeht⁷,

⁴Termin funkcja jest stosowany w algebrze na wyrażenie analityczne złożone ze zmiennych, liczb lub stałych wielkości.

⁵aby oznaczyć dowolną funkcję zmiennej x , wolałbym używać wielkiej litery mającej tę samą nazwę X lub greckiej ξ , ponieważ od razu widać, co jest zmienną, a co funkcją; łatwiej jest to zapamiętać.

⁶ $f(\frac{x}{a} + c)$ oznacza funkcję zależną od $\frac{x}{a} + c$.

⁷Przekształceniem φ na zbiorze S nazywamy przyporządkowanie każdemu elementowi tego zbioru pewnego obiektu, który będziemy nazywać obrazem s i oznaczać $\varphi(s)$; będziemy również mówili, że $\varphi(s)$ odpowiada elementowi s , tzn. $\varphi(s)$ generowany jest z s przez przekształcenie φ .

powoływał się przy tym na pracę Petera Gustava Lejeune Dirichleta (1805–1859) z roku 1879, do której napisał wstęp. Warto tu wspomnieć o funkcji nieciągłej w każdym punkcie, którą zawdzięczamy Dirichletowi: przyjmuje ona wartość c na zbiorze liczb wymiernych i wartość d na zbiorze liczb niewymiernych (Dirichlet, 1829, s. 10). Dedekind nie używa jeszcze pojęć *dziedzina*, *przeciwdziedzina*, ale wprowadza nazwę *obraz* (Bild), jako zbiór wszystkich wartości $\varphi(s)$ dla $s \in S$ i oznacza go przez $\varphi(S)$. Ponadto, posługuje się także nazwami: *funkcja identycznościowa* (identysche Abbildung), *iniekcja* (iniektive Abbildung), *bijekcja* (bijektive Abbildung). Dedekind zdefiniował także złożenie funkcji, które przy podanych niżej oznaczeniach zapisywał w postaci $\psi \cdot \varphi$ lub $\psi\varphi$:

Ist φ eine Abbildung einer Menge S , und ψ eine Abbildung des Bildes $S' = \varphi(S)$, so entspringt hieraus eine aus φ und ψ zusammengesetzte Abbildung Θ von S , welche darin besteht, daß jedem Elemente s von S das Bild $\Theta(s) = \psi(\varphi(s))$ entspricht, wo wieder $\varphi(s) = s'$ gesetzt ist⁸.

Warto zauważyć, że Dedekind wiedział, iż kolejność złożenia jest istotna i złożenie funkcji w odwrotnej kolejności nie musi istnieć (Dedekind, 1887, s. 11).

W czasach Dedekinda nie używano jeszcze symbolu strzałki. Aby podkreślić fakt, że funkcja f działa ze zbioru X w zbiór Y najczęściej pisano wówczas $f(X) \subset Y$. Dopiero w 1939 roku członkowie grupy Nicolas Bourbaki⁹ po raz pierwszy zastosowali oznaczenie: $x \rightarrow f(x)$ (1939, s. 4), zaś rok później, w 1940 roku Witold Hurewicz (1904–1956) wprowadził strzałkę $\rightarrow$ jako przyporządkowanie zbiorów X i Y za pomocą funkcji f i napisał $f: X \rightarrow Y$ (1940, s. 61). Można uznać, że od tego momentu zapis ten zaczął się upowszechniać, chociaż początkowo w książkach i artykułach dodawano wytłumaczenie, jak należy go rozumieć. Jeszcze w 1971 roku Saunders Mc Lane (1909–2005), w swojej książce *Categories for the working mathematician* (1971, s. 10), pisał:

Each arrow $f: X \rightarrow Y$ represents a function; that is, a set X , a set Y and a rule $x \mapsto fx$ which assigns to each element $x \in X$ an element $fx \in Y$; whenever possible we write fx and not $f(x)$ omitting unnecessary parentheses¹⁰.

Na stronie 29 tej samej książki dodał:

The fundamental idea of representing a function by an arrow first appeared in topology about 1940, probably in papers or lectures by W. Hurewicz [...]. His initiative immediately attracted the attention of R.

⁸Jeżeli φ odwzorowuje element s zbioru S , zaś ψ jest przekształceniem obrazu $S' = \varphi(S)$, to na zbiorze S tworzy się z funkcji φ i ψ złożenie Θ , które jest obrazem elementu s z S $\Theta(s) = \psi(\varphi(s)) = \psi(\varphi(s))$, gdzie $\varphi(s) = s'$.

⁹Stowarzyszenie Nicolas Bourbaki powstało w 1935 roku i należeli do niego m.in. Henri Cartan, René de Possel, Jean Dieudonné, André Weil, Claude Chevalley oraz Szolem Mandelbrojt. Zadaniem stowarzyszenia było przedstawianie stanu ówczesnej wiedzy matematycznej w sposób jak najbardziej usystematyzowany i precyzyjny.

¹⁰Każda strzałka $f: X \rightarrow Y$ oznacza funkcję; to znaczy zbiór X , zbiór Y oraz przekształcenie $x \mapsto fx$, które przyporządkowuje dowolnemu elementowi $x \in X$ pewien element $fx \in Y$; jeśli to możliwe, będziemy pomijać zbędne nawiasy i pisać f zamiast $f(x)$.

H. Fox and N. E. Steenrod, whose paper used arrows [...]. The arrow $f : X \rightarrow Y$ rapidly displaced the occasional notation $f(X) \subset Y$ for a function¹¹.

2. Granica

Pojęcie funkcji ewoluowało, pojawiały się nowe idee z nim związane, np. *funkcja ciągła*. Ciągłość funkcji obecnie ściśle wiąże się z pojęciem *granicy*. Intuicyjne rozumienie granicy i działań na zerze (włącznie z dzieleniem) było widoczne już w XII wieku w pracach Bhaskara (1114–1185), np. w napisanej w 1150 roku książce *Lilavati*. Ponieważ wiązało się to z wielkościami nieskończenie małymi lub nieskończenie dużymi i wieloma paradoksami z tym związanymi, długo nie było ani definicji granicy, ani definicji funkcji ciągłej.

Pierwsza definicja granicy pojawiła się w 1784 roku, gdy Akademia w Berlinie ogłosiła konkurs na *jasną i dokładną teorię nieskończoności w matematyce*, rozumiejąc przez to przede wszystkim wielkości nieskończenie małe. Nagrodę zdobył Simon l'Huilier (1750–1840), matematyk szwajcarski, który w swojej pracy (l'Huilier, 1786, s. 7) nawiązał do wcześniejszej koncepcji granicy według d'Alemberta i wprowadził następującą definicję:

Soit une quantité variable, toujours plus petite ou toujours plus grande qu'une quantité constante proposée, mis qui puisse différer de cette dernière moins que d'aucune quantité proposée plus petite qu'elle: cette quantité constante est dite la limite en grandeur ou en petitesse de la quantité variable¹².

Granice oznaczył symbolem $\lim$. (od łacińskiego *limes* czyli granica), przy czym stosowany przez niego zapis $\lim_{x \rightarrow 0} q : Q$ oznaczał we współczesnej symbolice $\lim_{x \rightarrow 0} q(x) = Q$.

Oznaczenie wprowadzone przez l'Huilliera było używane np. przez Augustina Louisa Cauchy'ego (1789–1857). W 1821 roku w następujący sposób opisał on wielkość nieskończenie małą oraz granicę funkcji (Cauchy, 1853, s. 4):

Lorsque les valeurs numériques successives d'une même variable décroissent indéfiniment, de manière à s'abaisser au-dessous de tout nombre donné, cette variable devient ce qu'on nomme un infiniment petit ou une quantité infiniment petite une variable de cette espèce a zéro pour limite¹³.

¹¹Fundamentalna idea, aby funkcję zapisywać za pomocą strzałki, po raz pierwszy pojawiła się około 1940 roku, prawdopodobnie w artykułach lub wykładach W. Hurewicza [...]. Jego pomysł natychmiast przyciągnął uwagę R. H. Foxa oraz N. E. Steenroda, w których pracach strzałka została użyta [...]. Strzałka $f : X \rightarrow Y$ szybko zastąpiła sporadycznie stosowaną notację $f(X) \subset Y$ używaną dla funkcji.

¹²Niech dana zmienna będzie zawsze mniejsza lub większa niż podana stała wielkość, przy czym ta zmienna może różnić się od tej ostatniej o jakąkolwiek ilość mniejszą niż zaproponowana, to wówczas tę stałą wielkość nazywamy granicą wielkości lub małości zmiennej.

¹³Kiedy wartość liczbową zmiennej nieskończenie maleje, albo spada poniżej dowolnej liczby, to wielkość zmienna staje się nieskończenie mała i jej wartość maleje nieskończenie w taki sposób, że jest zbliżna do granicy 0.

Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la limite de toutes les autres¹⁴.

i dodał, że symbol $\lim$ oznacza jej wartość. Cauchy (1821, s. 14) nie znał granic jednostronnych, ale zauważył, że gdy x dąży do zera, to $\lim.(\sin.x)$ ma wartość 0, $\lim.((\frac{1}{x}))$ przyjmuje 2 wartości, zaś $\lim.((\sin.\frac{1}{x}))$ ma nieskończenie wiele wartości (podwójnym nawiasem podkreślał fakt istnienia więcej niż jednej wartości danej granicy). Wykorzystując pojęcie granicy Cauchy przedstawił także np. definicję ciągłości funkcji (1853, s. 32)

Une fonction u de la variable réelle x sera continue, entre deux données de x , si, cette fonction admettant pour chaque valeur intermediaire de x une valeur unique at finie, un accroissement infiniment petit attribue a la variable produit toujours, entre les limites dont il s'agit, un accroissement infiniment petit de la fonction elle-meme¹⁵.

Definicje używane przez Cauchy'ego są bliskie współczesnym ujęciom analizy, ale nie były jednak dostatecznie precyzyjne, bo prowadziły czasem do niejasności i błędów, np. Cauchy twierdził, że suma zbieżnego szeregu funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą i długo nie mógł zrozumieć, skąd bierze się jego błąd. Powszechnie uważa się, że Cauchy zmodyfikował swoje twierdzenie, pokazując, że jest ono prawdziwe przy założeniu dodatkowego warunku, który później został nazwany zbieżnością jednostajną i do dzisiaj odgrywa dużą rolę w analizie matematycznej. Jednakże praca Bascelli i jej współpracownicy (2016) wskazuje, że Cauchy nie rozróżniał ciągłości punktowej i jednostajnej, podobnie nie widział różnicy pomiędzy zbieżnością punktową i jednostajną.

Symbol $\lim$ bez kropki wprowadził w 1841 roku Karl Weierstrass (1815–1897) w pracy, która została opublikowana dopiero w roku (1894, s. 86). Prawdopodobnie dlatego symbol $\lim$ był w ciągłym użyciu.

W XIX wieku zauważono potrzebę wprowadzenia oznaczenia granicy funkcji (ciągu), gdy jej argument dąży do liczby innej niż zero. Wprowadzono symbol $\lim_{x=a}$ oznaczający granicę, *gdy x dąży do a* . W polskiej literaturze to oznaczenie można znaleźć jeszcze w wydanej w 1948 roku w książce Kazimierza Kuratowskiego (1896–1980) *Wykłady rachunku różniczkowego i całkowego*.

W 1837 roku Dirichlet stosował już granice jednostronne, pisząc $\lim_{x=a+0}$, aby podkreślić, że badamy granicę dla x dążących do a poprzez liczby większe od a oraz $\lim_{x=a-0}$, gdy x dąży do a poprzez liczby mniejsze od a . We wspomnianej książce Kuratowskiego ten zapis także jest stosowany.

Strzałkę $\rightarrow$ w symbolu granicy wprowadzono dopiero w 1905 roku (Leathem, 1905, s. 11), żeby podkreślić ciągłą zmianę argumentu, i od tej pory coraz częściej

¹⁴Kiedy wartości sukcesywnie przypisywane jakiejś zmiennej zbliżają się nieskończenie do stałej wartości, różniąc się w końcu od niej tak mało, jak się chce, to nazywa się ona granicą ich wszystkich (tłum. (Duda, 2015)).

¹⁵Funkcja u pozostaje ciągła względem x między danymi granicami, jeśli między tymi granicami nieskończenie mały przyrost zmiennej x zawsze powoduje nieskończenie mały przyrost samej funkcji (tłum. (Duda, 2015)).

można spotkać $\lim_{x \rightarrow a}$ zamiast $\lim_{x=a}$. Warto zauważyć, że Leathem rozważał nie tylko granice w punkcie, ale także granice jednostronne (nie stosował jednak w tym przypadku dodatkowej symboliki (Leathem, 1905, s. 42) oraz granice w ∞ (Leathem, 1905, s. 37).

W 1887 roku pojawiły się granice górna i dolna funkcji oznaczane symbolami $\limsup_{v \rightarrow \infty}$ oraz $\liminf_{v \rightarrow \infty}$, później Alfred Pringsheim (1850–1941) wprowadził $\overline{\lim}_{v \rightarrow \infty} a_v = A$ oraz $\underline{\lim}_{v \rightarrow \infty} a_v = a$, a także $\overline{\lim}_{v \rightarrow \infty}$, aby czytelnik mógł rozważać albo górną albo dolną granicę (1916, s. 294, 338).

3. Logika i teoria zbiorów a rozwój pojęcia funkcji

Rozwój teorii związanej z funkcjami wymagał nowej wiedzy oraz symboliki. Funkcje przestawały być tylko geometrycznym opisem lub analitycznym wyrażeniem. Pojawiły się tzw. *monster functions* (funkcje nieciągłe w każdym punkcie, nigdzie nieróżniczkowalne itp.), które były sprzeczne z matematyczną intuicją. Funkcje stawały się obiektami abstrakcyjnymi, wymagającymi narzędzi, które w prosty i precyzyjny sposób pozwoliłyby je opisać i interpretować tak, aby nie prowadziło to do nieporozumień i sprzeczności. Potrzebny był język matematyczny, który pozwoliłby na przejście od rzeczywistości praktycznej do teoretycznej, zajmującej się modelami matematycznymi znajdującymi się w dowolnym uniwersum. Rozwój logiki matematycznej i teorii zbiorów przyczynił się do szybszego rozwoju pojęcia funkcji i rozszerzenia go do dowolnego przekształcenia pomiędzy zbiorami.

Logika, jako nauka o sposobach jasnego i ścisłego formułowania myśli i o regułach poprawnego rozumowania, pojawiła się w filozofii ponad 2000 lat temu. Logika matematyczna (często nazywana logiką symboliczną lub metamatematyką), jako dział matematyki, wyodrębniła się dopiero na przełomie XIX i XX wieku, ale wiele pojęć i symboli pojawiło się znacznie wcześniej. Już Arystoteles (384–322 p.n.e) podał pierwsze reguły wnioskowania, sformułował zasady poprawnego formułowania i dowodzenia twierdzeń, wprowadził pierwsze symbole logiczne. Nazwa logika matematyczna została użyta po raz pierwszy przez włoskiego matematyka Giuseppe Peano (1858–1932). Za pioniera logiki symbolicznej uważa się Leibniza, chociaż pewne skróty, symbole były stosowane wcześniej: Pierre Hérigone (1580–1643) pisał np. *hyp.* zamiast *to wynika z hipotezy*, *constr.* zamiast *z konstrukcji otrzymujemy*, zaś *20.1* oznaczało *z twierdzenia 20 z pierwszej książki mamy*. W 1659 roku Johann Rahn (1622–1676) wprowadził symbole $\therefore$ oraz $\because$ oba oznaczające *zatem*, ale większość matematyków stosowała pierwszy w podanym znaczeniu, drugi zostawiając dla słowa *ponieważ* (Cajori, 1993, vol. 2, s. 282). Obecnie nie stosuje się jednak żadnego z tych symboli i najczęściej piszemy słowami.

Gwałtowny rozwój symboli używanych obecnie w logice i teorii zbiorów miał miejsce w latach 1880–1920, głównie za sprawą Ernsta Schrödera (1841–1902), Giuseppe Peano, Alfreda North Whiteheada (1861–1947) oraz Bertranda Russella (1872–1970). Twierdzenia związane z funkcjami (np. działania na obrazach i przeciwobrazach funkcji) wymagały stosowania m.in. znaków sumy mnogościowej, iloczynu mnogościowego, zawierania zbiorów. Matematycy używali najczęściej $+$ oraz $\cdot$ zarówno w działaniach mnogościowych, jak arytmetycznych, często opuszcza-

jąc kropkę przy iloczynie, tak jak robił Leibniz. Natomiast Dedekind w pracy (1887, s. 1) używał oznaczeń: $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{Z}$ w znaczeniu suma, iloczyn, zawieranie. Według Cajori (1993, vol. 2, s. 294), już rok później, w pracy Peano (1888) można znaleźć symbole, które są obecnie w powszechnym użyciu: $\cup$ i $\cap$. Ponieważ było kilka wydań tej pracy, będziemy dalej powoływać się na dostępne wydanie z roku 1901, Peano wprowadził także symbole $\cup$ oraz $\cap$ na działania większej ilości elementów (1908), ale wówczas ich kształt był bardziej zbliżony do półksiężyca. Jednakże jeszcze bardzo długo funkcjonowały także znaki Σ (wprowadzony przez Eulera w 1755 roku) oraz Π (który od 1812 roku zawdzięczamy Carlowi Friedrichowi Gaussowi (1777–1855)), które możemy znaleźć chociażby w książce *Funkcje analityczne* z 1948 roku autorstwa Stanisława Saksa (1897–1942) i Antoniego Zygmunda (1900–1992). W 1897 roku w *Formulaire de mathématiques* Peano jako pierwszy zastosował ϵ jako symbol przynależności do zbioru (Peano, 1901, s. 1). Zauważmy, że jest to odwrócony znak stosowany przez Dedekinda. Obecnie stosowany symbol ϵ przypisuje się Russelowi. Symbole zawierania $\subset$ oraz $\supset$ zostały wprowadzone przez Ernsta Schrödera (1890, s. 72). Wcześniej, np. Leibniz proponował symbol ∞ na zawieranie zbioru, pisząc: jeśli cały A jest w B , to $AB \infty A$, jeśli część A nie jest w B , to AB nie ∞A (Cajori, 1993, vol. 2, s. 285). Używane były także symbole $<$, $>$ oraz c , $\supset$ (np. przez Peano).

Pisząc o teorii zbiorów, nie sposób pominąć Georga Cantora (1845–1918). Niewątpliwie, wniósł on ogromny wkład w rozwój tej tematyki, symboliki i nawiązań w niej stosowanej. W pracy (1877, s. 242–258) Cantor użył po raz pierwszy nawiasów klamrowych na oznaczenie zbioru $\{a, b\}$, ale zapis ten nie oznaczał zbioru dwuelementowego. Podobnie $M = \{m\}$ nie był zbiorem jednoelementowym, ale zbiorem, którego elementy Cantor oznaczał literą m . Oznaczenie $\{a\}$ na zbiór jednoelementowy i $\{a, b\}$ na zbiór dwuelementowy, w znaczeniu współczesnym, wprowadził Ernst Zermelo (1871–1953) w 1908 roku (1908, s. 263).

Jedna z podstawowych liczb kardynalnych $\aleph_0$, związana z liczebnością zbiorów przeliczalnych, swoją nazwę i symbol zawdzięcza także Cantorowi. Oznaczenie $\aleph_0$ zostało wprowadzone około 1893 roku, ale stało się znane i powszechnie używane po 1895 roku, po opublikowaniu przez Cantora (1895, s. 488). Georg Cantor wprowadził także do teorii zbiorów pojęcia: *punkt skupienia*, *zbiór domknięty*, *zbiór doskonały*, *zbiór gęsty*. Ponadto, w 1883 roku precyzyjnie opisał zbiór, zwany obecnie *zbiorem Cantora*, którego nieco inną wersję skonstruował w 1875 roku Henry Smith (1826–1883).

Niedługo po wprowadzeniu symboli związanych z rachunkiem zbiorów pojawiły się kwantyfikatory w takiej postaci, jakiej używamy obecnie. Brak kwantyfikatorów i zauważenie, że ich kolejność ma istotne znaczenie, były przyczyną wspomnianego wcześniej błędu Cauchy’ego dotyczącego zbieżności szeregów funkcji ciągłych. Kwantyfikator szczegółowy $\exists$ można znaleźć już w 1897 roku w pracy Peano (1901), aczkolwiek podobno stosował go wcześniej także Russell. Na kwantyfikator ogólny $\forall$ trzeba było poczekać aż do 1935 roku (Gentzen, 1935, s. 178). Gerard Gentzen (1909–1945) wykorzystał odwróconą literę A występującą w wyrażeniu *All-Zeichen* wzorując się na odwróconym E ze słowa *Exists*. Twierdził, że symbol $\exists$, którego także używał, użyczył sobie od Russella. Wcześniej stosowano kwantyfikatory w postaci: $\vee$, $\wedge$ (w dalszym ciągu używane w polskich szkołach średnich)

lub Σ , Π (możemy je spotkać w pierwszych wydaniach książek Kuratowskiego, Sikorskiego).

Początkowo symbol negacji miał postać $\sim$ i był stosowany od 1897 roku przez Peano. Obecnie częściej spotkać można symbol $\neg$ wprowadzony w 1930 roku przez Arenda Heytinga (1898–1980), zawarł to swojej w pracy (1930, s. 43).

XX wiek nie zakończył ery symbolizmu w matematyce. Matematyka jako żywy język rozwijała się dalej i coraz częściej symbole, które wówczas wprowadzono, przyjęły się na stałe we współczesnej matematyce. Najwięcej reguł i symboli logicznych wprowadzonych zostało przez Bertranda Russela w pracach: *The Theory of Implication* (1906), *Mathematical logic as based on the theory of types* (1908) oraz wspólnej pracy z Alfredem North Whiteheadem *Principia Mathematica* (1910). Pojawiły się tam: znany już wcześniej symbol negacji $\sim p$, symbol logiczny $\vee$ oznaczający, że przynajmniej jedno ze zdań p, q jest prawdziwe, symbol $p \cdot q$ oznaczający, że oba zdania p i q są prawdziwe, symbol implikacji $p \supset q$ rozumiany obecnie jako $\sim p \vee q$ oraz symbol równoważności $\equiv$. Współczesny symbol koniunkcji $\wedge$ pojawił się pierwszy raz w 1930 roku we wspomnianej wyżej pracy Arenda Heytinga.

Wiele współczesnych symboli zawdzięczamy grupie Nicolas Bourbaki. W 1939 roku grupa rozpoczęła wydawanie serii książek pod wspólnym tytułem *Éléments de mathématique*. W tomie *Theorie de ensembles* możemy znaleźć symbol nienależenia do zbioru $\notin$, symbol zbioru pustego $\emptyset$ (wcześniej najczęściej używano zera lub $\{\}$), a także współcześnie używane oznaczenie implikacji $\Rightarrow$ oraz równoważności $\Leftrightarrow$. Wcześniej implikacje opisywano słowami (np. Dedekind), potem używano pojedynczych strzałek: symbol implikacji $\rightarrow$ wprowadził w 1922 roku David Hilbert (1862–1943), zaś równoważność $\leftrightarrow$ pierwszy raz pojawiła się w 1933 roku w pracy Albrechta Beckera.

Obecnie, gdy opisujemy funkcję, jej dziedzinę, zbiór wartości, jej własności, wszystkie powyższe symbole są powszechnie używane i uważane za oczywiste.

4. Zakończenie twierdzeń

Szybki rozwój matematyki w XX wieku, rozwój symboliki, tej związanej z pojęciem funkcji, jak też występującej w innych działach matematyki, pociągnął za sobą również potrzebę używania wygodnych, krótkich, jednoznacznych znaków kończących daną myśl lub dowód twierdzenia. Nie była to nowa idea. Już Euklides i Archimedes kończyli swoje dowody zwrotem ὅπερ ἔδει δεῖξαι (hoper edei deixai), którego łaciński odpowiednik Q.E.D (*quod erat demonstrandum*, czyli *co było do pokazania*) stosowany jest do dziś. W *Elementach* Euklidesa (Fitzpatrick, 2008) możemy znaleźć także zwrot ὅπερ ἔδει ποιῆσαι (hoper edei poiesai). Euklides stosował go na zakończenie zadań konstrukcyjnych. Jego łaciński odpowiednik Q.E.F. (*quod erat faciendum* oznaczający *co należało zrobić*) obecnie nie jest już używany. Współczesny symbol kończący twierdzenia został wprowadzony dopiero w 1950 roku. Paul Halmos (1916 - 2006) w książce *Measure Theory* (1974, s. vi) napisał:

The symbol $\blacksquare$ is used through the entire book in place of such phrase as „Q.E.D.” or „This completes the proof of the theorem” to signal the end of a proof¹⁶.

Znak ten został nazwany *halmos* na cześć jego twórcy. Halmos przyznał, że pomysł ten zaczerpnął z popularnych tygodników, gdzie stosowano różnego rodzaju oznaczenie (kwadrat, prostokąt, trójkąt) na zakończenie felietonu, artykułu czy wywiadu. Obecnie najczęściej możemy spotkać zakończenie dowodu za pomocą pełnego lub pustego kwadratu: $\blacksquare$ lub $\square$. Halmos był także pierwszym matematykiem, który zastosował skrót *iff* zamiast zwrotu *if and only if*. W języku polskim próbowano wprowadzić analogiczny skrót *gdedy* zamiast *wtedy i tylko wtedy, gdy*, ale nie zdobył on takiej popularności, jak angielskie *iff*. Najprawdopodobniej przyczyną tego jest publikowanie matematycznych prac naukowych przeważnie w języku angielskim. Na ostatniej stronie autobiografii, Paul R. Halmos (1985) pisze, że nie on jest pomysłodawcą tego skrótu oraz przedstawia inspirację do wprowadzenia *halmosa*:

My most nearly immortal contributions are an abbreviation and a typographical symbol. I invented "iff", for "if and only if" - but I could never believe that I was really its first inventor.[...] The symbol is definitely not my invention - it appeared in popular magazines (not mathematical ones) before I adopted it but, once again, I seem to have introduced it into mathematics. It is the symbol that sometimes looks like $\blacksquare$, and is used to indicate an end, usually the end of a proof. It is most frequently called the "tombstone", but at least one generous author referred to it as the "halmos"¹⁷.

Pomimo tego, że Halmos uważał, że nie on jest twórcą skrótu *iff*, jemu przypisuje się pojawienie tego zwrotu. Taką sugestię możemy znaleźć np. w książce Johna L. Kelleya (1916–1999) *General topology* (Kelley, 1955, s. vi):

I employ two special conventions. In some cases where mathematical content requires „if and only if” and euphony demands something less I use Halmos’ „iff”. The end of each proof is signalized by $\blacksquare$. This notation is also due to Halmos¹⁸.

¹⁶ Aby zasygnalizować koniec twierdzenia, zamiast wyrażenia takich jak „Q.E.D.” lub „Co kończy dowód twierdzenia”, w książce stosowany jest symbol $\blacksquare$.

¹⁷ Moją prawie nieśmiertelną zasługą jest skrót i znak typograficzny. Wymyśliłem „iff” w miejsce „if and only if” - ale nigdy nie uwierzę, że byłem rzeczywiście pierwszym jego twórcą. [...] Symbol z pewnością nie jest moim wynalazkiem - zanim go zastosowałem, pojawił się w popularnych czasopiśmie (nie matematycznych), ale, jeszcze raz, wydaje się, że byłem pierwszą osobą, która wprowadziła go do matematyki. Ten symbol wygląda czasami jak $\blacksquare$ i jest stosowany, żeby zasygnalizować koniec, zazwyczaj koniec twierdzenia. Najczęściej określany jest słowem „nagrobek”, ale przynajmniej jeden wspaniałomyślny autor nazwał go „halmos”.

¹⁸ Będę stosować dwie szczególne konwencje. W pewnych przypadkach, gdy w treści matematycznej jest „if and only if”, zaś eufonia wymaga czegoś mniejszego, będę używał „iff” Halmosa. Zakończenie każdego dowodu będzie sygnalizowane przez $\blacksquare$. Ten zapis także zawdzięczamy Halmosowi.

Literatura

- Bascelli, T., Błaszczyk, P., Borovik, A., Kanovei, V., Katz, K. U., Katz, M. G., Kutateladze, S. S., McGaffey, T., Schaps, D. M., Sherry, D.: 2016, Cauchy's infinitesimals, his sum theorem and foundational paradigms, *HOPOS* **6**(1), 117–147.
- Becker, A.: 1933, *Die Aristotelische Theorie der Möglichkeitsschlüsse Eine Logisch-Philologische Untersuchung der Kapitel 13-22 von Aristoteles' Analytica Priora I*, Junker Und Dünhaupt, Berlin.
- Bernoulli, J.: 1718, *Remarques Sur ce qu'on a donné jusqu'ici de solutions des Problèmes sur les Isoperimètres; avec une nouvelle methode courte & facile de les resoudre sans calcul, laquelle s'étend aussi á d'autres Problèmes qui ont raport á ceux-lá*, Mémoires de l'Academie Royale des Sciences, Paris.
- Błaszczyk, P., Mrówka, K.: 2013, *Euklides Elementy. Księgi V-VI teoria proporcji i podobieństwa*, Copernicus Center Press, Kraków.
- Błaszczyk, P., Mrówka, K.: 2015, *Kartezjusz, Geometria*, Wydawnictwo Universitas, Kraków.
- Bourbaki, N.: 1939, Fonctions d'une variable réelle (Théorie élémentaire), *Archives Bourbaki*, **Ch. I et II (état 2)**.
- Cajori, F.: 1993, *A History of Mathematical Notations. Two Volumes Bound as One. Volume I: Notations in Elementary Mathematics. Volume II: Notations Mainly in Higher Mathematics*, Dover, New York, Reprint of works originally published in 1928 and 1929 by The Open Court Publishing Company, Chicago.
- Cantor, G.: 1877, Ein Beitrag zur Mannifaltigkeitslehre, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **84**, 242–258.
- Cantor, G.: 1895, Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre (Contributions to the Foundation of Transfinite Set Theory), *Mathematische Annalen* **46**.
- Cauchy, A. L.: 1821, *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique*, De L'imprimerie Royale, Paris.
- Cauchy, A. L.: 1853, *Note sur les séries convergentes dont les divers termes sont des fonctions continues d'une variable réelle ou imaginaire, entre des limites données, Oeuvres complètes*, Vol. 12, Series 1, Gauthier-Villars, Paris.
- de l'Hôpital, G.: 1696, *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, Paris.
- Dedekind, R.: 1887, *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Verlag Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig.
- Dirichlet, P. G. L.: 1829, Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **4**, 157–169.
- Duda, R.: 2015, Matematyka a dzieje myśli. <http://jaszczur.czn.uj.edu.pl/course/view.php?id=150>.
- Euler, L.: 1740, Infinitis curvis eiusdem generis, *Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae ad annos 1734-1735* **VII**, 184–200.
- Fitzpatrick, R.: 2008, Euclid's elements of geometry. <http://farside.ph.utexas.edu/Books/Euclid/Elements.pdf>.
- Gentzen, G.: 1935, Untersuchungen über das logische Schließen, *Mathematische Zeitschrift* **39**, 176–210.

- Halmos, P. R.: 1974, *Measure Theory*, Springer-Verlag, New York.
- Halmos, P. R.: 1985, *I Want to be a Mathematician: An Automathography*, Springer-Verlag, New York.
- Heyting, A.: 1930, Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik, *Sitzungsberichte der preußischen Akademie der Wissenschaften, phys.-math. Klasse*, 42–65.
- Hurewicz, W.: 1940, On duality theorems, *Bulletin of the American Mathematical Society* **47**, 562–563.
- Kelley, J. L.: 1991, *General topology*, *Graduate Texts in Mathematics* 27, reprint of the 1955 ed. published by Van Nostrand, Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg, New York.
- Kleiner, I.: 1989, Evolution of the function concept: A brief survey, *The College Mathematics Journal* **20**(4), 282–300.
- Kline, M.: 1972, *Mathematical Thought From Ancient To Modern Times*, 3 Volumes in a Single Book, Oxford University Press, New York.
- Leathem, J. G.: 1905, *Volume and Surface Integrals Used in Physics*, University Press, Cambridge.
- Leibniz, G.: 1694, Nova calculi differentialis applicatio et usus ad multiplicem linearum constructionem, ex data tangentium conditione, *Acta Eruditorum* **13**, 311–316.
- l'Huilier, S. A. J.: 1786, *Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs*, Decker, Berlin.
- Mc Lane, S.: 1971, *Categories for the working mathematician*, Springer, New York.
- Peano, G.: 1888, *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann*, Fratelli Bocca Editori, Torino.
- Peano, G.: 1901, *Formulaire de mathématiques*, Vol. 6, *Révue des Mathématiques*, Torino.
- Pringsheim, A.: 1916, *Vorlesungen über Zahlen - und Funktionenlehre*, Teubner, Leipzig.
- Russell, B.: 1906, The theory of implication, *American Journal of Mathematics* **28**(2), 159–202.
- Russell, B.: 1908, Mathematical logic as based on the theory of types, *American Journal of Mathematics* **30**(3), 222–262.
- Schröder, E.: 1890, *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, Vol. 1, Teubner, Leipzig.
- Weierstrass, K.: 1894, *Mathematische Werke, Band I*, Mayer & Müller, Berlin.
- Whitehead, A. N., Russell, B.: 1910, *Principia Mathematica, vol. 1*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Youschkevitch, A. P.: 1976, The concept of function up to the middle of the 19th century, *Archive for History of Exact Sciences* 27.IX **16**(1), 37–85.
- Zermelo, E.: 1908, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre, *Mathematische Annalen* **65**, 261–281.

Centrum Nauczania Matematyki i Fizyki
Politechnika Łódzka
al. Politechniki 11
PL-90-924 Łódź
e-mail ijozwik@p.lodz.pl
e-mail terepeta@p.lodz.pl

Joanna Major, Bożena Olik-Pawlik,
Tadeusz Ratusiński, Lidia Zaręba

Wybrane uwagi na temat roli zadań matematycznych w procesie nauczania-uczenia się matematyki*

Abstract. The paper presents the comments relating to the role of tasks in the process of teaching and learning of mathematics in the context of education of students studying to become teachers. In the considerations part, reference was made to the fragments of undergraduate and postgraduate works, made at seminars of didactics of mathematics.

1. Wprowadzenie

Od wielu lat prowadzone są badania dotyczące efektywnych sposobów nauczania i uczenia się matematyki. Równolegle trwa dyskusja nad właściwym przygotowaniem studentów do wykonywania zawodu nauczyciela. Jak piszą twórcy *Raportu o stanie edukacji: Są to jedne z problemów współczesnej dydaktyki, zwłaszcza w kontekście zachodzących przemian technologicznych, społecznych, kulturowych czy ekonomicznych* (2013, s. 16). Ważne jest, by student – przyszły nauczyciel – poznał istotę procesu nauczania-uczenia się matematyki, procesu złożonego i wymagającego interdyscyplinarnego spojrzenia badawczego (Czajkowska, 2015). W procesie tym można, oczywiście z pewnym uproszczeniem, wyróżnić komponenty, których świadomość istnienia powinien mieć każdy uczący tego przedmiotu. Chodzi mianowicie o kształtowanie pojęć matematycznych, rozwiązywanie zadań, prowadzenie rozumowań matematycznych oraz kształtowanie języka matematycznego (zob. Ratusiński, 2003a). Chociaż wszystkie z wymienionych tu składników rozważanego procesu są ważne na każdym poziomie edukacji, w artykule skoncentrowano się głównie na drugim z wymienionych komponentów.

*Selected comments on the role of mathematical tasks in the process of teaching-learning mathematics

2010 Mathematics Subject Classification: Primary: 97B50, Secondary: 97C70, 97D50

Key words and phrases: teachers education, teaching-learning process, problem solving, mathematical tasks

Celem opracowania jest podkreślenie jak istotny w pracy nauczyciela matematyki jest świadomy dobór lub konstrukcja zadań wykorzystywanych w procesie nauczania-uczenia się. Autorzy odwołują się do zaczerpniętych z prac dysertacyjnych – prowadzonych pod kierunkiem pracowników Instytutu Matematyki Uniwersytetu Pedagogicznego w Krakowie – przykładów zadań i ich omówień, opatrując je dodatkowo komentarzami dydaktycznymi. Złożoność i mnogość zagadnień skłoniła autorów do dokonania subiektywnej selekcji poruszanych problemów. Przykłady dobrano tak, aby z jednej strony pokazywały rozmaite działania studentów ukierunkowane na wzbogacenie ich przyszłego warsztatu pracy, z drugiej zaś, by ilustrowały rolę zadań w rozwijaniu u uczniów między innymi: matematycznych intuicji, twórczego myślenia, umiejętności stawiania pytań oraz poszukiwania na nie odpowiedzi.

2. Zadania i ich rola w procesie nauczania-uczenia się matematyki

Podanie dokładnego określenia pojęcia *zadania*, czy też *problemu*, jest *de facto*, dość trudne między innymi ze względu na fakt, że w literaturze przedmiotu terminów: *zadanie*, *problem* czy *sytuacja problemowa* używa się często zamiennie (zob. Polya, 1975; Krygowska, 1977c), a z kolei określenie *zadanie matematyczne* stosuje się, odwołując do jego rozumienia intuicyjnego (zob. Rabijewska, 1994). W literaturze można odnaleźć kilka aspektów, na które zwraca się uwagę w kontekście tego pojęcia. G. Polya podkreśla rolę zadania jako narzędzia, dzięki któremu można osiągnąć określony, chwilowo niedostępny cel (zob. Polya, 1975). A. Schoenfeld uważa, że zadaniem jest każda taka sytuacja, dla rozwiązania której należy wykonać pewne czynności intelektualne i wykorzystać strategie heurystyczne (zob. Schoenfeld, 1985). A. Z. Krygowska rozumie zadanie matematyczne jako wypowiedź powstałą na tle sytuacji problemowej, sformułowaną w języku werbalnym lub werbalno-symbolicznym, z symboliką rysunkową włącznie, zawierającą typowe polecenia i typowe pytania, tylko polecenia lub tylko pytania (zob. Krygowska, 1977c). Autorzy niniejszego opracowania przyjmują, że *zadanie matematyczne* jest pewnego rodzaju konstruktem, zaś jego rozwiązanie wymaga wykonania szeregu intelektualnych czynności bazujących na – świadomym lub nie – wykorzystaniu strategii heurystycznych. Należy dodać, iż używane w dalszej części tekstu terminy: *zadanie-problem*, *zadanie problemowe* oraz *problem matematyczny* stosowane są przez autorów zamiennie.

W literaturze z zakresu dydaktyki matematyki funkcjonują różne typologie zadań matematycznych¹ (zob. np. Krygowska, 1977c; Polya, 1993; Rabijewska, 1994; Siwek, 2005) i już one mogą sugerować rolę poszczególnych typów zadań w procesie nauczania-uczenia się matematyki. Wyodrębnianie różnych grup zadań matematycznych ukierunkowane jest na dostrzeganie specyficznych aktywności ucznia. Między innymi tym zagadnieniem zajmują się dydaktycy matematyki

¹Ze względu na ograniczoną objętość opracowania autorzy artykułu nie przywołują w tym miejscu charakterystyk poszczególnych grup zadań, dopiero w dalszej części pracy odwołują się do konkretnych typologii, bezpośrednio związanych z omawianymi przykładami. Dalecy są jednak od wnikliwej analizy prezentowanych zadań przez pryzmat wspomnianych typologii.

w swoich badaniach. Nad analizą istniejących już typologii powinni pochylić się również przyszli nauczyciele tego przedmiotu. Ważna jest bowiem refleksja nad korzyściami płynącymi z rozwiązywania przez uczniów pewnych typów zadań. Praca nad zadaniami powinna być ukierunkowana nie tylko na szybkie opanowanie przez uczniów łatwo dających się określić sprawności, wiadomości czy schematów i ich zastosowanie w stereotypowych sytuacjach, ale także na kształtowanie właściwej postawy intelektualnej uczącego się. Praca nad odpowiednio dobranymi zadaniami powinna, między innymi, rozwijać intuicje matematyczne i twórcze myślenie, prowokować do stawiania pytań i poszukiwania na nie odpowiedzi, zachęcać do kreatywności, inspirować do podejmowania badań, poszukiwania, eksperymentowania, stawiania hipotez i ich weryfikowania. Nie jest również obojętna dla rozwoju młodego człowieka umiejętność właściwego doboru i wykorzystania w procesie pracy nad zadaniem nowoczesnych technologii obecnych w otaczającym nas świecie. Autorzy artykułu te właśnie kwestie mieli na uwadze, wybierając przykłady do prezentacji w tej publikacji.

Należy zauważyć, że sam proces nauczania-uczenia się ma charakter dwutorowy, czyli podczas pracy nad zadaniami uczą się nie tylko uczniowie. Informacje zwrotne uzyskane od uczących się w ramach tego procesu, a dokładniej podczas interakcji nauczyciel – uczeń, pozwalają nauczycielowi doskonalić jego warsztat dydaktyczny i wzbogacać doświadczenia, w szczególności w zakresie doboru bardziej wartościowych dla uczniów zadań (zob. Turnau, 1990).

3. Przykłady zadań wraz z komentarzami dydaktycznymi

W tej części artykułu zaprezentowano, zapowiedziane wcześniej, przykłady zagadnień, w których kluczową rolę odgrywają odpowiednio dobrane, bądź skonstruowane zadania. Starano się pokazać, iż mogą one być narzędziem pomocnym w ujawnianiu sposobów myślenia uczących się, a także środkiem do wzbogacania ich wiedzy i umiejętności matematycznych.

Praca nad przedstawionymi tu zadaniami nie jest łatwa. Wymaga bowiem od uczących się matematyki, ale często także od nauczycieli, twórczego podejścia do analizowanych problemów, porzucenia pewnych utartych schematów rozumowania i postępowania, by móc przedstawić ich, czasami, niekonwencjonalne rozwiązania. To właśnie ten czynnik, w opinii autorów, powoduje, iż zaprezentowane dalej zadania są tak istotne i wartościowe w procesie nauczania-uczenia się matematyki. W kontekście takich zadań, S. Turnau uważa, że ich rozwiązywanie uczy krytycznego spojrzenia na dane zawarte w ich treści, wyrabia nawyk analizowania tych informacji przed przystąpieniem do poszukiwania odpowiedzi, przeciwdziała pośpiesznemu, schematycznemu dobieraniu działań prowadzących do jednoznacznego rezultatu, nieraz nawet wbrew zdrowemu rozsądkowi, gdy zadanie jest nietypowe (Turnau, 1990).

Przykład I

W codziennym życiu nierzadko znajdujemy się w sytuacjach, w których mamy do czynienia z nadmiarem lub niedomiarem informacji. Szybki rozwój technolo-

gii przyczynił się do gwałtownego wzrostu ilości ogólnie dostępnych wiadomości. Obecnie główną trudnością nie jest samo pozyskiwanie informacji, lecz ich selekcja, a czasami uświadomienie sobie, w danej sytuacji, że występuje ich deficyt bądź nadmiar. Zgodne jest to z myślą A. Z. Krygowskiej, która uważa, że należy umieć patrzeć, aby widzieć to, co chcemy zobaczyć, podobnie, żeby usłyszeć to, co nas interesuje, trzeba umieć słuchać (Krygowska, 1977c). Rozważanie odpowiednich zadań jest więc istotne z punktu widzenia przygotowywania uczących się do życia w otaczającej nas rzeczywistości.

Zadania, w trakcie rozwiązywania których uczący się matematyki potrzebuje krytycznie przyjrzeć się danym, są niejednokrotnie zadaniami otwartymi. Często nie mają one określonego algorytmu prowadzącego do rozwiązania, mogą też nie mieć jednoznacznej odpowiedzi. Pracujący nad takim zadaniem musi podjąć decyzję, które informacje pozostawić, a które odrzucić (w przypadku, gdy ma do czynienia z nadmiarem niesprzecznych danych) lub stwierdzić brak możliwości rozwiązania zadania z powodu zbyt małej liczby danych czy też z uwagi na sprzeczność informacji występujących w jego treści. Zagadnienia te poruszane są między innymi w dysertacjach G. Zielińskiej (2011) i G. Jasińskiej (2014). Motywem przewodnim badań opisanych w obu pracach, a prowadzonych na różnych poziomach edukacji, jest poszukiwanie odpowiedzi na pytanie o wpływ nadmiaru bądź niedomiaru danych na proces rozwiązywania przez uczniów zadań tekstowych. W badaniach tych podjęto próbę określenia postawy² uczniów pracujących nad przywołanym dalej zadaniem. Metodę badawczą stanowiła analiza wytworów pracy uczniów³. Oto zapowiadane zadanie:

Wyznacz obwód prostokąta wiedząc, że jego pole jest równe 18 cm^2 , a długości boków są liczbami naturalnymi. Zapisz obliczenia z komentarzem i udziel odpowiedzi (Zielińska, 2011).

Analiza zebranego materiału badawczego pozwoliła dyplomantce wyróżnić kilka uczniowskich postaw. Należy zaznaczyć, że z opisem, klasyfikacją czy wnioskami (w kontekście wszystkich przytaczanych w opracowaniu przykładów) można niejednokrotnie polemizować, jednak oddają one różnorodność postaw i ich najbardziej charakterystyczne cechy. Oto wybrane, przedstawione przez studentkę postawy badanych:

- P.1. Rozwiązanie zadania dla przykładowych długości boków (rozważenie jednego przypadku – obranie konkretnych, zgodnych z warunkami zadania, długości boków).
- P.2. Porzucenie pracy nad zadaniem w momencie stwierdzenia wieloznaczności jego rozwiązania.
- P.3. Rozważanie wszystkich możliwych przypadków dla różnych długości boków prostokąta bez udzielenia odpowiedzi końcowej do zadania.

²Przez termin *postawa* rozumiano stosunek człowieka do życia lub do pewnych zjawisk, wyrażający jego poglądy; też: sposób postępowania lub zachowania wobec określonych zjawisk, zdarzeń lub w stosunku do ludzi (*Słownik Języka Polskiego*, 2000).

³W badaniach brało udział 38 gimnazjalistów uczących się w III klasie, a przytoczone zadanie stanowiło część przygotowanej przez studentkę karty pracy.

P.4. Zauważenie wieloznaczności rozwiązania zadania i podanie jednego z takich rozwiązań.

P.5. Zauważenie wieloznaczności rozwiązania zadania i próba podania wszystkich takich rozwiązań.

Poniżej przytoczono wypowiedzi uczniów prezentujących, według autorki przywoływanej pracy, postawę P.2.

- *Są różne możliwości rozwiązania i ciężko określić, która z nich jest prawidłowa.*
- *Wychodziło mi kilka możliwości i nie wiem, co z tym zrobić.*
- *Na to pytanie nie ma jasnej odpowiedzi, gdyż istnieją dwie prawidłowe.*
- *Nie wiadomo, co zrobić, która z odpowiedzi jest dobra.*
- *Są dwa rozwiązania, tak być nie może.*
- *Są dwa rozwiązania i nie da się dać odpowiedzi, tu wszystkie pasują za każdym razem są liczby naturalne, a przecież zadania zawsze mają odpowiedzi (Zielińska, 2011).*

Jak zauważyła dyplomantka, autorzy cytowanych wypowiedzi, podczas pracy natrafiali na pewną bezradność w zakresie wyciągania wniosków z prowadzonych rozumowań. Ponadto odnotowała, że znalezienie jednego rozwiązania często skutkowało zakończeniem przez badanego pracy nad zadaniem. Większość tych uczniów, którzy znaleźli kilka rozwiązań, nie formułowała natomiast żadnej odpowiedzi. W swojej pracy studentka zwróciła uwagę na kwestię charakteru zadań zamieszczanych na kartach podręczników. Przyzwyczajanie uczniów do zadań o charakterze problemów konwergentnych może być ograniczeniem rodzącym sugestią, iż zawsze istnieje tylko jedno dobre rozwiązanie dla sytuacji problemowej. Wydaje się, że tego typu postawy są wynikiem fałszywych przeświadczeń badanych o cechach, jakimi charakteryzują się zadania matematyczne.

Analiza zgromadzonego materiału ujawnia różnego rodzaju rozumowania, przeszkody i trudności uczniów związane z pracą nad przedstawionym tu zadaniem, co wskazuje nauczycielowi kierunek pomocy, jakiej powinien udzielić uczniom w ich dalszej pracy.

Przykład II

W pracy K. Palimaki (2015) zaproponowano zestaw zadań, poprzedzony jednym wspólnym poleceniem, wymagającym od rozwiązującego wskazania, w kontekście każdego z zadań, jednej z poniższych odpowiedzi:

- wszystkie informacje podane w zadaniu są potrzebne do jego rozwiązania;
- podane informacje są niewystarczające do jego rozwiązania;
- jest za dużo informacji i zadanie można rozwiązać, pomijając niektóre z nich (dane nie są sprzeczne);
- informacje podane w zadaniu są sprzeczne.

Praca ucznia nad przygotowanymi zadaniami zmierza do odkrycia związków między danymi i szukanymi. Istotne jest to, że uczeń może dokonać tego na wiele różnych sposobów. Jednak, jak pisze autorka pracy: *Nie chodzi tu o to, aby uczniowie rozwiązywali każde zadanie w całości lub zapisywali wszystkie zależności (co wiąże się z wydłużonym czasem rozwiązania). Główna aktywność uczniów w trakcie rozwiązywania zadań polega na tym, aby „wyobrazić sobie” jak przebiegałby proces rozwiązywania każdego zadania; chodzi więc o to, aby uczniowie opracowali zestaw kolejnych czynności (ułożyli plan rozwiązywania zadania). Sprzyja to nie tylko rozwijaniu wyobraźni arytmetycznej czy algebraicznej uczniów, lecz także rozbudza intelektualnie każdego z nich* (Palimąka, 2015).

Oto jedno z zadań ze wspomnianego zestawu, oczywiście – jak zapowiadano wcześniej – poprzedzone prośbą o wybór jednej z zaproponowanych, a przedstawionych na początku przykładu II, odpowiedzi.

Zbiór $B = [-7, 12]$ jest przeciwdziedziną funkcji $f(x) = 3x + 4$. Wyznacz dziedzinę tej funkcji, wiedząc że zbiorem wartości jest zbiór $C = (1, 10)$.

Dla zobrazowania charakteru pracy nad zadaniem, autorka proponuje wykorzystanie pewnych wskazówek heurystycznych. Stawianie pytań i udzielanie odpowiedzi na nie pozwala na analizę zależności pomiędzy obiektami matematycznymi, o których jest mowa w treści zadania. Możliwym staje się wówczas wskazanie cech zadania (za mało, wystarczająco lub za dużo danych). Poniżej zaprezentowano przykładową analizę wspomnianego zadania, nadającą określony kierunek pracy nad nim.

1. Co jest niewiadome? Dziedzina funkcji.
2. Co jest dane, jaki jest warunek? Dziedzina jest zbiorem wszystkich argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości ze zbioru C , a przeciwdziedziną funkcji jest zbiór B . Zbiór wartości funkcji zawiera się w przeciwdziedzinie funkcji f .

Z warunków zadania mamy

$$\begin{cases} 1 < 3x + 4 \\ 10 > 3x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x < 2. \end{cases}$$

Wynika stąd, że: $x \in (-1, 2)$.

3. Czy warunek wystarcza do jednoznacznego określenia niewiadomej? Tak.
4. Czy warunek jest niewystarczający lub zbyt obszerny? Warunek jest zbyt obszerny.

Zazwyczaj uczeń – mając zadanie – musi je rozwiązać. W omawianym przykładzie nie chodzi natomiast o samo rozwiązanie zadania (o czym czytamy w przywołanej wyżej wypowiedzi studentki), lecz o taką analizę jego treści, która pozwoli na wskazanie jednej z podanych na wstępie odpowiedzi ukazujących istotę tego zadania.

Warto tu zauważyć, iż styl pracy nad przytoczonym zestawem zadań koresponduje z badaniami dydaktycznymi prowadzonymi między innymi przez A. Żeromską (1998, 2004), a dotyczącymi postaw uczących się wobec zadań.

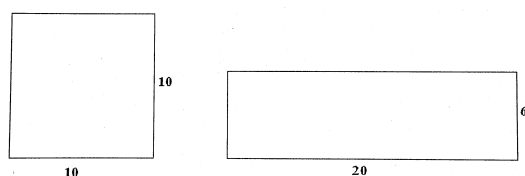
Nieco odmienny charakter mają kolejne przykłady.

Przykład III

W pracy A. Ogieli (2009) podjęto próbę skonstruowania zestawu zadań służących kształtowaniu pojęć geometrycznych, w szczególności intuicji związanych z pojęciem wielokątów równoważnych przez pocięcie. Zaproponowany przez studentkę zestaw zawiera zadania, które – używając terminologii A. Z. Krygowskiej – można, zdaniem autorów, zaliczyć do zadań-ćwiczeń i zadań problemowych⁴.

Cykl tych zadań zawiera takie zadania, w których należy najpierw utworzyć tangramy (przez rozcinanie kwadratu według instrukcji), następnie ułożyć z kartonowych modeli figur (tanów) figury tangramowe, zbudować z wybranych (bądź wszystkich) tanów wielokąty wypukłe, aż w końcu rozstrzygnąć czy wielokąty są równoważne przez pocięcie⁵. Poniżej zaprezentowano jedno z takich zadań.

Czy poniższe figury są równoważne przez pocięcie (Ryc. 1)?



Ryc. 1

Zadanie to, zaproponowane przez A. Ogielę (2009), jest ćwiczeniem (w sensie typologii A. Z. Krygowskiej⁶), poprzez które można kształtować u uczniów zagadnienie równoważności przez pocięcie. W szczególności może ono prowokować rozwiązujących do wskazania argumentów uzasadniających, że przywołane figury nie są równoważne przez pocięcie.

W pracy sformułowano również inny, zaprezentowany poniżej, problem.

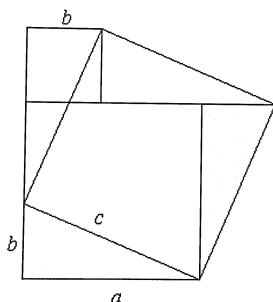
Rozetnij dwa kwadraty tak, aby z otrzymanych części otrzymać jeden kwadrat.

⁴Wśród zadań matematycznych A. Z. Krygowska wyróżnia pewien ich typ, które nazywa *problemami*. Zwraca uwagę na fakt, że jeśli zadanie nie jest standardowe, jest dla ucznia nowe lub dotyczy stosunków dla niego abstrakcyjnych, to nie przesądza to o tym, by zadanie zaliczyć na danym poziomie nauczania do zadań-problemów. Decyduje o tym nie sama trudność, ale rodzaj trudności (Krygowska, 1977c). Autorka zwraca też uwagę na fakt, że zadania-problemy są *zadaniami otwartymi*. W tej samej pracy autorka pisze, że: *dydaktycy matematyki najczęściej nie definiują pojęcia „problemu matematycznego”, w odróżnieniu od innych zadań matematycznych, ilustrują te różnice przykładami i kontrprzykładami*. Z kolei S. Jones podaje następujące określenie: *problem matematyczny to pytanie dotyczące matematyki, na które odpowiedź nie jest natychmiastowa i nie może być uzyskana przez bezpośrednie zastosowanie znanych schematów* (w: Jones, 1966; za: Krygowska, 1977c, s. 25).

⁵Dwa wielokąty są równoważne przez pocięcie (na wielokąty), jeżeli jeden z nich można pociąć na skończoną liczbę wielokątów, z których da się złożyć drugi wielokąt. Naturalnym jest założenie, że przy układaniu wielokątów poszczególne części nie mogą na siebie nachodzić, mogą jedynie mieć wspólny brzeg lub jego część.

⁶Rozwiązywanie tego typu zadania-ćwiczenia wymaga aktywności odtwórczych. Praca nad zadaniem ma na celu zmechanizowanie pewnych czynności, operacji występujących często w toku rozwiązywania innych zadań (Krygowska, 1977c).

Na rysunku 2 przedstawiono, zaproponowany przez dyplomantkę, szkic rozwiązania zadania.



Ryc. 2

Rozwiązanie to jest interesujące z punktu widzenia matematyki, gdyż z jednej strony stanowi kluczowy element w dowodzie twierdzenia Bolyai-Gerwiena (omówionego w dalszej części artykułu), z drugiej zaś przeanalizowanie zadania i tego właśnie rozwiązania w innym kontekście ukazuje geometryczny dowód twierdzenia Pitagorasa. Mamy tu do czynienia z naturalnym przenikaniem się różnych zagadnień matematycznych, którego uświadomienie jest istotne zarówno dla nauczyciela ukazującego pewną strukturę wiedzy matematycznej, jak i dla ucznia, który tę wiedzę strukturalizuje. Należy zauważyć, że studentka – proponując powyższe zadania – potencjalnie stwarza sytuację dydaktyczną, która prowokować może uczniów do poczynienia refleksji po rozwiązaniu zadań. Zwraca się tu uwagę na równość pól figur tangramowych, a więc na niezmienniczość pola w przekształceniach izometrycznych.

Zaprezentowane w pracy A. Ogieli (2009) zadania mogą stać się załącznikiem do budowania przez studenta – przyszłego nauczyciela – propozycji dydaktycznych zmierzających do kształtowania nowych dla uczniów pojęć, do odkrywania twierdzeń, a przez to do poznawania nowych zagadnień matematycznych na drodze własnych doświadczeń uczących się.

Podczas rozwiązywania odpowiednio skonstruowanego cyklu zadań uczeń może, krok po kroku, odkryć istotę nowego dla niego pojęcia matematycznego. W rzeczywistości ma do czynienia ze złożonym problemem „rozbitym” na szereg prostszych zadań.

Przykład IV

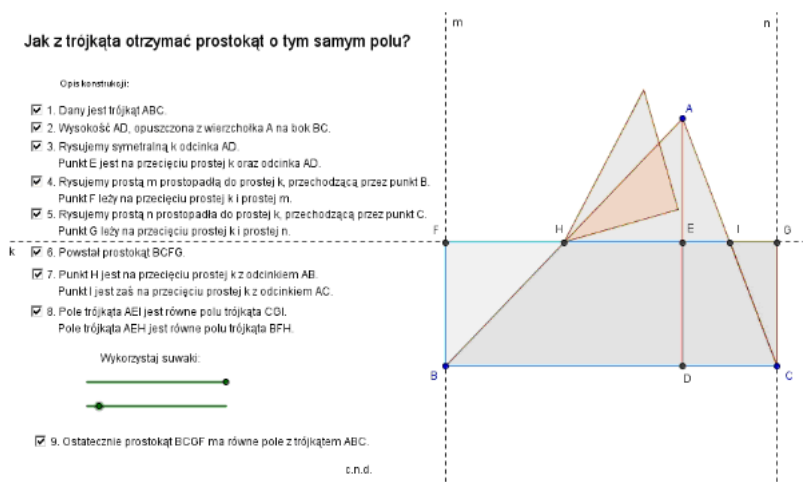
W pracy A. Suder (2009) wypracowano podwaliny koncepcji dydaktycznej służącej opracowaniu zagadnień równoważności przez pocięcie, bazującej na szeregu zadań-problemów wspartych specjalnie przygotowanymi plikami komputerowymi.

Obserwacje poczynione podczas pracy ucznia umożliwiają odkrycie dowodu twierdzenia Bolyai-Gerwiena, które mówi, iż *dwa wielokąty są równoważne przez pocięcie wtedy i tylko wtedy, gdy mają to samo pole*. Dowód „w jedną stronę” jest

oczywisty i wynika bezpośrednio z elementarnych własności planimetrii. Uzasadnienie, iż wielokąty o jednakowym polu są równoważne przez pocięcie jest już mniej oczywiste i przebiega w kilku etapach, ukazujących kolejno możliwości:

- pocięcia wielokąta na trójkąty;
- pocięcia trójkąta na części, z których możliwe jest „złożenie” prostokąta;
- pocięcia prostokąta na części, z których „złożyć” można kwadrat;
- pocięcia dwóch kwadratów na części, z których da się zbudować jeden kwadrat.

Omawiana praca zawiera więc w istocie rozważania, które rodzą się na bazie problemów poruszanych w dysertacji A. Ogieli (2009). Możemy tu jednak dostrzec nowy aspekt omawianego zagadnienia. Chodzi o kluczową rolę zadań problemowych skonstruowanych przez studentkę, które mogą być rozwiązywane ze wsparciem komputera. Pliki utworzone przez autorkę korespondują z poszczególnymi częściami dowodu twierdzenia Bolyai-Gerwiena. Ich celem była nie tylko wizualizacja rozważanego zagadnienia, lecz również uświadomienie uczniowi struktury i hierarchii czynności podczas postępowania dowodowego. Studentka między innymi stworzyła plik (zob. rysunek 3), dzięki któremu uczeń może śledzić krok po kroku ideę pomysłu „pocięcia – przełożenia” trójkąta na takie części, z których można „złożyć” prostokąt.



Ryc. 3

Autorka tak skonstruowała pliki, by stanowiły one w pełni interaktywną pomoc i by uczeń miał kontrolę nie tylko nad pojawiającymi się etapami, lecz również miał możliwość zmiany własności obserwowanych danych wejściowych – w tym przypadku kształtu trójkąta. Z dydaktycznego punktu widzenia to bardzo istotny aspekt, gdyż w nauczaniu tradycyjnym rzadko można „obserwować”, np. ten sam etap dowodu, jednocześnie dla różnych rodzajów trójkątów. Tym samym dypl-

mantka stworzyła uczniowi możliwość analizy szerokiego spektrum przypadków i całościowego spojrzenia na sytuację.

Rozważania prowadzone w przywołanych pracach A. Ogieli (2009) i A. Suder (2009) ukazują jak można, poprzez dobór odpowiednich zadań, stworzyć sytuację problemową, dzięki której uczeń będzie prowokowany do odkrywania twierdzenia matematycznego, w tym wypadku – twierdzenia wykraczającego poza podstawę programową IV etapu edukacyjnego.

Przykład V

W pracy nad zadaniem, o czym była już mowa wcześniej, istotną rolę może odgrywać odpowiednie użycie nowoczesnych mediów – co w konsekwencji wpłynie nie tylko na przebieg pracy nad zadaniem, ale również na uzyskane efekty. Dysertacje E. Gwiżdż (2008) i R. Jeczko (2008), stanowiące podstawę tego przykładu, wpisują się w nurt badań związanych z pracą nad zadaniem matematycznym. Zadania problemowe stanowią tu narzędzie do ujawniania wiedzy i umiejętności matematycznych uczących się, pozwalają poznać (z głębić) sposób myślenia ucznia postawionego w nowej dla niego sytuacji

Jak pisze R. Howe: *sukces tradycyjnego nauczania przyczynił się do powstania opartej na matematyce technologii, która z kolei stworzyła sytuację, w jakiej tradycyjne nauczanie już nie jest odpowiednie* (Howe, 1999, s. 102). Dostrzegając możliwości pozytywnego wpływu nowoczesnych technologii na sposób podejścia do nauczania matematyki, w tym także na rozwiązywanie zadań, warto przekonywać studentów – przyszłych nauczycieli matematyki, aby częściej – w procesie nauczania-uczenia się – aktywizowali uczniów, wykorzystując między innymi kalkulator graficzny czy komputer. Wydaje się, że zarówno nauczyciel z długim stażem zawodowym, jak i mniej doświadczony, ale odpowiednio ukierunkowany abiturient studiów matematycznych, potrafi wykorzystać dobrodziejstwa nowoczesnej technologii, adaptując do jej potrzeb starsze, sprawdzone kanony dydaktyki matematyki. Postawę taką prezentują autorki prac (Gwiżdż, 2008; Jeczko, 2008). Dyplomantki za narzędzie badawcze przyjęły następujące zadanie:

Sporządź wykres funkcji $y = f(m)$, gdzie $f(m)$ jest równe liczbie pierwiastków równania:

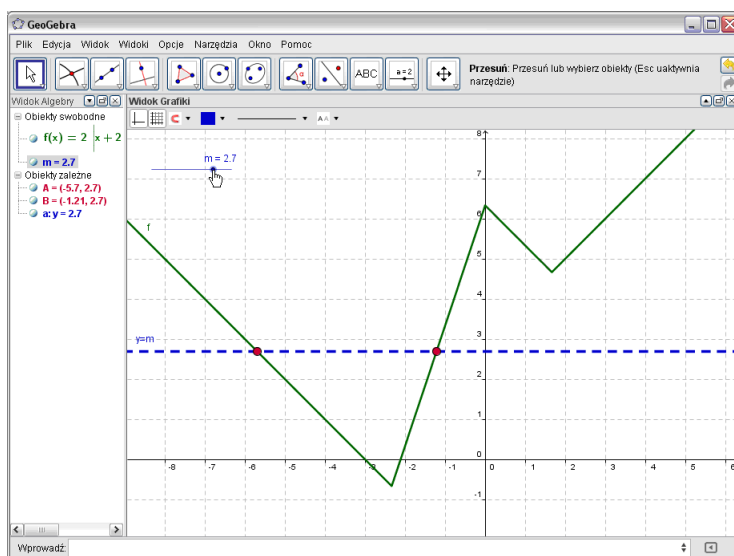
$$2 \left| x + 2\frac{1}{3} \right| - 2|x| + \left| x - 1\frac{2}{3} \right| = m$$

w zależności od parametru $m \in R$.

Zadanie to można rozwiązać tradycyjnie, tzn. na kartce papieru, kilkoma różnymi sposobami. Warto zwrócić uwagę na fakt, iż jest ono sformułowane w sposób przejrzysty, jego treść nie jest skomplikowana ani nadmiernie rozbudowana. Mimo swej prostoty nie jest to jednak ani trywialne, ani szablonowe zadanie i nie można go rozwiązać poprzez zastosowanie tylko znanego schematu postępowania. Wymaga ono od ucznia pewnego aktu twórczego. Na poruszane w zadaniu zagadnienie nie ma natychmiastowej odpowiedzi i nie można jej uzyskać przez bezpośrednie zastosowanie znanych algorytmów. Interesujące jest jednak to, że odpowiedni program

komputerowy może nadać rozwiązaniu nowy sens, nowe spojrzenie na problem, o czym przekonały się studentki. Może on mieć szczególne znaczenie zwłaszcza wtedy, gdy uczeń nie potrafi rozwiązać zadania w tradycyjny sposób, jego rozwiązanie nie jest pełne lub gdy rozwiązujący nie jest przekonany co do poprawności rozwiązania.

Przedmiotem zainteresowania dyplomantek było śledzenie samego procesu rozwiązywania zadania. W przywołanych pracach opisano badania indywidualne (wspomagane użyciem komputera) przeprowadzone wśród uczniów liceum ogólnokształcącego. W każdej z opisywanych prac badania przebiegały w dwóch etapach. W pierwszym śledzono próbę rozwiązania problemu bez pomocy komputera. Uczeń, mając do dyspozycji jedynie swoją wiedzę, tablice matematyczne i przybory do pisania, próbował rozwiązać zadanie. Na zakończenie tego etapu studentki przeprowadziły z każdym uczniem rozmowę, której celem było wyjaśnienie przyczyn ewentualnego niepowodzenia ucznia i ujawnienie trudności jakie mu towarzyszyły podczas rozwiązywania zadania. W kolejnym etapie udostępniono uczniom komputery z odpowiednim programem (np. GeoGebra lub Wykresy funkcji). W tej nowej sytuacji uczniowie podejmowali ponowną próbę rozwiązania problemu.



Ryc. 4

Praca w drugim etapie rejestrowana była przy pomocy specjalnego programu komputerowego. Z otrzymanego zapisu stworzony został film, który posłużył potem jako materiał do analizy pracy uczniów. Przykładowy zrzut ekranu ukazujący pracę ucznia nad zadaniem ilustruje rysunek 4.

Obserwacje pracy uczniów nad zadaniem-problemem i poczynione przez dyplomantki uwagi zdają się być zgodne z teorią „rusztowań” (Kutzler, 1998), która mówi, że użycie komputera pomaga uczniom w uzupełnieniu ewentualnych luk w wiedzy czy umiejętnościach, wynikiem których może okazać się bezradność w podejściu do problemu. Nie każdy poddany badaniom uczeń był w stanie rozwiązać

postawiony mu problem już na pierwszym etapie. Jednak możliwość skorzystania w trakcie pracy z odpowiedniego programu komputerowego zachęciła uczniów, szczególnie tych o niskich umiejętnościach matematycznych, do zajęcia się zadaniem i pozwoliła na podjęcie kolejnej próby jego rozwiązania. Badani mogli nadal pracować nad zadaniem, a w konsekwencji nabywać nowe doświadczenia.

Zastosowanie nowoczesnych technologii nie stoi bynajmniej w sprzeczności z ugruntowanymi przesłankami dydaktycznymi. Omówione przykłady potwierdzają stwierdzenie: *jeżeli równocześnie z ujawnieniem się potrzeby, rodzi się w mym mózgu sposób na jego zaspokojenie, to wówczas nie ma zadania. Jeśli zaś nie znajduje się takiego sposobu, to dopiero wtedy mamy przed sobą zadanie. Tak więc zadanie pojawia się wówczas, gdy zachodzi potrzeba świadomego poszukiwania środka, za pomocą którego można osiągnąć dobrze widoczny, lecz chwilowo niedostępny cel. Rozwiązać zadanie – to tyle, co znaleźć ten środek* (Polya, 1975, s. 145). Jak pokazały badania, takim środkiem może być komputer, a ściślej mówiąc, stosownie dobrany program komputerowy.

Dyplomantki dostrzegły istotne aspekty dotyczące wspierania procesu dydaktycznego nowoczesnym medium. Dzięki wykorzystaniu komputera nauczyciel może stworzyć taką sytuację dydaktyczną, która pozwoli uczniom z innej perspektywy spojrzeć na problem, z którym do tej pory miał trudność. Taki zabieg może sprawić, że uczniowie lepiej zrozumieją problem i w konsekwencji udzielą odpowiedzi na postawione w zadaniu pytania. Umiejętne wykorzystanie komputera może zatem ponownie zaktywizować i zachęcić uczniów do dalszej pracy nad porzuconym problemem. Przyszły nauczyciel, opracowując i korzystając z tego typu pomocy dydaktycznych, powinien mieć ten fakt na uwadze.

Powinien być jednak świadomy także trudności i zagrożeń wynikających z zastosowania nowoczesnych technologii do wsparcia procesu dydaktycznego (De Corte, 1995), które mogą wynikać na przykład z bezgranicznego zaufania do tego narzędzia (Ratusiński, 2001; Pawlak, 2001; Kąkol, Ratusiński, 2004, 2007). Często można spotkać się z opinią, iż w tradycyjnym rozwiązywaniu zadań większy nacisk kładzie się na uzyskanie prawidłowej odpowiedzi, niż na znajdowanie sposobów rozwiązania zadania. Komputer, pozwalając uczniom znaleźć poprawną odpowiedź, jest dla nich na tyle przekonujący, że zupełnie nie czują potrzeby dowodzenia czy uzasadniania zaobserwowanych spostrzeżeń. Komputer w tej sytuacji jawi się jako pewnego rodzaju *przeszkoda epistemologiczna* (Pawlak, 2001; Sierpińska, 1987). Uczniowie, którzy w badaniach E. Gwiżdż (2008) i R. Jeczko (2008) uzyskali z pomocą komputera satysfakcjonujące ich odpowiedzi, zaprzestali dalszej pracy w celu uzasadnienia poprawności sformułowanych hipotez. Wykorzystanie komputera osłabiło ich dalszą motywację do działania. Co więcej, prowokowani do udowodnienia swoich hipotez, najczęściej jeszcze raz odtwarzali przebieg swojej pracy na komputerze, nie uzasadniając matematycznie poprawności swoich spostrzeżeń. Wielu dydaktyków w swych pracach przywoływało to zjawisko, obserwując podobne osłabienie zainteresowania odkryciem pełnego rozwiązania po uzyskaniu odpowiedzi w szczególnym przypadku. W kontekście dysertacji obserwacje takie widoczne są np. w pracy G. Zielińskiej (2011).

4. Zakończenie

Należy zaznaczyć, że poruszane w artykule zagadnienia nie są nowe. Są one jednak nadal aktualne i wydają się być kluczowe dla rozwijającej się dziedziny naukowej, jaką jest dydaktyka matematyki. Nadal bowiem w kształceniu matematycznym ważna jest myśl A. Z. Krygowskiej: *dydaktyka matematyki eksponuje aktywność twórczą, czynny i świadomy udział uczącego się w odkrywaniu pojęć, wzorów, twierdzeń, dowodów, w schematyzowaniu sytuacji, w ich matematyzowaniu, ogólnie w rozwiązywaniu problemów bardzo zróżnicowanych, obejmujących całość materiału nauczania* (Krygowska, 1981a, s. 13). Rozwiązywanie odpowiednio dobranych zadań, to bez wątpienia jedna z ważniejszych aktywności, na którą należy kłaść nacisk w kształceniu matematycznym. Stwierdzenie to nie jest bezpodstawne, w opinii autorów artykułu warto, by stanowiło (pewnego rodzaju) apel do wszystkich, którzy mają wpływ na organizację i przebieg procesu nauczania-uczenia się matematyki, gdyż – zgodnie z tym, co stwierdziła A. Z. Krygowska – *uczeń tworzy sobie taką koncepcję matematyki, jaka mu się ukazuje przez pryzmat rozwiązywanych przez niego zadań* (Krygowska, 1977c, s. 3).

Uwagi poczynione w artykule nie wyczerpują tematyki związanej z rolą zadań w kształceniu matematycznym. Od wielu lat jest ona bowiem przedmiotem zainteresowania zarówno dydaktyków matematyki, jak i nauczycieli praktyków, a badania procesu nauczania-uczenia się matematyki odbywają się wielotorowo, z uwzględnieniem różnych jego aspektów. Przykładem mogą być tu te badania, w których przedmiotem jest proces pracy nad zadaniem matematycznym (Ciosek, 1976; Ciosek, Pawlik, 1998; Czajkowska, 2005, 2007, 2009; Czaplińska, 2003a, 2003b; Schoenfeld, 1985; Polya, 1993, 1975; Hejny, 2003; Major, 2006; Major, Poważka, 2012; Zaręba, 2003, 2012, 2015) lub takie, w których zadania stanowią narzędzie diagnostyczne umożliwiające poznanie zjawisk towarzyszących procesowi nauczania-uczenia się (Legutko, 1987; Nowecki, 1974, 1975, 1977; Pardała, Uteeva, Ashirbayev, 2015; Treliński, 2006; Żeromska, 1998, 2004). Odrębny nurt stanowią badania dotyczące roli nowoczesnych technologii w procesie rozwiązywania zadań matematycznych (Kąkol, Ratusiński, 2004, 2007; Ratusiński, 2001, 2003a, 2003b; Parcia, 2004; Wojtuś, 2007).

Każde z rozważanych w artykule zagadnień oświetla z innej perspektywy kwestie dotyczące wykorzystywania zadań w procesie nauczania-uczenia się matematyki. Każde z nich pozwala także spojrzeć na wskazane wcześniej elementy procesu kształcenia przez pryzmat zadań odgrywających w nim kluczową rolę. Chodzi, między innymi o to, że zaprezentowane w opracowaniu przykłady zadań ilustrują nie tylko aspekt związany z ich rozwiązywaniem, ale ukazują również ich możliwy wpływ na inne komponenty procesu kształcenia – kształtowanie pojęć matematycznych czy prowadzenie rozumowań. W artykule starano się przede wszystkim podkreślić wagę przemyślanego doboru zadań, w szczególności takich, dzięki którym możliwe jest tworzenie spójnych koncepcji dydaktycznych. Omówiono przykład ilustrujący wpływ nadmiaru, bądź niedomiaru danych na proces rozwiązywania zadań. Ukazano też problematykę dotyczącą projektowania cyklu zadań o schemacie rozwiązania mogącym nawiązywać do etapów rozwiązywania zadania (Polya, 1993). Kluczową rolę w przedstawionym w artykule przykładzie odgrywa etap dotyczący układania planu rozwiązania zadania. Zwrócono na to uwagę, ponieważ

planowanie pracy nad zadaniem, czy uczenie rozwiązywania zadań, to jedne z istotniejszych kwestii w nauczaniu. W niniejszej pracy zobrażowano również, w jaki sposób można – za pomocą odpowiednio skonstruowanego cyklu zadań – kształtować pojęcie matematyczne. Wykorzystanie nowoczesnych technologii pozwoliło ukazać to samo zadanie w innym świetle – jako zadanie prowokujące uczniów do specyficznych aktywności matematycznych związanych z odkrywaniem, formułowaniem i dowodzeniem twierdzeń. Przytoczono ponadto przykład zadania problemowego stanowiącego narzędzie nie tylko do ujawniania wiedzy i umiejętności matematycznych uczących się, ale równocześnie (dzięki wsparciu komputerowemu) będącego pomocą dla nauczyciela w ukierunkowaniu ucznia do dalszej pracy nad wcześniej „porzuconym” przez niego zadaniem. Wszystkie, poruszone w przykładach, zagadnienia są ważne zarówno z punktu widzenia nauczyciela praktyka, studenta przygotowującego się do zawodu nauczyciela, jak i dydaktyka matematyki.

Wiedza i umiejętności matematyczne pełnią w naszym codziennym życiu istotną rolę, a współczesny świat podlega bardzo szybkim i głębokim przemianom, co wpływa także na system kształcenia i stanowi wyzwanie dla całej edukacji. Jednocześnie na każdym poziomie nauczania główną oś edukacji matematycznej stanowi rozwiązywanie zadań. Przygotowując ucznia (w ramach szkolnego nauczania) do życia w otaczającej go rzeczywistości, powinno się więc zwracać uwagę na rozwiązywanie takich zadań, które pozwalają kształtować szeroko pojęte kompetencje matematyczne, a także uczą myślenia i wpływają na rozwój kultury matematycznej młodych ludzi. Nie tylko wiedza jest bowiem istotna. Oprócz wiedzy potrzebna jest równocześnie, między innymi umiejętność jej wykorzystywania, matematyzowania sytuacji codziennych, prowadzenia rozumowań, argumentowania, stawiania hipotez i ich weryfikacji, zadawania pytań i poszukiwania na nie odpowiedzi – to ważne elementy rozwoju każdego człowieka. Warto jest zatem kształcić tak, by zdobyta wiedza i zgromadzone doświadczenia pozwalały na skuteczne rozwiązywanie napotykaných problemów w nieustająco zmieniającym się świecie. Nauczyciele, jako przewodnicy w procesie edukacji, powinni być wyczuleni na te kwestie.

Zarówno uczenie się, jak i nauczanie matematyki odbywa się w dużej mierze poprzez rozwiązywanie zadań matematycznych. Służą one oczywiście realizowaniu różnorodnych celów nauczania matematyki na wszystkich poziomach edukacji.

Jednak rozwiązując zadania, uczeń powinien nie tylko nabywać nową wiedzę i doskonalić różne umiejętności, ale również mieć sposobność do rozwijania aktywności specyficznych dla działalności matematycznej oraz kształtowania postaw i umiejętności potrzebnych współczesnemu człowiekowi niezależnie od dziedziny jego działalności (Turnau, 1990). Świadomość tego faktu i właściwe jego wykorzystanie w procesie nauczania-uczenia się matematyki powinno być zasadniczym aspektem kształcenia przyszłych nauczycieli.

Literatura

- Ciosek, M.: 1976, *Dydaktyczne problemy związane z strategiami stosowanymi w rozwiązywaniu zadań matematycznych*. Nieopublikowana rozprawa doktorska, WSP Kraków.
- Ciosek, M., Pawlik, B.: 1998, O trudnościach studentów I roku matematyki w uczeniu się matematyki w świetle analizy ich rozwiązań zadań z geometrii, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **20**, 5–48.

- Czajkowska, M.: 2005, *Wartości motywacyjne zadań matematycznych*, Wydawnictwo Akademii Świętokrzyskiej, Kielce.
- Czajkowska, M.: 2007, The goal of a mathematical problem for the author and the recipient, in: J. Guncaga, Z. Takac (ed.), *Mathematics at school today and tomorrow*, Katolicka Univerzita w Ružomberoku, Ružomberok, 31–35.
- Czajkowska, M.: 2009, IT as a means of reducing mathematical helplessness, *IMEM 2009 Interdisciplinary Relationships in the Theory and Practice of Informatics, Management, Economics and Mathematics*, Proceedings of International Congress, Catholic University in Ružomberok, 518–529.
- Czajkowska, M.: 2015, Postawy nauczycieli matematyki wobec zmian w edukacji, *Společnostvo i Edukacija. Międzynarodowe Studia Humanistyczne* **18**(3), 81–94.
- Czaplińska, J.: 2003a, Przyczynek do badań nad strategiami rozwiązywania zadań matematycznych, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **25**, 5–68.
- Czaplińska, J.: 2003b, Trudności w stosowaniu pojęć analitycznych przez absolwentów szkół średnich podczas rozwiązywania zadania egzaminacyjnego, *Disputationes Scientifical Univ. Catholicae in Ružomberok* **3**(3), 3–10.
- De Corte, E.: 1995, Psychologiczne aspekty zmian w edukacji związanych z zastosowaniem komputerów, *Komputer w Szkole* **3**, 44–55.
- Dobrzycki, A.: 1994, Przykłady rozwiązywania zadań w procesie nauczania matematyki, w: B. Rabijewska (red.), *Wprowadzenie do wybranych zagadnień dydaktyki matematyki – przewodnik po literaturze*, Wydawnictwo Uniwersytetu Wrocławskiego, Wrocław, 263–295.
- Gucewicz-Sawicka, I.: 1982, Proces uogólniania w nauczaniu matematyki, w: Z. Krygowska (red.), *Podstawowe zagadnienia dydaktyki matematyki*, PWN, Warszawa, 107–118.
- Gwiżdż, E.: 2008, *Rola komputera w procesie rozwiązywania zadań funkcyjnych z parametrem na przykładzie badań przeprowadzonych wśród uczniów III klasy liceum ogólnokształcącego*. IM UP, Kraków, praca magisterska pod kierunkiem T. Ratusińskiego.
- Hejny, M.: 2003, Anatomia słovnej úlohy o veku, *Disputationes Scientifical Universitatis Catholicae in Ružomberok*, Vol. III(3), Ružomberok, Katolicka Univerzita, 21–32.
- Howe, R.: 1999, Znajomość i nauczanie matematyki elementarnej, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **21**, 97–109.
- Jasińska, G.: 2014, *Nadmiar danych w zadaniach tekstowych*. IM UP, Kraków, praca dyplomowa pod kierunkiem J. Major.
- Jeczko, R.: 2008, *Rola komputera w rozwiązywaniu zadań matematycznych na przykładzie badań dotyczących zadania funkcyjnego z parametrem przeprowadzonych wśród uczniów szkoły średniej*. IM UP, Kraków, praca magisterska pod kierunkiem T. Ratusińskiego.
- Kalinowska, A.: 2010, *Matematyczne zadania problemowe w klasach początkowych - między wiedzą a jej formalizacją*, Oficyna Wydawnicza Impuls, Kraków.
- Kąkol, H., Powązka, Z.: 1998, *Pojęcie funkcji, część 2*, Wydawnictwo „Dla szkoły”, Bielsko-Biała.

- Kąkol, H., Ratusiński, T.: 2004, Rola komputera w procesie rozwiązywania zadań matematycznych, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **26**, 119–142.
- Kąkol, H., Ratusiński, T.: 2007, The role of computer in the process of solving of mathematical problems (results of research), *Teaching Mathematics & Computer Science* **5**, 67–80.
- Kompetencje kluczowe w uczeniu się przez całe życie europejskie ramy odniesienia.*: 2007, Urząd Oficjalnych Publikacji Wspólnot Europejskich, Luksemburg.
- Kopański, S.: 2003, *W poszukiwaniu matematycznych talentów*, Wydawnictwo „Dla szkoły”, Bielsko-Biała.
- Kozielecki, J.: 1966, *Zagadnienia psychologii myślenia*, PWN, Warszawa.
- Krygowska, Z.: 1959a, Uwagi o zadaniach matematycznych rozwiązywanych w szkole, *Matematyka* **5**, 257–264.
- Krygowska, Z.: 1959b, Uwagi o zadaniach matematycznych rozwiązywanych w szkole, *Matematyka* **6**, 344–351.
- Krygowska, Z.: 1977a, *Zarys dydaktyki matematyki, cz. 1*, WSiP, Warszawa.
- Krygowska, Z.: 1977b, *Zarys dydaktyki matematyki, cz. 2*, WSiP, Warszawa.
- Krygowska, Z.: 1977c, *Zarys dydaktyki matematyki, cz. 3*, WSiP, Warszawa.
- Krygowska, Z.: 1981a, Główne problemy i kierunki badań współczesnej dydaktyki matematyki, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **1**, 7–60.
- Krygowska, Z.: 1981b, *Koncepcje powszechnego matematycznego kształcenia w reformach programów szkolnych z lat 1960-1980*, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków.
- Kucharczyk, S.: 1998, Wokół zadania matematycznego, w: B. Rabijewska (red.), *Materiały do zajęć z dydaktyki matematyki*, Wydawnictwo Uniwersytetu Wrocławskiego, Wrocław, 25–54.
- Kutzler, B.: 1998, *Solving Linear Equations with the TI-92 (Experimental Learning / Visualization / Scaffolding Method*, BK Teachware, Austria.
- Legutko, M.: 1987, Przykłady behawioralno-poznawcze postaw uczniów klasy czwartej szkoły podstawowej wobec zadań matematycznych, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **8**, 51–102.
- Major, J.: 2006, *Rola zadań i problemów w kształtowaniu pojęć matematycznych na przykładzie wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej*. Nieopublikowana rozprawa doktorska, Akademia Pedagogiczna, Kraków.
- Major, J., Powązka, Z.: 2012, przyczynek do badań nad twórczą postawą studentów podczas rozwiązywania zadań matematycznych, *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **IV**, 101–111.
- Nowecki, B.: 1974, Przyczynek do badań nad rozumieniem przez uczniów tekstu matematycznego, *Rocznik Naukowo-Dydaktyczny WSP w Krakowie* **54**, 65–111. (także w: Żabowski J. (red.): 2001, *Materiały do studiowania dydaktyki matematyki, tom II*, Wyd. Nauk. Novum, Płock, 289–342).
- Nowecki, B.: 1975, Z badań nad rozumieniem przez uczniów szkół średnich twierdzeń matematycznych i ich dowodów, *Rocznik Komisji Nauk Pedagogicznych PAN* **20**, 29–64. (także w: Żabowski J. (red.): 2001, *Materiały do studiowania dydaktyki matematyki, tom II*, Wyd. Nauk. Novum, Płock, 227–271).

- Nowecki, B.: 1977, Z badań nad rozumieniem przez uczniów szkół średnich pojęć twierdzenia i dowodu, *Szkola Dydaktyki Matematyki*, 53–67.
- Ogiela, A.: 2009, *Kształtowanie i kontrola rozumienia pojęć geometrycznych*. IM UP, Kraków, praca dyplomowa pod kierunkiem J. Major.
- Palimąka, K.: 2015, *Zadania niestandardowe w kształtowaniu pojęcia funkcji*. IM UP, Kraków, praca dyplomowa pod kierunkiem J. Major.
- Parcia, K.: 2004, Prowadzenie rozumowań matematycznych a komputer – analiza pracy uczniów nad rozwiązywaniem pewnego zadania (fragment badań wstępnych), *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **26**, 143–164.
- Pardała, A., Uteeva, R. A., Ashirbayev, N. K.: 2015, Mathematical education in terms of innovative development, *The Mathematics Teaching Research Journal Online, Summer 2015*, **7**(4), 1–20. <http://www.hostos.cuny.edu/mtrj>.
- Pawlak, R.: 2001, Czy kalkulatory i komputery prowadzą do powstawania przeszkód epistemologicznych?, *Nauczyciele i matematyka* **40**, 26–28.
- Polya, G.: 1975, *Odkrycie matematyczne. O rozumieniu, uczeniu się i nauczaniu rozwiązywania zadań*, Wydaw. Naukowo - Techniczne, Warszawa.
- Polya, G.: 1993, *Jak to rozwiązać?*, PWN, Warszawa.
- Rabijewska, B.: 1994, Rozwiązywanie zadań w procesie nauczania, w: B. Rabijewska (red.), *Wprowadzenie do wybranych zagadnień dydaktyki matematyki*, Wydawnictwo Uniwersytetu Wrocławskiego, Wrocław, 237–259.
- Raport o stanie edukacji*: 2013, Instytut Badań Edukacyjnych.
- Ratusiński, T.: 2001, The role of the computer in discovering mathematical theorems, *Acta Univ. Purkynianae Studia Mathematica* **72**, 67–80.
- Ratusiński, T.: 2003a, Rola komputera w procesie rozwiązywania zadań matematycznych. Nieopublikowana rozprawa doktorska, Akademia Pedagogiczna, Kraków.
- Ratusiński, T.: 2003b, Rola komputera w procesie rozwiązywania zadań matematycznych, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **25**, 262–269.
- Schoenfeld, A. H.: 1985, *Mathematical Problem Solving*, Academic Press, Inc., Orlando.
- Sierpińska, A.: 1987, Pojęcie przeszkody epistemologicznej w nauczaniu matematyki, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **8**, 103–153.
- Siwek, H.: 2005, *Dydaktyka matematyki. Teoria i zastosowania w matematyce szkolnej*, WSiP, Warszawa.
- Słownik Języka Polskiego*: 2000, PWN, Warszawa.
- Suder, A.: 2009, *Propozycja dydaktyczna wprowadzenia zagadnień związanych z Twierdzeniem Bolyaia-Gerwienia w szkole średniej*. IM UP, Kraków, praca magisterska pod kierunkiem T. Ratusińskiego.
- Treliński, G.: 1998, *Aspekty dydaktyczne zadań matematycznych*, Wyższa Szkoła Pedagogiczna im. Jana Kochanowskiego, Kielce.
- Treliński, G.: 2006, Trzy przykłady, czyli o stymulowaniu i pielęgnowaniu bezradności matematycznej, w: G. Treliński, M. Czajkowska (red.), *Kształcenie matematyczne – tendencje, badania, propozycje dydaktyczne*, Wydawnictwo Akademii Świętokrzyskiej, Kielce.

- Turnau, S.: 1990, *Wykłady o nauczaniu matematyki*, PWN, Warszawa.
- Wojtuś, R.: 2007, Komputer w pozalekcyjnej pracy ucznia - fragment badań, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Didactica Mathematicae* **30**, 77–107.
- Zaręba, L.: 2003, Z badań nad procesem uogólniania i stosowaniem w nim symbolu literowego przez uczniów w wieku 10–14 lat, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **25**, 151–182.
- Zaręba, L.: 2012, *Matematyczne uogólniania. Możliwości uczniów i praktyka nauczania*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Pedagogicznego, Kraków.
- Zaręba, L.: 2015, Students' mathematical thinking specificity in the light of a study, *Mathematical Transgressions and Education*, Wydawnictwo Omega, 159–169.
- Zielińska, G.: 2011, *Problem deficytu i nadmiaru zadań w zadaniach tekstowych*. IM UP, Kraków, praca dyplomowa pod kierunkiem J. Major.
- Żeromska, A.: 1998, Postawy uczniów klas ósmych szkoły podstawowej wobec wybranych zadań matematycznych, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **20**, 89–112.
- Żeromska, A.: 2004, O kategorii pojęciowej postawa na przykładzie postawy wobec zadań matematycznych, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **26**, 197–253.

Instytut Matematyki
Uniwersytet Pedagogiczny
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
e-mail: jmajor@up.krakow.pl
e-mail: bpawlik@up.krakow.pl
e-mail: ratusita@up.krakow.pl
e-mail: lzareba@up.krakow.pl

Jerzy Pogonowski

Kontekst Przekazu w Matematyce*

Abstract. We introduce the concept of the *context of transmission*. It covers the ways in which mathematical knowledge and mathematical abilities are transmitted in education and popularization of mathematics. We stress the role of *intuitive explanations* in these processes. Several examples of such explanations are presented, related to: linguistic explanations, perception, empirical models, and internal explanations inside mathematics itself.

1. Uwagi wstępne

W ogólnej metodologii nauk od dawna funkcjonuje odróżnienie: *kontekstu odkrycia* oraz *kontekstu uzasadnienia*. W przypadku matematyki możemy je rozumieć następująco: *Kontekst odkrycia*. Dochodzenie do nowych wyników matematycznych oczywiście nie daje się przedstawić w postaci procedury algorytmicznej, bazującej na jakimś efektywnym przepisie. To, co można badać, są (gorzej lub lepiej rozpoznawalne) uwarunkowania twórczości matematycznej. Składają się na nie m.in.: bieżący *stan wiedzy* w danej dyscyplinie (określający m.in. także *niewiedzę*, problemy oczekujące rozwiązań), *motywacje* z innych nauk (przede wszystkim nauk fizycznych) bazujące na przekonaniu, że matematyka daje się w nich skutecznie stosować, trudne do obiektywnego scharakteryzowania czynniki natury *estetycznej* (profesjonaliści matematycy chętnie o tym wspominają) oraz – jeszcze trudniejsze w opisie – indywidualne *zdolności* poszczególnych matematyków (nie istnieje przecież formuła ustalająca co robić, aby mieć talent). Badać można również *postępowanie* profesjonalistów w dochodzeniu do nowych twierdzeń i teorii, o ile oczywiście jest się w posiadaniu raportów na ten temat. Rezultaty pracy matematyka, w postaci publikacji, są podobne do dzieł sztuki: widzimy efekt końcowy, natomiast droga do jego uzyskania pozostaje ukryta. W trakcie pokonywania tej

*The context of sharing mathematical knowledge, skills and abilities

2010 Mathematics Subject Classification: Primary: 97D30, 97B60

Key words and phrases: kontekst przekazu, objaśnienie intuicyjne, dydaktyka matematyki

Tekst przygotowany w ramach projektu badawczego NCN 2015/17/B/HS1/02232: *Aksjomaty ekstremalne: aspekty logiczne, matematyczne i kognitywne*.

drogi, matematyk może odwoływać się np. do wskazówek *indukcyjnych* (sugestii dla postawienia hipotezy), rozumowań przez *analogię* (na podstawie zauważonych podobieństw strukturalnych), skłonności do *uogólniania* (typowej dla działalności matematyków i często prowadzącej do lepszego rozumienia zagadnień), poszukiwania *kontrprzykładów* (pozwalających określić zasięg stosowalności twierdzenia), itd. Często podkreśla się, że niezbywalnym czynnikiem w kontekście odkrycia jest *intuicja matematyczna*, o której będziemy jeszcze mieli okazję powiedzieć parę słów poniżej.

Kontekst uzasadnienia. Obejmuje to wszystko, co ma gwarantować poprawność wyników matematycznych. Podstawowa jest oczywiście procedura *dedukcji*, czyli wyprowadzania twierdzeń z przyjmowanych założeń z zachowaniem *wynikania logicznego*. W praktyce uzasadnianie twierdzeń matematycznych polega na wyposażeniu ich w *dowody matematyczne*. Powszechnie przyjmowany jest pogląd, że każdy dowód matematyczny może w zasadzie zostać poddany rekonstrukcji (uzupełnieniu) w taki sposób, że jej wynikiem jest *dowód w sensie logicznym*, czyli konstrukcja składniowa złożona z poszczególnych kroków dowodowych powiązanych na mocy przyjmowanych reguł wnioskowania, bazujących na wynikaniu logicznym. Osobną sprawą jest uzasadnianie przyjmowanych *aksjomatów*: w tym przypadku ważne są względy natury logicznej (np. niezależność aksjomatów), metodologicznej („moc dedukcyjna” aksjomatów), pragmatycznej (m.in. ich *oczywistość*, ale także walory *estetyczne*). Podobnie, dobór pojęć *pierwotnych* uzależniony jest od ich „mocy definicyjnej”, ich naturalności oraz oczywistości. Do kontekstu uzasadniania włączyć należy także refleksję metateoretyczną zawodowych matematyków, dotyczącą tego, które z *metod* (używanych np. w *konstruowaniu* lub *obliczaniu*) należy uważać za poprawne. Często powtarzanym sloganem jest uważanie *dowodzenia jako potwierdzania intuicji matematycznej*, co wskazuje na jedno z połączeń między obydwooma wspomnianymi kontekstami.

Proponujemy dodać do tych dwóch kontekstów trzeci, który nazywamy – umownie – *kontekstem przekazu*. Zauważmy najpierw, że w kontekście odkrycia mowa jest przede wszystkim o *tworzeniu* matematyki, zaś w kontekście uzasadnienia o jej *uprawianiu*, a właściwie o prezentowaniu otrzymanych wyników z zachowaniem obowiązujących standardów. Są jednak inne jeszcze obszary aktywności intelektualnej, w których występuje matematyka. Do najważniejszych z nich należą:

1. *Uczenie się matematyki.*
2. *Nauczanie matematyki.*
3. *Popularyzacja matematyki.*
4. *Zastosowania matematyki w innych naukach oraz w filozofii.*
5. *Wykorzystanie matematyki w sztuce.*

Chcielibyśmy przez *kontekst przekazu* rozumieć pierwsze trzy z wyżej wymienionych typów aktywności. Wyodrębniają się one od pozostałych tym, że dochodzi w nich właśnie do *przekazu*: wiedzy, zaleceń dotyczących umiejętności oraz kompetencji o charakterze matematycznym. W każdym z tych trzech obszarów mówi

się i pisze *na temat* samej matematyki, a więc nie chodzi w nich jedynie o przekaz treści matematycznych, lecz w grę wchodzi także nakłonienie odbiorcy do aktywności intelektualnej, która owocować ma lepszym rozumieniem omawianych idei. W tego typu przekazach wykorzystujemy coś więcej niż w takich aktywnościach matematycznych, jak dowodzenie twierdzeń i wykonywanie obliczeń. Sądzymy, że podstawowym składnikiem owej nadwyżki są *objaśnienia intuicyjne* i właśnie im poświęcone są dalsze rozważania. Nie będziemy natomiast zajmować się innymi aspektami działań wykonywanych we wspomnianych trzech obszarach.

Objaśnienia intuicyjne mają oczywiście wspomagać proces *rozumienia*: pojęć, twierdzeń, konstrukcji, idei matematycznych. Podstawową sprawą jest odróżnienie dobrych (trafnych, poprawnych) intuicji od intuicji złudnych, prowadzących do zniekształcenia rozumienia omawianych idei matematycznych. Zarówno w programach nauczania, jak i w samych podręcznikach pisze się często, że do podstawowych zadań dydaktyki matematyki należy wykształcenie *poprawnych* intuicji matematycznych. Powstaje pytanie: czy cel ten jest osiągnięty już wtedy, gdy uczeń wykonuje wszystkie obliczenia i kroki dedukcyjne zgodnie z zalecanym standardem, otrzymując poprawne odpowiedzi? Czy też wymagane jest przy tym coś więcej, co angażuje proces *rozumienia* wykonywanych działań? Wreszcie, jak możemy rozpoznać, że doszło do takiego rozumienia?

Szczególną wagę w naszych rozważaniach przywiązujemy do działań edukacyjnych, dotyczących *terapii matematycznej*: takiego wykładu matematyki na poziomie uniwersyteckim (dla studentów kierunków pozamatematycznych), który pomógłby słuchaczom pozbyć się traumatycznych uprzedzeń wobec matematyki, z różnych powodów wyniesionych z edukacji szkolnej. O celowości tego typu działań przekonuje nas kilka dekad doświadczeń dydaktycznych, podczas których stale mieliśmy styczność z tego typu uprzedzeniami ze strony słuchaczy.

Sądzymy, że stosunkowo mało uwagi poświęca się nauczaniu matematyki dorosłych, w porównaniu z zaangażowaniem teoretyków i praktyków dydaktyki w opracowywanie nowoczesnych i skutecznych metod nauczania dzieci i młodzieży szkolnej. Trzeba rzecz jasna zgodzić się z poglądem, że najlepsze efekty daje nauczanie matematyki w możliwie młodym wieku i że wspomniane zaangażowanie jest całkowicie usprawiedliwione. Uważamy też jednak, że należy wykorzystać ostatnią z możliwości prowadzenia edukacji matematycznej, jaką są studia wyższe (cały czas mówimy tu o kierunkach pozamatematycznych) i dołożyć starań – w dużej części naprawczych – aby także młodzież studencka opuszczała uczelnie bez awersji do matematyki, bez strachu przed nią, prowadzącego często do jej lekceważenia. I aby została matematyką zaciekawiona i doceniała jej rolę w kulturze.

2. Wstępne hipotezy

Wprowadzając nowe pojęcie zadbać musimy o jego charakterystykę, podając jego zakres oraz cechy konstytutywne jego desygnatów, a także czynione na jego temat założenia. Trzeba również zadeklarować, jak rozumiemy inne pojęcia, pełniące rolę pomocniczą, a więc w naszym przypadku takie pojęcia, jak: *rozumienie*, *objaśnienie intuicyjne*, *intuicja matematyczna*, *dobra* (poprawna) intuicja w odróżnieniu od *złej*.

Uważamy, że termin *intuicja matematyczna* stosowany jest w literaturze (filozoficznej i dydaktycznej) dla oznaczenia wielu różnorodnych treści, przez co wcale nie zyskuje on na klarowności. Chcielibyśmy odróżniać rodzaje (poziomy) tego typu intuicji, dla przykładu:

1. *Intuicje przededukacyjne*. Związane są z naszym uposażeniem poznawczym oraz sferą doświadczenia potocznego. Sądzymy, że zaliczyć do nich można np. *subitację* oraz intuicyjne przekonania o statusie geometrycznym lub topologicznym, np. odróżnianie *wewnątrz* od *zewnątrza*.
2. *Intuicje nabywane w procesie edukacji*. Te intuicje wpajane nam są w trakcie nauczania matematyki w szkole i na uczelni. Dla przykładu, szeregowanie obiektów oraz ustalanie stabilności liczebności kolekcji przedmiotów prowadzi do podstawowych intuicji związanych z *liczeniem*.
3. *Intuicje profesjonalnych matematyków*. Do tej grupy zaliczamy przeczucia, przekonania, wyobrażenia, itp. przekształcane w sposób nieformalny przez matematyków, które leżą u podstaw ich twórczości. Czym są te intuicje wyjaśnić mogą chyba jedynie sami zawodowi matematycy. Niezwykle trudno jest bowiem dokonywać takich interpretacji tekstów źródłowych, które pozwoliłyby w sposób jednoznaczny wyjawiać czynniki intelektualne sterujące procesem dochodzenia do nowych idei matematycznych.

Osobną sprawą jest to, na ile intuicje z wymienionych wyżej poziomów podlegają werbalizacji, czyli wyrażeniu żywionych przekonań w sposób artykułowany. Intuicje mogą być wyobrażeniami lub przekonaniami. Mogą być motywowane uprzednimi doświadczeniami podmiotu, ale mogą też bazować na jego zwerbalizowanej wiedzy. Wśród intuicji każdego z wymienionych poziomów dokonywać można dalszych rozróżnień. Dla intuicji pierwszego poziomu dystynkcji takich dostarczają nauki kognitywne. Dydaktyka matematyki poświęca uwagę przeróżnym intuicjom drugiego poziomu. Do odróżniania intuicji trzeciego poziomu wykorzystać można, jak sądzymy, np. *style myślenia* w matematyce, przez co rozumiemy m.in. *styl algebraiczny*, *styl geometryczny*. Niektórzy matematycy mistrzowsko opalowali *kombinatoryczny* sposób myślenia (np. Paul Erdős), inni posługują się kompetentnie wyobrażeniami *przestrzennymi* (np. William Thurston), itp.

Nasze dalsze uwagi będą dotyczyły intuicji drugiego z wymienionych poziomów. Interesuje nas bowiem w niniejszym tekście to, jak można intuicje tego typu kształtować, jak kultywować *dobre* (poprawne) intuicje i jak wystrzegać się *złych* (złudnych) intuicji.

Przyjmujemy, że *znaczenie* pojęć matematycznych jest określone wyłącznie w odnośnej teorii, w której występują te pojęcia. W szczególności, znaczenie pojęć *pierwotnych* danej teorii wyznaczone jest jej *aksjomatami*, a znaczenie pojęć *definiowanych* wywieść można z ich definicji. To, w jaki sposób używamy pojęć w rozwijaniu danej teorii jest zdeterminowane tak określonymi ich znaczeniami. Zdajemy sobie sprawę, że to podejście może być krytykowane, np. poprzez odwołanie się do oczywistego faktu uprawiania poszczególnych dyscyplin matematycznych w ich stadium przedaksjomatycznym, przez wiele stuleci. Sądzymy, że

w takich przypadkach znaczenia używanych pojęć określane były przez *sposoby ich używania*.

W kontekście przekazu znaczenia pojęć (wyznaczone przez teorię) opatrywane są *objaśnieniami intuicyjnymi*. Mówiąc o *intuicyjnym znaczeniu* np. pojęcia całki, liczby zespolonej, liczb π oraz e , itd. można, jak sądzimy, odwoływać się do dwóch różnych spraw:

1. Intuicji, które towarzyszyły matematykom przy wprowadzaniu rozważanego pojęcia. W tym przypadku odwołujemy się zatem do *kontekstu odkrycia*.
2. Intuicji, które przywołujemy dla uzyskania rozumienia omawianego (w podręczniku lub na wykładzie) pojęcia. W tym przypadku nasze komentarze stanowią dodatek do znaczenia pojęcia, ustalonego w teorii. Te objaśnienia należą zatem do *kontekstu przekazu*.

W skład kontekstu przekazu wchodzi działanie (proces dydaktyczny, działalność publicystyczna), dzięki którym osiągać możemy rozumienie pojęć matematycznych, a także wytwory takich działań, czyli powstające w ich wyniku teksty, nagrania odczytów, filmy. Od akademickiego wykładu matematyki różnić się one mogą takim oddziaływaniem na wyobraźnię czytelników, słuchaczy, widzów, które coś dodaje do kanonicznych treści wykładu. Tym dodatkiem są właśnie objaśnienia intuicyjne, pozwalające na tworzenie reprezentacji mentalnych omawianych pojęć.

Terminu *objaśnienie* używamy tu celowo i chcemy odróżniać objaśnienia od *wyjaśniania w matematyce*. Ten drugi termin rozumiemy zaś tak, jak czyni się to w ogólnej metodologii nauk. Wyjaśniamy jakiś fakt przez wskazanie stosownego *prawa*, którego fakt ten jest konsekwencją. Na temat specyfiki wyjaśniania w matematyce pisze się np. w: Lange (2014), Mancosu (2015), Steiner (1978).

Objaśnienia intuicyjne proponujemy natomiast rozumieć jako argumentacje innego rodzaju. Chcemy je mianowicie traktować jako pomoce służące do oswajania znaczeń pojęć matematycznych. Mogą to być pomoce wizualne (rysunki, diagramy, gesty, filmy), eksplikacje lingwistyczne (z wykorzystaniem np. metafor), odwołania do modeli fizycznych (np. mechanicznych). Akceptujemy pogląd wyrażony przez Annę Sierpińską, że obiekty matematyczne nie są po prostu *widziane*, ale są *widziane jako coś* (Sierpińska, 1994). Każdy rozdział książki Sierpińskiej zawiera motto z prac Poincarégo; na pierwszej stronie znajdujemy następujący fragment z jego *Science and Method* (Sierpińska, 1994, s. 1):

We are in a class of the fourth grade. The teacher is dictating: ‘A circle is the position of the points in a plane which are at the same distance from an interior point called the centre.’ The good pupil writes this phrase in his copy-book and the bad pupil draws faces, but neither of them understands. Then the teacher takes the chalk and draws a circle on the board. ‘Ah’, think the pupils, ‘why didn’t he say at once, a circle is a round, and we should have understood’.

To właśnie jest typowy przykład objaśnienia intuicyjnego. Wiąże ono podaną na początku definicję z przedstawieniem (wyobrażeniem, reprezentacją mentalną) obiektu, który spełnia warunek tej definicji. Może warto dodać, że w podanym

przedstawieniu odwołujemy się do ustalonej metryki, wyznaczonej przez wartość bezwzględną. Jak wiadomo, przedstawienie okręgu w innej metryce (np. taksówkowej lub Czebyszewa) wygląda całkiem inaczej.

W kontekście przekazu odnosimy się zatem do pewnych kompleksów, złożonych z pojęć wraz z metodami ich wprowadzenia i towarzyszącymi tym metodom komentarzami. Będziemy takie kompleksy nazywali *pojęciami wprowadzonymi przez objaśnienie*. Konkretnie przykłady staramy się podać w następnej części tekstu.

Jeśli chodzi o założenia filozoficzne dotyczące kontekstu przekazu, to nie widzimy w tym miejscu potrzeby dokładniejszej ich analizy. Poprzestaniemy na deklaracji, że w naszej opinii matematyka w jej kontekście przekazu powinna jawić się jako:

1. *Nauka o wzorcach*. Początki matematyki biorą się z reprezentacji (wybranych aspektów) świata. Konstruowanie takich reprezentacji pozwala ujawnić występujące w nich wzorce – swoiste regularności. Wzorce mogą być numeryczno-arytmetyczne (związane z ustalaniem stałości liczebności kolekcji), algebraiczne (związane z własnościami działań na obiektach, symetrie), porządkowe (związane z rozmieszczeniem obiektów względem danych relacji), mogą dotyczyć kształtu, przestrzeni, pozycji, odległości (konstrukcje geometryczne, topologiczne), mogą dotyczyć ruchu i zmiany (pojęcia analizy matematycznej, geometrii i topologii różniczkowej), mogą wreszcie dotyczyć samych rozumowań matematycznych (pojęcia logiki matematycznej), obliczalności (pojęcia teorii rekursji oraz różnych działów informatyki), częstości (rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna), itd.
2. *Nauka o rozwiązywaniu problemów*. Praktyka badawcza matematyki obejmuje wiele typów działalności. Przede wszystkim, jest to dowodzenie twierdzeń. Inne typy tej działalności to, m.in.: uogólnianie, abstrahowanie, tworzenie pojęć, stawianie hipotez, przedstawianie nowych (lepszyc, prostszych, bardziej eleganckich) dowodów już znanych twierdzeń, wyobrażanie sobie, szukanie kontrprzykładów, przeprowadzanie rozumowań przez analogię (prowadzących np. do rozważania nowych dziedzin matematycznych), rozpatrywanie szczególnych przypadków, klasyfikowanie, szukanie nowych aksjomatów, sięganie po motywacje płynące z nauk empirycznych, poszukiwanie nowych punktów widzenia, przeprowadzanie (niekiedy żmudnych) rachunków, myślenie przekorne, itd. Na początku każdego z takich działań mamy do czynienia z problemem poznawczym. W jego rozwiązaniu korzystamy z dostępnych, sprawdzonych już w działaniu metod, ale także z tworzonych na nowo heurystyk. Pozwalamy sobie sądzić, że wielu matematyków zgodzi się z opinią, że matematyka może być także postrzegana jako *sztuka* rozwiązywania problemów (oraz tworzenia pojęć), przy czym ten artystyczny aspekt matematyki poddany jest oczywiście rygorom, narzucanym przez naturę rozumowań matematycznych.

3. Przykłady

Niniejsza notatka jest pierwszym tekstem dotyczącym kontekstu przekazu, który próbujemy opublikować. Nie podejmujemy jakiegokolwiek próby syntezy, do-

konamy jedynie przeglądu przykładów typów działań angażujących objaśnienia intuicyjne, które – naszym zdaniem – odgrywają istotną rolę w przekazie wiedzy matematycznej oraz wykształcaniu umiejętności matematycznych.

3.1. Objasnienia werbalne

Uprawiamy matematykę w jej języku, który jest językiem *sztucznym* (specjalnie skonstruowanym) z wyraźnie i precyzyjnie określonymi zasadami składni. Dla uczących się matematyki jest to jednak początkowo język *obcy*. W dodatku, jest to *dziwny* język obcy, bo wykorzystuje wiele wyrażen ich języka ojczystego, które rygorystycznie każe się rozumieć w zalecany sposób, często ujmując coś ze znaczenia potocznego tych wyrażen, do którego uczący się przywykli lub proponując całkowicie nowe ich znaczenie.

Samo nadanie szaty słownej matematycznym wyrażeniom symbolicznym nie może jeszcze pretendować do miana intuicyjnego objaśnienia, choć może dla niektórych być pomocne. Czasem sformułowania symboliczne wymagają w „przetłumaczeniu” ich na język etniczny jawnego wyrażenia pewnych domyślnych treści. Gdy np. chcemy wyrazić słownie znaczenie wyrażenia:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \forall y (d(x, y) < \delta \rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon),$$

to zapewne uczynimy to w sposób następujący:

Dla dowolnie *małej* dodatniej liczby ε istnieje dodatnia liczba δ taka, że jeśli odległość d między argumentami funkcji f jest mniejsza od δ , to odległość między wartościami funkcji f dla tych argumentów jest mniejsza od ε . Parafrazując, jeśli argumenty funkcji są wystarczająco bliskie, to wartości funkcji są dowolnie bliskie. Ponadto, „wystarczająco bliskie” jest tu rozumiane tak samo dla dowolnej pary argumentów.

Widoczne są tu pewne „naddatki” werbalne, które wspomagać mają rozumienie wyrażenia formalnego.

Studenci kierunków pozamatematycznych zwykle domagają się, aby mówiąc o zbiorach, relacjach, funkcjach itp. podawać przykłady „z życia”, czyli odnoszące się do doświadczenia potocznego oraz „zwykłego” rozumienia wyrażen. Ze względu na m.in. nieostrość większości wyrażen językowych oraz zjawisko intensjonalności bywa to trudne. W matematycznej teorii mnogości mówimy jedynie o zbiorach. To, czy istnieją jakiegokolwiek indywidua, jakiegokolwiek obiekty fizyczne, jest dla tej teorii nieistotne. To, czy wszystkie obiekty matematyczne są zbiorami jest problemem filozofii matematyki i nie możemy tego rozstrzygać na usługowych zajęciach z matematyki. Nie chcemy jednak pozbawiać się możliwości *stosowania* formalizmu teorii mnogości w odniesieniu do świata fizycznego, doświadczenia potocznego, konstrukcji pojęciowych w ogólności. Tak więc, zgadzamy się na to, aby mówić o zbiorach, których elementami są obiekty fizyczne. Wtedy taki zbiór jest już jednak obiektem abstrakcyjnym. Jak ujął to jeden z najwybitniejszych polskich filozofów, zbiór lwów nie jest lwem – zbiory nie ryczą. Należy być świadomym, że w przypadku zbiorów, których elementami są obiekty fizyczne mogą wystąpić

trudności z precyzyjnym ustaleniem inwentarza tych elementów. Co mamy na myśli, mówiąc o *zbiorze wszystkich Polaków*? Wszystkich obywateli Rzeczypospolitej Polskiej? Wszystkich dzisiaj żyjących takich obywateli? Wszystkie osoby pochodzenia polskiego rozproszone na całej planecie? Wszystkich kiedykolwiek żyjących Polaków? Czy wreszcie, przekraczając granice ponurej groteski, wszystkich *Prawdziwych Polaków*? Tego typu trudności nie są jednak trudnościami samej teorii mnogości, lecz uwarunkowane są możliwościami aplikacyjnymi (oraz ich ograniczeniami) teorii formalnych, o czym więcej słuchacze dowiadują się na zajęciach z filozofii.

Do wyobraźni słuchaczy zwykle silnie przemawiają różnego rodzaju metafory, przywoływane w celach dydaktycznych. Chodzi przy tym nie o metafory rozumiane jako środki stylistyczne, ale o tzw. metafory poznawcze. Teoria *metafor poznawczych* (Lakoff, Núñez, 2000) głosi, że treści bardziej abstrakcyjne objaśniane są przez treści bardziej konkretne, w ostatecznym rozrachunku sprowadzane do wyobrażeń doświadczenia potocznego. Była z sukcesem zastosowana w lingwistyce (Lakoff, Johnson, 1980). Lakoff i Núñez próbują ją także stosować w odniesieniu do matematyki, charakteryzując w następujących słowach odnośną metodę tworzenia pojęć (Lakoff, Núñez, 2000, s. 6):

Conceptual metaphor is a cognitive mechanism for allowing us to reason about one kind of thing as if it were another. [...] It is a grounded, inference-preserving cross-domain mapping – a neural mechanism that allows us to use the inferential structure of one conceptual domain (say, geometry) to reason about another (say, arithmetic).

W myśl tej koncepcji np. zbiory rozumieć możemy lepiej przez odwołanie się do *pojemników*, rozumienie liczb bazować miałoby na odwoływaniu się do grupowania obiektów, przebywania drogi, wielokrotnego odkładania jednostki miary, itp. Nie wypowiadamy się w tym miejscu na temat trafności zastosowania koncepcji metafor poznawczych w matematyce – uczyniliśmy to już wcześniej (Pogonowski, 2011, 2012, 2013), odnosząc się z dużą rezerwą do możliwości sprowadzenia genezy oraz funkcjonowania matematyki jedynie do procesu tworzenia metafor poznawczych. W cytowanych pracach przywołujemy też krytyczne opinie matematyków na temat tej koncepcji.

Odnotujemy jedynie, że doświadczenie dydaktyczne z nauczaniem matematyki studentów kierunków pozamatematycznych ukazuje, że istotnie korzystają oni z rozumienia liczb rzeczywistych jako punktów na prostej – to rozumienie zostało im silnie wpojone w edukacji szkolnej. Staramy się wskazywać, że mamy w tym przypadku do czynienia z *izomorfizmem* między strukturą liczb rzeczywistych a strukturą geometryczną prostej, rozumianej jako uporządkowany w odpowiedni sposób zbiór punktów.

Studenci wspomnianych kierunków studiów wyobrażający sobie liczby rzeczywiste przez odwołania do rozwinięć dziesiętnych (a więc tak, jak w definicji Hobborskiego) zadają czasem pytania poświadczające trudności z rozumieniem pojęć *nieskończoności*, *gęstości* oraz *ciągłości*, np.: *skoro liczba rzeczywista ma nieskończone rozwinięcie dziesiętne, to jak znaleźć następną po niej liczbę rzeczywistą?*

Uważamy, że po części usprawiedliwione w omawianym typie dydaktyki jest

korzystanie z metafor poznawczych dotyczących ruchu oraz wyobrażeń geometrycznych w intuicyjnych objaśnieniach pojęć rachunku różniczkowego. Zachować jednak przy tym trzeba stosowną ostrożność, podkreślając metaforyczność objaśnienia. Można się bowiem obawiać, że studenci kierunków pozamatematycznych zachowają w pamięci jedynie owe metafory, nie próbując nawet jakiegokolwiek refleksji teoretycznej nad omawianymi pojęciami.

Trudności z rozumieniem matematycznego pojęcia wyeksplikowanego werbalnie nawet w wyczerpujący sposób mogą wiązać się z kłopotami natury logicznej (np. z rozumieniem kwantyfikacji), które miewają studenci. Dla przykładu: *nie rozumiem, co to znaczy, że relacja jest przeciwwzrotna, ale rozumiem przykład, że nie zachodzi $2 < 2$* .

3.2. Percepcja

Na temat wykorzystywania rysunków w nauczaniu matematyki wypowiadają się badaj wszyscy dydaktycy matematyki. Nie sądzimy, że możemy dodać cokolwiek odkrywczego na ten temat. Przypomnieć wypada, że – wedle współczesnych standardów – rysunek nie może być traktowany jako dowód, może natomiast pełnić rolę objaśnienia intuicyjnego. Ponadto, rysunki nie mogą być zbyt *sugestywne*, aby nie narzucały sposobu rozumienia przedstawianej przez nie sytuacji. Ładne zastosowania diagramów w objaśnianiu pojęć i twierdzeń analizy zespolonej zawiera praca Needham (1997).

Przypominamy sobie dość zabawny spór, który miał miejsce na naszym seminarium. Otóż prelegent narysował dwa diagramy: na jednym z nich w uniwersum, reprezentowanym prostokątem zaznaczony został, poprzez koło wewnątrz tego prostokąta zbiór A , zaś drugi diagram był przedzielonym na połowy prostokątem i jedna z tych połówek miała być zbiorem A . Prelegent utrzymywał, że mamy tu do czynienia z dwiema różnymi sytuacjami: w pierwszej z nich zbiór A miałby być *wyróżniony* w uniwersum, a w drugiej miałoby mieć miejsce *odróżnienie* zbioru A od jego dopełnienia. Oczywiście z matematycznego punktu widzenia, gdy posługujemy się diagramami Venna, obie te sytuacje są identyczne (bo nie bierzemy przecież pod uwagę np. własności topologicznych rozważanych obszarów). Najwyraźniej prelegent chciał wyrazić swoimi rysunkami jakąś dodatkową informację, której użyte w tym przypadku diagramy Venna nie zawierają. Zapewne chodziło mu o podkreślenie, że w pierwszym przypadku zbiór A znajduje się w centrum uwagi, natomiast w przypadku drugim rolę pełnione przez A oraz dopełnienie A są takie same. Zauważmy, że gdyby prelegent użył np. diagramów Carrolla, to owych dodatkowych informacji nie mógłby na takim diagramie uwzględnić.

Współczesna dydaktyka matematyki wspomagana jest – często znakomitymi – ogólnie dostępnymi w sieci pomocami audiowizualnymi. Liczne portale matematyczne prezentują filmy dydaktyczne, ilustrujące zarówno stosunkowo proste zagadnienia matematyczne, jak też pomagające zrozumieć nawet bardzo złożone konstrukcje, np.: twierdzenie Smale'a o przenicowaniu sfery S^2 w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ lub wiązkę Hopfa. Niewątpliwie jest to jeden z najbardziej obiecujących kierunków rozwoju dydaktyki matematyki.

Podczas wykładów z matematycznych metod rozwiązywania problemów posługiwaliśmy się – oprócz wspomnianych wyżej filmów – także (amatorskimi) na-

graniami piosenek o treści matematycznej, których zabawne fabuły mogą pomóc utrwaląć rozumienie wzorów i konstrukcji. Jednak zwykle piosenki takie adresowane są do młodszych dzieci, znaleźliśmy stosunkowo mało utworów dotyczących matematyki na poziomie uniwersyteckim.

3.3. Modele fizyczne

Wspomaganie dydaktyki matematyki odwołaniami do modeli fizycznych ma długą i bogatą tradycję. Słynnym przykładem stosowania modeli fizycznych są rozważania Archimedesesa dotyczące wykorzystania mechaniki w uzasadnianiu twierdzeń geometrycznych (zob. np. Heath, 2002). Trzeba podkreślić, że Archimedes podając argumentacje odwołujące się do mechaniki w obliczeniach pól i objętości otwarcie i wyraźnie pisał, że te argumentacje należą do *kontekstu odkrycia*, a precyzyjne dowody odnośnych twierdzeń wykorzystują poprawną matematycznie metodę wyczerpywania.

Ciekawe zestawy przykładów zawierają np. prace: Ghrist (2014) oraz Levi (2009). W pierwszej z nich dużo uwagi poświęca się intuicyjnym objaśnieniom pojęć i twierdzeń topologicznych poprzez odwołania do modeli mechanicznych, w szczególności tzw. *linkages*, czyli układy drążków, które połączone są przegubami. Pozwalają one wspomagać rozwijanie wyobraźni geometrycznej. Ghrist przywołuje twierdzenie, głoszące, iż każda gładka rozmaitość zwarta jest dyfeomorficzna z przestrzenią konfiguracyjną pewnego płaskiego układu takich drążków. Odpowiednio dobrane układy drążków służyć mogą zatem do kinematycznej reprezentacji tworów nawet o wymiarach większych od trzech. Na marginesie może warto dodać, że badanie takich układów drążków jest ważne m.in. we współczesnej robotyce.

Druga z wymienionych wyżej pozycji zawiera liczne przykłady argumentacji fizycznych, wspomagających rozumienie twierdzeń matematycznych. Autor ukazuje np. związki twierdzenia Pitagorasa z prawem zachowania energii, powiązania między analizą ruchu koła roweru lub ciśnienia gazu a twierdzeniem Gaussa-Bonneta, odpowiedniość między pewnymi twierdzeniami analizy zespolonej a ruchem cieczy lub przepływem ciepła, itp. Wedle autora, zaletami takich fizycznie zorientowanych objaśnień są: mniej skomplikowane obliczenia, uzyskiwanie wyników dobrze pojęciowo reprezentowanych, mniejsze wymagania wobec uprzedniego poziomu matematycznego słuchaczy. Oczywiście, objaśnienia fizyczne nie zastępują dowodów matematycznych, służą jedynie jako heurystyki wspomagające rozumienie. Autor powołuje się na następującą analogię, z której często korzysta (Levi, 2009, s. 27):

Calculus	Physical interpretation
The function $f(x)$	Potential energy $P(x)$
The derivative $f'(x)$	The force $F(x) = -P'(x)$
$f(x)$ minimal $\Rightarrow f'(x) = 0$	$P(x)$ is minimal $\Rightarrow F(x) = 0$ (equilibrium)

Sądzymy, że tego typu odwołania fizyczne wspomagające dydaktykę matematyki mogą silnie oddziaływać na wyobraźnię słuchaczy, a także motywować ich do zadawania dalszych pytań, dotyczących zarówno tego *jak* przebiega dane zjawisko,

jak też *dłaczego* przebiega właśnie tak, a nie inaczej. Ukazanie takich związków między rzeczywistością fizyczną a jej opisem matematycznym jest nieodzownym składnikiem wykształcenia. Wiadomo przecież, że wiele osób ma błędne, złudne wyobrażenia związane nawet z doświadczeniem potocznym. Wyobrażenia na temat zjawisk fizycznych mogą drastycznie odbiegać od rzeczywistego ich przebiegu, (por. np. Ben-Zeev, Star, 2001, s. 29):

It has been found that when people were asked to draw the path of a moving object shot through a curved tube, they believed that the object would move along a curved (instead of a straight) path even in the absence of external forces.

Tego typu wyobrażenia określa się czasem mianem *folk physics*. Należy się ich rzecz jasna wystrzegać przy stosowaniu objaśnień intuicyjnych wspomagających rozumienie pojęć matematycznych.

Jeden z recenzentów niniejszego tekstu odniósł się krytycznie do optymistycznej wiary w skuteczność dydaktyczną modeli fizycznych w nauczaniu matematyki w stylu prezentowanym np. przez Levi (2009). Wedle niego, objaśnienia takie mogą stanowić raczej utrudnienie, ze względu na to, iż uczniowie lub studenci (kierunków pozamatematycznych) fizykę rozumieją w jeszcze mniejszym stopniu niż matematykę. Niezależnie od trafności tej diagnozy, warto może podkreślić, że odwołanie się do modeli fizycznych jest wyrazem przekonania, że takie modele nie mogą generować *złych* intuicji matematycznych.

Modele fizyczne wykorzystywać mogą różnego rodzaju artefakty, których w dziejach matematyki spotykamy bardzo wiele. Obok powszechnie znanych, jak cyrkiel i linijka, mamy też pantografy, elipsografy, spirografy, przyrządy do mierzenia pól, długości oraz miary kątów, itp. Dydaktycy matematyki korzystają również ze specjalnie przygotowanych zestawów pomocy dydaktycznych – (zob. np. Lénárt 1996).

Wykorzystywanie modeli fizycznych we wspomaganiu dydaktyki matematyki opiera się na pewnych założeniach filozoficznych, dotyczących stosowalności matematyki w naukach empirycznych. Zakładamy, że świat fizyczny daje się opisać matematycznie. Mielśmy też wielokrotnie do czynienia z sytuacją, gdy rozwój danej dyscypliny matematycznej wyprzedzał jej zastosowania w fizyce. Oczywiście w usługowym kursie matematyki raczej nie przewiduje się miejsca na dywagacje filozoficzne, można jednak zachęcać słuchaczy do refleksji nad skutecznością stosowania matematyki w naukach empirycznych. W szczególności, zaciekawienie studentów budzą zwykle wyniki matematyczne ukazujące kolizje między złudnymi wyobrażeniami potocznymi a prawidłowym opisem matematycznym zjawisk, a także różnego rodzaju *supertasks* – (por. np.: Galperin, 2003; Havił, 2007, 2008; Klymchuk, Staples, 2013; Laraudogoitia, 1996; Romero, 2014).

3.4. Objaśnienia wewnętrzne

Tego typu objaśnienia mają nieco inny charakter od uprzednio omówionych, gdyż wykorzystywane objaśnienia odwołują się nie do sfer zewnętrznych wobec matematyki, lecz do innych ustaleń wewnątrz poszczególnych dyscyplin matematycznych. Zwykle są to rozumowania poprzez analogię, odwołujące się do pewnych

wspólnych cech strukturalnych, np. dzielenie wielomianów intuicyjnie objaśniamy, odwołując się do dzielenia liczb i wskazując na algorytm Euklidesa, jako wspólną zasadę wykonywania tych operacji.

Objaśnienia wewnętrzne podkreślają zatem spójność matematyki. Fakt wielkiego współcześnie zróżnicowania dyscyplin matematycznych nie przeczy temu, że matematyka jest wewnętrznie spójna. Ową spójność potwierdzają zarówno *wielkie przełomy* w historii matematyki (np. powiązanie algebry z geometrią lub arytmetyzacja analizy), ale także to, że dowody twierdzeń z danej dyscypliny matematycznej mogą odwoływać się do aparatury pojęciowej całkiem innej z takich dyscyplin.

Poniżej ograniczamy się do trzech przykładów tego, co nazywamy objaśnieniami wewnętrznymi. Mamy w nich kolejno do czynienia z: powołaniem się na analogię, przyjęciem intuicyjnego założenia oraz argumentacją o charakterze pragmatycznym. Nie twierdzimy rzecz jasna, że są to przykłady wykorzystywane w usługowej dydaktyce matematyki dla studentów kierunków pozamatematycznych.

3.4.1. Modele teorii mnogości

Dla wykazania niezależności pewnych zdań języka teorii mnogości wykorzystuje się metodę *wymuszania* (ang. *forcing*), polegającą na budowaniu takich modeli tej teorii, w których wybrane zdanie jest fałszywe. Używając tej techniki, wychodzi się od pewnego, stosownie dobranego, przeliczalnego przechodniego modelu $(M, \in)$ dla teorii mnogości (otrzymanego na mocy dolnego twierdzenia Löwenheim-Skolema oraz lematu Mostowskiego o kontrakcji), który następnie rozszerza się, dodając doń dodatkowe zbiory, których własności kontroluje się przez narzucenie stosownych warunków. Dla osób, które nie specjalizują się w teorii mnogości cała procedura wyglądać może na dość skomplikowaną. Można ją jednak przybliżyć szerszemu audytorium (matematyków) poprzez *intuicyjne* odwołania do analogii z rozszerzaniem ciał o elementy przestępne. Model $(M, \in)$ przyrównany jest do ciała liczb wymiernych $\mathbb{Q}$, a jego rozszerzenie uzyskane metodą wymuszania przyrównywane jest do rozszerzenia ciała $\mathbb{Q}$ o element przestępny. Trafność tej analogii zasadza się w tym, że rozszerzony model teorii mnogości jest charakteryzowany przez warunki odpowiadające tym, które wyrażają fakt przestępności elementu dodawanego do ciała, czyli zbiorowi zdań stwierdzających łącznie, iż ów element przestępny nie jest pierwiastkiem żadnego wielomianu o współczynnikach w wyjściowym ciele. Oczywiście to intuicyjne objaśnienie przemawia do tych czytelników, którzy mają już jakieś pojęcie o wykorzystywanych faktach algebraicznych.

3.4.2. Prawdziwość z prawdopodobieństwem 1

Czy sensowne jest mówienie, że jakieś twierdzenie jest prawdziwe z prawdopodobieństwem równym 1? Klasyczna logika przyzwyczaja nas do myślenia o prawdzie i fałszu w sposób dychotomiczny, o *stopniach* prawdziwości możemy mówić – w nieco sztuczny sposób – np. w logikach wielowartościowych.

Davis i Hersh podają dwa ciekawe przykłady sytuacji, w których próbuje się nadawać sens orzeczeniom o prawdziwości jakiegoś twierdzenia z prawdopodobieństwem 1 (Davis, Hersh, 1994). Jeden z nich dotyczy przypuszczenia, że istnieje nieskończenie wiele par bliźniaczych liczb pierwszych, drugi hipotezy Riemanna.

W każdym z tych przykładów przyjmuje się pewne *intuicyjne* założenia. W pierwszym przypadku (Davis, Hersh, 1994, s. 189–190) zakłada się, że pojawienie się pary bliźniaczych liczb pierwszych jest zdarzeniem *losowym*, nieprzewidywalnym. *Przypuszczamy*, że szansa iż $(x, x + 2)$ jest parą bliźniaczych liczb pierwszych jest taka, jak szansa uzyskania orła przy dwóch rzutach monetą. Pamiętamy, że szansa sukcesu dla dwóch kolejnych zdarzeń *niezależnych* jest równa iloczynowi szans sukcesów w każdym z nich. Na mocy znanych ustaleń o rozkładzie liczb pierwszych w ciągu liczb naturalnych, szansa iż wybrana losowo liczba x z przedziału od 0 do n będzie liczbą pierwszą równa jest około $\frac{1}{\log n}$. W konsekwencji, szansa, że zarówno x , jak i $x + 2$ będą pierwsze jest równa około $\frac{1}{(\log n)^2}$. Tak więc, będzie około $\frac{n}{(\log n)^2}$ par bliźniaczych liczb pierwszych między 0 a n . Ponieważ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(\log n)^2} = \infty$, więc daje to, jak piszą Davis i Hersh, „ilościową wersję przypuszczenia o parach liczb pierwszych”. Wywód powyższy nie jest oczywiście *dowodem* rozważanej hipotezy: w istocie, jest pewnym wyrazem *wiary* w jej prawdziwość, odwołującej się do analogii probabilistycznych.

W drugim z omawianych przypadków (Davis, Hersh, 1994, s. 315–321) również czyni się *intuicyjne* założenie, że możemy traktować pewną funkcję jako zmienną losową. Omawialiśmy ten przykład w innym miejscu (Pogonowski, 2011), a więc – aby uniknąć zarzutów o autoplagiat – powiedzmy tutaj jedynie, że chodzi o traktowanie jako zmiennej losowej funkcji Möbiusa, związanej z liczbą czynników rozkładu liczb całkowitych na czynniki pierwsze. W pracy Good, Churchhouse (1968) podaje się argumentację, pozwalającą (przy powyższym intuicyjnym założeniu, sprowadzającym się do tego, że funkcja Möbiusa „wygląda” jak zmienna losowa, bo losowe jest to, czy w rozkładzie liczby całkowitej na czynniki pierwsze jest parzysta czy też nieparzysta liczba czynników) na sformułowanie probabilistycznego równoważnika hipotezy Riemanna, który od tego intuicyjnego założenia zależy. W konsekwencji, ponieważ dla tego równoważnika otrzymujemy prawdopodobieństwo równe 1, więc także hipoteza Riemanna jest „prawdziwa z prawdopodobieństwem równym 1”.

3.4.3. Aksjomaty ekstremalne w teorii mnogości

Znakomita większość „normalnych” matematyków (przez co rozumiemy matematyków nie zajmujących się zawodowo modelami teorii mnogości) zdaje się wierzyć w uniwersum „prawdziwych” zbiorów. Teoria mnogości Zermelo-Fraenkla w języku pierwszego rzędu, o ile jest niesprzeczna, posiadać może różne modele, czyli dopuszczać różne uniwersa wszystkich zbiorów. Kto skłania się do uznawania teorii mnogości za podstawę matematyki, powinien być skłonny do *wiary* w jej niesprzeczność. Wtedy jednak musi zadać sobie pytanie: *który* z modeli teorii mnogości jest jakoś *naturalny*, *standardowy*, itp? Mamy tu do czynienia z nieco inną sytuacją niż w przypadku arytmetyki, gdzie z jej modelem standardowym związane są intuicje matematyczne, potwierdzane wynikami otrzymywanymi właściwie od samych początków systematycznej refleksji teoretycznej. Aksjomatyczna teoria mnogości jest natomiast stosunkowo młodą teorią. Już Thoralf Skolem, który znacząco przyczynił się do jej rozwoju, wyrażał sceptycyzm co do jej roli jako podstawy całości matematyki. Andrzej Mostowski, znakomity polski matematyk pracujący

w podstawach matematyki, nie wykluczał (biorąc pod uwagę wyniki Gödla oraz Cohena), że teoria mnogości może w przyszłości podzielić los topologii ogólnej, w tym sensie, że poszczególne modele teorii mnogości traktowane będą podobnie jak poszczególne przestrzenie topologiczne.

Wspomnieć należy o dwóch możliwościach *intuicyjnych wyobrażeń* na temat uniwersum teorii mnogości:

1. *Stanowisko minimalistyczne.* Uniwersum zbiorów miałyby być możliwie jak najbardziej oszczędne. W tym duchu wypowiadał się np. Abraham Fraenkel, formułując swój *aksjomat ograniczenia*, głoszący, iż istnieją tylko te zbiory, których istnienie udowodnić można z aksjomatów teorii. Aksjomatem ograniczenia jest również *aksjomat konstruowalności*, zaproponowany przez Kurta Gödla: w tym ujęciu rozważa się jedynie definiowalne podzbiory dowolnego zbioru X , a nie pełny jego zbiór potęgowy $\wp(X)$.
2. *Stanowisko maksymalistyczne.* Uniwersum zbiorów miałyby być możliwie jak najbardziej pojemne. Ku takiemu pogładowi skłaniał się Kurt Gödel w swoich późniejszych wypowiedziach: powoływał się przy tym na analogie z *aksjomatem zupełności* w systemie geometrii Davida Hilberta. Nieco wcześniej wersję poglądu maksymalistycznego wyraził Ernst Zermelo, postulując przyjęcie założenia o istnieniu pozaskończzonej hierarchii liczb mocno nieosiągalnych. Obecnie odrzuca się stanowisko minimalistyczne, natomiast stanowisko maksymalistyczne jest rozwijane w postaci badania *aksjomatów istnienia dużych liczb kardynalnych*.

Niezależnie od konsekwencji czysto matematycznych każdego z wymienionych stanowisk, rozważać można argumentację metodologiczną za przyjęciem bądź odrzuceniem każdego z nich. Argumentacje znane z literatury mają po części charakter pragmatyczny. Tak jest np. w monografii (Fraenkel, Bar-Hillel, Levy, 1973). Oprócz wspomnianego już argumentu opartego na analogii (z aksjomatem zupełności w geometrii), który ma potwierdzać naszą *wiarę*, iż uniwersum zbiorów powinno być możliwie najobszerniejsze, autorzy przywołują takie argumenty jak np. *elegancja matematyczna* oraz *postawa platońska*. Te argumenty skierowane są przeciw aksjomatom ograniczenia: aksjomaty tego typu nie służą do dowodu jakichś mocniejszych twierdzeń, ale raczej eliminują zbiory, które nie pasują do rozważanych wyników. Ponadto, jeśli ogół wszystkich zbiorów wyznaczonych przez przyjęcie aksjomatu ograniczenia miałyby być bytem platońskim, to przecież postawa platońska nie wyklucza uznania go za zbiór w jakimś szerszym uniwersum. Zasady odbicia są formalnym wyrazem przekonania, że „tymczasowe” uniwersa są „aproxymacjami” ostatecznego, nieosiągalnego uniwersum zbiorów.

3.4.4. Granice intuicji

To, co nazywamy tutaj wewnętrznymi objaśnieniami intuicyjnymi dobrze sprawdza się w przypadku prostych rozumowań przez analogię, w rodzaju np. *to nowe działanie zachowuje się podobnie jak znane już działanie*. Mamy jednak do czynienia także z sytuacjami, gdy tego typu objaśnień stosować nie można.

Standardowym przykładem jest przejście od skończone wymiarowych przestrzeni liniowych do przestrzeni o nieskończonej liczbie wymiarów.

Całkiem nowa matematyka zmusza do porzucania pewnych dotychczasowych intuicji bądź do ich wysubtelnienia, co było wielokrotnie poświadczane w dziejach matematyki. Przykładem może być choćby propozycja Dedekinda definicji zbioru nieskończonego jako równolicznego ze swoim podzbiorem właściwym. Własność uznawana dotąd za paradoksalną uczyniona została podstawą definicji.

Nie można chyba określić na bieżąco, jakie w danym momencie rozwoju matematyki są granice intuicji. Staje się to widoczne dopiero ze znacznej perspektywy czasowej.

4. Odniesienie do ustaleń współczesnych

Nawiązujemy przede wszystkim do propozycji Anny Sierpińskiej (w szczególności do jej monografii *Understanding in Mathematics*, Sierpińska, 1994), ale uwzględniamy też poglądy innych badaczy rozważanej problematyki (Fischbein, 1987; Polya, 2009, 2014; Schoenfeld, 1985; Tall, 2013). Pisząc o rozumieniu w matematyce, Sierpińska powołuje się na propozycje Kazimierza Ajdukiewicza (Ajdukiewicz, 1975), rozszerzając jednak jego koncepcję rozumienia wyrażen na rozumienie pojęć, idei, dowodów, konstrukcji matematycznych. Autorka posługuje się również terminami *obiekt rozumienia* oraz *podstawa rozumienia*, które łącznie chyba są bliskie temu, co proponowaliśmy wyżej nazywać *pojęciami wprowadzonymi przez objaśnienie* (oczywiście jej propozycje są wcześniejsze). Sierpińska często wykorzystuje też zjawisko znane pod nazwą *epistemological obstacle*, opisywane w literaturze filozoficznej już od kilkudziesięciu lat. Rozpoznanie i przezwyciężenie takich *uprzedzeń poznawczych* jest jednym z podstawowych zadań dydaktyki matematyki. Uczniowie mogą mieć np. trudności z rozumieniem, dlaczego potęga (liczby dodatniej) o wykładniku zerowym równa jest jeden, przywołując swoje dotychczasowe rozumienie potęgowania jako powtarzanie mnożenia. Sierpińska zwraca uwagę na rolę wyjaśniania w matematyce m.in. następującymi słowami (Sierpińska, 1994, s. 76):

The quest for an explanation in mathematics cannot be a quest for proof, but it may be an attempt to find a rationale of a choice of axioms, definitions, methods of construction of a theory. A rationale does not reduce to logical premisses. An explanation in mathematics can reach for historical, philosophical, pragmatic arguments. In explaining something in mathematics, we speak *about* mathematics: our discourse becomes more metamathematical than mathematical.

Atrakcyjne wydają nam się również niektóre propozycje Davida Talla, które autor podsumował w swojej monografii (Tall, 2013). Wprowadził on odróżnienie *trzech światów matematyki*. Z jednej strony Tall wyróżnia następujące poziomy matematyki:

1. *Practical Mathematics*. Dotyczy doświadczeń związanych z kształtem i przestrzenią oraz elementarnej arytmetyki.

2. *Theoretical Mathematics*. Opiera się na znanych już obiektach i wykonywanych na nich operacjach.
3. *Formal Mathematics*. Bazuje na formalnych definicjach obiektów matematycznych.

Te trzy poziomy autor krzyżuje z następującymi typami aktywności:

1. *Conceptual embodiment*. Wykorzystuje połączenie percepcji oraz działania.
2. *Operational symbolism*. Wykorzystuje procedury symboliczne.
3. *Axiomatic formalism*. Wykorzystuje pojęcia teorii mnogości i dowody matematyczne.

To jedynie pobieżne, hasłowe, przywołanie koncepcji dydaktycznych Talla. Szczególną uwagę autor poświęca wprowadzonemu przez siebie pojęciu *procept*, które staramy się rozumieć jako połączenie pojęcia z towarzyszącą mu procedurą (operacją symboliczną). Za cenne uważamy podkreślenie przez Talla roli tzw. *met-befores*, czyli tego bagażu intelektualnego, który już posiada podmiot uczący się nowego dla siebie fragmentu matematyki. Tall następująco streszcza cele swojego projektu (Tall, 2013, s. 419):

The framework of three worlds of mathematics offers a broad picture of development of mathematical thinking from the newborn child to the frontiers of research through perception, operation and increasingly sophisticated forms of reason, taking account of supportive met-befores, that encourage generalization, and problematic met-befores, that impede progress. The theory formulates a framework for the long-term development of mathematical thinking that operates not only in the individual but also in the evolution of mathematics over the centuries. It also offers the possibility of blending with a range of other theoretical frameworks that encourage emerging insights that allow us to evolve more sophisticated insights.

It reveals how the sensori-motor and linguistic capabilities of a biological brain evolve into the creative thinking processes of a mathematical mind.

Wreszcie, operując w naszej praktyce dydaktycznej *pojęciami wprowadzonymi przez objaśnienie*, staramy się uwzględnić zalecenia klasyków piszących o rozwiązywaniu problemów matematycznych. Wykorzystujemy strategie, które opisywał Polya (Polya, 2009, 2014), pamiętamy o zaleceniach Schoenfelda dotyczących stosowania takich strategii, a więc m.in. konieczności *nadawania sensu* każdemu z kroków postępowania w rozwiązywaniu problemu oraz *utrzymywania kontroli* nad tym postępowaniem (Schoenfeld, 1985).

5. Uwagi końcowe

Można oczywiście zastanawiać się, czy wprowadzenie pojęcia *kontekst przekazu* nie jest niepotrzebnym mnożeniem bytów. Naszym zdaniem warto je wprowadzić, choćby dla uwypuklenia obecności matematyki w kulturze. Testem jego ewentualnej przydatności okaże się to, czy matematycy, dydaktycy, filozofowie zechcą się do niego odwoływać oraz rozwijać refleksje na jego temat.

Korzystanie z objaśnień intuicyjnych w dydaktyce matematyki adresowanej do studentów (kierunków pozamatematycznych) jest o tyle ułatwione, że od słuchaczy można wymagać *świadomości*, że owe objaśnienia są jedynie heurystyczną pomocą w docieraniu do rozumienia pojęć matematycznych zakładanego jako trafne i kanoniczne. Od dzieci nauczanych matematyki takiej świadomości wymagać nie można.

Należy jednak zdawać sobie sprawę z niebezpieczeństwa zbytich uproszczeń oraz błędnego rozumienia, które mogą być powodowane przez (niewłaściwie stosowane) objaśnienia intuicyjne serwowane jako wspomagające przyswajanie sobie wiedzy matematycznej oraz umiejętności matematycznych. W tym względzie polegać należy przede wszystkim na doświadczeniu nauczycieli matematyki, którzy wykorzystują objaśnienia intuicyjne w swojej praktyce zawodowej.

Czy skuteczność objaśnień intuicyjnych mających wspomagać rozumienie w matematyce może zostać oceniona eksperymentalnie? Zdajemy sobie sprawę, że proponowanie *eksperymentów dydaktycznych* jest rzeczą ryzykowną w sytuacji, gdy zatwierdzone urzędowo programy nauczania przewidują ściśle stosowanie się do zalecanych w nich zasad. Być może więc takie oceny sprowadzić należy do opinii doświadczonych dydaktyków matematyki, którzy wypróbowali w swojej pracy zawodowej różne metody nauczania i są kompetentni, aby porównać ich efekty.

Na koniec tych dość wstrzemięźliwie formułowanych refleksji przypomnimy raz jeszcze, że wypowiadaliśmy się jedynie na temat nauczania matematyki dla studentów kierunków pozamatematycznych. Do tego typu nauczania sprowadza się bowiem aktywność dydaktyczna piszącego te słowa. Nie jest ona zróżnicowana tematycznie, choć jest już dość długa i właśnie dobiega końca. Składało się na nią kilka dekad nauczania logiki matematycznej studentów różnych kierunków filologicznych oraz studentów filozofii. W ostatnim czasie dydaktyka ta objęła również nauczanie matematyki dla studentów kognitywistyki oraz prowadzone dla nich od kilku lat wykłady fakultatywne dotyczące matematycznych metod rozwiązywania problemów. Sądząc po reakcjach słuchaczy (w tym: ciekawych esejach zaliczeniowych) to ostatnie przedsięwzięcie nie było kompletnym fiaskiem. Pozwalamy sobie sądzić, że to właśnie wykorzystanie objaśnień intuicyjnych w trakcie wspomnianych wykładów było pomocne w uzyskaniu tego efektu.

Autor starał się skrupulatnie uwzględnić wszystkie uwagi krytyczne recenzentów, zwłaszcza te, które odnosiły się do wskazanych niejasnych sformułowań w pierwotnej wersji tekstu. W recenzjach zawarte zostały także uwagi, postulujące rozwinięcia omawianych w tekście tematów – np. rozważenia illokucyjnych aspektów objaśnień intuicyjnych w kontekście przekazu. Zostaną one uwzględnione w kontynuacji niniejszej pracy, przygotowywanej z myślą o przedstawieniu jej podczas konferencji *Mathematical Transgressions III*, Kraków 2017.

Literatura

- Ajdukiewicz, K.: 1975, *Logika pragmatyczna*, PWN, Warszawa.
- Ben-Zeev, T., Star, J.: 2001, Intuitive Mathematics: Theoretical and Educational Implications, in: B. Torff, R. J. Sternberg (ed.), *Understanding and Teaching the Intuitive Mind: Student and Teacher Learning*, Lawrence Erlbaum Associates Publishers, Mahwah, New Jersey, London, 29–56.
- Davis, P. J., Hersh, R.: 1994, *Świat Matematyki*, PWN, Warszawa.
- Fischbein, E.: 1987, *Intuition in Science and Mathematics: an educational approach*, Kluwer Academic Publishers, New York / Boston / Dordrecht / London / Moscow.
- Fraenkel, A. A., Bar-Hillel, Y., Levy, A.: 1973, *Foundations of set theory*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, London.
- Galperin, G.: 2003, Playing Pool with π (The Number π from a Billiard Point of View), *Regular and Chaotic Dynamics* **8**(4), 375–394.
- Ghrist, R.: 2014, *Elementary Applied Topology*, Createspace.
- Good, I. J., Churchhouse, R. F.: 1968, The Riemann hypothesis and pseudorandom features of the Möbius sequence, *Mathematics of Computation* **22**, 857–861.
- Havil, J.: 2007, *Nonplussed! Mathematical Proof of Implausible Ideas*, Princeton University Press, Princeton and Oxford.
- Havil, J.: 2008, *Impossible? Surprising Solutions to Counterintuitive Conundrums*, Princeton University Press, Princeton and Oxford.
- Heath, T. L.: 2002, *The Works of Archimedes*, Dover Publications, Inc., Mineola, New York.
- Klymchuk, M., Staples, S.: 2013, *Paradoxes and Sophisms in Calculus*, Mathematical Association of America, Washington, DC.
- Lakoff, G., Johnson, M.: 1980, *Metaphors we live by*, University of Chicago Press, Chicago.
- Lakoff, G., Núñez, R.: 2000, *Where Mathematics Comes From. How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*, Basic Books, New York.
- Lange, M.: 2014, Depth and Explanation in Mathematics, *Philosophia Mathematica* **23**(2), 196–214.
- Laraudogoitia, J. P.: 1996, A Beautiful Supertask, *Mind* **105**, 81–83.
- Lénárt, I.: 1996, *Non - Euclidean Adventures on the Lénárt Sphere*, Key Curriculum Press, USA.
- Levi, M.: 2009, *The Mathematical Mechanic. Using Physical Reasoning to Solve Problems*, Princeton University Press, Princeton and Oxford.
- Mancosu, P.: 2015, Explanation in mathematics, in: E. N. Zalta (ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Summer 2015 edn, Metaphysics Research Lab, Stanford University.
<https://plato.stanford.edu/archives/sum2015/entries/mathematics-explanation/>.
- Needham, T.: 1997, *Visual complex analysis*, Clarendon Press, Oxford.
- Pogonowski, J.: 2011, Geneza matematyki wedle kognitywistów, *Investigationes Linguisticae* **XXXIII**, 106–147.

- Pogonowski, J.: 2012, Matematyczne metafory kognitywistów, Tekst odczytu wygłoszonego podczas LVIII Konferencji Historii Logiki, Uniwersytet Jagielloński, Kraków, 23–24 października 2012.
<http://www.logic.amu.edu.pl/images/0/0e/Mmk2012.pdf>.
- Pogonowski, J.: 2013, Matematyczne fantazje kognitywistów, w: J. Juchnowski, R. Wiszniewski (red.), *Współczesna teoria i praktyka badań społecznych i humanistycznych*, Vol. 2, Wydawnictwo Adam Marszałek, Toruń, 117–127.
- Polya, G.: 2009, *Mathematical Discovery on Understanding, Learning, and Teaching Problem Solving*, Ishi Press International, New York, Tokyo.
- Polya, G.: 2014, *Mathematics and Plausible Reasoning. Vol. I: Induction and Analogy in Mathematics, Vol. II: Patterns of Plausible Inference*, Martino Publishing, Mansfield Centre, CT.
- Romero, G. E.: 2014, The collapse of supertasks, *Foundation of science* **19**(2), 209–216.
- Schoenfeld, A. H.: 1985, *Mathematical Problem Solving*, Academic Press Inc., Orlando.
- Sierpińska, A.: 1994, *Understanding in Mathematics*, The Falmer Press, London.
- Steiner, M.: 1978, Mathematical Explanation, *Philosophical Studies: An International Journal for Philosophy in the Analytic Tradition* **34**(2), 135–151.
- Tall, D.: 2013, *How Humans Learn to Think Mathematically. Exploring the Three Worlds of Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge.

Zakład Logiki i Kognitywistyki
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza
Instytut Psychologii
ul. Szamarzewskiego 89a (bud. AB)
PL-60-568 Poznań
e-mail pogon@amu.edu.pl

Damian Wiśniewski, Krzysztof Żyjewski

Metoda Frobeniusa, czyli o rozwiązywaniu pewnej klasy równań różniczkowych*

Abstract. The article is a comprehensive research paper which provides theoretical as well as practical aspects of the Ferdinand George Frobenius method. This method is based on seeking infinite series solutions for certain class of differential equations. It is a generalization of the power series method and allows us to solve the differential equations at least near some singular points.

1. Wprowadzenie

Ferdinand George Frobenius (1849–1917) to niemiecki matematyk współpracujący między innymi z Leopoldem Kroneckerem i Karlem Weierstrassem pod opieką, którego obronił w 1870 roku w Berlinie rozprawę doktorską. Frobenius zyskał rozgłos przede wszystkim dzięki pracom z zakresu teorii algebr, teorii grup oraz teorii liczb. Nie można jednak zapominać o zaproponowanej przez niego metodzie (Frobenius, 1873) dotyczącej poszukiwania rozwiązań dla pewnej klasy równań różniczkowych zwyczajnych.

Artykuł jest propozycją kompleksowego opracowania metody Frobeniusa zarówno od strony teoretycznej, jak i ćwiczeniowej. Motywację do napisania tej pracy stanowi fakt, że w podstawowej polskojęzycznej literaturze poświęconej równaniom różniczkowym zwyczajnym (Lenda, 2004; Lenda, Spisak, 2006; Palczewski, 2004; McQuarrie, 2005), brakuje pełnego opisu tej metody, przede wszystkim dowodu wszystkich przypadków twierdzenia Frobeniusa oraz usystematyzowania sposobów wyznaczania drugiego z rozwiązań równania $P(t)x'' + Q(t)x' + R(t)x = 0$. Artykuł skierowany jest przede wszystkim do studentów matematyki stosowanej i nauczycielskiej, jak również nauczycieli akademickich. Co więcej może stanowić inspirację do napisania pracy dyplomowej rozszerzającej nasze rozważania do przypadku równania różniczkowego n -tego rzędu (Frobenius, 1873; Ince, 1926).

*Frobenius method, or on solving a certain class of differential equations

2010 Mathematics Subject Classification: Primary: 97A10; 34A25 Secondary: 97B40, 97I40

Key words and phrases: Frobenius method, series solutions, differential equations

Kolejna część poświęcona jest wstępnym pojęciom takim jak *punkt regularny*, *punkt osobliwy*, *regularny punkt osobliwy*. Następnie omówimy omawiamy najprostszy przykład rozważanych równań, to znaczy *równanie Eulera*, które jednocześnie stanowi motywację stosowania metody Frobeniusa. Kolejna część zawiera rozważania na temat ogólnego równania różniczkowego drugiego rzędu z regularnymi punktami osobliwymi. Przedstawiamy tam sformułowanie oraz pełen dowód twierdzenia Frobeniusa, charakteryzującego postać rozwiązania w pobliżu regularnego punktu osobliwego. Dowód ten opiera się na pozycjach anglojęzycznych (Agarwal, O'Regan, 2009; Coddington, 1989). Poruszamy też problem regularnych punktów osobliwych na nieskończoności. W kolejnej części, który odpowiada części ćwiczeniowej, formułujemy i rozwiązujemy wybrane przykłady. Przedstawiamy również propozycje zadań do samodzielnego rozwiązania przez studentów.

2. Wiadomości wstępne

Będziemy rozważać rozwiązania jednorodnego równania różniczkowego drugiego rzędu postaci:

$$P(t)x'' + Q(t)x' + R(t)x = 0, \quad (1)$$

gdzie $P(t)$, $Q(t)$, $R(t)$ to dane wielomiany nie posiadające wspólnych dzielników. Przedstawiona przez nas metoda może być również stosowana gdy $P(t)$, $Q(t)$, $R(t)$ są funkcjami analitycznymi. Załóżmy, że chcemy rozwiązać równanie (1) w sąsiedztwie punktu t_0 - wówczas metoda rozwiązywania zależeć będzie od postaci $P(t)$.

Zacznijmy od definicji punktu regularnego. Punkt t_0 taki, że $P(t_0) \neq 0$ nazywamy *punktem regularnym*. Wtedy na jego otoczeniu równanie (1) możemy zapisać w postaci

$$x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = 0, \quad (2)$$

gdzie funkcje $p(t) = \frac{Q(t)}{P(t)}$ oraz $q(t) = \frac{R(t)}{P(t)}$ są analityczne w t_0 . Rozwiązanie równania (2) istnieje i jest jednoznaczne, o czym przekonuje nas następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1

Niech t_0 będzie punktem regularnym równania (1), wówczas ogólne rozwiązanie tego równania ma formę

$$x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t),$$

gdzie $x_1(t)$, $x_2(t)$ mają postać szeregów potęgowych

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t - t_0)^n,$$

zaś c_1 i c_2 to dowolne stałe. Ponadto promień zbieżności $x_1(t)$, $x_2(t)$ jest co najmniej równy mniejszemu z promieni zbieżności rozwinięć w szeregi potęgowe funkcji $p(t)$ i $q(t)$.

Dowód. Patrz twierdzenie 4.7 (Palczewski, 2004).

W pracy interesować nas będzie przypadek punktu *osobliwego*, to znaczy takiego, że $P(t_0) = 0$. Przykładowo, równanie różniczkowe

$$t^2(t-3)^2x'' + (t-3)x' + 2t^2x = 0 \quad (3)$$

posiada dwa punkty osobliwe: $t = 0$ i $t = 3$.

Rozwiązania równań różniczkowych posiadających punkty osobliwe w t_0 **zazwyczaj** nie są analityczne w tych punktach i w konsekwencji nie mają rozwiązań postaci

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - t_0)^n.$$

Nie możemy jednak zignorować istnienia takich punktów pomimo tego, że potrafimy wyznaczyć rozwiązanie w ich sąsiedztwie. Występowanie punktów osobliwych określa główne cechy rozwiązania i wpływa na jego postać w znacznie większym stopniu niż można by było podejrzewać. W sąsiedztwie punktu osobliwego rozwiązanie doświadcza często gwałtownych zmian wielkości, ucieka do nieskończoności albo wpada w bardzo szybkie oscylacje. Dlatego też zachowanie rozwiązań w pobliżu punktów osobliwych jest istotne zwłaszcza w przypadku układów fizycznych modelowanych przez równania różniczkowe. Geometrycznie punkty osobliwe związane są z występowaniem w zagadnieniach fizycznych, osobliwości brzegowych takich jak kąty lub ostre krawędzie. Liniowo niezależne rozwiązania x_1, x_2 równania (1) z punktami osobliwymi t_0 przy t dążącym do t_0 mogą być zarówno ograniczone, nieograniczone, jak i jedno z nich ograniczone, a drugie nie.

Celem prezentowanej metody Frobeniusa jest rozwinięcie techniki poszukiwania rozwiązań za pomocą szeregów potęgowych stosowanej dla punktów regularnych na pewną klasę punktów osobliwych. Aby to zrobić w stosunkowo prosty sposób należy ograniczyć się do przypadków tak zwanych *słabych osobliwości* dla funkcji $p(t) = \frac{Q(t)}{P(t)}$ i $q(t) = \frac{R(t)}{P(t)}$. Tak więc, żeby rozważać rozwiązania równania (1) w pobliżu punktów osobliwych będziemy wymagać spełnienia dodatkowych warunków przez funkcje $p(t)$, $q(t)$, mianowicie pewnej regularności tych punktów. Będziemy mówić, że punkt osobliwy t_0 jest *regularnym punktem osobliwym* równania (1), jeżeli granice:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (t - t_0)p(t) \quad \text{oraz} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} (t - t_0)^2 q(t) \quad (4)$$

istnieją i są właściwe. Natomiast jeżeli przynajmniej jedna z granic (4) nie istnieje lub jest niewłaściwa, to punkt t_0 nazywamy nieregularnym punktem osobliwym. Innymi słowy, punkt t_0 nazywamy regularnym punktem osobliwym, jeżeli funkcje $(t - t_0)p(t)$ oraz $(t - t_0)^2 q(t)$ są analityczne w punkcie t_0 . Oznacza to również, że punkt osobliwy t_0 jest regularnym punktem osobliwym jeżeli mianownik wyrażenia $p(t)$ posiada czynnik $(t - t_0)$, w co najwyżej pierwszej potęgde, a mianownik wyrażenia $q(t)$ posiada czynnik $(t - t_0)$, w co najwyżej drugiej potęgde.

Wróćmy teraz do równania (3). Dzieląc je przez $t^2(t - 3)^2$ dostaniemy

$$x'' + \frac{1}{t^2(t - 3)} x' + \frac{2}{(t - 3)^2} x = 0.$$

Zauważmy teraz, że dla punktu $t_0 = 0$ nie istnieje granica

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{t^2(t - 3)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t(t - 3)},$$

więc $t_0 = 0$ jest nieregularnym punktem osobliwym. Natomiast dla drugiego z punktów osobliwych mamy

$$\lim_{t \rightarrow 3} \frac{t-3}{t^2(t-3)} = \frac{1}{9}, \quad \lim_{t \rightarrow 3} \frac{2(t-3)^2}{(t-3)^2} = 2,$$

zatem $t_0 = 3$ jest regularnym punktem osobliwym.

Celem naszego artykułu będzie rozważanie problemu rozwiązań równania różniczkowego drugiego rzędu postaci (1) w pobliżu regularnego punktu osobliwego $t = t_0$. Ponadto, bez straty ogólności będziemy zakładać, że $t_0 = 0$. Jeżeli punkt $t_0 \neq 0$ byłby regularnym punktem osobliwym równania (1), wówczas dokonując zamiany $t = \xi + t_0$, sprowadzilibyśmy je do równania z regularnym punktem osobliwym $\xi_0 = 0$.

Na podstawie definicji regularnego punktu osobliwego wiemy, że wyrażenia

$$tp(t) = t \frac{Q(t)}{P(t)} \quad \text{oraz} \quad t^2 q(t) = t^2 \frac{R(t)}{P(t)}$$

mają skończone granice przy t dążącym do 0 oraz są analityczne w punkcie $t_0 = 0$. Dzieląc równanie (1) przez $P(t)$ oraz mnożąc przez t^2 , otrzymujemy

$$L[x] = t^2 x'' + t [tp(t)] x' + t^2 q(t) x = 0, \quad (5)$$

gdzie

$$tp(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n, \quad t^2 q(t) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n t^n \quad (6)$$

są zbieżne na pewnym przedziale $|t| < r_0$, z $r_0 > 0$.

Problem wyznaczania rozwiązań równania (5) omówimy w dalszej części artykułu.

3. Równanie Eulera, czyli motywacja metody Frobeniusa

Tutaj zajmimy się rozważaniami na temat rozwiązań równania (5) w jego najprostszej postaci, gdy $tp(t) = p_0$, $t^2 q(t) = q_0$, gdzie p_0, q_0 to stałe:

$$L_e[x] = t^2 x'' + p_0 t x' + q_0 x = 0 \quad (7)$$

czyli *równaniem Eulera*. Jak łatwo zauważyć $t_0 = 0$ jest regularnym punktem osobliwym równania Eulera. Natomiast jego rozwiązania, jak się przekonamy, reprezentują typową postać rozwiązań równań z regularnymi punktami osobliwymi. Jest to bardzo ważne równanie pod względem zastosowań. Możemy otrzymać je, rozwiązując między innymi równanie Laplace'a we współrzędnych biegunowych, równanie Schrödingera, które stosowane jest między innymi do opisu atomu wodoru czy też podczas analizy potencjału pola elektrostatycznego. Równanie to pojawia się również przy modelowaniu struktury gwiazd (Rybka, 2012). Rozważmy przykładowe równanie Eulera:

$$2t^2 x'' - tx' - 2x = 0.$$

Zauważmy, że poszukując rozwiązań w postaci szeregów potęgowych

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

(zgodnej twierdzeniem 1), otrzymujemy

$$2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^n - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0.$$

Porównując współczynniki przy kolejnych potęgach zmiennej t dostaniemy $a_n = 0$ dla wszystkich $n \neq 2$, zaś a_2 jest dowolne. W ten sposób, korzystając z metody szeregów potęgowych stosowanej w przypadku punktów regularnych, znaleźliśmy tylko jedno z rozwiązań rozważanego równania: $x_1 = t^2$. Jak łatwo sprawdzić, drugim liniowo niezależnym rozwiązaniem jest funkcja $x_2 = t^{\frac{1}{2}}$. Zatem rozwiązania równań różniczkowych z regularnymi punktami osobliwymi nie muszą być analityczne w tych punktach. Widzimy więc potrzebę modyfikacji sposobu poszukiwań rozwiązań.

Założmy najpierw, że $t > 0$. Rozwiązania (7) będziemy poszukiwać w postaci t^λ , gdzie $\lambda = \text{const}$. Umotywowane jest to faktem, że jeżeli policzymy pochodne i wstawimy do (7) otrzymamy takie same potęgi we wszystkich składnikach (7). Wprowadzając funkcję:

$$F(\lambda) = \lambda(\lambda - 1) + p_0 \lambda + q_0 \quad (8)$$

dostajemy

$$L_e[t^\lambda] = F(\lambda)t^\lambda = 0.$$

Zatem $x = t^\lambda$ jest rozwiązaniem (7) jeżeli λ jest pierwiastkiem równania kwadratowego $F(\lambda) = 0$. Stąd

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(p_0 - 1) \pm \sqrt{(p_0 - 1)^2 - 4q_0}}{2}.$$

Postać rozwiązania równania Eulera zależy od rodzaju pierwiastków $\lambda_{1,2}$. Jeżeli λ_1, λ_2 są różnymi liczbami rzeczywistymi, wówczas jak łatwo zauważyć $x_1 = t^{\lambda_1}$ oraz $x_2 = t^{\lambda_2}$ są dwoma liniowo niezależnymi rozwiązaniami (7). Jeżeli $\lambda_1 = \lambda_2$, wówczas tylko jedno rozwiązanie jest postaci t^λ . Drugie rozwiązanie może być wyznaczone za pomocą metody redukcji rzędu (patrz część 4.1.). Przedstawimy tutaj inne możliwe podejścia otrzymania drugiego rozwiązania. Zauważmy, że

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} L_e[t^\lambda] = L_e \left[\frac{\partial t^\lambda}{\partial \lambda} \right] = L_e[t^\lambda \ln t] = [F'(\lambda) + F(\lambda) \ln t] t^\lambda.$$

Stąd, ponieważ λ_1 jest dwukrotnym pierwiastkiem równania $F(\lambda) = 0$, mamy $F[t^{\lambda_1} \ln t] = 0$. Zatem $x_2 = t^{\lambda_1} \ln t$ jest drugim rozwiązaniem równania (7) w przypadku gdy $\lambda_1 = \lambda_2$.

Rozważmy teraz przypadek zespolonych pierwiastków równania $F(\lambda) = 0$. Niech $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, gdzie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ oraz $\beta \neq 0$. Używając między innymi własności

$t^\lambda = e^{\lambda \ln t}$ i wzoru Eulera $e^{i\beta} = \cos \beta + i \sin \beta$ łatwo wykazać, że z rozwiązania ogólnego postaci $x(t) = c_1 t^{\lambda_1} + c_2 t^{\lambda_2}$ dostajemy dwa liniowo niezależne rozwiązania (7):

$$x_1 = t^\alpha \cos(\beta \ln t), \quad x_2 = t^\alpha \sin(\beta \ln t).$$

Niech teraz $t < 0$. Zastosujemy podstawienie $s = -t$, $s > 0$ oraz zdefiniujemy $u(s) = x(t) = x(-s)$. Wówczas, ponieważ

$$x'(t) = -u'(s) \quad \text{oraz} \quad x''(t) = u''(s)$$

z równania (7) otrzymujemy:

$$s^2 u''(s) + p_0 s u'(s) + q_0 u(s) = 0, \quad \text{gdzie } s > 0.$$

Zatem, na bazie wcześniej uzyskanych wyników mamy, że rozwiązania dla $t < 0$ mają taką samą postać jak te otrzymane dla $t > 0$ z tym, że zastępujemy wszędzie t na $-t$.

Powyższe rozważania można podsumować następującym twierdzeniem:

TWIERDZENIE 2

Niech będzie dany wielomian $F(\lambda) = \lambda(\lambda - 1) + p_0 \lambda + q_0$, gdzie p_0, q_0 to stałe rzeczywiste. Wówczas, jeżeli pierwiastki λ_1, λ_2 równania $F(\lambda) = 0$ są:

a) rzeczywiste i różne, to

$$x_1 = |t|^{\lambda_1}, \quad x_2 = |t|^{\lambda_2};$$

b) rzeczywiste i równe, to

$$x_1 = |t|^{\lambda_1}, \quad x_2 = |t|^{\lambda_1} \ln |t|;$$

c) zespolone : $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, gdzie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ oraz $\beta \neq 0$, to

$$x_1 = |t|^\alpha \cos(\beta \ln |t|), \quad x_2 = |t|^\alpha \sin(\beta \ln |t|)$$

są liniowo niezależnymi rozwiązaniami równania Eulera (7), na dowolnym przedziale niezawierającym zera.

4. Metoda Frobeniusa

Metoda Frobeniusa polega na poszukiwaniu rozwiązań równania (5) w pobliżu punktu osobliwego t_0 w postaci tak zwanego szeregu Frobeniusa:

$$x(t, \lambda) = t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n. \quad (9)$$

z nieokreślonymi liczbami $\lambda, a_0, a_1, \dots$, przy czym wykładnik λ jest wybierany w taki sposób, żeby $a_0 \neq 0$. Piszemy $x(t, \lambda)$ dla podkreślenia, że rozwiązanie zależy zarówno od t jak i parametru λ . Dalej, licząc pochodne

$$\begin{aligned} x'(t, \lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n + \lambda) a_n t^{n+\lambda-1}, \\ x''(t, \lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n + \lambda)(n + \lambda - 1) a_n t^{n+\lambda-2} \end{aligned} \quad (10)$$

i podstawiając (9), (10) do równania (5), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n + \lambda)(n + \lambda - 1) a_n t^{n+\lambda} + \sum_{m=0}^{\infty} p_m t^m \sum_{n=0}^{\infty} (n + \lambda) a_n t^{n+\lambda} \\ + \sum_{m=0}^{\infty} q_m t^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+\lambda} = 0 \end{aligned}$$

lub równoważnie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (n + \lambda)(n + \lambda - 1) a_n + \sum_{k=0}^n [(k + \lambda) p_{n-k} + q_{n-k}] a_k \right\} t^{n+\lambda} = 0.$$

Korzystając z (8) powyższe równanie możemy zapisać w następujący sposób:

$$\begin{aligned} L[x](t, \lambda) &= a_0 F(\lambda) t^\lambda \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ F(\lambda + n) a_n + \sum_{k=0}^{n-1} [(k + \lambda) p_{n-k} + q_{n-k}] a_k \right\} t^{n+\lambda} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Równanie (11) będzie spełnione jedynie wtedy, gdy wszystkie współczynniki przy kolejnych potęgach zmiennej t będą równe zero. Z faktu, że $a_0 \neq 0$, dla współczynnika przy t^λ , otrzymujemy tak zwane *równanie wyznaczające* $F(\lambda) = 0$. Pierwiastki tego równania nazywane są *wykładnikami regularnego punktu osobliwego* $t = 0$. Współczynniki przy kolejnych potęgach $n = 1, 2, \dots$ wyznaczają związek rekurencyjny

$$F(\lambda + n) a_n = - \sum_{k=0}^{n-1} [(k + \lambda) p_{n-k} + q_{n-k}] a_k, \text{ gdzie } n = 1, 2, \dots, \quad (12)$$

który dla ustalonej wartości λ pozwala wyznaczyć współczynniki a_n w zależności od a_0 . W ten sposób dla dwóch pierwiastków λ_1, λ_2 równania $F(\lambda) = 0$ możemy wyznaczyć dwa rozwiązania równania (5).

Zauważmy jednak, że w przypadku gdy pierwiastki równania wyznaczającego są sobie równe, to metoda ta daje nam tylko jedno rozwiązanie. Z kolei w sytuacji, gdy mamy różne pierwiastki takie, że $\lambda_1 - \lambda_2 = m$, gdzie $m \in \mathbb{N}$, to układ (12) ma rozwiązanie dla większego z pierwiastków λ_1 , natomiast dla $\lambda = \lambda_2$ mamy $F(\lambda_2 + m) = F(\lambda_1) = 0$ i w tym przypadku układ (12) może być sprzeczny.

Podsumowując, niezależnie od przypadku, równanie (5) posiada przynajmniej jedno rozwiązanie postaci (9). Poszukiwanie drugiego rozwiązania równania (5) jest zależne od przypadku, o czym mówi nam następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE 3

Niech $t_0 = 0$ będzie regularnym punktem osobliwym równania (5). Niech funkcje $tp(t)$, $t^2q(t)$ będą analityczne w punkcie $t_0 = 0$, a zatem i rozwijalne w szeregi potęgowe (6) dla $|t| < r_0$. Ponadto niech λ_1, λ_2 będą pierwiastkami równania wyznaczającego (8). Wówczas równanie (5) w przedziale $|t| < r_0$ posiada dwa liniowo niezależne rozwiązania $x_1(t), x_2(t)$:

(i) jeśli $\operatorname{Re}(\lambda_1) \neq \operatorname{Re}(\lambda_2)$ oraz różnica $\lambda_1 - \lambda_2$ nie jest liczbą naturalną, to

$$x_1 = |t|^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad x_2 = |t|^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n, \quad (13)$$

a współczynniki a_n oraz b_n można wyznaczyć z równania (12);

(ii) jeśli $\lambda_1 = \lambda_2$, to

$$x_1 = |t|^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad x_2 = x_1 \ln |t| + |t|^{\lambda_1} \sum_{n=1}^{\infty} c_n t^n; \quad (14)$$

(iii) jeśli $\lambda_1 - \lambda_2 = m$, gdzie m to dodatnia naturalna liczba, to

$$x_1 = |t|^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad x_2 = c x_1 \ln |t| + |t|^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n t^n, \quad (15)$$

gdzie współczynniki a_n, b_n, c_n, d_n oraz mogąca się zerować stała $c \in \mathbb{R}$ są wyznaczone poprzez podstawienie odpowiedniej postaci $x(t)$ do równania (5).

Zanim przystąpimy do dowodu tego twierdzenia pragniemy podkreślić, że stałe c_n oraz c, d_n mogą być również wyznaczone odpowiednio ze wzorów (21) oraz (24) zaprezentowanych w dalszym ciągu pracy.

Dowód. W dowodzie będziemy pisać $a_n(\lambda_i)$ dla $i = 1, 2$, aby podkreślić od którego pierwiastka zależą współczynniki a_n .

(i) Na mocy założenia, że λ_1, λ_2 są różnymi pierwiastkami równania wyznaczającego, możemy zapisać:

$$F(\lambda) = \lambda(\lambda - 1) + p_0\lambda + q_0 = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2).$$

Wówczas zachodzi oszacowanie:

$$|F(\lambda_1 + n)| = |n(n + \lambda_1 - \lambda_2)| \geq n(n - |\lambda_1 - \lambda_2|). \quad (16)$$

Ze zbieżności szeregów (6) w $|t| = r < r_0$ istnieje stała $K > 0$ taka, że:

$$|p_j| r^j \leq K \quad \text{oraz} \quad |q_j| r^j \leq K \quad \text{dla} \quad j = 0, 1, \dots$$

Metoda Frobeniusa, czyli o rozwiązywaniu pewnej klasy równań różniczkowych [147]

Stąd oraz na podstawie (16), (12) otrzymujemy:

$$n(n - |\lambda_1 - \lambda_2|)|a_n(\lambda_1)| \leq K \sum_{k=0}^{n-1} (k + |\lambda_1| + 1)r^{-n+k}|a_k(\lambda_1)|, \text{ dla } n = 1, 2, \dots \quad (17)$$

Wybermy teraz liczbę naturalną N , taką, że: $N - 1 \leq |\lambda_1 - \lambda_2| < N$ oraz zdefiniujmy dodatnie stałe A_j następująco:

$$A_0 = a_0(\lambda_1) = 1, \quad A_j = |a_j(\lambda_1)|, \quad \text{dla } j = 1, 2, \dots, N - 1$$

oraz

$$j(j - |\lambda_1 - \lambda_2|)A_j = K \sum_{k=0}^{j-1} (k + |\lambda_1| + 1)r^{-j+k}A_k, \quad \text{dla } j = N, N + 1, \dots \quad (18)$$

Porównując definicję A_j z nierównością (17) łatwo zauważyć, że

$$|a_n(\lambda_1)| \leq A_n, \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots \quad (19)$$

Pokażemy, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n$ jest zbieżny dla $|t| < r$. Zamieniając w (18) j na $n + 1$, mamy

$$r(n + 1)(n + 1 - |\lambda_1 - \lambda_2|)A_{n+1} = [n(n - |\lambda_1 - \lambda_2|) + K(n + 1 + |\lambda_1|)] A_n$$

dla $k \geq N$. Stąd

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{A_{n+1} t^{n+1}}{A_n t^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[n(n - |\lambda_1 - \lambda_2|) + K(n + 1 + |\lambda_1|)]}{r(n + 1)(n + 1 - |\lambda_1 - \lambda_2|)} |t| = \frac{|t|}{r}.$$

Zatem, na mocy kryterium zbieżności d'Alemberta, szereg $\sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n$ jest zbieżny dla $|t| < r$.

Teraz, z nierówności (19) oraz z kryterium porównawczego, otrzymujemy zbieżność szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda_1) t^n$ dla $|t| < r$, gdzie $a_0(\lambda_1) = 1$. Ostatecznie, z dowolności wyboru r spełniającego $0 < r < r_0$, wynika zbieżność tego szeregu dla $|t| < r_0$. Zatem, możemy stwierdzić, że $|t|^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda_1) t^n$ jest analitycznym rozwiązaniem równania (5) przynajmniej dla $0 < |t| < r_0$.

Jeżeli zastąpimy w powyższym rozważaniu λ_1 na λ_2 , wówczas otrzymamy $|t|^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda_2) t^n$ jest drugim analitycznym rozwiązaniem równania (5) przynajmniej dla $0 < |t| < r_0$.

(ii) Postać rozwiązania x_1 otrzymamy tak jak w przypadku (i), więc wystarczy pokazać, że zachodzi (14) dla funkcji x_2 . Załóżmy teraz, że λ nie jest pierwiastkiem równania wyznaczającego, natomiast spełnia równanie (12). Wtedy z (11), mamy:

$$L[x](t, \lambda) = a_0 F(\lambda) t^\lambda. \quad (20)$$

Dalej,

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} L[x](t, \lambda) = L \left[\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right] (t, \lambda) = a_0 t^\lambda [F'(\lambda) + F(\lambda) \ln t].$$

Stąd, ponieważ λ_1 jest dwukrotnym pierwiastkiem równania $F(\lambda) = 0$ mamy $L \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right) (t, \lambda_1) = 0$, co oznacza, że $\frac{\partial x}{\partial \lambda}(t, \lambda_1)$ jest drugim rozwiązaniem. Wobec tego

$$x_2 = \frac{\partial x}{\partial \lambda}(t, \lambda_1) = t^{\lambda_1} \ln t \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda_1) t^n + t^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial a_n}{\partial \lambda}(\lambda_1) t^n.$$

Zatem

$$x_2 = x_1 \ln t + t^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n,$$

gdzie

$$c_n = \frac{\partial a_n}{\partial \lambda}(\lambda_1), \quad \text{dla } n = 0, 1, \dots \quad (21)$$

Zauważmy jeszcze, że $c_0 = 0$ gdyż współczynnik a_0 nie zależy od λ .

Przypadek $-r_0 < t < 0$ może być rozważany w podobny sposób. Ponadto, z faktu, że $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ jest jednostajnie i absolutnie zbieżny dla $|t| \leq r < r_0$ wynika jednostajna i absolutna zbieżność szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ dla $|t| \leq r < r_0$, co również uzasadnia założenie, że różniczkowanie po λ było przeprowadzone wyraz po wyrazie. Ostatecznie x_2 jest analityczne dla $0 < |t| < r_0$.

(iii) Na mocy założenia, że pierwiastki λ_1, λ_2 równania wyznaczającego są takie, że $\lambda_1 - \lambda_2 = m$, gdzie m jest dodatnią liczbą naturalną z kroku (i) dostajemy analityczne dla $0 < |t| < r_0$ rozwiązanie x_1 odpowiadające λ_1 postaci $x_1 = |t|^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$.

Dla pierwiastka λ_2 i zadanej $a_0(\lambda_2)$ z zależności rekurencyjnej (12) możemy wyznaczyć skończone wartości $a_n(\lambda_2)$, dla $n = 1, 2, \dots, m-1$. Jednakże dla $n = m$ pojawia się problem, gdyż współczynnik przy $a_n(\lambda_2)$ równa się $F(\lambda_2 + m) = F(\lambda_1) = 0$. Mogą tutaj, w zależności od zerowania się prawej strony równania (12), wystąpić dwa przypadki. Jeśli jest ona równa zero, równanie to jest spełnione dla dowolnej wartości a_m , co pozwala nam również wyznaczyć a_n dla $n = m+1, m+2, \dots$. W ten sposób dostajemy rozwiązanie x_2 z (15) ze stałą $c = 0$:

$$x_2 = |t|^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n t^n.$$

Jeśli prawa strona równania (12) jest różna od zera to w celu znalezienia drugiego rozwiązania wybieramy $a_0(\lambda) = \lambda - \lambda_2$. Wówczas $a_n(\lambda_2) = 0$ dla $n = 0, 1, \dots, m-1$ oraz $a_m(\lambda_2)$ istnieje i jest nieokreślony. Wybierając $a_m(\lambda_2)$ w sposób dowolny ze związku rekurencyjnego (12) wyznaczamy $a_{m+n}(\lambda_2)$ w zależności

od $a_m(\lambda_2)$. W ten sposób otrzymujemy rozwiązanie w postaci szeregu zaczynającego się od m -tej potęgi t :

$$t^{\lambda_2} \sum_{n=m}^{\infty} a_n(\lambda_2) t^n = t^{\lambda_1} \sum_{n=m}^{\infty} a_n(\lambda_2) t^{n-m} = t^{\lambda_1} \sum_{l=0}^{\infty} a_l^*(\lambda_2) t^l, \quad (22)$$

gdzie $a_l^*(\lambda_2) = a_{l+m}(\lambda_2)$ dla $l = 0, 1, \dots$. Zauważmy, że współczynniki $a_l^*(\lambda_2)$ są wyznaczone z (12) oraz $F(\lambda_1) = F(\lambda_2 + m)$, zatem rozwiązanie (22) jest co do stałej równe rozwiązaniu x_1 .

W celu otrzymania rozwiązania powiązanego z λ_2 analogicznie do przypadku (ii) założymy, że λ nie jest pierwiastkiem równania wyznaczającego, natomiast spełnia równanie (12). Stąd oraz z faktu, że $a_0(\lambda) = \lambda - \lambda_2$ z (11), dostajemy:

$$L[x](t, \lambda) = a_0 F(\lambda) t^\lambda = t^\lambda (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)^2. \quad (23)$$

Powtarzając rozważania z (ii) mamy $L\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)(t, \lambda_2) = 0$, co oznacza, że $\frac{\partial x}{\partial \lambda}(t, \lambda_2)$ jest drugim rozwiązaniem. Zatem

$$x_2 = \frac{\partial x}{\partial \lambda}(t, \lambda_2) = t^{\lambda_2} \ln t \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda_2) t^n + t^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial a_n}{\partial \lambda}(\lambda_2) t^n.$$

Stąd, ponieważ $a_0(\lambda_2) = \dots = a_{m-1}(\lambda_2) = 0$ oraz na mocy (22), możemy zapisać

$$x_2 = c x_1 \ln t + t^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n t^n,$$

gdzie

$$c = a_m(\lambda_2) \quad \text{oraz} \quad d_n = \frac{\partial a_n}{\partial \lambda}(\lambda_2). \quad (24)$$

Ponadto, powtarzając rozważania z przypadku (ii) otrzymujemy, że rozwiązanie x_2 jest analityczne dla $0 < |t| < r_0$, co kończy dowód.

UMOWA. Niejednokrotnie w niniejszym artykule twierdzenie 3 będziemy nazywać *twierdzeniem Frobeniusa*.

UWAGA 1

Niech $\lambda_1 > \lambda_2$ będą rzeczywistymi pierwiastkami równania wyznaczającego. Jeżeli rozwiązanie stowarzyszone z mniejszym pierwiastkiem tego równania λ_2 :

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+\lambda_2}$$

zawiera dwie dowolne stałe, to jest ono rozwiązaniem ogólnym. Nie musimy wówczas wyznaczać równania stowarzyszonego z λ_1 .

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Frobeniusa również jest prawdziwe, o czym mówi twierdzenie Fuchsa (Yosida, 1960, twierdzenie 12.1). Mianowicie, jeżeli wszystkie rozwiązania równania (5) spełniają warunek

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^\lambda x(t) = 0$$

dla pewnej wartości λ , wtedy funkcje $tp(t)$ oraz $t^2 q(t)$ są analityczne w punkcie $t_0 = 0$.

4.1. Metoda redukcji rzędu

Metoda Frobeniusa rozwiązywania równań różniczkowych z regularnymi punktami osobliwymi pozwala nam w łatwy sposób otrzymać zazwyczaj tylko jedno rozwiązanie $x_1(t)$. W celu otrzymania drugiego liniowo niezależnego rozwiązania można posłużyć się metodą redukcji rzędu. Polega ona na poszukiwaniu rozwiązania $x_2(t)$ w postaci:

$$x_2(t) = u(t)x_1(t), \quad (25)$$

gdzie $x_1(t)$ to pierwsze rozwiązanie. Następnie, ponieważ $x_1(t)$ jest rozwiązaniem to wstawiając (25) do (5), mamy

$$u''(t)x_1(t) + [2x_1'(t) + p(t)x_1(t)]u'(t) = 0.$$

Rozwiązując powyższe równanie poprzez obniżenie rzędu, dostajemy

$$u'(t) = \frac{\exp\left(\int -p(t)dt\right)}{x_1^2(t)}. \quad (26)$$

Zatem

$$x_2(t) = x_1(t) \int x_1^{-2}(t) \exp\left(-\int p(t)dt\right) dt. \quad (27)$$

Ponadto zauważmy, że z (26) mamy, że $u'(t) \neq 0$. Stąd $u(t) \neq \text{const.}$, co oznacza liniowo niezależność $x_1(t)$ i $x_2(t)$.

4.2. Regularne punkty osobliwe na nieskończoności

Metoda szeregów Frobeniusa może być z powodzeniem stosowana dla równań

$$x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = 0 \quad (28)$$

przy $|t| \rightarrow \infty$. W tym celu należy dokonać zamiany zmiennych $t = \frac{1}{\xi}$ i rozważać rozwiązanie odpowiedniego równania w pobliżu $\xi = 0$. Ponieważ

$$\frac{dx}{dt}(t) = -\xi^2 \frac{dx}{d\xi} \left(\frac{1}{\xi}\right) \quad \text{oraz} \quad \frac{d^2x}{dt^2}(t) = \xi^4 \frac{d^2x}{d\xi^2} \left(\frac{1}{\xi}\right) + 2\xi^3 \frac{dx}{d\xi} \left(\frac{1}{\xi}\right),$$

więc równanie (28) przyjmie postać:

$$\xi^4 x'' \left(\frac{1}{\xi}\right) + \left[2\xi^3 - \xi^2 p \left(\frac{1}{\xi}\right)\right] x' \left(\frac{1}{\xi}\right) + q \left(\frac{1}{\xi}\right) x \left(\frac{1}{\xi}\right) = 0. \quad (29)$$

Niech $x(t)$ będzie rozwiązaniem równania (28) dla $|t| > t_0 > 0$. Wprowadzając

$$\bar{x}(\xi) = x \left(\frac{1}{\xi}\right), \quad \bar{p}(\xi) = p \left(\frac{1}{\xi}\right), \quad \bar{q}(\xi) = q \left(\frac{1}{\xi}\right)$$

dla $|\xi| < \frac{1}{t_0}$ z równania (29), dostajemy:

$$\xi^2 \bar{x}''(\xi) + \xi \left(2 - \frac{\bar{p}(\xi)}{\xi}\right) \bar{x}'(\xi) + \frac{\bar{q}(\xi)}{\xi^2} \bar{x}(\xi) = 0. \quad (30)$$

Będziemy mówić, że $t = \infty$ jest *regularnym punktem osobliwym równania* (28) jeśli $\xi = 0$ jest regularnym punktem osobliwym równania (30).

UWAGA 2

Na podstawie powyższej definicji zauważmy, że równanie (30) posiada w $\xi = 0$ regularny punkt osobliwy wtedy i tylko wtedy, gdy funkcje $\bar{p}(\xi)/\xi$ oraz $\bar{q}(\xi)/\xi^2$ są analityczne w $\xi = 0$.

Zatem możemy powiedzieć, że:

UWAGA 3

Punkt $t = \infty$ jest regularnym punktem osobliwym równania (28) wtedy i tylko wtedy, gdy (28) możemy zapisać w postaci

$$t^2 x''(t) + t p_1(t) x'(t) + q_1(t) x(t) = 0$$

gdzie funkcje $p_1(t)$, $q_1(t)$ posiadają zbieżne rozwinięcia w szeregi potęgowe potęg $1/t$ dla $|t| > t_0$, $t_0 > 0$.

5. Przykłady

Na wstępie tego rozdziału podkreślimy, że ważnym przykładem z zakresu równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu z punktami osobliwymi jest równanie Bessela:

$$t^2 x''(t) + t x'(t) + (t^2 - m^2) x(t) = 0$$

określone dla dowolnych liczb zespolonych m , zwanych rzędem równania Bessela. Pojawia się ono między innymi podczas rozwiązywania, jakże istotnych równań Laplace'a i Helmholtza metodą rozdzielania zmiennych we współrzędnych sferycznych i cylindrycznych. Równanie Bessela posiada regularny punkt osobliwy $t = 0$ oraz nieregularny punkt osobliwy $t = \infty$, a jego rozwiązaniami są funkcje Bessela $J_m(x)$. Ze względu na obszerne informacje na temat metod rozwiązywania równania Bessela występujące w literaturze polskiej, m.in. Lenda (2004), Palczewski (2004), w naszej pracy ograniczamy się wyłącznie do rozwiązania szczególnego przypadku dla $m^2 = \frac{1}{4}$ (co uczynimy w przykładzie 2).

W niniejszej części, korzystając przede wszystkim z twierdzenia Frobeniusa, przedstawimy różnorodne możliwe sposoby rozwiązywania równań różniczkowych drugiego rzędu z regularnymi punktami osobliwymi. Jak było to udowodnione wcześniej, co najmniej jedno z rozwiązań równań z regularnymi punktami osobliwymi jest w postaci szeregu Frobeniusa, dlatego przede wszystkim interesujące są sposoby wyznaczania rozwiązania x_2 .

Pierwsze dwa przykłady pokazują jak można postępować w przypadku otrzymania równania wyznaczającego, którego różnica pierwiastków jest liczbą całkowitą. W przykładzie 1. w celu otrzymania drugiego rozwiązania posłużymy się metodą redukcji rzędu, natomiast przykład 2. ilustruje możliwość otrzymania dwóch rozwiązań w oparciu o mniejszy z pierwiastków równania wyznaczającego. Przykład trzeci i czwarty pokazują różne możliwości powstałe w przypadku, gdy pierwiastek jest dwukrotny. W przykładzie 3. postać drugiego rozwiązania dostaniemy podstawiając odpowiedni wzór z twierdzenia 3 do rozpatrywanego równania, podczas gdy w przykładzie 4. nieznanne w x_2 współczynniki wyznaczymy przez

różniczkowanie $a_n(\lambda)$. Nie rozwiązujemy tutaj przykładów najłatwiejszego przypadku, gdy pierwiastki równania wyznaczającego są różne. W wypadku tym, jak również w celu zapoznania się z większą ilością ciekawych przykładów, zachęcamy Czytelnika do lektury Lenda, Spisak (2006, rozdział 2). Na końcu rozdziału zainteresowany Czytelnik znajdzie przykłady do samodzielnego rozwiązania wraz z podanymi odpowiedziami.

W przykładach 1–3 punkt $t_0 = 0$ jest regularnym punktem osobliwym (co pozostawiamy do sprawdzenia Czytelnikowi), natomiast w przykładzie 4 regularnym punktem osobliwym jest $t = \infty$. Naszym zadaniem jest znalezienie rozwiązań w pobliżu tych punktów.

PRZYKŁAD 1

Znajdziemy rozwiązanie równania

$$tx'' - tx' - x = 0. \quad (31)$$

Zgodnie z metodą Frobeniusa wstawiając funkcje x , x' , x'' w postaci szeregów (9)–(10) do równania (31) otrzymujemy:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)(n+\lambda-1)a_n t^{n+\lambda-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda+1)a_n t^{n+\lambda} = 0 \quad (32)$$

oraz równanie wyznaczające $\lambda(\lambda-1) = 0$. Jego pierwiastkami są $\lambda_1 = 1$ oraz $\lambda_2 = 0$. Różnica $\lambda_1 - \lambda_2$ jest liczbą całkowitą, więc dostajemy przypadek (iii) twierdzenia Frobeniusa. Z zależności (32) porównując współczynniki przy $t^{n+\lambda}$ otrzymujemy wzór rekurencyjny na współczynniki a_n :

$$(n+\lambda-1)a_n - a_{n-1} = 0, \text{ dla } n \geq 0. \quad (33)$$

Stąd

$$a_n = \frac{1}{n+\lambda-1} a_{n-1}, \text{ dla } n \geq 1, \quad (34)$$

o ile $n+\lambda-1 \neq 0$.

Rozważmy najpierw większy z pierwiastków równania wyznaczającego, dla którego na mocy twierdzenia 3 rozwiązanie będzie w postaci szeregu Frobeniusa. Wstawiając w (34) $\lambda = \lambda_1 = 1$ otrzymujemy wzór rekurencyjny $a_n = \frac{1}{n} a_{n-1}$. Stąd zaś $a_n = \frac{1}{n!} a_0$, więc rozwiązanie x_1 równania (31) ma formę:

$$x_1 = a_0 t \left(1 + \frac{1}{1!} t + \frac{1}{2!} t^2 + \frac{1}{3!} t^3 + \dots + \frac{1}{n!} t^n + \dots \right) = a_0 t e^t.$$

W przypadku mniejszego z pierwiastków jeżeli postąpilibyśmy tak jak dla λ_1 otrzymalibyśmy sprzeczność. Rzeczywiście, podstawiając w (33) $\lambda = \lambda_2 = 0$ mieilibyśmy $(n-1)a_n = a_{n-1}$. Podstawiając w tym wzorze $n = 1$ otrzymalibyśmy, że $a_0 = 0$, co jest sprzeczne z założeniem, że $a_0 \neq 0$.

Postać rozwiązania x_1 sugeruje użycie metody redukcji rzędu opisanej w 4.1. W tym celu posługując się wzorem (27) dostaniemy

$$x_2 = \frac{1}{a_0} t e^t \int \frac{1}{t^2 e^{2t}} \exp \left(- \int (-1) dt \right) dt = \frac{1}{a_0} t e^t \int \frac{e^{-t}}{t^2} dt.$$

Następnie, ponieważ zachodzi formuła (Bronsztejn, Musiol, Siemiendajew, Mühlig, 2004, całki 451-452 str. 1147)

$$\int \frac{e^{-x}}{x^2} dx = -\frac{e^{-x}}{2x} - \frac{1}{2} \left(\ln x + \frac{(-x)}{1 \cdot 1!} + \frac{(-x)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(-x)^3}{3 \cdot 3!} + \dots \right),$$

mamy

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{a_0} t e^t \left[-\frac{e^{-t}}{2t} - \frac{1}{2} \left(\ln t + \frac{(-t)}{1 \cdot 1!} + \frac{(-t)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(-t)^3}{3 \cdot 3!} + \dots \right) \right] \\ &= -\frac{1}{2a_0} t e^t \ln t - \frac{1}{2a_0} \left[1 + \frac{(-t)}{1 \cdot 1!} + \frac{(-t)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(-t)^3}{3 \cdot 3!} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Ponadto możemy zauważyć, że rozwiązanie x_2 jest postaci takiej jak w (15).

PRZYKŁAD 2

Tym razem spróbujemy znaleźć rozwiązania równania

$$t^2 x'' + tx' + \left(t^2 - \frac{1}{4} \right) x = 0.$$

Dokonując odpowiednich podstawień oraz elementarnych przekształceń, dostaniemy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n + \lambda)^2 - \frac{1}{4} \right] a_n t^{n+\lambda} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+2+\lambda} = 0. \quad (35)$$

W tym przypadku równanie wyznaczające jest postaci $\lambda^2 - \frac{1}{4} = 0$, zatem jego pierwiastkami są liczby $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$. Ich różnica jest liczbą całkowitą, więc mamy do czynienia z przypadkiem (iii) twierdzenia 3. Spróbujemy skorzystać tutaj z Uwagi 1, zgodnie z którą może się okazać, że rozwiązanie odpowiadające mniejszemu z pierwiastków równania wyznaczającego (czyli $\lambda = -\frac{1}{2}$) zawiera dwie dowolne stałe. Wtedy to rozwiązanie będzie jednocześnie rozwiązaniem ogólnym rozważanego przez nas równania.

Porównując współczynniki przy t^{n+2} w równaniu (35), otrzymamy zależność $[(n+2+\lambda)^2 - \frac{1}{4}] a_{n+2} + a_n = 0$. Kładąc teraz $\lambda = \lambda_2 = -\frac{1}{2}$, dostaniemy

$$a_{n+2} = \frac{-1}{(n+2)(n+1)} a_n, \text{ dla } n \geq 0. \quad (36)$$

Z drugiej strony, porównując współczynniki przy t^1 dla $\lambda = -\frac{1}{2}$, mamy $0 \cdot a_1 = 0$, zatem a_1 jest dowolną liczbą rzeczywistą różną od zera. Możemy teraz wyznaczyć kilka kolejnych wyrazów ciągu (36):

$$a_2 = \frac{-1}{2!} a_0, \quad a_3 = \frac{-1}{3!} a_1, \quad a_4 = \frac{1}{4!} a_0, \quad a_5 = \frac{1}{5!} a_1, \quad a_6 = \frac{-1}{6!} a_0, \quad a_7 = \frac{-1}{7!} a_1, \dots,$$

więc rozwiązanie x_2 jest postaci

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{a_0}{\sqrt{|t|}} \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \dots \right) + \frac{a_1}{\sqrt{|t|}} \left(1 - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \dots \right) \\ &= \frac{a_0}{\sqrt{|t|}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^{2n} + \frac{a_1}{\sqrt{|t|}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1} = \frac{a_0}{\sqrt{|t|}} \cos t + \frac{a_1}{\sqrt{|t|}} \sin t. \end{aligned}$$

Jest to jednocześnie rozwiązanie ogólne rozpatrywanego równania. Proponujemy Czytelnikowi sprawdzenie tego faktu poprzez wyznaczenie rozwiązania dla $\lambda = \lambda_1 = \frac{1}{2}$.

PRZYKŁAD 3

Znajdziemy rozwiązania równania

$$t^2 x'' - tx' + (t^2 + 1)x = 0. \quad (37)$$

Poszukujemy rozwiązania w postaci szeregu Frobeniusa. Kładąc funkcje x , x' , x'' w postaci szeregów (9)-(10) do równania (37) otrzymujemy:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+\lambda)(n+\lambda-2)+1] a_n t^{n+\lambda} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+\lambda+2} = 0. \quad (38)$$

Porównując współczynniki przy potęgach t^λ dostajemy równanie wyznaczające $(\lambda-1)^2 = 0$, co oznacza, że mamy przypadek (ii) twierdzenia 3: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. W związku z tym tylko jedno z rozwiązań będzie w postaci szeregu Frobeniusa.

Wstawiając w (38) $\lambda = 1$ dostajemy:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 a_n t^{n+1} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} t^{n+1} = 0.$$

Stąd, wyznaczając zależności pomiędzy współczynnikami a_n dla $n \geq 1$, mamy

$$\begin{cases} a_0 \neq 0; \\ a_{2k} = -\frac{1}{4k^2} a_{2k-2} = \frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2} a_0, & \text{dla } k \geq 1; \\ a_{2k+1} = 0, & \text{dla } k \geq 0. \end{cases}$$

Zatem rozwiązanie x_1 z dokładnością do stałej ma formę:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_0 t \left(1 + \frac{(-1)}{2^2 \cdot (1!)^2} t^2 + \frac{(-1)^2}{2^4 \cdot (2!)^2} t^4 + \dots + \frac{(-1)^n}{2^{2n} (n!)^2} t^{2n} + \dots \right) \\ &= a_0 t \cdot J_0(t), \end{aligned}$$

gdzie $J_0(t)$ jest funkcją Bessela pierwszego rodzaju rzędu 0.

Niech $a_0 = 1$. Wyznamy teraz drugie rozwiązanie x_2 równania (37). Szukamy go w postaci właściwej do przypadku (ii) twierdzenia 3:

$$x_2 = x_1 \ln t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n t^{n+1}. \quad (39)$$

Metoda Frobeniusa, czyli o rozwiązywaniu pewnej klasy równań różniczkowych [155]

Różniczkując dwukrotnie (39), a następnie wstawiając x_2, x'_2, x''_2 do (37), mamy

$$\begin{aligned} & \left(\overbrace{t^2 x''_1 - t x'_1 + (t^2 + 1)x_1}^{=0} \right) \ln t + 2t x'_1 - 2x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n t^{n+3} \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)b_n t^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)b_n t^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n t^{n+1} = 0. \quad (40) \end{aligned}$$

Następnie, ponieważ $x_1 = t \cdot J_0(t)$, gdzie $J_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} t^{2n}$ wynika, że

$$2t x'_1 - 2x_1 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4n}{2^{2n}(n!)^2} t^{2n+1}.$$

Stąd z (40) dostajemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4n}{2^{2n}(n!)^2} t^{2n+1} + \sum_{n=4}^{\infty} [(n-1)^2 b_{n-1} + b_{n-3}] t^n + b_1 t^2 + 4b_2 t^3 = 0.$$

Ostatecznie wyznaczając kilka kolejnych wyrazów ciągu (b_n) :

$$b_1 = 0, \quad b_2 = \frac{1}{4}, \quad b_3 = 0, \quad b_4 = -\frac{3}{128}, \quad b_5 = 0, \quad b_6 = \frac{3}{512}, \dots$$

otrzymujemy drugie rozwiązanie równania (37):

$$x_2 = t \ln t \cdot J_0(t) + \left(\frac{1}{4} t^3 - \frac{3}{128} t^5 + \frac{3}{512} t^7 + \dots \right).$$

PRZYKŁAD 4

Znajdziemy teraz rozwiązania równania

$$x'' + \frac{1+5t}{t^2+t} x' + \frac{1}{t^2+t} x = 0 \quad (41)$$

dla dużych t .

Dokonując w powyższym równaniu zamiany $t = \frac{1}{\xi}$ i stosując przekształcenia opisane w części 4.2. dostajemy

$$\xi^2(1+\xi)\bar{x}'' - \xi(3-\xi)\bar{x}' + 4\bar{x} = 0, \quad (42)$$

gdzie $\bar{x}(\xi) = x(\frac{1}{\xi})$. Jak łatwo sprawdzić punkt $\xi = 0$ jest regularnym punktem osobliwym równania (42). Zatem, na mocy definicji, punkt $t = \infty$ jest regularnym punktem osobliwym równania (41).

Przystąpimy teraz do rozwiązania równania (42). Kładąc w nim funkcje $\bar{x}, \bar{x}', \bar{x}''$ w postaci szeregów (9)-(10) zmiennej ξ dostajemy:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+\lambda)(n+\lambda-4) + 4] a_n \xi^{n+\lambda} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)^2 a_n \xi^{n+\lambda+1} = 0. \quad (43)$$

Tutaj równanie wyznaczające jest postaci $(\lambda - 2)^2 = 0$, co oznacza, że kolejny raz mamy przypadek (ii) twierdzenia 3: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$.

W zależności (43) porównując współczynniki przy $\xi^{n+\lambda}$ otrzymujemy wzór rekurencyjny na $a_n(\lambda)$:

$$a_n(\lambda) = \frac{-(n + \lambda - 1)^2}{(n + \lambda)(n + \lambda - 4) + 4} a_{n-1} = \frac{-(n + \lambda - 1)^2}{(n + \lambda - 2)^2} a_{n-1}, \quad \text{dla } n \geq 1.$$

Stąd,

$$a_n(\lambda) = (-1)^n \frac{(n + \lambda - 1)^2}{(\lambda - 1)^2} a_0, \quad \text{dla } n \geq 1. \quad (44)$$

Wstawiając $\lambda = 2$ do (44) mamy $a_n(2) = (-1)^n (n + 1)^2 a_0$. Zatem rozwiązanie $\bar{x}_1$ równania (42) ma postać

$$\bar{x}_1 = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n + 1)^2 \xi^n. \quad (45)$$

W tym przykładzie rozwiązanie $\bar{x}_2$ otrzymamy, stosując następujący wzór z twierdzenia 3

$$\bar{x}_2 = \bar{x}_1 \ln |\xi| + |\xi|^{\lambda_1} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \xi^n, \quad \text{gdzie } c_n = \frac{\partial a_n}{\partial \lambda}(\lambda_1). \quad (46)$$

W celu wyznaczenia współczynników c_n korzystamy z zależności (44). Różniczkując, mamy

$$a'(\lambda) = (-1)^{n+1} a_0 \frac{2n(n + \lambda - 1)}{(\lambda - 1)^3}.$$

Zatem, kładąc w powyższym wzorze $\lambda = 2$ oraz (45)-(46), otrzymujemy drugie rozwiązanie równania (42) postaci

$$\bar{x}_2 = a_0 \ln |\xi| \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n + 1)^2 \xi^n + a_0 \xi^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} 2n(n + 1) \xi^n. \quad (47)$$

Ostatecznie na mocy podstawień $t = \frac{1}{\xi}$, $\bar{x}(\xi) = x\left(\frac{1}{\xi}\right)$ z (45) i (47) otrzymujemy dwa rozwiązania równania (41) w pobliżu regularnego punktu osobliwego $t = \infty$ w postaci

$$x_1 = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n + 1)^2 \left(\frac{1}{t}\right)^n,$$

$$x_2 = a_0 \ln \left| \frac{1}{t} \right| \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n + 1)^2 \left(\frac{1}{t}\right)^n + a_0 \left(\frac{1}{t}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} 2n(n + 1) \left(\frac{1}{t}\right)^n.$$

ZADANIE 1

Znajdź dwa liniowo niezależne rozwiązania w pobliżu regularnego punktu osobliwego $t_0 = 0$:

- | | |
|-------------------------------------|-----------------------------------|
| a) $2t^2x'' + 5tx' + (t+1)x = 0$, | b) $9t^2x'' - (t^2 - 2)x = 0$, |
| c) $t^2x'' - (t+t^2)x' + x = 0$, | d) $t^2x'' + 3tx' + (1-t)x = 0$, |
| e) $t(t-1)x'' + (3t-1)x' + x = 0$, | f) $tx'' + 2x' + tx = 0$, |
| g) $t^2x'' - 2tx' + (2-t^2)x = 0$, | h) $t^2x'' - tx' + (t-3)x = 0$, |

Odpowiedzi:

- a) $x_1 = |t|^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{3}t + \frac{1}{30}t^2 - \frac{1}{630}t^3 + \dots\right)$, $x_2 = t^{-1} \left(1 - t + \frac{1}{6}t^2 - \frac{1}{90}t^3 + \dots\right)$;
 b) $x_1 = t^{\frac{2}{3}} \left(1 + \frac{1}{5 \cdot 6}t^2 + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 11 \cdot 12}t^4 + \dots\right)$, $x_2 = t^{\frac{2}{3}} \left(1 + \frac{1}{6 \cdot 7}t^2 + \frac{1}{6 \cdot 7 \cdot 12 \cdot 13}t^4 + \dots\right)$;
 c) $x_1 = te^t$, $x_2 = x_1 \ln |t| + e^t \left(-t^2 + \frac{1}{2 \cdot 2!}t^3 - \frac{1}{3 \cdot 3!}t^4 + \dots\right)$;
 d) $x_1 = t^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} t^n$, $x_2 = x_1 \ln |t| - \left(2 + \frac{3}{4}t + \frac{11}{108}t^2 + \frac{25}{3456}t^3 + \dots\right)$;
 e) $x_1 = \frac{1}{1-t}$, $x_2 = \frac{\ln |t|}{1-t}$;
 f) $x_1 = 1 - \frac{1}{3!}t^2 + \frac{1}{5!}t^4 - \dots = \frac{\sin t}{t}$, $x_2 = t^{-1} - \frac{1}{2!}t + \frac{1}{4!}t^3 - \dots = \frac{\cos t}{t}$;
 g) $x_1 = t \left(1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + \dots\right)$, $x_2 = t^2 \left(1 + \frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{120}t^4 + \dots\right)$;
 h) $x_1 = t^3 \left(1 - \frac{1}{5}t + \frac{1}{60}t^2 - \frac{1}{1260}t^3 + \dots\right)$,
 $x_2 = -\frac{1}{144}x_1 \ln |t| + t^{-1} \left(1 + \frac{1}{3}t + \frac{1}{12}t^2 + \frac{1}{36}t^3 + \dots\right)$.

Literatura

- Agarwal, R. P., O'Regan, D.: 2009, *Ordinary and Partial Differential Equations with Special Functions, Fourier Series, and Boundary Value Problems*, Springer Science & Business Media, New York.
- Boyce, W. E., DiPrima, R. C.: 2001, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, 7th edition*, John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Bronsztejn, I., Musiol, G., Siemiendiajew, K., Mühlig, H.: 2004, *Nowoczesne kompendium matematyki*, PWN, Warszawa.
- Coddington, E. A.: 1989, *An Introduction to Ordinary Differential Equations*, Dover Publications, New York.
- Frobenius, F. G.: 1873, Ueber die integration der linearen differentialgleichungen durch reihen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **76**, 214–235.
- Ince, E. L.: 1926, *Ordinary Differential Equations*, Longmans, Green and Co, London, New York.
- Lenda, A.: 2004, *Wybrane rozdziały matematycznych metod fizyki*, Wydawnictwo AGH, Kraków.
- Lenda, A., Spisak, B.: 2006, *Wybrane rozdziały matematycznych metod fizyki, rozwiązane problemy*, Wydawnictwo AGH, Kraków.
- McQuarrie, D. A.: 2005, *Matematyka dla przyrodników i inżynierów*, Vol. 2, PWN, Warszawa.
- Palczewski, A.: 2004, *Równania różniczkowe zwyczajne*, PWN, Warszawa.
- Rybka, P.: 2012, http://www.mimuw.edu.pl/~rybka/dydaktyka/ref_14_11.pdf.
- Yosida, K.: 1960, *Lectures on Differential and Integral Equations*, John Wiley & Sons Inc., New York.

Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie
ul. Słoneczna 54
PL-10-710 Olsztyn
e-mail dawi@matman.uwm.edu.pl
e-mail krzysztof.zyjewski@uwm.edu.pl

Piotr Błaszczuk

Nota o *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen* Georga Cantora*

Cantor rozpoczynał karierę matematyczną na Uniwersytecie Berlińskim, będąc pod wpływem Kroneckera, Kummera i Weierstrassa. W roku 1869 objął stanowisko *Privatdozenta* na Uniwersytecie w Halle i tam przedłożył rozprawę habilitacyjną. W tym okresie zajmował się teorią liczb.

W Halle, za namową Heinego, zainteresował się analizą matematyczną i szeregi trygonometrycznymi. Już w roku 1870 osiągnął istotny wynik, udowodnił mianowicie twierdzenie: *Jeżeli funkcję rzeczywistą $f(x)$ można przedstawić w postaci szeregu trygonometrycznego zbieżnego dla każdej wartości x , to przedstawienie to jest jednoznaczne*. W kolejnych pracach rozważał funkcje, dla których przedstawienie w postaci szeregu trygonometrycznego zachodzi poza pewnymi zbiorami, najpierw skończonymi, później nieskończonymi. To doprowadziło go do pojęcia *punktu granicznego* (punktu skupienia – we współczesnej nomenklaturze) oraz pochodnej zbioru¹.

1. Praca *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen* została opublikowana w roku 1872². Cantor dowodzi w niej następującego twierdzenia:

„Jeśli dane jest równanie postaci:

$$(I) \quad 0 = C_0 + C_1 + \dots + C_n + \dots,$$

gdzie $C_0 = \frac{1}{2}d_0$; $C_n = c_n \sin nx + d_n \cos nx$, dla wszystkich wartości x z wyjątkiem tych, które odpowiadają punktom danego w przedziale $(0 \dots (2\pi))$ zbioru punktów P ν -tego rodzaju, przy czym ν oznacza dowolnie dużą liczbę całkowitą, to

$$d_0 = 0, \quad c_n = d_n = 0''.$$

*Note on Georg Cantor's *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*

¹Zob. J. Dauben, *Georg Cantor. His mathematics and philosophy of the infinite*, Princeton University Press, Princeton 1990, ss. 30–37.

²G. Cantor, *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*, *Mathematische Annalen* 5, 1872, 123–132, dalej cytowana za G. Cantor, *O rozszerzeniu pewnego twierdzenia z teorii szeregów trygonometrycznych*, tłumaczenie J. Pogonowski, w niniejszym tomie.

Pojęcie zbioru ν -tego rodzaju oparte jest na pojęciu punktu granicznego. Odpowiednie definicje podane są w nienumerowanej części artykułu – interludium między drugim a trzecim paragrafem. Czytamy tam:

„Przez punkt graniczny zbioru punktów P rozumiem punkt prostej tak położony, że w każdym jego otoczeniu znajduje się *nieskończenie* wiele punktów z P , przy czym może się zdarzyć, że ponadto on sam należy do tego zbioru. Przez otoczenie punktu niech będzie tu rozumiany każdy przedział, który zawiera ten punkt *w swoim wnętrzu*. [...] Dla każdego punktu prostej jest w pełni określone, czy względem danego zbioru punktów P jest on jego punktem granicznym czy też takim nie jest, a stąd wraz ze zbiorem punktów P podany jest pojęciowo zbiór jego punktów granicznych, który będę oznaczał przez P' oraz nazywał *pierwszym pochodnym zbiorem punktów* dla P . Jeśli zbiór punktów P' nie składa się z jedynie skończonej liczby punktów, to ma on również pochodny zbiór punktów P'' , nazywam go *drugim pochodnym zbiorem* dla P . Poprzez ν takich przejść tworzy się pojęcie ν -tego pochodnego zbioru punktów $P^{(\nu)}$ dla P ”.

Definicje te traktują – jak widzimy – o podzbiorach *prostej*, ale w rozprawie i ogólniej XIX-wiecznej analizie matematycznej w ogóle, linia prosta nie była jasno zdefiniowanym obiektem. Zapoczątkowany przez Weierstrassa program arytmetyzacji analizy postulował wyeliminowanie z dowodów odwołań do *intuicji geometrycznych*, co sprowadzało się do tego, że należało przyjmować tylko wprost sformułowane własności liczb rzeczywistych, a liczby te winny być definiowane na gruncie arytmetyki liczb wymiernych³. W omawianej rozprawie myśl ta jest realizowana w zawiły sposób. Otóż w § 1 Cantor konstruuje liczby rzeczywiste, zaś w § 2 ustanawia bijekcję między linią prostą i osią liczb rzeczywistych. Skoro jednak prosta – powtórzmy – nie jest zdefiniowana, wywód ten z konieczności jest niejasny (zob. niżej punkt 4). Więcej, nie jest on nawet potrzebny. Opowieść o podzbiorach prostej jest tylko parafrazą powodowaną wymogiem *poglądowości* i Cantor pisze o tym wprost:

„Na mocy tego, co poprzednio powiedziano można myśleć o wielkościach liczbowych [tj. liczbach rzeczywistych – P.B.] jako przyporządkowanych punktom prostej. Dla *poglądowości* (choć nie należy to do istoty rzeczy) posługujemy się tym przedstawieniem w dalszym ciągu i gdy mówimy o punktach mamy zawsze przed oczyma wartości, przez które są one podane”.

W istocie więc *punkt graniczny, otoczenie punktu, przedział, zbiór P i jego kolejne pochodne* są definiowane na osi liczb rzeczywistych, tak jak we współczesnych wykładach topologii⁴. Z matematycznego punktu widzenia wywód Cantora z § 2 jest więc zbędny. Oceniając go natomiast z perspektywy historycznej, stanowi on ciekawe świadectwo rachunku różniczkowego z okresu kształtowania się programu arytmetyzacji. Cantor, podobnie jak Dedekind w *Stetigkeit und irrationale Zahlen*⁵, posługuje się linią prostą niczym drabiną, która pozwala mu wspiąć

³Zwięzłą charakterystykę tego programu przedstawił F. Klein w artykule The arithmetizing of mathematics, *Bull. Amer. Math. Soc.* 2(8), 1896, 241–246. Zob. także niżej pkt. 3.3.

⁴Zob. K. Kuratowski, *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, PWN, Warszawa 1973, s. 136 oraz R. Engelking, *Topologia ogólna*, t. I, PWN, Warszawa 1989, s. 40; zob. także niżej pkt. 3.

⁵R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Braunschweig 1872.

się na wyższe piętra abstrakcji. Ale droga abstrakcji prowadzi tylko w jedną stronę i z chwilą osiągnięcia poziomu liczb rzeczywistych linia prosta zostaje odrzucona jako dalej bezużyteczna. Z czasem, gdy Pasch i Hilbert zaczęli budować nowoczesną geometrię, ciągłość liczb rzeczywistych stanie się aksjomatem geometrii i linia prosta zostanie scharakteryzowana jako ciągła w sensie ustalonym przez Dedekinda i Cantora⁶.

W niniejszej nocie zostaną omówione dwa pierwsze paragrafy rozprawy. Traktują one o konstrukcji liczb rzeczywistych oraz związku między liczbami rzeczywistymi a linią prostą. Zaczniemy od konstrukcji, następnie szerzej omówimy zagadnienie zupełności liczb rzeczywistych, a w ostatnim punkcie zostaną skomentowane Cantora próby ustalenia związku między linią prostą a osią liczb rzeczywistych.

2. Współcześnie konstrukcję Cantora przedstawia się jak następuje. W punkcie wyjścia przyjmowane jest ciało liczb wymiernych $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1, <)$. Następnie rozważany jest zbiór ciągów spełniających warunek Cauchy'ego, $\mathcal{C}$, w którym zadana jest relacja równoważności: $(a_n) \equiv (b_n)$, gdy $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$ ⁷. Działania na klasach abstrakcji definiowane są *po współrzędnych*, np. $[(a_n)] + [(b_n)] = [(a_n + b_n)]$, zaś porządek $[(a_n)] < [(b_n)]$ zachodzi wtedy, gdy dla pewnego ε należącego do $\mathbb{Q}_+$ istnieje taki indeks k , że dla $n > k$ jest $a_n + \varepsilon < b_n$. Klasy ciągów stałych $[(a, a, a, \dots)]$, dla $a \in \mathbb{Q}$, reprezentują w nowej strukturze liczby wymierne. Liczby rzeczywiste $\mathbb{R}$ są definiowane jako zbiór ilorazowy $\mathcal{C}/\equiv$. Pokazuje się, że struktura $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$ jest ciałem uporządkowanym w sposób ciągły.

Oryginalna konstrukcja Cantora tylko w ogólnym zarysie przypomina jej współczesną wersję. W rozprawie, po pierwsze, liczby wymierne nie są wprost scharakteryzowane, nie można też wskazać niejawnie przyjmowanych założeń, bo z uwagi na deklarowaną *skizowość* – „jestem jednak zmuszony przedstawić rozważania, choć w większej części tylko w postaci wskazówek” – wszystkie obliczenia zostały pominięte. Wiemy natomiast, że rozwijając teorię ciągów Cauchy'ego Cantor musiał założyć – wprost lub *implicite* – że liczby wymierne stanowią ciało uporządkowane. Po drugie, Cantor nie zna jeszcze techniki zbiorów ilorazowych i nie posługuje się relacją równoważności to zaś prowadzi do pewnych trudności matematycznych oraz poważnych wątpliwości filozoficznych. Po trzecie, charakteryzując liczby rzeczywiste Cantor wskazuje zupełność w sensie Cauchy'ego, a więc tylko *pół* aksjomatu ciągłości: *pełny* aksjomat ciągłości jest, jak wiemy, koniunkcją zupełności i aksjomatu Archimedesas⁸.

Przyjrzyjmy się szczegółom.

2.1. Konstrukcja otwiera definicję ciągu Cauchy'ego⁹.

„Gdy mówię o wielkości liczbowej w sensie szerszym, to jest tak najpierw w przy-

⁶Zob. M. Pasch, *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Leipzig 1882, D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig 1899.

⁷Dla zachowania czystości metody, aby pozostać w obrębie arytmetyki liczb wymiernych, w znanej definicji granicy w miejsce warunku $\forall \varepsilon > 0$ należy przyjąć $\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+$.

⁸Zob. P. Błaszczyk, O ciałach uporządkowanych, *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* IV, 2012, s. 23.

⁹W literaturze niemieckiej, dawnej i współczesnej, ciągi Cauchy'ego są nazywane ciągami podstawowymi, *Fundamentaleihe*.

padku, gdy dany jest przez jakieś prawo nieskończony ciąg liczb wymiernych:

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots, \quad (1)$$

który ma tę własność, że różnica $a_{n+m} - a_n$ przy zmiennej n staje się nieskończenie mała, jakkolwiek jest dodatnia liczba całkowita m , lub, innymi słowy, że dla dowolnej (dodatniej, wymiernej) ε istnieje liczba całkowita n_1 taka, że $|a_{n+m} - a_n| < \varepsilon$, gdy $n \geq n_1$, zaś m jest dowolną dodatnią liczbą całkowitą¹⁰.

Znajdujemy tu najpierw pojęcie *nieskończenie małej*, które według planu arytmetyzacji miało być całkowicie wyeliminowane z podstaw analizy¹⁰. Szczęśliwie warunek następujący po zwrocie „innymi słowy” jest już poprawną definicją, którą tak zapiszemy z użyciem symboli:

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+)(\exists n_1)(\forall n, m)(n_1 \leq n \rightarrow |a_{n+m} - a_n| < \varepsilon). \quad (C1)$$

Jeden niuans techniczny różni definicję Cantora od współczesnej. Obecnie przez ciąg Cauchy’ego liczb wymiernych rozumiemy funkcję $a : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Q}$ spełniającą warunek C1. Funkcja zaś to dowolny podzbiór iloczynu kartezjańskiego, $a \subset \mathbb{N} \times \mathbb{Q}$, spełniający warunek jednoznaczności: jeżeli $a_n = q$, $a_n = p$, to $q = p$. Podczas gdy u Cantora ciąg jest zadany „przez jakieś prawo”, to współcześnie jest to „dowolny podzbiór” iloczynu kartezjańskiego. To jedna ze zmian, jakim uległa matematyka pod wpływem teorii mnogości – teorii, której początki sięgają omawianej rozprawy.

Istotnie różna w porównaniu z dzisiejszą matematyką jest natomiast przyjęta nomenklatura: o ciągu spełniającym warunek C1 Cantor pisze, że „posiada granicę b ”. W następnym zdaniu wyjaśnia, że znaczy to jedynie tyle, iż ciągowi przypisano znak (*Zeichen*) b , przy czym „różnym ciągom” przypisane są różne znaki:

„Słowa te [tj. że ciąg posiada granicę b – P.B.] nie mają więc na razie żadnego innego sensu jak ten, który jest wyrażeniem owej własności ciągu, a z warunku, że łączymy z ciągiem (1) szczególny znak b wynika, że dla różnych tego rodzaju ciągów tworzyć też należy różne znaki b, b', b'' ”.

Po wprowadzeniu działań Cantor napisze, że „określenie «granica ciągu (1)» na liczbę b znajduje ubocznie pewne uzasadnienie”. Wrócimy do tego wątku niżej w punkcie 2.4.

2.2. W zbiorze ciągów Cauchy’ego definiuje Cantor równość oraz „różność”. I tak relacje $(a_n) = (a'_n)$, $(a_n) > (a'_n)$, $(a_n) < (a'_n)$ zachodzą, gdy

„1. $a_n - a'_n$ staje się nieskończenie mała wraz ze wzrastającą n , lub 2. $a_n - a'_n$ pozostaje, począwszy od pewnej n , stale większa od dodatniej (wymiernej) wielkości ε , lub 3. $a_n - a'_n$ pozostaje, począwszy od pewnej n , stale mniejsza od ujemnej (wymiernej) wielkości $-\varepsilon$ ”.

Warunki te zapiszemy symbolicznie jak następuje:

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+)(\exists n_1)(\forall n)(n_1 \leq n \rightarrow |a_n - a'_n| < \varepsilon)^{11}, \quad (C2)$$

¹⁰W późniejszym okresie Cantor nawet próbował udowodnić, że nieskończenie małe nie istnieją. Jednakże do końca swojej kariery nie rozpoznał on aksjomatu Archimedes’a, a nieskończenie małe rozumiane jako obiekty w ciele uporządkowanym należy definiować przez odniesienie do tego aksjomatu.

¹¹Cantor co prawda nie znał relacji równoważności i klas abstrakcji, ale dokładnie rozumiał

$$(\exists \varepsilon \in \mathbb{Q}_+)(\exists n_1)(\forall n)(n_1 \leq n \rightarrow a_n - a'_n > \varepsilon), \quad (C3)$$

$$(\exists \varepsilon \in \mathbb{Q}_+)(\exists n_1)(\forall n)(n_1 \leq n \rightarrow a_n - a'_n < -\varepsilon). \quad (C4)$$

Istotnie, przyjmując, że liczby wymierne są ciałem uporządkowanym można pokazać, że zachodzi jeden z warunków C2, C3, C4, a ponadto, warunki te – jak pisze Cantor – „nawzajem się wykluczają”.

Odtwarzając w strukturze ciągów liczby wymierne Cantor przyjmuje, że ciąg $(a_n - a)$, gdzie a jest liczbą wymierną, spełnia dokładnie jeden z warunków C2, C3, C4:

„Podobnie okazuje się, że ciąg (1), który ma granicę b , pozostaje z liczbą wymierną a tylko w jednej z następujących 3 zależności. 1. $a_n - a$ jest nieskończenie małe wraz ze wzrastającą n , lub 2. pozostaje, począwszy od pewnej n , stale większa od dodatniej (wymiernej) wielkości ε , lub 3. $a_n - a$ pozostaje, począwszy od pewnej n , stale mniejsza od ujemnej (wymiernej) wielkości $-\varepsilon$ ”.

Można by więc przyjąć, że liczba a jest utożsamiana z ciągiem stałym $(a, a, \dots)$. Cantor nie wykonał jednak tego prostego, wydawałoby się, kroku (zob. niżej pkt. 2.4.).

2.3. Definiując ciągi Cauchy’ego Cantor zastrzegł, że zwrot „ciąg (1) ma określoną granicę b ” jest jedynie konwencją językową. Po ustaleniach na temat liczb wymiernych dochodzi do tezy, że b jest granicą ciągu (a_n) w ścisłym sensie:

„Z tych oraz zaraz następujących definicji otrzymuje się jako *wniosek*, że gdy b jest granicą ciągu (1), a następnie $b - a_n$ wraz ze wzrastającą n staje się nieskończenie mała, to określenie «granicą ciągu (1)» na b znajduje *ubocznie* pewne uzasadnienie”.

Warunek „z [...] zaraz następujących definicji” odnosi się do działań na ciągach. Odpowiednio definiowane jest więc dodawanie, odejmowanie, mnożenie oraz dzielenie. I tak sumą ciągów (a_n) , (a'_n) jest ciąg (a''_n) , gdy

$$\lim(a_n + a'_n - a''_n) = 0,$$

co znaczy

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+)(\exists n_1)(\forall n)(n_1 \leq n \rightarrow |a_n + a'_n - a''_n| < \varepsilon). \quad (C5)$$

Podsumowaniem tego wątku jest zdanie:

„Ogół wielkości liczbowych (*Zahlengrossen*) b będę oznaczał przez B ”.

Wcześniej, aż do tego miejsca rozprawy, b, b', b'' były jedynie znakami, w tym zdaniu po raz pierwszy nazwane są liczbami.

2.4. Zestawmy teraz oryginalne rozstrzygnięcia Cantora z ich współczesną wersją. W strukturze ilorazowej jest tak, że $(a_n) \equiv (a'_n)$, gdy ciąg $(a_n - a'_n)$ jest zbieżny do zera, zaś równość zachodzi między klasami abstrakcji, $[(a_n)] = [(a'_n)]$. Dalej, z ciągiem (a_n) „łączymy” nie „znak”, ale zbiór $[(a_n)]$. Tym sposobem aspekt ontologiczny konstrukcji jest jasny: liczby rzeczywiste są zbiorami (klasami abstrakcji) nie znakami.

związki zachodzące między ciągami (a_n) i (a'_n) . Dalej w rozprawie napisze: „przyrównanie dwóch wielkości liczbowych b, b' z B nie pociąga za sobą ich identyczności, lecz wyraża tylko pewną określoną relację, zachodzącą pomiędzy ciągami, do których one się odnoszą [czyli ciągami (a_n) i (a'_n) – P.B.]. Współcześnie relację tę zapisujemy jako $(a_n) \equiv (a'_n)$.”

Fakt, że Cantor nie odróżnia ciągu stałego $(a, a, \dots)$ od liczby wymiernej a utrudnia interpretację tezy „ b jest granicą ciągu (1) ”. W uzasadnieniu czytamy co prawda, że „ $b - a_n$ wraz ze wzrastającą n staje się nieskończenie mała”, ale w myśl wcześniejszych definicji oznacza to, że ciąg $b - a_n$ spełnia warunek C2. Niestety, $b - a_n$ nie jest w ogóle ciągiem liczb wymiernych: wyrażenie $b - a_n$ oznacza literalnie $(a_n) - a_n$.

Wyrażenie $b - a_n$ można owszem zinterpretować w przestrzeni ciągów. Gdy liczby wymierne utożsamimy z ciągami stałymi, wtedy $b - a_n$ będzie oznaczać ciąg, którego kolejnymi wyrazami są ciągi:

$$b - (a_1, a_1, a_1, \dots), \quad b - (a_2, a_2, a_2, \dots), \dots \quad (2)$$

W rozprawie przestrzeń ciągów stanowi strukturę $(B, +, -, \cdot, :, <)$. Zdanie „ $b - a_n$ wraz ze wzrastającą n staje się nieskończenie mała” zinterpretowane w tej strukturze oznacza, że ciąg $b - a_n$ spełnia warunek C2, z tą różnicą, że w miejsce $\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+$ przyjmujemy $\forall \varepsilon \in B_+$. Po tej modyfikacji warunek C2 zastosowany do ciągu (2) przyjmie postać:

$$(\forall \varepsilon \in B_+)(\exists n_1)(\forall n)(n_1 \leq n \rightarrow |b - (a_n, a_n, a_n \dots)| < \varepsilon),$$

to zaś oznacza, że b jest granicą ciągu liczb wymiernych zinterpretowanych w przestrzeni B – granicą w dosłownym, współczesnym rozumieniu tego pojęcia.

Jest to – jak widać – trochę skomplikowane i dopiero konstrukcja ilorazowa rozjaśnia zawiłości spowodowane dwojakim przedstawieniem liczb wymiernych.

Współcześnie, gdy chcemy wyrazić zależność między ciągiem (a_n) a liczbami wymiernymi, które go tworzą, czyli $a_1, a_2, \dots$ itd., liczby te przedstawiamy w postaci ciągów stałych, odpowiednio $(a_1, a_1, a_1, \dots)$, $(a_2, a_2, a_2, \dots)$ itd. Przechodząc do klas abstrakcji otrzymamy zależność między liczbą rzeczywistą $[(a_n)]$ i liczbami wymiernymi $a_1^* = [(a_1, a_1, a_1, \dots)]$, $a_2^* = [(a_2, a_2, a_2, \dots)]$ itd. Pokazuje się, że w przestrzeni $\mathcal{C}/\equiv$ liczba $[(a_n)]$ jest granicą ciągu $(a_1^*, a_2^*, \dots)$, to jest¹²

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^* = [(a_n)].$$

Cantor – jak już zauważyliśmy – nie znał techniki zbiorów ilorazowych, mógł jednak przedstawiać liczby wymierne w postaci ciągów stałych. Dlaczego nie przyjął takiego rozwiązania? Otóż chciał, aby liczby rzeczywiste reprezentowały punkty linii prostej i najwyraźniej nie umiał pogodzić tego z podwójnym przedstawieniem liczb wymiernych. W rezultacie poprzestał na tym, że w sensie ontologicznym liczby rzeczywiste są reprezentowane przez ciągi liczb wymiernych, a dalej, w sensie topologicznym, są granicami ciągów liczb wymiernych. Uzasadnienie tej zbieżności jest – jak pisze Cantor – *gewisse*, czyli pewne, ściśle. Trudno jednak się z tym zgodzić, gdyż Cantor nie wskazał przestrzeni, w której zachodzi owa zbieżność. Gwoli sprawiedliwości trzeba jednak przyznać, że i współcześni autorzy mają problemy z klarownym przedstawieniem wszystkich szczegółów konstrukcji Cantora¹³.

¹²Zob. P. Błaszczyk, *Analiza filozoficzna rozprawy Richarda Dedekinda Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Wydawnictwo Naukowe AP, Kraków 2007, s. 115.

¹³Zob. P. Błaszczyk, *Analiza filozoficzna...*, op. cit., s. 113–121.

3. Zbiór $\mathbb{R}$ z funkcją $d(r, s) = |r - s|$ jest oczywiście przestrzenią metryczną. Punkt skupienia podzbioru A przestrzeni metrycznej jest definiowany jako granica ciągu: $p = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n$, gdzie $p_n \neq p$, $p_n \in A$. Zbiór punktów skupienia, oznaczany zwykle jako A^d , nazywany jest pochodną zbioru. Domknięcie zbioru dane jest wówczas równością $\overline{A} = A \cup A^d$. Konstrukcję Cantora można opisać w tym języku jako $\mathbb{Q} = \mathbb{R}$, a zupełność liczb rzeczywistych oznacza, że $\mathbb{R} = \mathbb{R}^{14}$.

Wartość bezwzględna liczby rzeczywistej jest definiowana w ciele uporządkowanym, dlatego topologia generowana przez metrykę d jest tym samym, co topologia porządkowa i wyżej przedstawione fakty odpowiadają temu, co Cantor pisze o zbiorze B . Niżej pokażemy, jak w rozprawie jest opisana zupełność liczb rzeczywistych.

3.1. Procedurę rozszerzenia $\mathbb{Q}$ za pomocą ciągów Cauchy'ego opisaną wyżej w punkcie 2. Cantor powtarza w odniesieniu do $\mathbb{R}$: w zbiorze ciągów liczb rzeczywistych spełniających warunek C1 – z tą różnicą, że w miejsce warunku $\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+$ należy przyjąć $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+$ – definiowana jest równość, porządek oraz działania. Czyśto formalnie, konstruowana jest więc kolejna struktura oznaczana w rozprawie jako C . Nim zacytujemy odpowiedni fragment, przypomnijmy, że liczby wymierne oznacza Cantor literą A , liczby rzeczywiste – literą B .

„Dziedzina B wyprowadzona była z dziedziny A ; teraz w analogiczny sposób wytwarza ona, wspólnie z dziedziną A , nową dziedzinę C . Jeśli dany jest mianowicie nieskończony ciąg:

$$b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$$

wielkości liczbowych z dziedzin A oraz B , które nie należą wszystkie do dziedziny A oraz jeżeli ciąg ten ma tę własność, że $b_{n+m} - b_n$ wraz ze wzrastającą n staje się nieskończenie małą, jakakolwiek jest m [...], to mówię o takim ciągu, iż ma on określoną granicę c . Wielkości liczbowe c konstytuują dziedzinę C . Definicje równości, większości oraz mniejszości, jak też operacje elementarne zarówno między wielkościami c , jak również między nimi oraz wielkościami z B oraz A podaje się w analogiczny sposób jak poprzednio”.

3.2. Własność opisana w kolejnym zdaniu jest kluczowa dla całej konstrukcji liczb rzeczywistych:

„Podczas gdy dziedziny B oraz A mają się tak do siebie, że choć każde a przyporządkowane jest pewnemu b , ale nie każde b przyporządkowane może być jakimś a , to okazuje się, że zarówno każde b może zostać przyporządkowane pewnemu c , jak i każde c może zostać przyporządkowane pewnemu b ”.

Zdanie „każde a przyporządkowane jest pewnemu b ” oznacza, że każdą liczbę wymierną można przedstawić jako pewien ciąg liczb wymiernych spełniających warunek C1. Zdanie „nie każde b przyporządkowane może być jakimś a ” oznacza, że przestrzeń liczb wymiernych nie jest zupełna w sensie Cauchy'ego. Zdanie „każde c może zostać przyporządkowane pewnemu b ” oznacza, że przestrzeń liczb rzeczywistych jest zupełna w sensie Cauchy'ego.

Cantor nie dowodzi żadnej z tych własności i – o ile nam wiadomo – nigdy później nie wracał do tej kwestii. Współczesne dowody zupełności $\mathbb{R}$ wykorzystują

¹⁴Zob. K. Kuratowski, *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, op. cit., rozdz. XI.

metodę przekątniową, zaprezentowaną przez Cantora przy okazji innego twierdzenia¹⁵.

3.3. Chociaż stosowanie ciągów Cauchy'ego do zbioru B nie stwarza już nowych punktów, to Cantor skrupulatnie odróżnia zbiory B i C oraz kolejne zbiory tworzone tą metodą. Bierze się to stąd, że można wskazać takie podzbiory, których kolejne pochodne są różne. Dla konstrukcji liczb rzeczywistych kolejne pochodne zbioru liczb wymiernych nie są istotne, ale naczelnym zadaniem pierwszych paragrafów rozprawy jest przedstawienie idei pochodnej dowolnego podzbioru liczb rzeczywistych.

„Chociaż [...] dziedziny B oraz C poniekąd nawzajem się pokrywają, jest istotne w przedstawionej tu teorii [...], aby trzymać się pojęciowego rozróżnienia pomiędzy obydwoma dziedzinami B oraz C , przy czym nawet przyrównanie dwóch wielkości liczbowych b, b' z B nie pociąga za sobą ich identyczności, lecz wyraża tylko pewną określoną relację, zachodzącą pomiędzy ciągami, do których one się odnoszą. Z dziedziny C wyprowadza się, analogicznie jak poprzednio, dziedzinę D , z tej dziedzinę E , itd.; poprzez λ takich przejść (gdzie przejście od A do B uważam za pierwsze) dochodzi się do dziedziny wielkości liczbowych L ”.

Dalej Cantor pokazuje, jak elementy zbioru L są wyrażane przez liczby wymierne. Przyjmując dla uproszczenia w miejsce L zbiór C , otrzymamy następującą parafrazę obrazującą ideał arytmetyzacji, czyli reprezentowania nowych obiektów przez liczby wymierne:

Równanie $F(c, c', \dots, c^{(\rho)}) = 0$ dane poprzez skończoną liczbę operacji elementarnych na liczbach $c, c', \dots, c^{(\rho)}$ jawi się w nakreślonej tu teorii dokładnie, jako wyrażenie dla określonej zależności pomiędzy $\rho + 1$ dwukrotnie nieskończonych ciągów liczb wymiernych; są to ciągi, które wychodzą od ciągów prosto nieskończonych, z którymi najpierw wiążą się wielkości $c, c', \dots, c^{(\rho)}$, a gdy zastąpi się w nich ich elementy poprzez stosowne ciągi, to powstałe, w ogólności dwukrotnie nieskończone ciągi są traktowane podobnie, aż widzi się przed sobą tylko liczby wymierne.

Innymi słowy, liczba c jest reprezentowana przez ciąg $(b_n)_{n=1}^\infty$, gdzie każda z liczb b_n jest reprezentowana przez ciąg liczb wymiernych $(a_j^n)_{j=1}^\infty$, tak, że w rezultacie c jest reprezentowana przez dwuwymiarową, nieskończoną tablicę liczb wymiernych $(a_j^n)_{n,j=1}^\infty$.

4. W § 2 ustalany jest związek między *linią prostą* a liczbami rzeczywistymi. O ile jednak wiemy, co Cantor rozumie przez liczby rzeczywiste, to definicji linii prostej możemy się co najwyżej domyślać. Czytamy:

„Punkty linii prostej są pojęciowo określone przez to, że podaje się, w leżącej u podstaw jednostce miary, ich odcięte, ich odległości od ustalonego punktu o linii prostej, ze znakiem $+$ lub $-$, w zależności od tego, czy rozważany punkt leży we (wcześniej ustalonej) dodatniej lub ujemnej części prostej.

Jeśli ta odległość jest w stosunku wymiernym do jednostki miary, to będzie wyrażona przez wielkość liczbową z dziedziny A ; w innych przypadkach, **gdy punkt jest na przykład znany na mocy jakiejś konstrukcji, zawsze możliwe jest**

¹⁵Zob. P. Błaszczyk, *Analiza filozoficzna* ..., op. cit. s. 114–117.

podanie ciągu:

$$(1) \quad a_1, a_2, \dots, a_n, \dots,$$

który ma własność wyrażoną w § 1 oraz pozostaje w takim związku do rozważanej odległości, że punkty linii prostej, które otrzymują odległości $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ wraz ze wzrastającą n zbliżają się nieskończenie do owego określonego punktu. Wyrażamy to w ten sposób, że mówimy: *Odległość rozważanego punktu od punktu o równa jest b , gdzie b jest wielkością liczbową odpowiadającą ciągowi (1)*” (podkreślenie – P.B.).

W tym fragmencie znajdujemy najpierw wyróżnienie na prostej punktów, które odpowiadają liczbom wymiernym (punktów wymiernych). Ten zabieg jest znany co najmniej od czasu *Geometrii* Kartezjusza i jest przeprowadzany na podstawie konstrukcji z twierdzenia VI.9 *Elementów*. Następnie Cantor przyjmuje – i to już jest zagadkowe założenie – że gdy punkt prostej jest dany „na mocy jakiejś konstrukcji”, to może być aproksymowany ciągiem punktów wymiernych. Stąd zaś ma wynikać, że odpowiada mu liczba rzeczywista.

Podsumowując ten wątek wyводу Cantora otrzymujemy: dowolnemu punktowi na prostej odpowiada liczba rzeczywista (wymierna lub niewymierna).

Dalej czytamy:

„Aby jednak uczynić pełnym przedstawiony w tym § związek dziedzin wielkości liczbowych zdefiniowanych w § 1 z geometrią linii prostej, należy tylko dodać *aksjomat*, który polega po prostu na tym, że także na odwrót, każdej wielkości liczbowej odpowiada ustalony punkt prostej, którego współrzędna jest równa owej wielkości liczbowej, i to równa w tym sensie, jaki został objaśniony w niniejszym §. Nazywam to twierdzenie *aksjomatem*, ponieważ w jego naturze leży, iż nie jest ono w ogólności dowodliwe”.

4.1. W związku z pierwszą tezą (każdemu punktowi odpowiada liczb rzeczywista), zauważmy, że dowolny punkt prostej można aproksymować punktami wymiernymi, gdy prosta jest archimedesowa. Wiadomo jednak, że także prosta niearchimedesowa może być modelem geometrii rozwijanej w księgach I-IV *Elementów*¹⁶. Trudno zatem uznać, że Cantor ma jasno sprecyzowane pojęcie linii prostej.

Drugą tezę (każdej liczbie rzeczywistej odpowiada punkt na prostej) Cantor przyjmuje jako aksjomat, co w szczególności znaczy, że pierwszą uznaje za twierdzenie.

Joseph Dauben, autor najpopularniejszej biografii naukowej Cantora, tak komentuje obie tezy:

„Cantor next turned to the task of identifying numbers with points of geometric continuum. For the rational numbers this was not a difficult problem. He knew that given a point on the line, if it had a rational relation from the origin o to the unit abscissa, then it could be expressed by an element from the domain A . Otherwise, it could be approached by a sequence of rational points $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$, each of which corresponded to an element in A . Furthermore, Cantor could take a_n as a fundamental sequence which approached the given point arbitrarily closely. [...] Cantor was unable to show, of course, the converse, that for every element of the

¹⁶Zob. D. Hilbert. *Grundlagen der Geometrie*, op. cit., §12.

domain B there correspond a unique point of the real line. Thus he had to invoke the well-known axiom [...]"¹⁷.

Dauben, podobnie jak Cantor, jest przekonany, że bez żadnych dodatkowych założeń o linii prostej można pokazać, że każdy punkt jest albo wymierny, albo może być aproksymowany ciągiem liczb wymiernych. W związku z drugą tezą Dauben pisze: „Cantor was unable to show, of course, the converse”. Nie wiadomo dlaczego dla Daubena jest oczywiste, że Cantor nie mógł udowodnić tezy, którą nazwał aksjomatem. We współczesnej geometrii jest owszem dowodzone twierdzenie o bijekcji między linią prostą a liczbami rzeczywistymi¹⁸. Zasadnicza różnica między tym twierdzeniem a tezami Cantora polega na tym, że współczesna geometria dysponuje aksjomatyką z której wynika precyzyjna charakterystyka linii prostej.

* * *

Przedkładane tłumaczenie *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen* zostało przygotowane przez Profesora Jerzego Pogonowskiego w ramach grantu „Ciągłość i liczby rzeczywiste. Eudoxos-Dedekind-Conway”, NN 101 287639. Jest to pierwsze tłumaczenie tego artykułu na język polski. Chociaż tekst Cantora ma kapitalne znaczenie filozoficzne, to nie znalazł się w najważniejszym i najobszerniejszym wyborze tekstów z zakresu filozofii matematyki wydanym pod redakcją Williama Ewalda *From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics*¹⁹.

Instytut Matematyki
Uniwersytet Pedagogiczny
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
e-mail pb@up.krakow.pl

¹⁷J. Dauben, *Georg Cantor. His mathematics and philosophy of the infinite*, op. cit. s. 40.

¹⁸Zob. P. Błaszczyk, *Analiza filozoficzna rozprawy Richarda Dedekinda Stetigkeit und irrationale Zahlen*, op. cit. rozdz. *O ciągłości linii prostej*.

¹⁹Zob. W. Ewald, *From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics*, tomy I-II, Clarendon Press, Oxford 1996.

Georg Cantor

O rozszerzeniu pewnego twierdzenia z teorii szeregów trygonometrycznych*

Podam niżej pewne rozszerzenie twierdzenia głoszącego, że przedstawienia szeregów trygonometrycznych są jednoznaczne.

Dowód tego, że dwa szeregi geometryczne:

$$\frac{1}{2}b_0 + \sum (a_n \sin nx + b_n \cos nx) \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{2}b'_0 + \sum (a'_n \sin nx + b'_n \cos nx),$$

które dla każdej wartości x są zbieżne i mają tę samą sumę, mają też identyczne współczynniki, przedstawiłem w *Journal f. d. r. u. angew. Math.* **72**, s. 139; w innym miejscu, w notatce, odwołującej się do tej pracy, pokazałem dalej, że twierdzenie to pozostaje słuszne, gdy dla skończonej liczby wartości x zrezygnuje się ze zbieżności lub równości sum szeregów.

Rozważane *tutaj* rozszerzenie zasadza się w tym, że można zrezygnować ze zbieżności lub równości sum szeregów dla *nieskończonej* liczby wartości x w przedziale $(0 \dots (2\pi))$, bez utraty słuszności twierdzenia.

W tym celu jestem jednak zmuszony przedstawić rozważania, choć w większej części tylko w postaci wskazówek, które mogą służyć do tego, aby objaśnić związki, które pojawiają się stale, gdy tylko wielkości liczbowe podane są w skończonej lub nieskończonej ilości; doprowadzi to przy tym do pewnych definicji, które zostaną tu ustanowione jedynie dla zapewnienia możliwie związłego przedstawienia rozważanego twierdzenia, którego dowód będzie podany w §3.

§1.

Liczby wymierne stanowią podstawę dla ustalenia szerszego pojęcia wielkości liczbowej; będę je oznaczał jako dziedzinę A (z włączeniem zera).

Gdy mówię o wielkości liczbowej w sensie szerszym, to jest tak najpierw w przypadku, gdy dany jest przez jakieś prawo nieskończony ciąg liczb wymiernych:

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots, \tag{1}$$

*The generalization of a theorem in the theory of trigonometric series

który ma tę własność, że różnica $a_{n+m} - a_n$ przy zmiennej n staje się nieskończenie mała, jakkolwiek jest dodatnia liczba całkowita m , lub innymi słowy, że dla dowolnej (dodatniej, wymiernej) ε istnieje taka liczba całkowita n_1 , że $|a_{n+m} - a_n| < \varepsilon$, gdy $n \geq n_1$, zaś m jest dowolną dodatnią liczbą całkowitą.

Tę własność ciągu (1) wyrażam słowami: „*Ciąg (1) ma określoną granicę b* ”.

Słowa te nie mają więc na razie żadnego innego sensu jak ten, który jest wyrażeniem owej własności ciągu, a z warunku, że łączymy z ciągiem (1) szczególny znak b , wynika, iż dla różnych tego rodzaju ciągów tworzyć też należy różne znaki b, b', b'' .

Jeśli dany jest drugi ciąg:

$$a'_1, a'_2, \dots, a'_n, \dots, \quad (1')$$

który ma określoną granicę b' , to okazuje się, że oba ciągi (1) i (1') pozostają do siebie w jednej z 3 zależności, które nawzajem się wykluczają:

1. $a_n - a'_n$ staje się nieskończenie mała wraz ze wzrastającą n , lub
2. $a_n - a'_n$ pozostaje, począwszy od pewnej n , stale większa od dodatniej (wymiernej) wielkości ε , lub
3. $a_n - a'_n$ pozostaje, począwszy od pewnej n , stale mniejsza od ujemnej (wymiernej) wielkości $-\varepsilon$.

Gdy ma miejsce pierwsza zależność, to przyjmuję

$$b = b',$$

przy drugiej przyjmuję $b > b'$, a przy trzeciej $b < b'$.

Podobnie okazuje się, że ciąg (1), który ma granicę b , pozostaje z liczbą wymierną a tylko w jednej z następujących 3 zależności.

1. $a_n - a$ staje się nieskończenie mała wraz ze wzrastającą n , lub
2. $a_n - a$ pozostaje, począwszy od pewnej n , stale większa od dodatniej (wymiernej) wielkości ε , lub
3. $a_n - a$ pozostaje, począwszy od pewnej n , stale mniejsza od ujemnej (wymiernej) wielkości $-\varepsilon$.

Aby wyrazić zachodzenie tych zależności, piszemy odpowiednio:

$$b = a, \quad b > a, \quad b < a.$$

Z tych oraz kolejnych definicji otrzymuje się jako *wniosek*, że gdy b jest granicą ciągu (1), a następnie $b - a_n$ wraz ze wzrastającą n staje się nieskończenie mała, to określenie „granica ciągu (1)” na b znajduje *ubocznie* pewne uzasadnienie.

Ogół wielkości liczbowych b będę oznaczał przez B .

Za pomocą powyższych ustaleń elementarne operacje, które były przyjęte dla liczb wymiernych dają się rozszerzyć na obie dziedziny A oraz B razem wzięte.

Jeśli mianowicie b, b', b'' są trzema wielkościami liczbowymi z B , to wzory:

$$b \pm b' = b'', \quad bb' = b'', \quad \frac{b}{b'} = b''$$

wyrażają to, że pomiędzy ciągami odpowiadającymi liczbom b, b', b'' :

$$\begin{aligned} a_1, a_2, \dots \\ a'_1, a'_2, \dots \\ a''_1, a''_2, \dots \end{aligned}$$

zachodzą, odpowiednio zależności:

$$\begin{aligned} \lim(a_n \pm a'_n - a''_n) &= 0, \\ \lim(a_n a'_n - a''_n) &= 0 \\ \lim\left(\frac{a_n}{a'_n} - a''_n\right) &= 0, \end{aligned}$$

gdzie, na mocy poprzednich wyjaśnień nie muszę wchodzić bliżej w znaczenie znaku $\lim$. Podobne definicje podaje się dla przypadku, gdy jedna lub dwie z tych trzech liczb należy do dziedziny A .

W ogólności każde równanie

$$F(b, b', \dots b^{(\rho)}) = 0$$

utworzone poprzez zastosowanie skończonej liczby operacji elementarnych będzie dawało wyraz określonej zależności, zachodzącej między ciągami, które są wyznaczone przez liczby $b, b', \dots b^{(\rho)}$ ¹.

Dziedzina B wyprowadzona była z dziedziny A ; teraz w analogiczny sposób wytwarza ona, wspólnie z dziedziną A , nową dziedzinę C .

Jeśli dany jest nieskończony ciąg:

$$b_1, b_2, \dots, b_n, \dots \quad (2)$$

wielkości liczbowych z dziedzin A oraz B , które nie należą wszystkie do dziedziny A oraz jeżeli ciąg ten ma tę własność, że $b_{n+m} - b_n$ wraz ze wzrastającą n staje się nieskończenie mała, jakakolwiek jest m , a więc własność, która na mocy poprzednich definicji jest czymś całkowicie określonym, to mówię o takim ciągu, iż ma on określoną granicę c .

Wielkości liczbowe c konstytuują dziedzinę C .

Definicje równości, większości oraz mniejszości, jak też operacje elementarne zarówno między wielkościami c , jak również między nimi oraz wielkościami z B oraz A podaje się w analogiczny sposób jak poprzednio.

¹Gdy np. równanie μ -tego stopnia $f(x) = 0$ ze współczynnikami całkowitoliczbowymi posiada pierwiastek rzeczywisty ω , to znaczy to w ogólności nic innego niż to, że dany jest ciąg

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

o własności ciągu (1), dla którego granicą wybrany jest znak ω i który ma poza tym własność

$$\lim f(a_n) = 0.$$

Podczas gdy dziedziny B oraz A mają się tak do siebie, że choć każde a przyporządkowane jest pewnemu b , ale nie każde b przyporządkowane może być jakimś a , to okazuje się, że zarówno każde b może zostać przyporządkowane pewnemu c , jak i każde c może zostać przyporządkowane pewnemu b .

Chociaż dziedziny B oraz C poniekąd nawzajem się pokrywają, jest istotne w przedstawionej tu teorii (w której wielkość liczbowa występuje najpierw w ogólności bezprzedmiotowo, jedynie jako część składowa twierdzeń, którym przydaje się przedmiotowości, np. twierdzeniu, że stosowny ciąg ma tę wielkość liczbową jako granicę), aby trzymać się pojęciowego rozróżnienia pomiędzy obydwoma dziedzinami B oraz C , przy czym nawet przyrównanie dwóch wielkości liczbowych b , b' z B nie pociąga za sobą ich identyczności, lecz wyraża tylko pewną określoną relację, zachodzącą pomiędzy ciągami, do których one się odnoszą.

Z dziedziny C wyprowadza się, analogicznie jak poprzednio, dziedzinę D , z tej dziedziny E , itd.; poprzez λ takich przejść (gdzie przejście od A do B uważam za pierwsze) dochodzi się do dziedziny wielkości liczbowych L . Rzecz przedstawia się tak samo, gdy myśli się o łańcuchu definicji dla równości, większości i mniejszości oraz operacji elementarnych jako o przenoszonych na dziedzinę z dziedziny poprzedniej, z wyjątkiem A , w ten sposób, że wielkość liczbowa l zawsze może zostać przyrównana do jednej z wielkości $k, i, \dots, c, b$ oraz na odwrót.

Wyniki analizy (pomijając nieliczne znane przypadki) dają się sprowadzić do postaci takich przyrównań, chociaż (co tutaj może opierać się tylko na owych wyjątkach) pojęcie liczby, tak jak daleko jest tu rozwinięte niesie w sobie załączek koniecznego samego w sobie i absolutnie nieskończonego rozszerzania.

Wydaje się właściwe, gdy dana jest wielkość liczbowa w dziedzinie L , posługiwać się wyrażeniem: *jest ona dana jako wielkość liczbowa, wartość lub granica λ -tego rodzaju*, z czego jest widoczne, że w ogólności w tym samym znaczeniu posługują się słowami *wielkość liczbowa, wartość* oraz *granica*.

Równanie $F(l, l', \dots, l^{(\rho)}) = 0$ dane poprzez skończoną liczbę operacji elementarnych na liczbach $l, l', \dots, l^{(\rho)}$ jawi się w nakreślonej tu teorii dokładnie, jako wyrażenie dla określonej zależności pomiędzy $\rho + 1$, w ogólności λ -krotnie nieskończonych, ciągów liczb wymiernych; są to ciągi, które wychodzą od ciągów prosto nieskończonych, z którymi najpierw wiążą się wielkości $l, l', \dots, l^{(\rho)}$, a gdy zastąpi się w nich elementy poprzez stosowne ciągi, to powstałe, w ogólności dwukrotnie nieskończone ciągi są traktowane podobnie i proces ten jest prowadzony tak długo, aż widzi się przed sobą tylko liczby wymierne.

Zastrzegam sobie, by do wszystkich tych związków powrócić bardziej szczegółowo w innym miejscu. Nie ma tu również miejsca na to, aby zagłębiać się w to, jak wprowadzone w tym § ustalenia oraz operacje mogą służyć potrzebom analizy infinitezymalnej. Także w tym co następuje, gdzie przedstawiony zostanie związek wielkości liczbowych z geometrią linii prostej, ograniczam się niemal wyłącznie do koniecznych twierdzeń, z których, o ile się nie mylę, cała reszta może zostać wyprowadzona za pomocą czysto logicznych środków dowodowych. Dla porównania z § 1 oraz § 2 niech zostanie przywołana księga 10 „Elementów Euklidesa”, która pozostaje miarodajna dla przedstawionego tam przedmiotu.

§2.

Punkty linii prostej są pojęciowo określone przez to, że podaje się, w leżącej u podstaw jednostce miary, ich odcięte, ich odległości od ustalonego punktu o linii prostej, ze znakiem $+$ lub $-$, w zależności od tego, czy rozważany punkt leży w (wcześniej ustalonej) dodatniej lub ujemnej części prostej.

Jeśli ta odległość jest w stosunku wymiernym do jednostki miary, to będzie ona wyrażona przez wielkość liczbową z dziedziny A ; w innych przypadkach, gdy punkt jest na przykład *znany* na mocy jakiejś konstrukcji, zawsze możliwe jest podanie ciągu:

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots, \quad (1)$$

który ma własność wyrażoną w §1 oraz pozostaje w takim związku do rozważanej odległości, że punkty linii prostej, które otrzymują odległości $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ wraz ze wzrastającą n , zbliżają się nieskończenie do owego określonego punktu.

Wyrażamy to w ten sposób, że mówimy: *Odległość rozważanego punktu od punktu o równa jest b , gdzie b jest wielkością liczbową odpowiadającą ciągowi (1).*

Następnie dowodzi się, że większość, mniejszość oraz równość znanych odległości pozostaje w zgodzie ze zdefiniowanymi w § 1: większością, mniejszością oraz równością odpowiednich wielkości liczbowych, które podają odległości.

To, że również wielkości liczbowe z dziedzin $C, D, \dots$ są w stanie określać znane odległości, otrzymuje się bez trudności. Aby jednak uczynić pełnym przedstawiony w tym § związek dziedzin wielkości liczbowych zdefiniowanych w § 1 z geometrią linii prostej, należy tylko dodać *aksjomat*, który polega po prostu na tym, że także na odwrót, każdej wielkości liczbowej odpowiada ustalony punkt prostej, którego współrzędna jest równa owej wielkości liczbowej, i to równa w tym sensie, jaki został objaśniony w niniejszym §².

Nazywam to twierdzenie *aksjomatem*, ponieważ w jego naturze leży to, iż nie jest ono w ogólności dowodliwe.

Poprzez ów aksjomat uzyskuje się pewną przedmiotowość wielkości liczbowych, od której jest on jednak całkiem niezależny.

Zgodnie z powyższym traktuję punkt prostej jako określony, gdy jego odległość od o , zaopatrzona w przynależny znak, jest dana jako wielkość liczbowa, wartość lub granica λ -tego rodzaju.

Chcemy teraz, zbliżając się do naszego właściwego przedmiotu rozważań, omówić zależności, które występują, gdy tylko wielkości liczbowe dane są w skończonej lub nieskończonej liczbie.

Na mocy poprzednio powiedzianego można myśleć o wielkościach liczbowych jako przyporządkowanych punktom prostej. Dla pogładowości (choć nie należy to

²Do każdej wielkości liczbowej przynależy zatem określony punkt, jednemu punktowi jest jednak przyporządkowanych niezliczenie wiele równych wielkości liczbowych jako współrzędnych w powyższym sensie; gdyż z czysto logicznych powodów wynika, jak już to wyżej zaznaczano, że równym wielkościom liczbowym *nie* mogą odpowiadać różne punkty oraz że nierównym wielkościom liczbowym jako współrzędnym *nie* może być przyporządkowany jeden i ten sam punkt.

do istoty rzeczy) posługujemy się tym przedstawieniem w dalszym ciągu i gdy mówimy o punktach mamy zawsze przed oczyma wartości, przez które są one podane.

Daną skończoną lub nieskończoną liczbę wielkości liczbowych nazywam dla zwięzłości *zbiorem wartości*, a odpowiednio, daną skończoną lub nieskończoną liczbę punktów prostej nazywam *zbiorem punktów*. To, co w dalszym ciągu zostanie powiedziane o zbiorach punktów, można, zgodnie z powiedzianym, przetłumaczyć bezpośrednio na zbiory wartości.

Gdy w skończonym przedziale dany jest zbiór punktów, to w ogólności dany jest wraz z nim drugi zbiór punktów, a w ogólności wraz z nim trzeci zbiór punktów, itd., które są istotne dla pojmowania natury pierwszego zbioru punktów.

Aby zdefiniować te pochodne zbiory punktów, trzeba najpierw wprowadzić pojęcie *punktu granicznego zbioru punktów*.

Przez punkt graniczny zbioru punktów P rozumiem punkt prostej, w takim położeniu, że w każdym jego otoczeniu znajduje się *nieskończenie* wiele punktów z P , przy czym może się zdarzyć, że ponadto on sam należy do tego zbioru. Przez otoczenie punktu niech będzie tu rozumiany każdy przedział, który zawiera ten punkt *w swoim wnętrzu*. Następnie łatwo udowodnić, że złożony z nieskończonej liczby punktów zbiór punktów zawsze ma *co najmniej jeden punkt graniczny*.

Dla każdego punktu prostej jest w pełni określone, czy względem danego zbioru punktów P jest on jego punktem granicznym czy też takim nie jest, a stąd wraz ze zbiorem punktów P podany jest pojęciowo zbiór jego punktów granicznych, który będę oznaczał przez P' oraz nazywał *pierwszym pochodnym zbiorem punktów dla P* .

Jeśli zbiór punktów P' nie składa się z jedynie skończonej liczby punktów, to ma on również pochodny zbiór punktów P'' , nazywam go *drugim pochodnym zbiorem dla P* . Poprzez ν takich przejść tworzy się pojęcie ν -tego pochodnego zbioru punktów $P^{(\nu)}$ dla P .

Jeśli, dla przykładu, zbiór P składa się ze wszystkich punktów prostej, którym odpowiadają odcięte wymierne pomiędzy 0 i 1, z włączeniem lub nie granic, to zbiór pochodny P' składa się ze *wszystkich* punktów przedziału $(0 \dots 1)$, z włączeniem granic 0 oraz 1. Następne zbiory P'' , P''' , ... pokrywają się z P' . Albo, jeśli zbiór P składa się z punktów, którym odpowiadają odcięte $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$, to zbiór P' składa się z jednego punktu 0 i sam nie ma żadnego zbioru pochodnego.

Może się zdarzyć, a jest to przypadek, który wyłącznie nas tu interesuje, że po ν przejściach zbiór $P^{(\nu)}$ składa się ze skończonej liczby punktów, a stąd sam nie ma pochodnej; w tym przypadku chcemy nazywać wyjściowy zbiór P zbiorem ν -tego rodzaju, z czego wynika, że $P', P'', \dots$ są wtedy, odpowiednio, $\nu - 1$ -ego, $\nu - 2$ -ego, ..., rodzaju.

Przy tym sposobie pojmowania dziedzina wszystkich zbiorów punktów określonego rodzaju będzie zatem traktowana, jako szczególny typ wewnątrz dziedziny wszystkich do pomyślenia zbiorów punktów, w którym to typie tak zwane zbiory punktów ν -tego rodzaju tworzą rodzaj szczególny.

Przykładu zbioru punktów ν -tego rodzaju dostarcza już jeden jedyny punkt, gdy jego odcięta jest dana jako wielkość liczbową ν -tego rodzaju, która czyni zadość pewnym, łatwym do ustalenia warunkom. Jeśli mianowicie rozłoży się tę wielkość liczbową na człony $(\nu - 1)$ -ego rodzaju w odpowiadającym jej ciągu, te człony

znowu na konstytuujące je człony $(\nu - 2)$ -ego rodzaju, itd., to otrzyma się w końcu nieskończoną liczbę liczb wymiernych; jeśli pomyśli się o odpowiadającym tym liczbom zbiorze punktów, to jest on sam ν -tego rodzaju³.

Po tych przygotowaniach jesteśmy teraz w stanie w następnym § krótko podać oraz udowodnić rozważane twierdzenie.

§3.

TWIERDZENIE. *Jeśli dane jest równanie o postaci:*

$$0 = C_0 + C_1 + \dots + C_n + \dots, \quad (\text{I})$$

gdzie $C_0 = \frac{1}{2}d_0$; $C_n = c_n \sin nx + d_n \cos nx$, dla wszystkich wartości x z wyjątkiem tych, które odpowiadają punktom danego w przedziale $(0 \dots (2\pi))$ zbioru punktów P ν -tego rodzaju, przy czym ν oznacza dowolnie dużą liczbę całkowitą, to

$$d_0 = 0, \quad c_n = d_n = 0.$$

Dowód: Jak będzie widoczne w toku dowodu, gdy mowa o P , to nie mamy przed oczyma jedynie podanego zbioru ν -tego rodzaju punktów wyjątkowych w przedziale $(0 \dots (2\pi))$, lecz ten zbiór, który powstaje z owego podanego przez okresowe powtórzenie na całej nieskończonej linii prostej.

Rozważmy teraz funkcję

$$F(x) = C_0 \frac{xx}{2} - C_1 - \frac{C_2}{4} - \dots - \frac{C_n}{nn} - \dots$$

Z natury zbioru punktów ν -tego rodzaju wynika łatwo, że musi istnieć przedział $(\alpha \dots \beta)$, w którym nie leży żaden punkt zbioru P ; dla wszystkich wartości x w tym przedziale, wobec zbieżności naszego szeregu (I) będzie zatem

$$\lim(c_n \sin nx + d_n \cos nx) = 0,$$

a stąd zgodnie ze znanym twierdzeniem (patrz: *Math. Ann.* Bd. **IV**, s. 139):

$$\lim c_n = 0, \quad \lim d_n = 0.$$

Funkcja $F(x)$ ma zatem (patrz: Riemann, *Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe*, §8) następujące własności:

1. jest ona ciągła w pobliżu każdej wartości x ,
2. $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{F(x+\alpha) + F(x-\alpha) - 2F(x)}{\alpha\alpha} = 0$, gdy $\lim \alpha = 0$, dla wszystkich wartości x z wyjątkiem wartości, odpowiadających punktom ze zbioru P ,
3. $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{F(x+\alpha) + F(x-\alpha) - 2F(x)}{\alpha} = 0$, gdy $\lim \alpha = 0$, dla każdej bez wyjątku wartości x .

³To, że nie zawsze jest to ten przypadek, zasługuje może jeszcze na wyraźne podkreślenie. W ogólności, zbiór punktów wyprowadzony na ów sposób z wielkości liczbowej ν -tego rodzaju może być równie dobrze mniejszego lub większego rodzaju od ν -tego, a może i całkiem nie być określonego rodzaju.

Pokażę teraz, że $F(x) = cx + c'$. W tym celu rozważam najpierw dowolny przedział $(p \dots q)$, w którym leży tylko skończona liczba punktów ze zbioru P ; niech tymi punktami będą $x_0, x_1, \dots, x_r$, wypisane wedle ich następowania po sobie.

Twierdzę, że $F(x)$ jest liniowa w przedziale $(p \dots q)$; na mocy własności 1 oraz 2 $F(x)$ jest bowiem funkcją liniową w każdym przedziale, na które podzielony zostanie $(p \dots q)$ poprzez punkty $x_0, x_1, \dots, x_r$; ponieważ w żadnym z tych przedziałów nie leżą punkty wyjątkowe, więc zachodzą tu wnioski otrzymane w mojej rozprawie (patrz: *Journal f. d. r. u. angew. Math.* Bd. 71, s. 139); pozostaje zatem wykazać identyczność tych funkcji liniowych.

Uczynię to dla każdych dwóch sąsiednich przedziałów i wybieram w tym celu te funkcje w obu przedziałach $(x_0 \dots x_1)$ oraz $(x_1 \dots x_2)$.

W $(x_0 \dots x_1)$ niech $F(x) = kx + l$.

W $(x_1 \dots x_2)$ niech $F(x) = k'x + l'$.

Ze względu na 1 jest $F(x_1) = kx_1 + l$; dalej, dla wystarczająco małej wartości α :

$$F(x_1 + \alpha) = k'(x_1 + \alpha) + l'; \quad F(x_1 - \alpha) = k(x_1 - \alpha) + l.$$

Ze względu na 3 mamy zatem:

$$\lim_{\alpha} \frac{(k' - k)x + l' - l + \alpha(k' - k)}{\alpha} = 0, \quad \text{dla } \lim \alpha = 0,$$

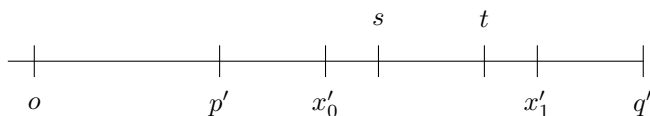
co nie może być niczym innym, jak przypadkiem gdy:

$$k = k', \quad l = l'.$$

Dla przejrzystości chcemy szczególnie podkreślić ten wynik:

(A) „Jeśli $(p \dots q)$ jest jakimkolwiek przedziałem, w którym leży tylko skończona liczba punktów zbioru P , to $F(x)$ jest w tym przedziale liniowa”.

Dalej rozważam jakikolwiek przedział $(p' \dots q')$, który zawiera tylko skończoną liczbę punktów $x'_0, x'_1, \dots, x'_r$ pierwszej pochodnej P' i twierdzę najpierw, że w każdym z przedziałów częściowych, na które $(p' \dots q')$ jest podzielony poprzez punkty $x'_0, x'_1, \dots$ funkcja $F(x)$ jest liniowa, np. w $(x'_0 \dots x'_1)$.



Ponieważ każdy z tych przedziałów częściowych zawiera wprawdzie w ogólności nieskończenie wiele punktów z P , więc wynik (A) nie znajduje w nim bezpośredniego zastosowania; natomiast każdy przedział $(s \dots t)$, który całkowicie wpada wewnątrz $(x'_0 \dots x'_1)$ zawiera tylko skończenie wiele punktów z P' (gdyż w przeciwnym razie między x'_0 a x'_1 wpadałyby jeszcze inne punkty zbioru P) i funkcja $F(x)$ jest, na mocy (A), liniowa w $(s \dots t)$. Jako że można punkty końcowe s oraz t przesunąć nieskończenie blisko do punktów x'_0 oraz x'_1 , zostaje rozstrzygnięte, że funkcja ciągła $F(x)$ też jest liniowa w $(x'_0 \dots x'_1)$.

Gdy jest to udowodnione dla każdego z przedziałów częściowych $(p' \dots q')$ otrzymuje się, poprzez te same wnioski, które dawały wynik (A), co następuje:

($\mathbb{A}'$) „Jeśli $(p' \dots q')$ jest jakimkolwiek przedziałem, w którym leży tylko skończona liczba punktów z P' , to $F(x)$ jest w tym przedziale liniowa.

Dowód postępuje dalej w taki oto sposób. Jeśli ustalono, że $F(x)$ jest funkcją liniową w jakimkolwiek przedziale $(p^{(k)} \dots q^{(k)})$, który zawiera tylko skończoną liczbę punktów z k -tego zbioru pochodnego $P^{(k)}$ dla zbioru P , to uzasadnia się dalej tak samo jak przy przejściu od ($\mathbb{A}$) do ($\mathbb{A}'$), że $F(x)$ jest funkcją liniową także w jakimkolwiek przedziale $(p^{(k+1)} \dots q^{(k+1)})$, który zawiera w sobie tylko skończoną liczbę punktów z $k+1$ -ego zbioru pochodnego $P^{(k+1)}$ dla zbioru P .

Wnioskujemy tak poprzez skończoną liczbę przejść, że $F(x)$ jest liniowa w każdym przedziale, który zawiera tylko skończoną liczbę punktów ze zbioru $P^{(\nu)}$. Zbiór P jest teraz jednak ν -tego rodzaju, jak założono, a stąd całkiem dowolnie wzięty z prostej przedział $(a \dots b)$ zawiera tylko skończenie wiele punktów z $P^{(\nu)}$. A zatem $F(x)$ jest liniowa w dowolnie wziętym przedziale $(a \dots b)$, a z tego wynika, jak łatwo widać, że $F(x)$ jest postaci: $F(x) = cx + c'$ dla wszystkich wartości x . Gdy to już uczyniono, dowód przebiega dalej od tego momentu mianowicie w ten sposób, jak w cytowanej już dwukrotnie rozprawie, gdzie również dowodzi się, że $F(x)$ ma postać liniową.

Udowodnionemu tu twierdzeniu można też nadać następujące sformułowanie:

„Funkcja nieciągła $f(x)$, która dla wszystkich wartości x , które odpowiadają punktom zbioru punktów P ν -tego rodzaju danego w przedziale $(0 \dots (2\pi))$, jest różna od zera lub nieokreślona, lecz jest równa zero dla wszystkich pozostałych wartości x , nie może zostać przedstawiona poprzez szereg trygonometryczny.

Halle, 8 listopada 1871.

* * *

Podstawa przekładu: CANTOR, G. 1872. Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen. *Mathematische Annalen* **5**, 123–132.

Przekład: Jerzy Pogonowski

30 września 2010

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia VIII (2016)

ISSN 2080-9751

Людмила Боженкова, Марина Егупова

Актуальные проблемы обучения математике в школе и вузе в свете идей Л. С. Выготского*

Abstract. The article gives a brief overview of the scientific results of the III International Conference held in Moscow State Pedagogical University in November 2016. The main directions of the development of ideas of L. S. Vygotsky, presented in the reports of leading Russian and foreign scientists – participants of the conference.

Московский педагогический государственный университет (МПГУ), созданный в 1872 году, — учебное и научное учреждение, образовательный и культурный центр федерального и международного значения, одно из старейших учебных заведений России.

Математический факультет МПГУ, образованный в 1900 году, следуя многолетним традициям, направляет свою деятельность на раскрытие и приумножение богатейшего потенциала первого педагогического университета России, на реализацию современных передовых идей в сфере образования.

В ноябре 2016 года под эгидой Министерства образования и науки Российской Федерации и Международной академии наук педагогического образования (МАНПО) на факультете состоялась III Международная научная конференция «Актуальные проблемы обучения математике и информатике в школе и вузе в свете идей Л. С. Выготского», посвящённая 120-летию юбилею со дня рождения выдающегося учёного.

Основная идея конференции — актуализация творческого наследия Л. С. Выготского и рассмотрение путей трансформации этого наследия в методику обучения математике и информатике на современном этапе развития школьного и вузовского математического образования. В работе конференции приняли участие около 150 человек, в том числе учёные из шести зарубежных стран. Ведущие учёные педагогических вузов: академики, члены-корреспон-

*Actual problems of teaching mathematics at school and university in the light of the ideas of L. S. Vygotsky

Key words and phrases: Moscow State Pedagogical University, international scientific conference, education, ideas of L. S. Vygotsky, mathematics.

денты РАН, РАО, МАНПО, доктора и кандидаты педагогических и физико-математических наук (всего 32 доктора и 65 кандидатов наук), представляли тридцать два региона России.

Открыл конференцию проректор по учебной работе МПГУ, доктор педагогических наук, профессор С. Д. Каракозов. В приветствии к участникам конференции, он акцентировал внимание на важности организации научного взаимодействия, информационного обмена опытом обучения предметам математического и методического циклов, которые становятся возможными на таких встречах. Также он подчеркнул, что актуальность идей Л. С. Выготского в настоящее время подтверждается использованием его культурно-исторической теории развития психики в исследованиях в области теории и методики обучения математике и информатике.

С пленарными докладами выступили ведущие учёные России, Польши, Белоруссии и Украины. Первый доклад «Идеи Л. С. Выготского и профессионально-педагогическая подготовка будущего учителя математики» представлен Геннадием Ивановичем Саранцевым, членом-корреспондентом РАО, доктором педагогических наук, профессором Мордовского государственного педагогического института (Саранск, Россия). В докладе отмечено значительное влияние идей Л. С. Выготского на развитие методики обучения математике (МОМ), на её переход от приложений к самостоятельной научной области. Во-первых, это – культурно-историческая теория развития психики, обоснование ведущей роли обучения и воспитания в развитии ребенка, что в применении к математике, позволило раскрыть содержание методики формирования понятий, работы с теоремой, обучения методам решения задач, включить в методику обучения математике использование эвристик. Во-вторых, актуальна идея Л. С. Выготского о важности мотивации. По утверждению учёного, сама мысль рождается не из другой мысли, а из мотивирующей сферы нашего сознания, которая охватывает влечение и потребности, интересы и побуждения, аффекты и эмоции. Поэтому для результативного обучения необходима не только мотивация учащихся, должна быть мотивирована среда, в которой они находятся. В-третьих, под влиянием идей Л. С. Выготского в МОМ разрабатывается проблема взаимосвязи различных форм коллективной деятельности учащихся в процессе изучения учебного материала. Например, обосновывается, что потребность в доказательствах и умение обосновывать свою мысль рождаются только в процессе столкновения суждений учащихся с суждениями других участников образовательного процесса. Заключением доклада явился перечень ряда проблем в МОМ, подлежащих исследованию: методическое мышление и язык обучения математике; современные знаки-стимулы, в частности, стимулы эстетического характера, в методике обучения математике; культура методиста и др.

Указанные направления развития идей Л. С. Выготского получили отражение и в докладе Антони Пардала, доктора педагогических наук, кандидата математических наук, вузовского профессора (Жешув, Польша). Выступление учёного было посвящено математике и совершенствованию процесса обучения этой науке, что является необходимым условием будущего процветания любого общества. А. Пардала отметил, что Л. С. Выготский сделал вывод о на-

значении истинного образования: оно не опирается только на усвоение специфических знаний или навыков обучающихся, а должно развивать их способности к логическому мышлению и креативности, планированию и осуществлению своих действий и др. Таких результатов можно достигнуть, предоставляя учащимся «инструменты» для мышления и творчества. Также докладчик осветил проблему гуманитаризации математического образования школьников и студентов, которая активно и плодотворно исследуется учёными Краковской научной школы дидактики математики, основанной профессором А. З. Крыговской.

А. Пардала раскрыл некоторые современные результаты исследований польских учёных, касающиеся эффективности обучения математике учащихся IV – VI классов основной школы и опубликованные Институтом исследований образования в Варшаве. Основные выводы этих исследований кратко формулируются в следующем. Для повышения мотивации и интереса учащихся к изучению математики, и как следствие, повышения качества их обучения необходима более широкая, но продуманная поддержка этого образования, в частности, к ней относится повышение квалификации учителей с помощью средств информационных технологий. Необходимо поменять существующую модель математического образования так, чтобы онлайн-образование способствовало улучшению (а не ухудшению, как часто происходит) качества преподавания математики в школах общего образования и в вузах. Для этого требуется: 1) постоянно выявлять и решать разнообразные текущие проблемы преподавания и предупреждать их появление в будущем; 2) подчеркивать аппликационный и полезный характер математики на соответствующих примерах; 3) иллюстрировать необходимость математического моделирования и возрастающее значение математических методов в решении проблем современного мира; 4) заботиться об увеличении школьных математических достижений учащихся.

Доктор педагогических наук, профессор Российского государственного педагогического университета им. А. И. Герцена (Санкт-Петербург, Россия) Наталья Семёновна Подходова в своём докладе осветила основные направления использования учения Л. С. Выготского в обучении математике в современной школе. В докладе отмечено, что учение Л. С. Выготского о зонах ближайшего и актуального развития является базой для развития самостоятельности обучающегося — необходимой составляющей изучения, в частности, математики, что отмечено в федеральных образовательных стандартах общего образования (ФГОС ОО). Первая зона определяется мерой помощи, например, учителя, которая необходима ребенку для решения задач, находящихся в сфере его интеллектуальных возможностей. Уровень актуального развития определяется теми задачами, которые ребенок способен решить самостоятельно без посторонней помощи. Далее Н. С. Подходова остановилась на особенностях процесса образования понятий, в котором Л. С. Выготский выделял как самостоятельное звено “предпонятие”. Владение предпонятием геометрического объекта означает сформированность у ученика умения выделять существенные свойства этого объекта, число которых превышает набор существенных свойств, достаточных для определения соответствующего понятия. Ученик

на этом уровне способен установить зависимости между множествами геометрических фигур, оперировать ими при решении задач. Выполнение этих операций требует активизации работы эмпирического мышления. Автором приведены примеры организации такой учебной деятельности при изучении различных разделов курса математики. Итогом выступления явился вывод о том, что идеи Л. С. Выготского не только не утратили сегодня своей актуальности, но и приобрели особую значимость для реализации обучения, ориентированного на развитие и самореализацию учащихся.

Доктор педагогических наук, профессор Белорусского государственного университета Олег Исидорович Мельников выступил с докладом о реализации идей Л. С. Выготского при подготовке пособий по математике. Учёный выделил принципы построения учебника, основанные на следующих идеях Л. С. Выготского: активность процесса воспитания; деятельность в сотрудничестве; использование элементов игры для активизации восприятия текстов; возможность выполнения преобразований с изучаемым учебным материалом, построение знаковых моделей в результате изучения этого материала; включение в тексты такого содержания, которое вызывает положительные эмоции; концентрическое изучение математических понятий. В заключении автор предлагает использовать идеи Л. С. Выготского для создания развивающих пособий для внеклассной работы по математике со школьниками Белоруссии.

На секционных заседаниях продолжилось обсуждение вопросов отражения идей Л. С. Выготского в научных исследованиях по методике обучения математике и информатике. В ходе работы первой секции «Проблемы модернизации школьного математического образования и культурно-историческая теория развития психики по Л. С. Выготскому» был поднят ряд крупных проблем, связанных с совершенствованием обучения математике в школе и роли идей Л. С. Выготского в этом процессе. В частности, рассмотрены следующие вопросы реализации ФГОС ОО: формирование универсальных учебных действий различными средствами (Л. И. Боженкова, Е. М. Таслицкая, В. А. Тестов, Р. А. Утеева – Россия); проектирование обучения математике (Е. Н. Рогановская — Белоруссия); психологические аспекты деятельности учителя математики (И. Е. Малова, И. М. Смирнова, В. А. Смирнов, С. Е. Царёва — Россия, Е. А. Лодатко — Украина); конструирование развивающих учебных текстов по математике (Э. Г. Гельфман — Россия, А. И. Абылкасымова – Казахстан); развитие житейских и научных понятий в обучении школьной математике (М. В. Егупова — Россия); приемы мотивации учения учащихся в обучении математике (Е. Ф. Фефилова — Россия, Г. Соедербакка — Норвегия).

Проблемы совершенствования профессионально-педагогической подготовки будущего учителя математики и пути их решения в аспекте идей Л. С. Выготского обсуждались на второй секции. Были подняты вопросы формирования математической и общекультурной компетенций студентов на основе компетентностного, полипарадигмального подходов (Т. Н. Грань, Е. И. Деза, И. Л. Тимофеева, Л. В. Шкерина — Россия, Д. М. Нурбаева — Казахстан). На третьей секции «Информатика в образовании в свете идей Л. С. Выготского» обсуждались вопросы, связанные с использованием математических и инфор-

мационных моделей в обучении (И. И. Баврин – Россия, В. М. Маринова — Болгария) и др.

Завершилась работа конференции принятием резолюции, в которой отмечено следующее. 1) Высокий организационный и научный уровень конференции является заслугой кафедры элементарной математики и методики обучения математике математического факультета МПГУ. 2) На форуме вскрыты актуальные проблемы обучения математике и информатике в школе и вузе, в свете идей Л. С. Выготского и намечены пути их решения. 3) Значимым явился факт достаточно весомой представленности на конференции молодого поколения начинающих учёных (в том числе — к.п.н.), которым была предоставлена возможность не только услышать доклады известнейших методистов страны и зарубежья, но и ознакомить участников конференции с собственными результатами научных исследований.

К началу работы форума был выпущен сборник научных трудов конференции (Егуповой, Боженковой, 2016). Всем присутствовавшим, принявшим участие в работе конференции, были вручены сертификаты. Организованная выставка-продажа учебной и научно-методической литературы ведущих издательств страны («Бином», «Дрофа», «Интеллект-центр», «Лаборатория знаний», «Экзамен»), позволила участникам ознакомиться с последними книжными новинками в области обучения математике и информатике. В рамках культурной программы была предоставлена возможность посещения премьерного спектакля одного из ведущих театров страны, а также организована экскурсия в старейший природный парк «Аптекарский огород», находящийся в центральной части города Москва. Ответственные за проведение конференции — члены отделения математического образования МАНПО – учёные математического факультета МПГУ — приложили все усилия для обеспечения высокого уровня организации работы конференции, достойном главного педагогического университета России — МПГУ.

Литература

- Выготский, Л. С.: 1996, *Педагогическая психология* / Под ред. В. В. Давыдова, Педагогика-Пресс, Москва.
- Егупова, М. В., Боженкова Л. И.: 2016, *Актуальные проблемы обучения математике и информатике в школе и вузе в свете идей Л. С. Выготского*, ФГБОУ ВО «Московский педагогический государственный университет» (МПГУ), Москва.

Московский педагогический
государственный университет
ул. Краснопрудная, д. 14
RUS-107140, Москва
e-mail math@mpgu.edu

Jerzy Pogonowski

Recenzja z Charles Parsons, Philosophy of Mathematics in the Twentieth Century: Selected Essays*

Charles Parsons jest wybitnym znawcą filozofii matematyki, który znacząco przyczynił się nie tylko do głębszego zrozumienia myśli innych filozofów, ale także zaproponował własne oryginalne idee w tej dziedzinie. Znane są jego subtelne analizy dokonań wielu myślicieli w refleksji filozoficznej nad matematyką. Pisał również sporo o intuicji matematycznej oraz o platonizmie matematycznym. Był też jednym z redaktorów naukowych wydania monumentalnych *Collected Works* Kurta Gödla.

Recenzowana książka to, wedle słów samego autora, ciąg dalszy jego rozważań zawartych w wydanym wcześniej tomie *From Kant to Husserl: Selected Essays* (Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts 2012). Eseje zamieszczone w recenzowanym tomie są reprintami artykułów już wcześniej opublikowanych. Wyjątkiem jest esej otwierający cały tom, a mianowicie *The Kantian Legacy in Twentieth-Century Foundations of Mathematics*. Ponadto, cztery z zamieszczonych w tomie esejów opatrzone są dodatkowymi komentarzami, nie publikowanymi wcześniej.

Autor podzielił tom na dwie części, przy czym kolejność esejów odzwierciedla mniej więcej chronologię omawianych zagadnień:

1. *Some Mathematicians as Philosophers*. Pierwszym esejem tej części jest wspomniany już wyżej tekst dotyczący spuścizny myśli Kanta w filozofii matematyki XX wieku. Drugi esej poświęcony jest realizmowi oraz debacie na temat niepredykatywności prowadzonej w latach 1917–1944. Kolejny esej omawia późne poglądy Paula Bernaysa na filozofię matematyki. Głównym bohaterem czterech pozostałych tej części jest Kurt Gödel: Parsons omawia jego słynny tekst *Russell's Mathematical Logic*, porównuje poglądy Gödla i Quine'a na temat analityczności oraz przedstawia stanowisko Gödla w kwestii platonizmu oraz statusu intuicji matematycznej.
2. *Contemporaries*. Dwa eseje tej części dotyczą dorobku Willarda Van Ormana Quine'a: głoszonego przezeń nominalizmu oraz wyjaśnień genetycznych

*Review of Charles Parsons's *Philosophy of Mathematics in the Twentieth Century: Selected Essays*

w jego *The Roots of Inference*. Pozostałe eseje tej części poświęcone są pracom: Hao Wanga (zarówno jako filozofa, jak też interpretatora myśli Kurta Gödla), Hilarego Putnama (Parsons omawia jego poglądy na temat istnienia oraz ontologii), Williama Taita (Parsons analizuje jego stanowisko w filozofii matematyki).

We wstępie autor uzasadnia wybór tematów, który postronnemu czytelnikowi może wydać się arbitralny. Parsons przyznaje, że kierował się własnymi upodobaniami filozoficznymi. Nie należy czynić mu z tego powodu zarzutu: w sprawach, o których pisze, wykazuje się znakomitymi kompetencjami, wnikliwością oraz bardzo dobrą wiedzą faktograficzną. Zwróćmy uwagę, że autor odnosi się do stosunkowo nowych (patrząc z perspektywy historii nauki) faktów, prezentowanych stanowisk i poglądów. Omawiane refleksje są wciąż na tyle żywe, że ich dyskusowanie, interpretowanie oraz krytyka nadal pozostają aktualne, zasługują na więcej niż tylko wzmiankę historyczną.

W analizach Parsonsa widoczna jest dominacja myśli Quine'a oraz Gödla, nie znajdujemy natomiast w przedstawionych esejach znaczących odwołań do logicyzmu oraz intuicjonizmu. Jedynie w eseju *The Kantian Legacy in Twentieth-Century Foundations of Mathematics* (publikowanym po raz pierwszy) Parsons wskazuje na wpływ niektórych idei Kanta na twórczość Paula Natorpa, Ernsta Cassirera, Luitzena Brouwera. W eseju tym znajdujemy też dyskusję wpływu Kanta na Davida Hilberta oraz Paula Bernaysa.

Niewątpliwą zaletą recenzowanego zbioru esejów jest dokonana przez Parsonsa skrupulatna analiza zmian w poglądach bohaterów poszczególnych tekstów. Jest dość oczywiste, że jeżeli dany myśliciel przez kilka dekad uprawia refleksję filozoficzną nad matematyką, to jego poglądy ulegają wysubtelnieniu. Sądzimy, że ten właśnie aspekt analiz Parsonsa okaże się najbardziej interesujący dla ewentualnych czytelników. Sam autor esejów zebranych w tomie również modyfikował i pogłębiał swoje poglądy, co widać chociażby w dodatkach załączonych do czterech esejów.

Jak widać ze spisu tematów esejów, Parsons prezentuje dwudziestowieczną filozofię matematyki jako konglomerat przemyśleń wybranych matematyków i filozofów. Można oczywiście przyjąć taką perspektywę, uznając, że refleksja w filozofii matematyki danego okresu to suma poglądów i stanowisk zaświadczonych w tym okresie. Alternatywą dla takiego ujęcia byłaby prezentacja odwołująca się do wybranych problemów filozofii matematyki. Realizacja takiego przedsięwzięcia byłaby jednak o wiele trudniejsza.

Nie przedstawiamy tutaj uwag krytycznych wobec materiału, zawartego w tomie. Jak już wspominaliśmy, Parsons kompetentnie i z dbałością o faktograficzną dokładność analizuje poglądy wybranych luminarzy filozofii matematyki XX wieku. Lektura całości lub jedynie wybranych esejów może zaciekać logików, filozofów (zwłaszcza filozofów analitycznych), matematyków, a może nawet historyków nauki.

Pozwolimy sobie jednak, przy okazji tej recenzji, na pewną osobistą refleksję. Rozprawy z filozofii matematyki dotyczą w większości *podstaw matematyki*: uwaga skupiona jest na teorii mnogości, arytmetyce, wynikach metalogicznych dotyczących podstaw matematyki. Także podstawy geometrii cieszą się zainteresowaniem badaczy w dziedzinie filozofii matematyki, zainteresowanie to dotyczy

też w pewnym stopniu teorii kategorii. Stale inspirują też filozofów problemy dotyczące struktury kontinuum oraz wielkości nieskończenie małych. Od niedawna refleksja w filozofii matematyki skierowana jest także na zagadnienia informatyki. Być może jest to odczucie subiektywne, wynikające z braków w odczytaniu recenzenta, ale odnoszę wrażenie, że filozofia matematyki zbyt mało uwagi poświęca wynikom uzyskanym w bardziej zaawansowanych działach matematyki. Jest niewątpliwie rzeczą niezmiernie trudną (a nawet dość ryzykowną) odnoszenie się, z perspektywy filozoficznej, do współczesnych osiągnięć w różnych dyscyplinach algebraicznych, topologicznych czy też tych, które wyodrębniły się z szeroko rozumianej analizy matematycznej. Być może jest też jeszcze za wcześnie, aby z należytego dystansu dokonywać analiz filozoficznych najważniejszych wyników współcześnie osiągniętych w tych dziedzinach. Innym wreszcie utrudnieniem jest to, że profesjonaliści matematycy są niezwykle oszczędni w filozoficznych komentarzach do swoich prac. Wreszcie, aby poddać refleksji filozoficznej wyniki zaawansowanych działów matematyki nie wystarczy być filozofem, który zna te wyniki jedynie z popularnych omówień – trzeba samemu również przeżyć akty tworzenia matematyki.

* * *

Recenzja: CHARLES PARSONS *Philosophy of Mathematics in the Twentieth Century: Selected Essays*. Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, London, England, 2014, xii+350 pages.

*Zakład Logiki i Kognitywistyki
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza
Instytut Psychologii
ul. Szamarzewskiego 89a (bud. AB)
PL-60-568 Poznań
e-mail pogon@amu.edu.pl*

*Mirosława Sajka***Dwudziesty jubileusz istnienia European Society for Research in Mathematics Education i dziesiąty międzynarodowy kongres CERME*****1. Słów kilka o jubileuszach**

Stowarzyszenie ERME, czyli European Society for Research in Mathematics Education, obchodzi w tym roku jubileusz dwudziestolecia istnienia. Stowarzyszenie to organizuje co dwa lata kongresy CERME, których skrót pochodzi od nazwy: Congress of European Research in Mathematics Education, co można przetłumaczyć jako Kongres Europejskich Badań z Dydaktyki Matematyki.

W dniach 1–5 lutego 2017 roku, tradycyjnie w pierwszym tygodniu lutego, zorganizowany został w Dublinie jubileuszowy, dziesiąty kongres CERME. Kongres CERME nie jest niestety licznie odwiedzany przez Polaków, dlatego celem tego artykułu jest przybliżenie zasad działania i tematyki kongresu CERME oraz jego popularyzacja na łamach rocznika dedykowanego nauczaniu matematyki.

W maju 1997 roku, grupa 16-tu naukowców zajmujących się badaniami z zakresu dydaktyki matematyki, z różnych krajów Europy, spotkała się w Osnabrück w Niemczech, aby przedyskutować i zapoczątkować istnienie stowarzyszenia. Uznali oni, że takie stowarzyszenie powinno jednoczyć wszystkich naukowców Europy zajmujących się nauczaniem matematyki, a w szczególności włączać do współpracy naukowców z krajów Europy Wschodniej, oferować wymianę myśli i badań naukowych z tego zakresu. Celem więc było powołanie do istnienia takiej konferencji, która dostarczy możliwości intensywnej współpracy.

Jednak pomimo tego celu oraz podkreślonego w nazwie kongresu jego europejskiego zasięgu obecnie kongresy CERME zrzeszają naukowców dosłownie z całego świata.

*European Society for Research in Mathematics Education 20th Anniversary. The international congress CERME 10

2. Gospodarze kolejnych edycji kongresów

Pierwszy kongres CERME zaplanowano na luty 1999 w Osnabrück, a kolejne odbywały się już regularnie co dwa lata w różnych krajach Europy, co przedstawiam w Tab. 1:

Tab. 1. Miejsca kolejnych konferencji CERME

Kongres	Rok	Miejscowość	Kraj
CERME 1	1999	Osnabrück	Niemcy
CERME 2	2001	Marianske Lazne	Republika Czeska
CERME 3	2003	Bellaria	Włochy
CERME 4	2005	Saint Feliu	Hiszpania
CERME 5	2007	Larnaca	Republika Cypryjska
CERME 6	2009	Lyon	Francja
CERME 7	2011	Rzeszów	Polska
CERME 8	2013	Antalya	Turcja
CERME 9	2015	Praga	Republika Czeska
CERME 10	2017	Dublin	Irlandia

Podkreślił przy tej okazji, że Polska była gospodarzem tego wielkiego kongresu. W 2011 roku CERME 7 został zorganizowany w Rzeszowie przez Instytut Matematyki, a głównie przez ówczesny Zakład Dydaktyki Matematyki w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Rzeszowskiego. Inicjatorką tego ogromnego przedsięwzięcia i główną organizatorką była prof. UR dr hab. Ewa Swoboda, przewodniczącym komitetu organizacyjnego był prof. dr hab. Aleksander Bobko, obecny sekretarz stanu w Ministerstwie Nauki i Szkolnictwa Wyższego, a ciężar organizacyjny z ramienia Zakładu Dydaktyki Matematyki dźwigały między innymi dr Bożena Maj i dr Marta Pytlak.

3. Formuła organizacyjna kongresów CERME

Komitet Programowy CERME 1 bardzo poważnie wziął pod uwagę cele uzgodnione na spotkaniu założycielskim ERME. Zaplanowano wówczas siedem grup tematycznych i 12 godzin pracy w każdej grupie. Aby uniknąć tego, co zwykle ma miejsce podczas różnych konferencji – czyli poświęcenia większości czasu na wysłuchiwanie prezentacji i wystąpień – zdecydowano, że nie będzie w ogóle ustnych prezentacji podczas kongresu. Zamiast tego będą zaprezentowane artykuły w formie pisemnej, z takim wyprzedzeniem czasowym, aby uczestnicy grup zdążyli się z nimi zapoznać przed konferencją. Na dyskusję tych artykułów i pracę nad problematyką w nich poruszaną poświęcono 12 godzin obrad w grupach.

Kongresy CERME zachowały do dzisiaj podobną i jednocześnie nietypową formułę organizacyjną. Oprócz wspólnych aktywności charakterystycznych dla większości kongresów i konferencji, z których całkowicie nie zrezygnowano — takich, jak wykłady plenarne, panele dyskusyjne i sesje plakatowe, główny nacisk tych kongresów nadal położony jest na intensywną pracę w ramach grup tematycznych — tak zwanych Thematic Working Group (TWG), z których każda zajmuje się

wybranych zagadnieniem z dydaktyki matematyki i zrzesza naukowców zainteresowanych wybraną zawężoną problematyką.

Taka formuła konferencji sprzyja filozofii kongresu i realizacji jego celów – tak zwanego potrójnego C: Communication, Cooperation & Collaboration, czyli komunikacji i współpracy. Dwa określenia współpracy kładą akcent na różne jej aspekty. Po pierwsze, na wspólną pracę nad jednym wybranym zagadnieniem *co-labor* tak, jak różne instrumenty tworzą brzmienie całej orkiestry, drugie określenie natomiast kładzie nacisk na wspieranie indywidualnych działań, w ramach funkcjonowania we współpracy i z pomocą innych *co-operate*, co z kolei można przyrównać do doskonalenia gry poszczególnych muzyków w sekcjach instrumentalnych orkiestry (perkusyjnej, smyczkowej itd.). Kontynuując metaforę orkiestry, kongresy CERME realizują ducha współpracy w sensie *collaboration* poprzez pracę wszystkich naukowców w różnych TWG i tym samym tworzenie brzmienia całego utworu symfonicznego, którym jest cała gama aktualnych problemów i badań z zakresu dydaktyki matematyki, ujęta w finalną postać publikacji pokonferencyjnej *Proceedings on-line*, a duch *cooperation* realizowany jest w obrębie poszczególnych grup tematycznych TWG.

Przygotowanie do aktywnego udziału w kongresie CERME trwa miesiącami, a dla liderów grup – długo ponad rok. Przyjrzyjmy się bliżej tym wyzwaniom, które poznałam osobiście jako jeden z tzw. *co-leader* grupy tematycznej TWG 11 Comparative Studies in Mathematics Education.

Pierwszy etap polega na przygotowaniu grup roboczych, których tematyka i osoby zgłoszonych liderów muszą zyskać akceptację tzw. ERME Board, czyli rady stowarzyszenia (w styczniu roku poprzedzającego kongres). Następnie ogłaszane są grupy tematyczne przez ERME, a liderzy grup przygotowują i publikują tzw. Call for papers, zapraszający wszystkich do dyskusji naukowej na określony temat (czerwiec roku poprzedzającego kongres). Potem trwa etap zgłaszania artykułów i plakatów.

Wytyczne dotyczące przygotowania artykułów i plakatów są bardzo precyzyjne i rygorystycznie przestrzegane, zarówno pod względem merytorycznym, jak i technicznym. Możliwe jest zgłaszanie dwóch typów doniesień naukowych: opracowań teoretycznych albo artykułów badawczych przedstawiających badania empiryczne. Oba rodzaje naukowych doniesień są oceniane według wytycznych zawierających sześć kategorii. W przypadku artykułów z badań empirycznych są nimi: 1. Wybór i aktualność problematyki badawczej i uzasadnienie celu badań, 2. Tło teoretyczne (lub filozoficzne w przypadku artykułów teoretycznych) oraz przegląd dotychczasowej literatury na ten temat, 3. Metodologia badań, 4. Analiza, dyskusja wyników badań oraz wnioski, 5. Jasność i przejrzystość prezentowanych treści, 6. Odpowiedniość i zgodność z problematyką wybranej grupy TWG. W przypadku artykułów teoretycznych inaczej ocenianymi zagadnieniami są: 7. Stosunek Autora do prezentowanego zagadnienia oraz 8. Implikacje dla dalszych badań z tego zakresu.

Wszyscy uczestnicy, którzy są pierwszymi autorami zgłoszonych artykułów zobligowani są do wzajemnego recenzowania artykułów i do pracy nad ich ulepszeniem – tu realizowany jest duch *co-operation* i tak zwane podejście *peer-to-peer*. Ten etap rusza zaraz po zamknięciu przyjmowania zgłoszeń, w połowie września roku poprzedzającego kongres. Każdy autor pierwszego artykułu musi w przeciągu

miesiąca napisać recenzje dla dwóch artykułów przydzielonych mu przez liderów grupy, co oznacza również otrzymanie dwóch recenzji własnego artykułu. Recenzje muszą szczegółowo odnieść się do wymienionych powyżej punktów wytycznych, wnioskować poprawki i mają być zakończone rekomendacją czy artykuł nadaje się do publikacji i z jakimi poprawkami, czy nadaje się jako plakat, czy nie nadaje się do publikacji.

Nad całym tym etapem czuwają liderzy, którzy nie tylko monitorują pracę uczestników, dbają o pozyskanie recenzji, komunikują się z autorami, ale przede wszystkim formułują wytyczne dla autorów na podstawie recenzji i rekomendują dokonanie poszczególnych zmian i poprawek w artykułach. Jako lider grupy TWG 11 koordynowałam również ten proces. Nie jest to zadanie łatwe, gdyż często zdarza się, że wymaga to od lidera napisania trzeciej recenzji, by wychwycić wszystko, co ważne, i pogodzić sprzeczne wizje recenzentów, dając odpowiednie rekomendacje autorom. Najbardziej powszechną bolączką liderów jest rekomendowanie autorom, z jakich treści można zrezygnować, by zmieścić tekst na 8 stronach rygorystycznie przestrzeganego szablonu, a jednocześnie uwzględnić rekomendacje recenzentów. Jeśli artykuł powinien być odrzucony, to tę decyzję również dyskutują między sobą i następnie podejmują liderzy.

Ten etap kończy się wstępnymi decyzjami o tym, które artykuły zostają przyjęte (początek listopada). Wówczas autorzy pracują nadal nad ulepszaniem artykułów, zgodnie z uzyskanymi rekomendacjami, mając na to czas do połowy grudnia. W połowie stycznia zestaw poprawionych artykułów po recenzjach jest już dostępny dla wszystkich członków danej grupy na stronie wewnętrznej dla uczestników kongresu.

Następnym zadaniem – wyzwaniem dla wszystkich uczestników kongresu — jest wnikliwa lektura każdego artykułu z grupy, w której uczestniczy, gdyż podczas kongresu na poszczególnych spotkaniach grup tematycznych te właśnie artykuły są przedmiotem dyskusji i analizy, moderowanej przez liderów. Uczestnicy kongresu spotykają się przez cały czas trwania kongresu w tym samym gronie wybranej grupy tematycznej i intensywnie dyskutują jej problematykę, tradycyjnie przez około 12 godzin. W ten sposób następuje kolejny etap wymiany poglądów i myśli oraz doskonalenia artykułów.

Po konferencji natomiast autorzy mają kolejne dwa miesiące na dokonanie zmian w artykułach i przesłanie ostatecznej wersji artykułów, zwykle do końca marca. Ten etap również jest monitorowany przez liderów.

Tak intensywna praca w grupach trwa wśród setek osób, dla uczestników kongresu jest więc niezwykle interesujące, by zapoznać się na bieżąco i jak najwcześniej z wynikami pracy innych grup. Organizacja kongresów CERME przewidziała taką możliwość, z konieczności w ograniczonym zakresie. W ostatnim dniu zaplanowane są zwykle spotkania dla wszystkich zainteresowanych podsumowaniem pracy w danych grupach. Liderzy poszczególnych grup przygotowują podsumowanie wyników ich pracy i następnie równolegle w różnych salach w tym samym czasie prezentują je dwukrotnie dla zainteresowanych. Każdy uczestnik może zatem wybrać takie dwa spotkania podsumowujące pracę innych grup i z nich dowiedzieć się o działalności wybranych grup.

4. Rozwój liczbowy i tematyczny kongresu

Formuła aktywnego uczestniczenia w grupach tematycznych jest niezwykle wymagająca, ale sprzyja prawdziwemu rozwojowi i duchowi współpracy. Dlatego pomimo wysokich wymagań liczba uczestników kongresów CERME i jednocześnie liczba grup tematycznych rośnie z kongresu na kongres.

Osobiście uczestniczę w kongresach CERME od 2011 roku i w poniższej tabeli przedstawiam dane liczbowe ilustrujące ten wzrost zainteresowania kongresem w latach, w których to śledziłam.

Tab. 2. Liczba grup tematycznych TWG, uczestników, artykułów i plakatów w ostatnich czterech kongresach

Kongres	Rok	Liczba TWG	Liczba uczestników	Liczba przyjętych artykułów	Liczba przyjętych plakatów
CERME 7	2011	17	Okolo 470	293	69
CERME 8	2013	17	Okolo 520	310	57
CERME 9	2015	20	Okolo 700	440	114
CERME 10	2017	24(23)	Okolo 800	585	99

We wspomnianym kongresie CERME 7 w Rzeszowie oraz kolejnym CERME 8 w Turcji obradowało 17 grup tematycznych, natomiast podczas CERME 9 w czeskiej Pradze w 2015 roku pracowało już 20 grup tematycznych. Zaobserwowano wówczas wyraźny wzrost zainteresowań badawczych związanych z osobą i rolą nauczyciela matematyki. Podczas gdy w CERME 7 i CERME 8 tylko jedna grupa była poświęcona tej problematyce: TWG 17 – Od badań z zakresu praktyki nauczania do zagadnień na temat kształcenia nauczycieli *From a study of teaching practices to issues in teacher education*, to wszystkie trzy nowe grupy zgłoszone w ramach CERME 9 dotyczyły problematyki kształcenia nauczycieli: TWG 18 – Kształcenie i rozwój zawodowy nauczycieli matematyki *Mathematics teacher education and professional development*, TWG 19 – Nauczyciel matematyki a praktyka nauczania *Mathematics teacher and classroom practices* oraz TWG 20 – Wiedza, przekonania i tożsamość nauczyciela matematyki *Mathematics teacher knowledge, beliefs and identity*.

5. Grupy tematyczne CERME10

W jubileuszowym kongresie CERME 10 zaplanowano 24 grupy robocze, wśród których jedna została zlikwidowana z powodu zbyt małej liczby zgłoszeń. Wycofana grupa TWG 7 miała poruszać zagadnienia związane z potencjałem matematycznym, kreatywnością i talentem *Mathematical Potential, Creativity and Talent* – czyżby te zagadnienia nie były już interesujące badawczo?

Grupy tematyczne obradujące w ostatnim kongresie:

- TWG 1 Argumentacja i dowód *Argumentation and Proof*
- TWG 2 Arytmetyka i systemy liczbowe *Arithmetic and Number Systems*
- TWG 3 Myślenie algebraiczne *Algebraic Thinking*
- TWG 4 Geometria *Geometry*

- TWG 5 Nauczanie rachunku prawdopodobieństwa i statystyki *Probability and Statistics Education*
- TWG 6 Zastosowania i modelowanie *Applications and Modelling*
- TWG 8 Afekt i myślenie matematyczne *Affect and Mathematical Thinking*
- TWG 9 Matematyka i język *Mathematics and Language*
- TWG 10 Zróżnicowanie i nauczanie matematyki: wyzwania społeczne, kulturowe i polityczne *Diversity and Mathematics Education: Social, Cultural and Political Challenges*
- TWG 11 Badania porównawcze w dydaktyce matematyki *Comparative Studies in Mathematics Education*
- TWG 12 Historia w dydaktyce matematyki *History in Mathematics Education*
- TWG 13 Matematyka wczesnoszkolna *Early Years Mathematics*
- TWG 14A oraz 14B Nauczanie matematyki na poziomie uniwersyteckim *University Mathematics Education*
- TWG 15 Nauczanie matematyki z technologią i innymi źródłami *Teaching Mathematics with Technology and Other Resources*
- TWG 16 Uczenie się matematyki z technologią i innymi źródłami *Learning Mathematics with Technology and Other Resources*
- TWG 17 Perspektywy i podejścia teoretyczne w badaniach z dydaktyki matematyki *Theoretical Perspectives and Approaches in Mathematics Education Research*
- TWG 18 Edukacja nauczycieli matematyki i ich rozwój zawodowy *Mathematics Teacher Education and Professional Development*
- TWG 19 Nauczyciel matematyki i praktyka szkolna *Mathematics Teacher and Classroom Practices*
- TWG 20 Wiedza, przekonania i tożsamość nauczyciela matematyki *Mathematics Teacher Knowledge, Beliefs and Identity*
- TWG 21 Ocenianie w edukacji matematycznej *Assessment in Mathematics Education*
- TWG 22 Materiały dydaktyczne i tworzenie zadań *Curricular Resources and Task Design in Mathematics Education*
- TWG 23 Zastosowanie doniesień z badań w nauczaniu matematyki *Implementation of Research Findings in Mathematics Education*
- TWG 24 Reprezentacje w nauczaniu i uczeniu się matematyki *Representations in Mathematics Teaching and Learning*

Cztery ostatnie TWG były grupami nowymi dla CERME, a z nich trzy podkreślają praktyczne aspekty nauczania matematyki.

Podczas CERME 10 można było zaobserwować rozkwit i olbrzymie zainteresowanie problemami badawczymi związanymi z edukacją matematyczną na poziomie uniwersyteckim. Grupa TWG 14 ze względu na liczbę zainteresowanych osób i zgłoszonych artykułów musiała się podzielić na dwie podgrupy 14A i 14B i obradować oddzielnie.

Jest to szczególnie interesująca obserwacja z punktu widzenia tematyki badawczej prezentowanej w niniejszym roczniku, podkreślająca rangę i aktualność podnoszonej tutaj problematyki.

6. Wykłady plenarne

W ramach CERME 10 zaproponowano uczestnikom dwa wykłady plenarne:

- Elena Nardi (Wielka Brytania), *From Advanced Mathematical Thinking to University Mathematics Education: A Story of Emancipation and Enrichment*
- Lieven Verschaffel (Belgia), *Towards a More Comprehensive Model of Children's Number Sense*

Prezentacje z tych wykładów są dostępne na stronie <http://cerme10.org> w zakładce Scientific Activities pod linkiem Plenary Sessions.

7. Panel

Bardzo interesujący, w moim odczuciu, był panel plenarny o tytule: *Solid Findings in Mathematics Education: What Are They and What Are They Good For?* Panelistami byli Marianna Bosch (Ramon Llull University, Hiszpania), Tommy Dreyfus (Tel Aviv University, Izrael), Caterina Primi (University of Florence, Włochy), Gerry Shiel (Educational Research Centre, Irlandia).

Panel dotyczył analizy pojęcia *solid findings* — czyli istotnych odkryć w dydaktyce matematyki. Dyskutowano ich definicję i możliwe zastosowania oraz słabe strony, a nawet niebezpieczeństwa, biorąc pod uwagę dwa różne punkty widzenia: jak solid findings są identyfikowane i na jakim wspólnym gruncie są one oparte. Paneliści przyjmowali różne punkty widzenia na ten temat, skupiając się na konkretnych metodach i modelach psychometrycznych; formułowali wnioski dla dalszych działań i oceny programów nauczania oraz podali pewien zestaw *solid findings* zaproponowany przez Komisję Edukacji Europejskiego Towarzystwa Matematycznego *Education of the European Mathematical Society*.

8. Wkład Polaków w CERME 10

Pomimo wzrostu liczebności kongresu, ERME Board szuka sposobów, aby przyciągnąć większą liczbę uczestników i zastanawia się nad przyczynami słabej aktywności w tym zakresie niektórych państw europejskich.

Niestety wśród tych państw znajduje się Polska. Tylko dwa polskie uniwersytety były reprezentowane w ramach CERME 10, zaledwie przez trzy osoby – z Uniwersytetu Rzeszowskiego Bożena Maj-Tatsis (pełniąca funkcję co-leader dla grupy TWG 13) oraz z Uniwersytetu Pedagogicznego w Krakowie Mirosława Sajka (co-leader TWG 11) i Daniel Wójcik, który uczestniczył w grupie TWG 19.

Zaszczytną funkcję członka ERME Board w obecnej kadencji pełni Edyta Nowińska, reprezentując Uniwersytet w Osnabrück w Niemczech. Następujące artykuły autorstwa lub współautorstwa Polaków zostały przyjęte w ramach CERME 10:

- Jeta Kingji Kastrati (University of Ljubljana, Słowenia), Mirosława Sajka (Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie), Eda Vula (University of Pristina, Kosowo) *Comparison of Kosovan and Polish preservice teachers' knowledge of fractions* (TWG 11)

- Edyta Nowińska (Uniwersytet w Osnabrück, Niemcy), Anna-Katharina Praetorius (German Institute for International Educational Research, Niemcy) *Evaluation of a rating system for the assessment of metacognitive-discursive instructional quality* (TWG 19)
- Bożena Maj-Tatsis, Ewa Swoboda (Uniwersytet Rzeszowski) *Discovering regularities in a geometrical objects environment* (TWG 13)
- Mirosława Sajka (Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie) *Visual attention while reading a multiple choice task by academics and students: A comparative eye-tracking approach* (TWG 11)
- Konstantinos Tatsis (University of Ioannina, Grecja), Bożena Maj-Tatsis (Uniwersytet Rzeszowski) *Authority structures in preservice teachers' talk* (TWG 9)

9. Podsumowanie

Niemal wszystkie merytoryczne doniesienia CERME 10 są dostępne na stronie <http://cerme10.org>, dlatego nie przedstawiam w tym sprawozdaniu żadnych streszczeń i zachęcam do lektury artykułów.

Jubileusz dwudziestolecia ERME zostanie uczczony w jeszcze innej naukowej formie. Stowarzyszenie to pracuje nad przygotowaniem jubileuszowej książki. Podczas kongresu poświęcono uwagę przygotowywaniu poszczególnych rozdziałów tej książki i odbyły się specjalnie zaplanowane dyskusje w sesjach poszczególnych grup TWG. Książka o działalności ERME ma się ukazać w roku 2018.

*Instytut Matematyki
Uniwersytet Pedagogiczny
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
e-mail msajka@up.krakow.pl*

