

Monika Czajkowska

Kompetencje geometryczne nauczycieli matematyki*

Abstract. Practice proves that students tend to face difficulties in learning geometry. This observation is partially confirmed by the results of educational research as well as external exams. It happens repeatedly that students get lower marks in arithmetic or algebra tasks. The causes of such situation are complex. One of the reasons is that teaching geometry requires special teaching skills characteristic for this specific teaching branch as well as the need for “specific vision”. Therefore, I decided to study the geometric skills of mathematics teachers more carefully. For this purpose, I made use of two research results: *international research TEDS-M 2008* as well as nationwide research *The research of needs the elementary education teachers as well as mathematics teachers have in the scope of their professional development*. This article presents the results of the analysis together with my personal thoughts on education and improvement of teachers’ skills in the area of geometry.

1. Uwagi o specyfice uczenia się i nauczania geometrii

Praktyka pokazuje, że nauka geometrii często sprawia uczniom trudności. Z rozwiązywaniem zadań geometrycznych radzą sobie oni gorzej, niż z rozwiązywaniem zadań z innych działów matematyki szkolnej. Powyższe stwierdzenia potwierdzają w pewnym stopniu wyniki egzaminów zewnętrznych. Na przykład na egzaminie gimnazjalnym w 2015 r. jednymi z najtrudniejszych okazały się zadania dotyczące zagadnień z geometrii. Poziom wykonania najtrudniejszego zadania z planimetrii wynosił 24%, a najłatwiejszego – 60%. W przypadku zadań ze stereometrii wskaźniki te były odpowiednio równe 32% i 57% (CKE, 2015, s. 72–76). Podobna sytuacja wystąpiła na egzaminie gimnazjalnym w 2016 roku. Najtrudniejszym okazało się zadanie geometryczne, wymagające zastosowania twierdzenia

*Geometric competences of mathematics teachers

2010 Mathematics Subject Classification: Primary: 97C70; Secondary: 97G99.

Key words and phrases: teacher competences, geometry

Pitagorasa w nietypowej sytuacji; poprawnie rozwiązało je 30% gimnazjalistów (CKE, 2016, s. 79).

Niektóre trudności uczniów mogą wynikać ze specyfiki uczenia się i nauczania geometrii. Panek i Pardała (1999) stwierdzają, że zadania geometryczne wymagają „specyficznego widzenia”. To „specyficzne widzenie” polega na manipulowaniu obiektami geometrycznymi w umyśle oraz dostrzeganiu, wydzielaniu i skupianiu uwagi tylko na istotnych informacjach. Nie wystarczy przy tym tylko „widzieć”, trzeba wiedzieć jak zinterpretować to, co się widzi (tamże, s. 65–69). Wsparciem dla takiego manipulowania jest dobra wyobraźnia przestrzenna (de Lange Jzn, 1986; Panek, Pardała, 1999) i intuicja geometryczna (Fischbein, 1987; Jones, 1998; Fujita, Jones, Yamamoto, 2004). Z kolei Duval (1998, s. 37) zauważa, że nauczanie geometrii jest bardziej skomplikowane i często mniej skuteczne niż nauczanie arytmetyki czy szkolnej algebry.

Powyższe uwagi wskazują na to, że nauczanie geometrii wymaga szczególnych kompetencji nauczyciela. Powszechnie wiadomo bowiem, że efektywność nauczania w dużej mierze od nich zależy. Wobec tego, postanowiłam przyjrzeć się kompetencjom z zakresu geometrii przyszłych i czynnych nauczycieli matematyki. Do określenia ich poziomu wykorzystałam dostępne, dzięki IFIS PAN i IBE, wyniki badania TEDS-M 2008 (Czajkowska, Jasińska, Sitek, 2010) i badania potrzeb nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej i nauczycieli matematyki w zakresie rozwoju zawodowego (Czajkowska, Grochowalska, Orzechowska, 2015). Ponadto mój udział w zespołach badawczych obu wymienionych badań pozwolił mi na przeprowadzenie głębszych analiz i spojrzenie na problem z szerszej perspektywy. Zanim jednak przedstawię wyniki moich dociekań, wyjaśnię, co rozumiem przez kompetencje nauczyciela matematyki.

2. Kompetencje nauczycieli matematyki

Pojęcie kompetencji, w tym również kompetencji nauczycieli, jest zazwyczaj używane w dwóch znaczeniach – jako kwalifikacji niezbędnych do wykonywania zawodu lub jako zakresu uprawnień. W niniejszym artykule, pisząc o kompetencji, mam na myśli pierwsze z wymienionych określeń. Kompetencję rozumiem jako połączenie trzech atrybutów: wiedzy, umiejętności i postaw.

W literaturze pedagogicznej wymienia się różne kategorie lub obszary kompetencji nauczyciela. Na przykład Dylak (1995, s. 38–39) dzieli je na: bazowe, konieczne, pożądane. Taraszkiewicz-Kotońska (2001, s. 175) mówi o kompetencjach merytorycznych, psychologiczno-pedagogicznych i wychowawczych. Banach (2004, s. 551) wyróżnia kompetencje poznawczą, językową, wartościująco-komunikacyjną, interpersonalną, kulturową, życiowego doradztwa, praktyczno-moralną i organizacyjno-techniczną. Strykowski (2000, s. 18–27) charakteryzuje kompetencje merytoryczne (rzeczowe), psychologiczno-pedagogiczne, diagnostyczne, planistyczne i projektowe, dydaktyczno-metodyczne, komunikacyjne, medialne, kontrolne i ewaluacyjne, oceniania programów i podręczników szkolnych, autoedukacyjne. Zespół Przygotowania Pedagogicznego Nauczycieli przy Radzie ds. Kształcenia Nauczycieli w MEN (za: Szempruch, 2000, s. 123) wyodrębnia kompetencje interpretacyjno-komunikacyjne, kreatywne, współdziałania, pragmatyczne i informatyczno-medialne.

W literaturze dydaktycznej, mówiąc o kompetencjach nauczyciela matematyki, wskazuje się najczęściej na kompetencje matematyczne i kompetencje dydaktyczne. Kompetencja matematyczna to, jak pisze Niss (2003, s. 218), *zdolność rozumienia, osądzania, wykonywania i wykorzystywania matematycznych czynności w kontekście matematycznym i pozamatematycznym*. Niss wymienia osiem składowych kompetencji matematycznej. Są to: 1) myślenie matematyczne, 2) stawianie i rozwiązywanie problemów matematycznych, 3) modelowanie matematyczne, 4) rozumowanie matematyczne, 5) reprezentowanie bytów matematycznych, 6) posługiwanie się matematyczną symboliką i formalizmami, 7) komunikowanie się w matematyce, o matematyce i z użyciem matematyki, 8) używanie środków pomocniczych i narzędzi (tamże, s. 218–219). Kompetencja dydaktyczna w literaturze jest różnie charakteryzowana. Nie przedstawiając i nie rozważając na łamach tego artykułu podobieństw i różnic w opisach tej kompetencji, w niniejszym tekście przez kompetencję dydaktyczną nauczyciela rozumiem ogólną zdolność do organizowania procesu nauczania i uczenia się. Jej składowymi są m.in.: 1) wiedza o prawidłowościach rozwojowych człowieka, 2) znajomość podstawy programowej i programów nauczania (dostrzeganie powiązań treści programowych, znajomość podręczników szkolnych i innych materiałów dydaktycznych oraz umiejętność dokonywania ich krytycznej analizy), 3) planowanie lekcji (planowanie pojedynczej i kilku lekcji, wiedza o różnych sposobach organizacji lekcji, umiejętność stawiania właściwych celów nauczania, znajomość metod nauczania, umiejętność dokonywania ich krytycznej analizy i wykorzystania w praktyce, znajomość zasad nauczania, umiejętność doboru metod i środków dydaktycznych odpowiednich do postawionych celów nauczania, umiejętność wykorzystania TI w nauczaniu, umiejętność indywidualizacji nauczania), 4) umiejętność odbierania informacji od ucznia i przekazywania mu informacji zwrotnej (umiejętność wsłuchiwania się w to, o czym mówi uczeń, umiejętność śledzenia toku myślenia ucznia zarówno w bezpośrednim kontakcie z uczniem, jak i na podstawie wytworów jego pracy, umiejętność przewidywania typowych błędów uczniowskich i zapobiegania błędom uczniowskim, umiejętność doboru odpowiednich wskazówek dydaktycznych, umiejętność informowania ucznia o lukach w jego wiedzy i czynionych przez niego postępach, umiejętność komunikowania się z uczniem, grupą uczniowską i rodzicami), 5) umiejętność oceny pracy ucznia (umiejętność analizowania i rzetelnego oceniania pracy ucznia), 6) umiejętność pracy z uczniami o różnych potrzebach edukacyjnych (umiejętność wspierania ucznia, mającego trudności w nauce i rozwijania uzdolnień ucznia o ponadprzeciętnych umiejętnościach, wiedza o różnych stylach uczenia się i nauczania).

Choć badacze podkreślają znaczenie obu kategorii kompetencji, to nie ma wśród nich pełnej zgodności co do tego, która z nich ma największy wpływ na jakość nauczania matematyki (Czajkowska, 2013, s. 73). Fennema i Franke (1992) piszą, że ważnymi komponentami specjalistycznej wiedzy nauczycielskiej są: znajomość samej matematyki, wiedza o matematycznych reprezentacjach, znajomość procesów poznawczych uczniów oraz znajomość metodyki. Podkreślają jednak, że podstawą jest rozumienie matematyki i umiejętność tworzenia matematycznych reprezentacji. Podobnego zdania są Ball, Thames i Phelps (2008, s. 404), którzy uważają, że to wiedza matematyczna nauczyciela jest warunkiem koniecznym i fun-

damentem skutecznego nauczania. Nie jest bowiem możliwe, aby nauczyciel, który sam nie posiada wiadomości i umiejętności na odpowiednim poziomie mógł pomóc uczniom w ich zrozumieniu i opanowaniu. Co więcej, wysokie kompetencje matematyczne nauczyciela wspierają rozwój jego kompetencji dydaktycznych, a deficyty w kompetencjach matematycznych mogą ten rozwój hamować. Natomiast wysokie kompetencje dydaktyczne nie mogą zrównoważyć braków w kompetencjach matematycznych (Krauss, Brunner, Kunter, Baumert, Blum, Neubrand, Jordan, 2008, s. 722–724; Baumert, Kunter, Blum, Brunner, Voss, Jordan, Klusmann, Krauss, Neubrand, Tsai, 2010, s. 166–167).

Z kolei Davis (2011, s. 1506–1507) uważa, że na jakość nauczania matematyki największy wpływ mają predyspozycje do wykonywania zawodu i talent pedagogiczny. Jego zdaniem nauczyciele o wysokich kompetencjach dydaktycznych posiadają specjalistyczną wiedzę, nie zawsze dostępną ich świadomości (*tacit knowledge*), dzięki której umiejętnie przedstawiają treści matematyczne, stosując analogie, metafory i przykłady ukazujące praktyczne wykorzystanie matematyki. To właśnie kompetencje dydaktyczne nauczyciela mają istotny wpływ na osiągnięcia uczniów (Baumert, Kunter, Blum, Brunner, Voss, Jordan, Klusmann, Krauss, Neubrand, Tsai, 2010, s. 166).

Natomiast Shulman (1986, s. 9–11) pisze, że warunkiem skutecznego nauczania matematyki, a zwłaszcza właściwego konstruowania pojęć matematycznych w umyśle ucznia, jest zintegrowanie nauczycielskich kompetencji matematycznych i dydaktycznych.

Bazując na stanowisku Shulmana, przyjmuję, że obie wymienione kategorie kompetencji mają istotny wpływ na jakość nauczania matematyki, są ściśle ze sobą powiązane i wzajemnie się przenikają. Wiedza matematyczna stanowi bazę, na której, przy udziale odpowiedniej wiedzy dydaktycznej, a także wiedzy z psychologii czy komunikacji międzyludzkiej, „nabudowywana” jest wiedza o zupełnie nowej jakości (wiedza z dydaktyki matematyki). To „nadbudowywanie” polega na swoistym zespoleniu wiedzy matematycznej z dydaktyczną. Ta specyficzna wiedza odnosi się *stricte* do nauczania matematyki i uwzględnia specyfikę tego przedmiotu. Natomiast, moim zdaniem, pewne predyspozycje do wykonywania zawodu nauczyciela matematyki, talent pedagogiczny i wiedza ukryta, o których pisze Davis, powodują różnice w szybkości i poziomie opanowania wiedzy z dydaktyki matematyki. Analogicznie, swoiste połączenie umiejętności matematycznych i dydaktycznych generuje nowe, specyficzne umiejętności (umiejętności z dydaktyki matematyki). Kompetencje z dydaktyki matematyki są zatem połączeniem wiedzy i umiejętności z dydaktyki matematyki oraz postaw wobec uczenia się i nauczania tego przedmiotu.

Z powyższych rozważań wynika, że jeśli nauczyciel nie ma odpowiednich kompetencji matematycznych, nie może posiadać kompetencji z dydaktyki matematyki. Sama wiedza matematyczna (będąca składową kompetencji matematycznych), nawet bardzo rozległa i wysoce specjalistyczna, nie jest wystarczająca. Ważne jest bowiem nie tylko to, jak dużo dana osoba wie, ale jak korzysta z posiadanej wiedzy matematycznej i w jakim stopniu rozumie jej sens (Hill, Schilling, Ball, 2004, s. 27). Istotne jest też, czy potrafi dokonać jej elementaryzacji, stosownie do poziomu rozwojowego i intelektualnego uczniów oraz wyrazić myśl matematyczną

w języku dla nich zrozumiałym (Shulman, 1987; An, Kulm, Wu, 2004). A zatem każdy, kto zajmuje się edukacją matematyczną powinien mieć wykształcenie matematyczne, ale nie każdy matematyk może zajmować się nauczaniem matematyki. Tym bardziej, same kwalifikacje pedagogiczne, a nawet wysokie kompetencje dydaktyczne, bez odpowiedniego wykształcenia matematycznego, nie wystarczą do nauczania matematyki. Nie wystarczy też wykształcenie matematyczne i przygotowanie pedagogiczne, jeśli osoba nie będzie potrafiła w specyficzny sposób połączyć posiadanej wiedzy i umiejętności z obu dziedzin, czyli nie nabędzie kompetencji z dydaktyki matematyki na odpowiednim poziomie.

Stwierdzenia te nie tylko nie pozostają w sprzeczności z dotychczasowymi ustaleniami dotyczącymi kompetencji nauczycieli matematyki, ale wręcz w pewien sposób je syntetyzują i wzmacniają.

3. Kompetencje geometryczne studentów matematyki – przyszłych nauczycieli

Jednym z ważniejszych międzynarodowych badań kompetencyjnych przyszłych nauczycieli zajmujących się edukacją matematyczną było badanie TEDS-M 2008 (Czajkowska, Jasińska, Sitek, 2010). Wzięli w nim udział studenci matematyki specjalności nauczycielskiej, ostatnich lat studiów (3 roku studiów pierwszego stopnia i 5 roku, wtedy już wygaszanych, studiów jednolitych magisterskich). Zadania z testu *podstawowego*, opracowanego z myślą o przyszłych nauczycielach matematyki szkół podstawowych, rozwiązywało 300 studentów, a z testu *rozszerzonego* przygotowanego dla przyszłych nauczycieli niższych szkół średnich (odpowiadających polskiemu gimnazjum) – 298. Zadania były dwóch rodzajów: jedne sprawdzały kompetencje matematyczne studentów (*Mathematical Content Knowledge* – MCK), inne kompetencje z dydaktyki matematyki (*Mathematical Pedagogical Content Knowledge* – PCK). Zadania z obszaru dydaktyki matematyki zostały tak skonstruowane, aby mierzyły nie tylko znajomość matematyki, w takim zakresie, w jakim powinien znać ją każdy absolwent studiów matematycznych, ale specjalistyczną wiedzę i umiejętności nauczycielskie.

W obu testach użyto zadań dotyczących zagadnień geometrycznych. Zakres treściowy zadań geometrycznych, mierzących kompetencje matematyczne zarówno w teście *podstawowym*, jak i *rozszerzonym* obejmował: figury geometryczne, pomiar geometryczny (długości odcinków, obwody i pola powierzchni figur na płaszczyźnie, pola powierzchni i objętości brył) oraz przekształcenia geometryczne. Ponadto, każde zadanie zostało scharakteryzowane ze względu na dominujący charakter umiejętności matematycznych, koniecznych do jego rozwiązania. I tak wyróżniono: stosowanie wiedzy (*applying*), posiadanie wiedzy (*knowing*) oraz rozumowanie (*reasoning*) (Tab. 1). Liczbę zadań z geometrii w każdym z testów w podziale na wyróżniony rodzaj umiejętności zamieściłam w tabeli (Tab. 2).

Dokonano również klasyfikacji zadań mierzących kompetencje z dydaktyki matematyki, wyróżniając w tym zakresie: zadania dotyczące znajomości powiązań treści programowych (*curriculum*), planowania nauczania (*planning*), przekazywania wiedzy i odbierania jej od uczniów (*enacting*) (Tab. 3). W teście *podstawowym* znajomość powiązań treści programowych oraz umiejętności planowania nauczania

zostały połączone w jedną kompetencję. Liczbę zadań z geometrii w każdym z testów w podziale na wyróżniony rodzaj umiejętności zamieściłam w tabeli (Tab. 4).

Tab. 1. Zakres treściowy kompetencji matematycznych

Rodzaj kompetencji matematycznych	Zakres treściowy
posiadanie wiedzy	znajomość definicji, terminów matematycznych, twierdzeń, własności figur, powszechnie stosowanych symboli; rozpoznawanie figur geometrycznych; rozpoznawanie definicji (twierdzeń) równoważnych danej definicji (danemu twierdzeniu); klasyfikowanie figur zgodnie z przyjętym kryterium; posługiwanie się przyrządami pomiarowymi, stosowanie jednostek miar
stosowanie wiedzy	rozwiązywanie typowych zadań geometrycznych; korzystanie z własności figur geometrycznych; tworzenie modeli matematycznych w sytuacjach typowych
rozumowanie	rozwiązywanie nietypowych zadań geometrycznych; badanie zależności między figurami geometrycznymi; wizualizacja przekształceń geometrycznych; uogólnianie; specyfikowanie; badanie powiązań między pojęciami geometrycznymi; weryfikowanie hipotez, badanie czy podane stwierdzenie jest prawdziwe czy fałszywe; dowodzenie twierdzeń

Źródło: Opracowanie własne na podstawie Tatto, Schwille, Senk, Ingvarson, Peck, Rowley (2008), Czajkowska, Jasińska, Sitek (2010).

Tab. 2. Liczba zadań z geometrii mierzących kompetencje matematyczne studentów w teście podstawowym i rozszerzonym

	stosowanie wiedzy	posiadanie wiedzy	rozumowanie	razem
test <i>podstawowy</i>	11	3	7	21
test <i>rozszerzony</i>	9	6	8	23

Źródło: Opracowanie własne na podstawie Tatto, Schwille, Senk, Ingvarson, Peck, Rowley (2008), Czajkowska, Jasińska, Sitek (2010).

Tab. 3. Zakres treściowy kompetencji z dydaktyki matematyki

Rodzaj kompetencji z dydaktyki matematyki	Zakres treściowy
znajomość powiązań treści programowych	dostrzeganie powiązań treści w ramach jednego programu nauczania; określanie najważniejszych zagadnień w danym programie nauczania
planowanie nauczania	stawianie właściwych celów nauczania (celów operacyjnych); dobór odpowiednich metod nauczania; dobór odpowiednich wskazówek dydaktycznych; znajomość i ocenianie różnych sposobów wprowadzania pojęć matematycznych; przewidywanie typowych odpowiedzi uczniów, w tym typowych odpowiedzi błędnych; szczegółowe planowanie lekcji matematyki

przekazywanie wiedzy i odbieranie jej od uczniów	analizowanie i ocenianie uczniowskich rozwiązań zadań; śledzenie i ocenianie rozumowań prowadzonych przez uczniów; ocenianie i właściwe reagowanie na wypowiedzi uczniów, przewidywanie typowych odpowiedzi błędnych; formułowanie właściwych pytań; właściwe reagowanie na nieprzewidziane trudności uczniów; dostarczanie informacji zwrotnej uczniowi
--	--

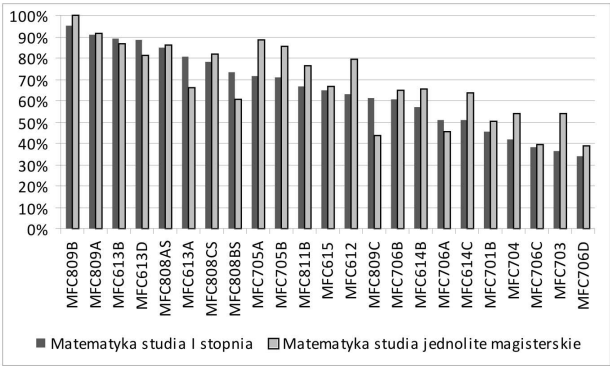
Źródło: Opracowanie własne na podstawie Tatto, Schwille, Senk, Ingvarson, Peck, Rowley (2008), Czajkowska, Jasińska, Sitek (2010).

Tab. 4. Liczba zadań z geometrii mierzących kompetencje matematyczne studentów w teście podstawowym i rozszerzonym

	znajomość po- wiązań treści programo- wych	planowanie nauczania	przekazywanie wiedzy i od- bieranie jej od uczniów	razem
test podstawowy	2		5	7
test rozszerzony	1	0	6	7

Źródło: Opracowanie własne na podstawie Tatto, Schwille, Senk, Ingvarson, Peck, Rowley (2008), Czajkowska, Jasińska, Sitek (2010).

Przyszli nauczyciele matematyki, którzy rozwiązywali test *podstawowy*, wykazali się wiedzą i umiejętnościami matematycznymi z zakresu geometrii (Ryc. 1). Tylko w przypadku dwóch zadań, poziomy ich wykonania są mniejsze od 50%.



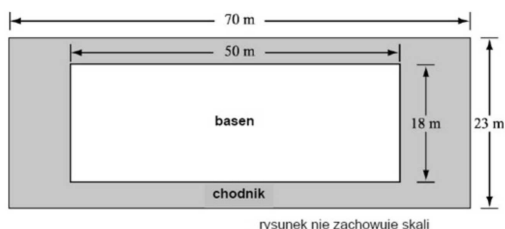
Ryc. 1. Procentowe wyniki polskich studentów w zadaniach geometrycznych mierzących wiedzę i umiejętności matematyczne w teście *podstawowym*

Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych z badania TEDS-M 2008.

Badani najlepiej poradzili sobie z zadaniami, w których należało wykazać się znajomością pojęć, twierdzeń, faktów i procedur, a także z zadaniami typowymi, wymagającymi postępowania schematycznego, algorytmicznego. Więcej trudności napotykali w zadaniach rzadziej spotykanych, wymagających łączenia różnych elementów wiedzy, czy wypracowania strategii. Przyjrzyjmy się dwóm zadaniom z testu *podstawowego*, które zamieszczam poniżej.

Zadanie 1. *Pole powierzchni chodnika wokół prostokątnego basenu (geometria, stosowanie wiedzy)*

Wokół prostokątnego basenu znajduje się wyłożony płytkami chodnik (na rysunku zacieniowany), tak jak pokazano poniżej.

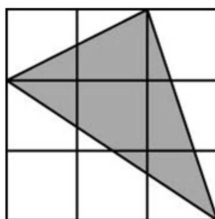


Ryc. 2.

Jaka jest powierzchnia tego chodnika? *Zaznacz jedną odpowiedź.*

- ☐ A. 100 m² ☐ B. 161 m² ☐ C. 710 m² ☐ D. 1610 m²

Zadanie 2. *Pole trójkąta (geometria, stosowanie wiedzy)*



Ryc. 3.

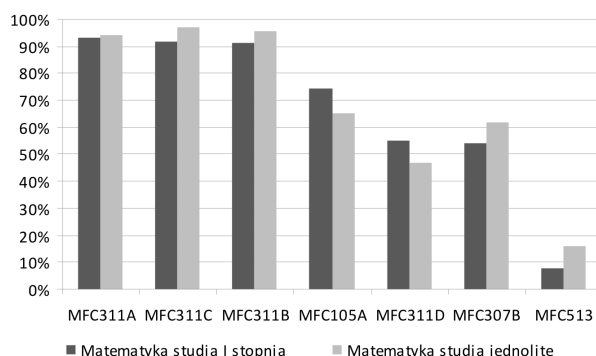
Pole każdego z małych kwadratów to 1 cm². Ile cm² ma pole zacieniowanego trójkąta? *Zaznacz jedną odpowiedź.*

- ☐ A. 3,5 cm² ☐ B. 4 cm² ☐ C. 4,5 cm² ☐ D. 5 cm²

Oba zadania wymagały umiejętności liczenia pól wielokątów. Jednak o ile zadanie 1. zostało rozwiązane poprawnie przez prawie wszystkich studentów (odsetki poprawnych odpowiedzi były równe 95,7% w przypadku studentów studiów I stopnia i 97,4% w przypadku studentów studiów jednolitych magisterskich), to już w zadaniu 2. odsetki poprawnych odpowiedzi były odpowiednio równe 70,9% i 89,8%. Pomimo, że w obu zadaniach można było zastosować podobny schemat postępowania – szukane pole figury można było wyznaczyć jako różnicę pól innych figur – zmiana sytuacji znacząco obniżyła frakcję poprawnych odpowiedzi. Możliwe jest też, że skupiano się na obliczaniu, przy użyciu odpowiednich wzorów, pól zacieniowanych figur. O ile w zadaniu 1. wystarczyło obliczyć pola prostokątów, na jakie można było podzielić chodnik, to w przypadku drugiego zadania nie dało się już tak łatwo zastosować wzoru na pole trójkąta. Najczęściej wybieraną błędną odpowiedzią była odpowiedź C (odpowiednio: 16% i 6%).

Dość dobrze poradzili sobie studenci piszący test *podstawowy* z zadaniami geometrycznymi z zakresu przekazywania wiedzy i odbierania jej od uczniów. Nato-

miast dwa zadania, w których badani uzyskali najniższe wyniki dotyczyły znajomości powiązań treści programowych i planowania nauczania (Ryc. 4).



Ryc. 4. Procentowe wyniki polskich studentów w zadaniach geometrycznych mierzących wiedzę i umiejętności z dydaktyki matematyki w teście *podstawowym*

Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych z badania TEDS-M 2008.

Zadanie, z którym poradziło sobie tylko ok. 13% wszystkich studentów piszących ten test przedstawiam poniżej.

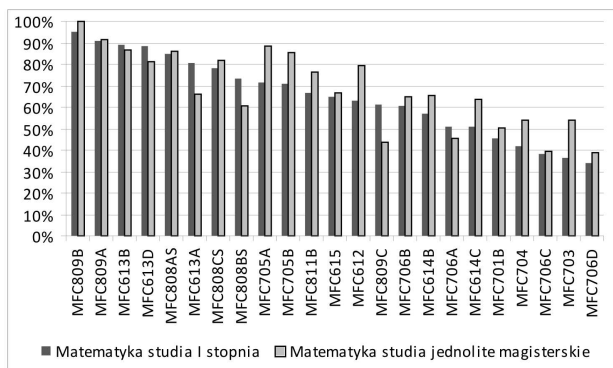
Zadanie 3. Dwa powody (*geometria, znajomość treści programowych i planowanie nauczania*)

Gdy pani Hoffman zaczyna uczyć dzieci, jak się mierzy długość, prosi je, aby zmierzili szerokość książki za pomocą spinaczy do papieru, a następnie za pomocą ołówków. Jak myślisz, dlaczego nauczycielka woli rozpoczynać właśnie w ten sposób, zamiast od razu nauczyć dzieci, jak się posługiwać linijką? Podaj DWA powody.

Odpowiedź na powyższe zadanie uznawano za poprawną, jeśli student wymienił dwa spośród trzech następujących powodów, i stwierdził, że przedstawiony sposób: ułatwia zrozumienie czym jest mierzenie (używanie różnych jednostek umożliwia zrozumienie czym jest mierzenie, wskazuje na fakt, że każdy przedmiot może być użyty do mierzenia), powoduje pojawienie się potrzeby wprowadzenia jednostki standardowej (użycie jednostek niestandardowych może stworzyć potrzebę wprowadzenia standardowej jednostki oraz dać okazję do dyskusji na temat (historycznego) rozwoju mierzenia), powoduje pojawienie się potrzeby wyboru najbardziej odpowiedniej jednostki (użycie przedmiotów różnej długości pomaga dzieciom nauczyć się podejmowania decyzji, która jednostka (przedmiot) jest najbardziej odpowiednia w konkretnej sytuacji). Rozwiązanie zawierające tylko jeden z powodów uznawano za częściowo poprawne. Do błędnych zaliczano te odpowiedzi, w których skupiono się na rozrywce, motywacji (np. *Używanie konkretnych przedmiotów jest bardziej przyjemne, motywujące, interesujące i angażujące*) lub innych, nieistotnych aspektach (np. *Po to by dzieci wiedziały jak mierzyć za pomocą spinaczy do papieru i ołówków*). Niskie wyniki, jakie uzyskali studenci w tym zadaniu mogą wynikać z braku odpowiednich kompetencji matematycznych (np. z braku rozumienia sensu mierzenia), z braku odpowiednich kompetencji dydaktycznych (np. braku rozumienia, czym jest motywacja, braku umiejętności stawiania właściwych celów

nauczania), ale także braku umiejętności swoistego połączenia posiadanej wiedzy dydaktycznej i matematycznej przy realizacji konkretnego zagadnienia z matematyki szkolnej.

Gorzej kształtują się wyniki studentów, którzy pisali test *rozszerzony* (Ryc. 5). Zarówno w przypadku studentów studiów I stopnia, jak i studentów studiów jednolitych magisterskich poziom wykonania trzynastu zadań jest niższy niż 70%.



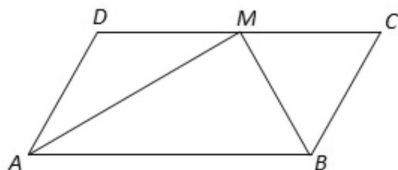
Ryc. 5. Procentowe wyniki polskich studentów w zadaniach geometrycznych mierzących wiedzę i umiejętności matematyczne w teście *rozszerzonym*

Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych z badania TEDS-M 2008.

Studenci, którzy pisali test *rozszerzony*, podobnie jak studenci, którzy wypełniali test *podstawowy*, nie napotkali trudności z rozwiązaniem zadań rutynowych, wymagających wiedzy odtwórczej. Natomiast w zadaniach mniej typowych ich wyniki są niższe. Poniżej prezentuję zadanie (zadanie 4.), z którego rozwiązaniem nie poradziła sobie około połowa polskich studentów piszących test *rozszerzony*.

Zadanie 4. *Trójkąt w równoległoboku (geometria, stosowanie wiedzy)*

$ABCD$ jest równoległobokiem, AM i BM są dwusiecznymi kątów odpowiednio $\angle BAD$ i $\angle ABC$. Wiedząc, że obwód równoległoboku $ABCD$ wynosi 6 cm, oblicz długości boków trójkąta ABM .



Ryc. 6.

Wpisz odpowiedzi poniżej.

$|AB| = \dots\dots\dots$ cm

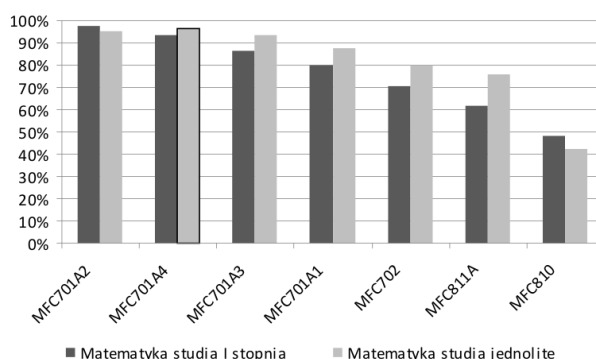
$|AM| = \dots\dots\dots$ cm

$|BM| = \dots\dots\dots$ cm

Świadczyć to może o tym, że studenci pomimo, iż znają odpowiednie fakty, to budując rozwiązanie zadania, nie potrafią odpowiednio korzystać z posiadanej wiedzy i łączyć ze sobą różnych treści. Brak odpowiednich kompetencji matematycznych pociąga za sobą brak kompetencji z dydaktyki matematyki.

Poprawnie rozwiązało to zadanie 41,7% studentów studiów pierwszego stopnia i 54,0% studentów studiów jednolitych magisterskich. Natomiast co trzeci student, zarówno studiów licencjackich, jak i magisterskich napisał wszystkie trzy odpowiedzi błędnie.

Dość dobrze badani poradzili sobie z zadaniami mierzącymi wiedzę i umiejętności z zakresu przekazywania wiedzy i odbierania jej od uczniów. Natomiast łatwość jedynego zadania sprawdzającego znajomość powiązań treści programowych jest mniejsza niż 50%, zarówno w przypadku studentów studiów pierwszego stopnia, jak i studentów studiów jednolitych magisterskich (Ryc. 7). W zadaniu tym badani mieli wśród podanych treści (twierdzeń, wzorów, reguł postępowania) wskazać te, które będą najbardziej pomocne w zrozumieniu przez uczniów pewnego twierdzenia o dwusiecznej kąta wewnętrznego w trójkącie równoramiennym.



Ryc. 7. Procentowe wyniki polskich studentów w zadaniach geometrycznych mierzących umiejętności z dydaktyki matematyki w teście *rozszerzonym*

Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych z badania TEDS-M 2008

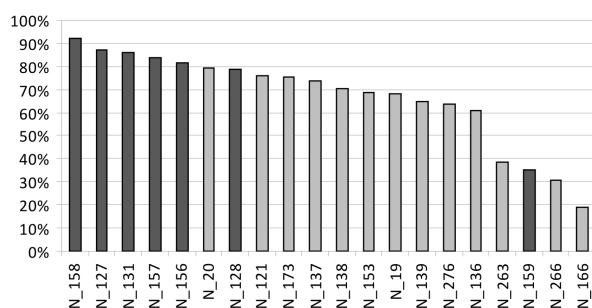
Podsumowując, badanie TEDS-M 2008 pokazało, że wielu przyszłych polskich nauczycieli matematyki nie radzi sobie ze szkolnymi zadaniami matematycznymi z zakresu geometrii. Warto zauważyć, że brak kompetencji z dydaktyki matematyki może wynikać zarówno z braku odpowiednich kompetencji matematycznych, braku kompetencji dydaktycznych lub też nieporadności i braku wprawy w swobodnym łączeniu wiedzy i umiejętności matematycznych i dydaktycznych.

Nie wiadomo, czy wejście do zawodu, pomoc ze strony innych nauczycieli zlikwiduje ewentualne luki w ich wiedzy i umiejętnościach, spowoduje, że staną się oni wysokiej klasy specjalistami, czy też będzie wręcz przeciwnie – rutyna i codzienne obowiązki szkolne sprawią, że ich wiedza z upływem lat stanie się coraz bardziej niepewna, a działania schematyczne i jednokierunkowe.

4. Kompetencje geometryczne czynnych nauczycieli matematyki

Do identyfikacji poziomu kompetencji geometrycznych czynnych nauczycieli matematyki wykorzystałam wyniki *badania potrzeb nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej i nauczycieli matematyki w zakresie rozwoju zawodowego*. Zostało ono przeprowadzone przez Instytut Badań Edukacyjnych w latach 2012–2014. Wzięło w nim udział 381 nauczycieli matematyki w klasach 4–6 i 378 nauczycieli matematyki gimnazjów. W badaniu użyto specjalnie skonstruowanych testów, za pomocą których sprawdzano poziom specjalistycznej wiedzy nauczycielskiej. Większość zadań była charakterystyczna dla etapu edukacyjnego, na którym nauczał badany nauczyciel, ale obok tych zadań umieszczono również takie, które występują na etapach niższych i wyższych (Czajkowska, Grochowalska, Orzechowska, 2015).

W teście przygotowanym z myślą o nauczycielach klas 4–6 szkół podstawowych zamieszczono 20 zadań geometrycznych, w tym 7 zadań z obszaru matematyki i 13 z dydaktyki matematyki. Ich łatwość podaję na diagramie (Ryc. 8).



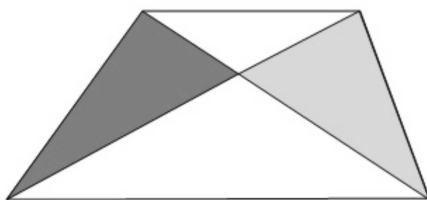
Ryc. 8. Łatwość zadań geometrycznych
(nauczyciele matematyki klas 4–6 szkół podstawowych)

Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych z badania BPN. Na czarno zaznaczono zadania z zakresu matematyki, a na szaro – z dydaktyki matematyki.

Nauczyciele matematyki klas 4–6 szkół podstawowych wykazali się dość dobrą znajomością treści geometrycznych. Łatwość tego podtestu jest równa 77,8%. Badani nie napotkali większych trudności z rozwiązywaniem typowych zadań geometrycznych. Np. na pytanie, czy *kula o promieniu 5 cm zmieści się w prostopadłościennym pudełku o wymiarach 8 cm x 10 cm x 12 cm*, poprawnej odpowiedzi udzieliło 86% nauczycieli. Ten pozytywny obraz burzy fakt, iż aż 62% nauczycieli podało, że wyrażenie *wielokąt, który ma wszystkie boki równe i wszystkie kąty równe* jednoznacznie określa kwadrat, nie zwracając uwagi, że własność ta przysługuje wszystkim wielokątom foremnym. Tym samym za poprawną uznało błędną definicję kwadratu. Świadczyć to może o ich trudnościach w definiowaniu pojęć matematycznych. Co piąty nauczyciel nie potrafił też dokończyć rysunku graniastosłupa, na którym były zaznaczone cztery z sześciu jego wierzchołków. Analiza prac tych osób pozwala wnosić, że nie mieli oni wystarczająco rozwiniętej wyobraźni przestrzennej lub nie zwracali uwagi na warunki podane w zadaniu (np. dorysowywali więcej wierzchołków).

Wyraźnie gorzej nauczyciele klas 4–6 poradzi sobie z zadaniami wymagającymi wiedzy i umiejętności z dydaktyki matematyki. Łatwość tego podtestu jest równa 59,3%. Jedno z takich zadań prezentuję poniżej.

Zadanie 5. Na rysunku przedstawiono trapez. Proszę uzasadnić, że zacieniowane na rysunku trójkąty mają równe pola.



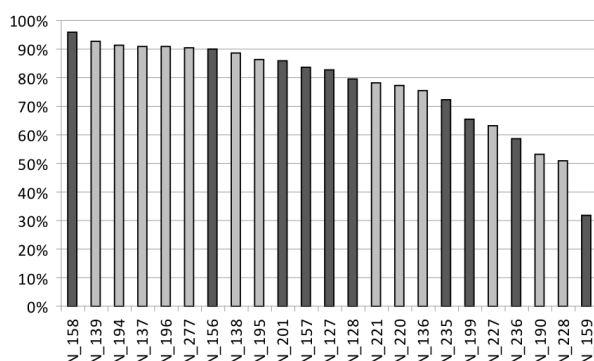
Ryc. 9.

Proszę opisać, na czym polega zasadnicza trudność zadania.

Tylko nieco ponad 19% nauczycieli prawidłowo odpowiedziało, że zasadniczą trudność zadania polega na dostrzeżeniu trójkątów o tej samej podstawie i równych wysokościach oraz trójkąta, który jest ich częścią wspólną. Około 31% stwierdziło, że w tekście zadania brakuje informacji, że przedstawiony na rysunku trapez jest równoramienny (choć trapez nie jest i nie musi być równoramienny) lub trójkąty są przystające, a 20%, że brakuje konkretnych danych liczbowych. Na podstawie odpowiedzi nauczycieli można stwierdzić, że dla znaczącej ich części samo pojęcie „zasadnicza trudność zadania” (powszechnie używane przy ocenie rozwiązań zadań otwartych na egzaminach zewnętrznych oraz przy holistycznej ocenie pracy ucznia) było obce. Niektórzy z nich utożsamiali „zasadniczą trudność zadania” z „przewidywaną trudnością dla ucznia”, choć wyrażenia te znaczeniowo nie są tożsame.

W innym zadaniu przedstawiono w różnych położeniach pary prostych równoległych. Nauczyciel miał ustalić hipotetyczne przyczyny wątpliwości ucznia związane z oceną równoległości tych par prostych, które były ułożone w orientacji innej niż pozioma czy pionowa. Około 68% badanych ustaliło, że prawdopodobną przyczyną wątpliwości ucznia, może być najczęściej prezentowana podczas lekcji matematyki orientacja pionowa lub pozioma dwóch prostych równoległych – stąd przyzwyczajenie i wątpliwości ucznia podczas prezentacji prostych równoległych ułożonych inaczej. Jednak, co trzeci nauczyciel nie potrafił odpowiedzieć na postawione pytanie, bądź jego odpowiedź była w stylu: „bo uczeń ma wadę wzroku” lub „bo uczeń nie nauczył się, co to są proste równoległe”. Oznacza to, że całkiem spora grupa nauczycieli przyczyn trudności ucznia prędzej upatruje w różnych dysfunkcjach dziecka lub jego lenistwie niż wadliwie prowadzonym procesie dydaktycznym.

Nauczyciele uczący w gimnazjach rozwiązywali 23 zadania geometryczne (10 zadań z obszaru matematyki i 13 z dydaktyki matematyki). Poziom wykonania zadań matematycznych jest równy 75%, a z dydaktyki matematyki – 79%. Poziomy łatwości poszczególnych zadań zamieściłam na diagramie (Ryc. 10).



Ryc. 10. Łatwość zadań geometrycznych (nauczyciele matematyki gimnazjów)

Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych z badania BPN. Na czarno zaznaczono zadania z zakresu matematyki, a na szaro - z dydaktyki matematyki.

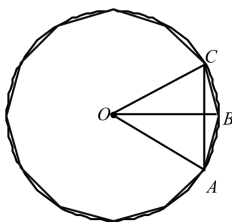
Nauczyciele dobrze poradzili sobie z rozwiązaniem połowy zadań, sprawdzających ich wiedzę matematyczną z zakresu geometrii. Napotkali jednak trudności z rozwiązaniem mniej typowych zadań. Na przykład na pytanie o graficzną ilustrację rozwiązania równania $5x = 7$ w układzie współrzędnych w przestrzeni, poprawnej odpowiedzi udzieliło ok. 58,6% osób. Prawie 15% odpowiedziało, że jest to punkt, 9% – prosta, a 10,2% – płaszczyzna. Pozostali podali jeszcze inne błędne odpowiedzi lub opuścili zadanie. Nieco lepiej poradzili sobie badani w przypadku pytania o ilustrację graficzną rozwiązania tego równania w układzie współrzędnych na płaszczyźnie. Tu odsetek poprawnych odpowiedzi jest równy 72,4%. Jednak aż 23,7% nauczycieli podało, że jest to punkt.

Nauczyciele wykazali się wiedzą i umiejętnościami z zakresu planowania pracy dydaktycznej. Nie wszyscy jednak potrafili właściwie oceniać uczniowskie, zwłaszcza nietypowe, rozwiązania zadań. Przyjrzyjmy się zadaniu poniżej.

Zadanie 6. Gimnazjalista otrzymał do rozwiązania zadanie.

Oblicz pole dwunastokąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu równym 1.

Przedstawił następujące rozwiązanie tego zadania:



Ryc. 11.

Trójkąt OAC jest równoboczny, więc $AC = 1$ i odcinki OB i AC są prostopadłe.

$P = 6 \cdot 0,5 \cdot 1 \cdot 1 = 3$.

Proszę ocenić rozwiązanie zadania przedstawione przez ucznia. Proszę wyjaśnić, na czym polegał pomysł rozwiązania zadania podany przez ucznia.

Tylko 63,1% badanych stwierdziło, że rozwiązanie podane przez ucznia jest poprawne, a prawie 50,8% potrafiło wyjaśnić ideę tego rozwiązania. Z tej grupy 41,1% nauczycieli stwierdziło, że uczeń podzielił dwunastokąt foremny na 6 deltoidów i skorzystał ze wzoru na pole deltoidu. Ok. 1,6% uznało, że uczeń najpierw podzielił dwunastokąt foremny na 6 deltoidów, a potem każdy z nich na dwa trójkąty równoramienne i skorzystał ze wzoru na pole trójkąta. Nieco ponad 8% badanych stwierdziło, że pomysł ucznia polegał na podziale dwunastokąta na 12 przystających trójkątów, o podstawie równej 1 i wysokości 0,5. Niepokojące jest jednak to, że prawie co trzeci nauczyciel uznał rozwiązanie przedstawione przez ucznia za błędne.

5. Podsumowanie

Prezentowane wyniki wskazują na konieczność zmiany systemu kształcenia i doskonalenia nauczycieli. Znacząca grupa zarówno studentów jak i nauczycieli, pomimo że posiada wiedzę i umiejętności matematyczne nie ma wystarczającej wiedzy i umiejętności z dydaktyki matematyki.

Chociaż ogólne wyniki studentów były wysokie, to jednak mają oni pewne braki w zakresie łączenia różnych treści i dostrzegania między nimi powiązań. Co więcej, jak pokazują badania nauczycieli (Grzęda, 2009; Czajkowska, Grochowalska, Orzechowska, 2015) ich wiedza teoretyczna nie ma przełożenia na praktykę. Nauczyciele nie czują się dobrze przygotowani do wykonywania zawodu, nie widzą związków pomiędzy tą wiedzą i umiejętnościami, które zdobyli na studiach, a tymi, które są im konieczne i potrzebne w codziennej pracy. Nie zawsze wiedzą jakich zadań należy użyć, aby rozwijać określone, w tym geometryczne, umiejętności uczniów. Wskazana wydaje się zatem taka organizacja zajęć na studiach matematycznych, by studenci specjalizacji nauczycielskiej mogli spojrzeć na matematykę szkolną z punktu widzenia matematyki wyższej, aby widzieli powiązania pomiędzy tym, czego się uczą na studiach, a tym czego sami będą nauczać. Należy im możliwie często stwarzać okazję do przekładu treści wyrażonych w języku matematyki wyższej na język zrozumiały dla ucznia lub dla osoby, która nie zajmuje się zawodowo matematyką. A zatem, jak słusznie uważają Turnau (2003) i Żeromska (2012), konieczne jest wprowadzenie zmian w kształceniu przyszłych nauczycieli na studiach matematycznych. Powinno być ono ukierunkowane inaczej i zorientowane na inne cele niż kształcenie osób, które nie będą zawodowo zajmowały się nauczaniem. Nie wystarczy tutaj tylko zamieszczenie w planach studiów przedmiotów pedagogicznych i dydaktycznych – to ukierunkowanie powinno być widoczne w treściach i metodach nauczania stosowanych na wszystkich zajęciach, również w „czystej matematyki”.

Natomiast wielu czynnych nauczycieli matematyki, nawet jeśli ma kompetencje matematyczne i dydaktyczne na odpowiednim poziomie, to nie potrafi ich zintegrować. Tym samym nauczyciele ci nie posiadają odpowiednich kompetencji z dydaktyki matematyki. Jak wynika z badań, nie zawsze oni wiedzą jak organizować proces nauczania, aby rozwijać określone umiejętności uczniów. Często potrzebują wsparcia w zakresie metodyki nauczania tego przedmiotu. Jednak nie mogą to być zajęcia w formie wykładów, tylko warsztatów. Rozwiązywanie problemów

i dyskusja nad nimi ma większe znaczenie niż słuchanie i bierna obserwacja.

W szczególności, zarówno studenci, jak i czynni nauczyciele matematyki, napotkali trudności z doбором zadań, za pomocą których można kształtować wyobraźnię przestrzenną uczniów, a jej brak może być jednym z głównych powodów niepowodzeń w nauce geometrii. Wydaje się zatem istotne, aby inaczej organizować zajęcia z geometrii na studiach matematycznych, ponieważ dotychczasowe sposoby nauczania są mało skuteczne. Pewną propozycję kursu przedstawił Turnau (2003). Ponadto studenci na zajęciach uniwersyteckich oraz nauczyciele na kursach doskonalących powinni pracować nad takimi zadaniami, które z jednej strony będą rozwijać ich umiejętności geometryczne, z drugiej będą mogły być przez nich wykorzystane w pracy z uczniami.

Innym, zdiagnozowanym problemem jest to, że nauczyciele swoiście „specjalizują się” w nauczaniu na konkretnym etapie edukacyjnym. Na przykład niektórzy uczestniczący w badaniu nauczyciele matematyki uczący w szkole podstawowej napotkali duże trudności w zadaniu, w którym mieli wskazać, czy rozwiązując podane problemy matematyczne należy skorzystać z twierdzenia Pitagorasa, czy z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa. Problem ten jest istotny zwłaszcza teraz, w dobie zmian systemowych. Znacząca grupa nauczycieli, uczących obecnie w szkołach podstawowych nie jest przygotowana do nauczania matematyki uczniów 13–16 letnich; podobnie niektórzy nauczyciele uczący w gimnazjach nie posiadają odpowiednich umiejętności z dydaktyki matematyki, aby nauczać tego przedmiotu w klasach 4–6 szkoły podstawowej.

Literatura

- An, S., Kulm, G., Wu, Z.: 2004, The pedagogical content knowledge of middle school, mathematics teachers in China and the U. S., *Journal of Mathematics Teacher Education* **7**, 145–172.
- Ball, D. L., Thames, M. H., Phelps, G.: 2008, Content knowledge for teaching, *Journal of Teacher Education* **59**(5), 389–407.
- Banach, C.: 2004, Nauczyciel, w: T. Pilch (red.), *Encyklopedia pedagogiczna XXI wieku, t. III*, Wydawnictwo Akademickie „Żak”, Warszawa, 548–553.
- Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., Klusmann, U., Krauss, S., Neubrand, M., Tsai, Y.: 2010, Teachers’ mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom and student progress, *American Educational Research Journal* **47**(1), 133–180.
- CKE: 2015, Wyniki krajowe egzaminu gimnazjalnego w 2015 roku, https://www.cke.edu.pl/images/_EGZAMIN_GIMNAZJALNY/Informacje_o_wynikach/Sprawozdanie_z_egzaminu_gimnazjalnego_2015.pdf.
- CKE: 2016, Wyniki krajowe egzaminu gimnazjalnego w 2016 roku, https://www.cke.edu.pl/images/_EGZAMIN_GIMNAZJALNY/Informacje_o_wynikach/2016/Sprawozdanie%20z%20egzaminu%20gimnazjalnego_2016.pdf.
- Czajkowska, M.: 2013, Pomiar kompetencji nauczycieli matematyki, *Edukacja* **1**, 73–88.
- Czajkowska, M., Grochowalska, M., Orzechowska, M.: 2015, *Potrzeby nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej i nauczycieli matematyki w zakresie rozwoju zawodowego*, IBE, Warszawa.

- <http://eduentuzjasci.pl/images/stories/publikacje/IBE-raport-potrzeby-nauczycieli-edukacji-wczesnoszkolnej-i-matematyki.pdf>.
- Czajkowska, M., Jasińska, A., Sitek, M.: 2010, *Kształcenie nauczycieli w Polsce. Wyniki międzynarodowego badania TEDS-M 2008*, Warszawa.
- Davis, B.: 2011, *Mathematics teachers' subtle, complex disciplinary knowledge*, Educationforum.
- <http://search.sciencemag.org/?q=Mathematics%20teachers%E2%80%99%20subtle%2C%20complex%20>.
- de Lange Jzn, J.: 1986, Geometria dla wszystkich, czy w ogóle nie geometria?, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **6**, 43–82.
- Duval, R.: 1998, Geometry from a cognitive point of view, in: C. Mammana, V. Villani (ed.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, 37–52.
- Dylak, S.: 1995, *Wizualizacja w kształceniu nauczycieli*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań.
- Fennema, E., Franke, M.: 1992, Teachers' knowledge and its impact, in: D. A. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Macmillan Publishing, New York, 147–164.
- Fischbein, E.: 1987, *Intuition in Science and Mathematics: an educational approach*, Reidel, Dordrecht.
- Fujita, T., Jones, K., Yamamoto, S.: 2004, Geometrical Intuition and the Learning and Teaching of Geometry, *10th International Congress on Mathematical Education (ICME10), Topic Study Group 10 (TSG10) on Research and Development in the Teaching and Learning of Geometry*, Copenhagen, Denmark.
- http://eprints.soton.ac.uk/14687/1/Fujita_Jones_Yamamoto_ICME10_TSG10_2004.pdf.
- Grzęda, M.: 2009, *Nauczyciele matematyki w Polsce - raport z badania TEDS-M*, Instytut Filozofii i Socjologii PAN, Warszawa.
- http://www.ifispan.waw.pl/pliki/raport_z_badiana_nauczycieli.pdf.
- Hill, H. C., Schilling, S. G., Ball, D. L.: 2004, Developing measures of teachers' mathematics knowledge for teaching, *The Elementary School Journal* **105**(1), 11–30.
- Jones, K.: 1998, Deductive and Intuitive Approaches to Solving Geometrical Problems, in: C. Mammana, V. Villani (ed.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21 st Century*, Kluwer Academic Publisher Dordrecht, 78–83.
- Krauss, S., Brunner, M., Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M., Jordan, A.: 2008, Pedagogical content knowledge and content knowledge of secondary mathematics teachers, *Journal of Educational Psychology* **100**(3), 716–725.
- Niss, M.: 2003, Quantitative Literacy and Mathematical Competencies, w: B. L. Madison, L. A. Steen (red.), *Quantitative Literacy: Why Numeracy Matters for Schools and Colleges*, Proceedings of the National Forum on Quantitative Literacy, 215–220.
- https://www.maa.org/external_archive/QL/pgs215_220.pdf.
- Panek, D., Pardała, A.: 1999, Diagnozowanie wyobraźni przestrzennej uczniów i studentów, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **21**, 65–83.

- Shulman, L. S.: 1986, Those who understand: Knowledge growth in teaching, *Educational Researcher* **15**(2), 4–14.
- Shulman, L. S.: 1987, Knowledge and Teaching: Foundations for the new reform, *Harvard Educational Review* **57**(1), 1–22.
- Strykowski, W.: 2000, Kompetencje współczesnego nauczyciela, *Neodidagmata* **27**(28), 15–28.
- Szempruch, J.: 2000, *Pedagogiczne kształcenie nauczycieli wobec reformy edukacji w Polsce*, WSP, Rzeszów.
- Taraszkiewicz-Kotońska, M.: 2001, *Jak uczyć jeszcze lepiej! Szkoła pełna ludzi*, Wydawnictwo ARKA, Poznań.
- Tatto, M. T., Schwille, J., Senk, S., Ingvarson, L., Peck, R., Rowley, G.: 2008, Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M), Policy, practice, and readiness to teach primary and secondary mathematics. Conceptual framework, East Lansing, MI: Teacher Education and Development International Study Center, College of Education, Michigan State University.
https://teds.educ.msu.edu/20080206_TEDS-M_conceptual_framework.pdf.
- Turnau, S.: 2003, Kształcenie nauczycieli matematyki – u nas i gdzie indziej, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **25**, 231–240.
- Żeromska, A. K.: 2012, Kształcenie przyszłych nauczycieli matematyki – wyzwanie edukacyjne, *Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **IV**, 175–188.

Akademia Pedagogiki Specjalnej
im. Marii Grzegorzewskiej
ul. Szczęśliwicka 40
PL-02-353 Warszawa
e-mail: czajkowskamonika@gmail.com