

Edyta Fidyk, Stanisław Siudut

Propozycja wyzwania twórczości matematycznej studentów przy pomocy pewnej nierówności funkcyjnej*

Abstract. T. Szostok and Sz. Wąsowicz in (Szostok, Wąsowicz, 2011) studied the following functional inequality: $|F(y) - F(x) - (y - x)f\left(\frac{x+y}{2}\right)| \leq \varepsilon$ stemming from the Lagrange mean value theorem. They proved that the function f is affine, provided $f, F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfy the above inequality for all $x, y \in \mathbb{R}$. The aim of our paper is to extend the results of (Szostok, Wąsowicz, 2011) to more general situations (for example, we change $\mathbb{R}$ to $\mathbb{C}$ or $\mathbb{H}$).

Tomasz Szostok i Szymon Wąsowicz w pracy (Szostok, Wąsowicz, 2011) rozważali następującą nierówność funkcyjną, wywodzącą się z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej

$$|F(y) - F(x) - (y - x)f\left(\frac{x + y}{2}\right)| \leq \varepsilon \quad (1)$$

dla funkcji $f, F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i udowodnili następujące twierdzenie (Szostok, Wąsowicz, 2011, Th. 3.2):

Jeżeli funkcje $f, F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniają (1) dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$, gdzie ε jest pewną liczbą dodatnią, to istnieją stałe $c, b \in \mathbb{R}$ takie, że $f(x) = cx + b$ ($x \in \mathbb{R}$).

Następujący lemat jest kluczowy w dowodzie powyższego twierdzenia Lemma 2.1 (zob. Szostok, Wąsowicz, 2011):

Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, $M > 0$. Jeżeli nierówność $|\Delta_h^2 f(x)| \leq \varepsilon$ jest spełniona dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$, $h > M$ to $|\Delta_h^2 f(x)| \leq 2\varepsilon$ dla wszystkich $x, h \in \mathbb{R}$.

Te i inne wyniki z artykułu (Szostok, Wąsowicz, 2011) nadają się bardzo dobrze do stymulowania twórczości matematycznej studentów. Postawiłem Pani Edycie Fidyk następujące zadanie: uzupełnić i uogólnić wyniki z pracy (Szostok, Wąsowicz, 2011) na przypadek funkcji zespolonych. Realizując to zadanie E. Fidyk

*Proposition of triggering of mathematical creativity of students by a functional inequality 2010 Mathematics Subject Classification: Primary: 39B82; Secondary: 39B62

Key words and phrases: nierówność funkcyjna, równanie funkcyjne, $\mathbb{H}$, algebra unormowana

w swojej pracy magisterskiej (2014) zauważyła najpierw, że w przypadku rzeczywistym, jeśli $h < 0$, to $|\Delta_h^2 f(x)| = |\Delta_{|h|}^2 f(x - 2|h|)|$. Dlatego założenie $h > M$ w powyższym lemacie można zastąpić założeniem $|h| > M$, tak zmieniony lemat jest równoważny lematowi wypisanemu powyżej.

Ta obserwacja pozwala na uogólnienie lematu 2.1 i twierdzenia 3.2 zawartych w artykule Szostok, Wąsowicz (2011) na funkcje określone w $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$ i przyjmujące wartości w $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$. Na przykład, jeżeli $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, to lematowi można nadać postać:

Niech $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$, $M > 0$. Jeżeli nierówność $|\Delta_h^2 f(x)| \leq \varepsilon$ jest spełniona dla wszystkich $x \in \mathbb{C}$ i h takich, że $|h| > M$ to $|\Delta_h^2 f(x)| \leq 2\varepsilon$ dla wszystkich $x, h \in \mathbb{C}$.

Lemat ten udowodniła Fidyk (2014) (dowód wykorzystuje własności modułu i jest zbliżony do dowodu lematu 2.1 z artykułu Szostok, Wąsowicz (2011)) i korzystając z niego wykazano następujące:

Twierdzenie 1 (Fidyk, 2014, tw. 3.2')

Jeżeli funkcje $f, F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ spełniają nierówność (1) dla wszystkich $x, y \in \mathbb{C}$, gdzie ε jest pewną liczbą dodatnią, to istnieją stałe $c, b \in \mathbb{C}$ dla których $f(x) = cx + b$ ($x \in \mathbb{C}$).

W swojej pracy magisterskiej E. Fidyk wykazała dwa inne twierdzenia tego typu (2014, tw. 3.2" i tw. 3.2"'), które można wypowiedzieć następująco:

Twierdzenie 2

Jeżeli funkcje $f, F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniają nierówność (1) dla wszystkich $x, y \in \mathbb{C}$, gdzie ε jest pewną liczbą dodatnią, to f jest funkcją stałą.

Twierdzenie 3

Jeżeli funkcje $f, F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ spełniają nierówność (1) dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$, gdzie ε jest pewną liczbą dodatnią, to istnieją stałe $c, b \in \mathbb{C}$ dla których $f(x) = cx + b$ ($x \in \mathbb{R}$).

Korzystając z tak uogólnionych wyników E. Fidyk wyciągnęła wnioski dla równania funkcyjnego $F(y) - F(x) = (y - x)f\left(\frac{x+y}{2}\right)$. Przypomnijmy, że J. Aczèl (1985) wykazał, że jeżeli $\mathbb{K}$ jest ciałem o charakterystyce różnej od 2, to ogólnymi rozwiązaniami równania $\frac{f(x)-g(y)}{x-y} = h(x+y)$ ($x \neq y$, $f, g, h : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$) są funkcje $f(x) = g(x) = ax^2 + bx + c$, $h(x) = ax + b$, gdzie a, b, c są dowolnymi stałymi z ciała $\mathbb{K}$. Stąd wynika, że wszystkie rozwiązania $f, F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ równania:

$$F(y) - F(x) = (y - x)f\left(\frac{x+y}{2}\right) \quad (2)$$

są postaci: $F(t) = at^2 + bt + c$, $f(t) = 2at + b$, gdzie a, b, c są stałymi rzeczywistymi.

E. Fidyk osiągnęła ten wynik inną metodą niż J. Aczèl - zauważyła, że twierdzenia 1, 2, 3 pozwalają w pełni opisać rozwiązania równania (2) dla funkcji określonych na $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$ z wartościami w $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$. Dla przykładu, rozważmy równanie (2) dla funkcji zespolonych F, f określonych na $\mathbb{C}$.

Jeśli funkcje $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ spełniają to równanie, to oczywiście $|F(y) - F(x) - (y-x)f\left(\frac{x+y}{2}\right)| \leq \varepsilon$ dla każdego $\varepsilon > 0$. Stąd i z twierdzenia 1 $f(x) = cx + b$, dlatego (2) przyjmuje postać:

$$F(y) - F(x) = (y-x) \left(c \cdot \frac{x+y}{2} + b \right)$$

Po podstawieniu $x = 0$ otrzymujemy $F(y) = \frac{1}{2}cy^2 + by + F(0)$ i dla $\alpha = \frac{1}{2}c$, $\beta = b$, $\gamma = F(0)$ mamy $F(y) = \alpha y^2 + \beta y + \gamma$, $f(y) = 2\alpha y + \beta$.

Rozumując, podobnie z wykorzystaniem twierdzenia 2 dochodzimy do wniosku, że funkcje $f, F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające (2) muszą być stałe.

Zaprezentowane wyżej wyniki Fidyk zachęciły do dalszego badania nierówności (1) i pewnych uogólnień tej nierówności. Najpierw zaobserwowałem, że kluczowy lemat jest prawdziwy dla funkcji $F, f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, gdzie $\mathbb{H}$ oznacza algebrę kwaternionów, a mianowicie:

Niech $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, $\varepsilon > 0$, $M > 0$. Jeżeli nierówność $|\Delta_h^2 f(x)| \leq \varepsilon$ jest spełniona dla wszystkich $x \in \mathbb{H}$ i h takich, że $|h| > M$ to $|\Delta_h^2 f(x)| \leq 2\varepsilon$ dla wszystkich $x, h \in \mathbb{H}$.

Podobnie jak w pracy Szostoka i Wąsowicza oraz w pracy magisterskiej Fidyk (2014) można udowodnić następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE 4

Jeżeli funkcje $f, F : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ spełniają nierówność (1) dla wszystkich $x, y \in \mathbb{H}$, gdzie ε jest pewną liczbą dodatnią, to istnieją stałe $c, b \in \mathbb{H}$ dla których $f(x) = xc + b$ ($x \in \mathbb{H}$).

Dowód. Istotnie, dochodząc w dowodzie do równości $y \cdot a(x) = x \cdot a(y)$ ($x, y \in \mathbb{H}$), gdzie $a : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ jest funkcją addytywną i podstawiając $y = 1$ mamy $a(x) = x \cdot c$, gdzie $c = a(1)$. Ponieważ $f(x) = a(x) + b$, to musi być $f(x) = x \cdot c + b$.

Podobne twierdzenia można otrzymać gdy: $f, F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$, $f, F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H}$, $f, F : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$, $f, F : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$. Teraz wykażę, że twierdzenie 4 można wzmocnić następująco.

TWIERDZENIE 5

Założmy, że $\varepsilon > 0$, $f, F : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ i spełniona jest następująca nierówność

$$|F(y) - F(x) - (y-x)f\left(\frac{x+y}{2}\right)| \leq \varepsilon \quad (x, y \in \mathbb{H}) \quad (3)$$

Wówczas istnieje $b \in \mathbb{H}$ takie, że $f(x) = b$.

Z twierdzenia 4 $f(u) = u \cdot c + b$. Po podstawieniu nx w miejsce x , ny w miejsce y w (3) otrzymujemy:

$$\left| F(ny) - F(nx) - (ny - nx) \left(\frac{nx + ny}{2} \cdot c + b \right) \right| \leq \varepsilon,$$

$$\left| \frac{F(ny) - F(nx)}{n^2} - \frac{1}{2} (y-x)(x+y) \cdot c + \frac{(y-x) \cdot b}{n} \right| \leq \frac{\varepsilon}{n^2}.$$

Stąd $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{F(ny)}{n^2} - \frac{F(nx)}{n^2}) = \frac{1}{2} (y - x) (y + x) \cdot c$. Gdy $x = 0$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(ny)}{n^2} = \frac{1}{2} y^2 c$, podobnie gdy $y = 0$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(nx)}{n^2} = \frac{1}{2} x^2 c$.

Mamy więc:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{F(ny)}{n^2} - \frac{F(nx)}{n^2}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(ny)}{n^2} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(nx)}{n^2} = \frac{1}{2} y^2 c - \frac{1}{2} x^2 c,$$

a wiemy już, że $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{F(ny)}{n^2} - \frac{F(nx)}{n^2}) = \frac{1}{2} (y - x) (y + x) \cdot c$ i dlatego $\frac{1}{2} (y - x) (y + x) \cdot c = \frac{1}{2} y^2 c - \frac{1}{2} x^2 c$, a stąd

$$y^2 c + yx \cdot c - xy \cdot c - x^2 c = y^2 c - x^2 c,$$

$$yx \cdot c - xy \cdot c = 0,$$

$$yx \cdot c = xy \cdot c.$$

Gdyby było $c \neq 0$, to byłyby $yx = xy$ dla każdych $x, y \in \mathbb{H}$, co jest sprzeczne z nieprzemiennością mnożenia w $\mathbb{H}$.

Uwaga 1. Funkcja G określona wzorem $G(x) = x \cdot b$ spełnia równanie $G(y) - G(x) - (y - x) f(\frac{x+y}{2}) = 0$, oraz $|F(x) - F(0) - x \cdot b| \leq \varepsilon$ dla każdego $x \in \mathbb{H}$.

Wniosek 1. Jeżeli $f, F : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ spełniają równanie

$$F(y) - F(x) = (y - x) f\left(\frac{x + y}{2}\right) \quad (x, y \in \mathbb{H}) \quad (4)$$

to istnieje stała $b \in \mathbb{H}$ taka, że $f(x) = b$, a ponadto $F(x) = xb + c$ dla pewnego $c \in \mathbb{H}$.

Uwaga 2. Funkcje $f, F : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ postaci $F(x) = xb + c$, $f(x) = b$ dla pewnych $b, c \in \mathbb{H}$, spełniają równanie

$$F(y) - F(x) = (y - x) f\left(\frac{x + y}{2}\right) \quad (x, y \in \mathbb{H}).$$

Ważnym środkiem dowodowym wymienionym przez Szostok i Wąsowicz (2011) (powtórzonym później w innej sytuacji przez Fidyk (2014)) była możliwość wyeliminowania - po pewnych przekształceniach - funkcji F z nierówności (1), co pozwoliło wykorzystać kluczowy lemat w nowo otrzymanej nierówności. Warto zauważyć, że metodę eliminacji funkcji F użytą przez Szostoka i Wąsowicza (2011) można zastosować w wielu innych sytuacjach (zob. np. Tomasz Szostok, Functional equations stemming from numerical analysis, Dissertationes Math. 508 (2015)). Pokażę dalej, że można wyeliminować funkcje F, G w przypadku spexideryzowanej wersji nierówności (1).

LEMAT 1

Jeżeli $f, F, G : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$, gdzie $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$, $\varepsilon > 0$ oraz

$$|F(y) - G(x) - (y - x) f\left(\frac{x + y}{2}\right)| \leq \varepsilon \quad (x, y \in \mathbb{K}) \quad (5)$$

to $|h\Delta_h^2 f(x)| \leq 2\varepsilon$ dla każdego $h \in \mathbb{K}$.

Dowód. Podstawiając w (5) $y = x + h$ otrzymujemy:

$$\left| F(x+h) - G(x) - h \cdot f\left(x + \frac{1}{2}h\right) \right| \leq \varepsilon, \quad (6)$$

teraz podstawiając w powyższej nierówności $x + h$ zamiast x otrzymujemy:

$$\left| F(x+2h) - G(x+h) - h \cdot f\left(x + \frac{3}{2}h\right) \right| \leq \varepsilon, \quad (7)$$

z (6) i (7):

$$\begin{aligned} & |F(x+2h) - G(x+h) + F(x+h) - G(x) - \\ & h \left[f\left(x + \frac{3}{2}h\right) + f\left(x + \frac{1}{2}h\right) \right]| \leq 2\varepsilon. \end{aligned} \quad (8)$$

Podstawiając w (5) $y = x + 2h$ otrzymujemy:

$$|F(x+2h) - G(x) - 2h \cdot f(x+h)| \leq \varepsilon, \quad (9)$$

z (8) i (9) (mnożąc (9) pod modułem przez -1 i z nierówności trójkąta) otrzymujemy:

$$\left| -G(x+h) + F(x+h) + h[2f(x+h) - f\left(x + \frac{3}{2}h\right) - f\left(x + \frac{1}{2}h\right)] \right| \leq 3\varepsilon, \quad (10)$$

ale z (5), po podstawieniu $x + h$ zamiast y , $x + h$ zamiast x mamy:

$$|F(x+h) - G(x+h)| \leq \varepsilon. \quad (11)$$

Z (10), (11) (mnożąc (11) pod modułem przez -1 i z nierówności trójkąta) otrzymujemy:

$$\left| h[2f(x+h) - f\left(x + \frac{3}{2}h\right) - f\left(x + \frac{1}{2}h\right)] \right| \leq 4\varepsilon, \quad (12)$$

po podstawieniu $2h$ zamiast h otrzymujemy:

$$|2h[2f(x+2h) - f(x+3h) - f(x+h)]| \leq 4\varepsilon. \quad (13)$$

Stąd dzieląc przez 2 i podstawiając x w miejsce $x + h$ otrzymujemy:

$$|h[2f(x+h) - f(x+2h) - f(x)]| \leq 2\varepsilon, \quad (14)$$

mnożąc (14) pod modułem przez -1 otrzymujemy:

$$|h[f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)]| \leq 2\varepsilon,$$

zatem: $|h\Delta_h^2 f(x)| \leq 2\varepsilon$.

Wniosek 2. Jeżeli $\varepsilon > 0$, $f, F, G : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$, gdzie $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ spełniają nierówność

$$|F(y) - G(x) - (y-x)f\left(\frac{x+y}{2}\right)| \leq \varepsilon \quad (x, y \in \mathbb{K}) \quad (5)$$

to istnieją $c, b \in \mathbb{K}$ takie, że $f(x) = x \cdot c + b$, $x \in \mathbb{K}$. Ponadto w przypadku $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ musi być $c = 0$.

W dowodzie tego wniosku wykorzystamy wniosek 2.2' (Fidyk, 2014):

„Wniosek 2.2'. Jeśli dla pewnego $\varepsilon > 0$ $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ spełnia nierówność $|h\Delta_h^2 f(x)| \leq \varepsilon$ dla wszystkich $x, h \in \mathbb{C}$, to istnieją funkcja addytywna $a : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ i stała $b \in \mathbb{C}$ takie, że $f(x) = a(x) + b$ ($x \in \mathbb{C}$)”.

Dowód wniosku 2. Z poprzedniego lematu $|h\Delta_h^2 f(x)| \leq 2\varepsilon$ dla każdego $h, x \in \mathbb{K}$. Z wniosku 2,2' (Fidyk, 2014) (który pozostaje prawdziwy również w sytuacji $\mathbb{K} = \mathbb{H}$), istnieje funkcja addytywna $a : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ oraz $b \in \mathbb{K}$ takie, że

$$f(x) = a(x) + b, \quad x \in \mathbb{K}. \quad (15)$$

Z (5) podstawiając $y = 0$ mamy:

$$\left| F(0) - G(x) + xf\left(\frac{x}{2}\right) \right| \leq \varepsilon. \quad (16)$$

Z (5) podstawiając $x = 0$ mamy:

$$\left| F(y) - G(0) - yf\left(\frac{y}{2}\right) \right| \leq \varepsilon. \quad (17)$$

Z (5), (16), (17) otrzymujemy

$$\left| F(0) - G(0) + xf\left(\frac{x}{2}\right) - yf\left(\frac{y}{2}\right) + (y-x)f\left(\frac{x+y}{2}\right) \right| \leq 3\varepsilon,$$

stąd i z postaci f (patrz (15)):

$$\begin{aligned} & \left| F(0) - G(0) + xa\left(\frac{x}{2}\right) + xb - ya\left(\frac{y}{2}\right) - yb + (y-x)\left(a\left(\frac{x+y}{2}\right) + b\right) \right| \leq 3\varepsilon, \\ & \left| F(0) - G(0) + \frac{1}{2}x \cdot a(x) - \frac{1}{2}y \cdot a(y) + \frac{1}{2}y \cdot a(x) + \frac{1}{2}y \cdot a(y) - \frac{1}{2}x \cdot a(x) - \frac{1}{2}x \cdot a(y) \right| \\ & \leq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Zatem:

$$\left| F(0) - G(0) + \frac{1}{2}y \cdot a(x) - \frac{1}{2}x \cdot a(y) \right| \leq 3\varepsilon. \quad (18)$$

Podstawiając w (18) nx w miejsce x , ny w miejsce y otrzymujemy:

$$\left| F(0) - G(0) + \frac{1}{2}n^2y \cdot a(x) - \frac{1}{2}n^2x \cdot a(y) \right| \leq 3\varepsilon,$$

a stąd:

$$\left| 2\frac{F(0) - G(0)}{n^2} + y \cdot a(x) - x \cdot a(y) \right| \leq \frac{6\varepsilon}{n^2}.$$

Po przejściu do granicy przy $n \rightarrow \infty$:

$$y \cdot a(x) = x \cdot a(y). \quad (19)$$

Zatem dla $y = 1$ otrzymujemy: $a(x) = x \cdot c$, gdzie $c = a(1)$. Pozostaje wykazać, że dla $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ musi być $c = 0$. Gdyby było $c \neq 0$, to z (19) byłoby: $y \cdot x \cdot c = x \cdot y \cdot c$ ($x, y \in \mathbb{H}$), czyli $y \cdot x = x \cdot y$ dla każdych $x, y \in \mathbb{H}$ – sprzeczność. Z (15) mamy $f(x) = a(x) + b = x \cdot c + b$ dla pewnych $c, b \in \mathbb{K}$. Zatem $f(x) = x \cdot c + b$ ($x \in \mathbb{K}$) dla pewnych $c, b \in \mathbb{K}$. Przy czym dla $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ musi być $c = 0$.

Wniosek 3. Przy założeniach poprzedniego wniosku, jeżeli funkcje f, F, G spełniają nierówność (5), to:

$f(x) = x \cdot c + b$ dla pewnych $c, b \in \mathbb{K}$, z tym, że dla $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ musi być $c = 0$,

$$|F(x) - G(0) - \frac{1}{2}x^2c - xb| \leq \varepsilon \quad (x \in \mathbb{K}),$$

$$|G(x) - F(0) - \frac{1}{2}x^2c - xb| \leq \varepsilon \quad (x \in \mathbb{K}).$$

Z powyższych nierówności $|F(0) - G(0)| \leq \varepsilon$ oraz $|F(x) - G(x) + (F(0) - G(0))| \leq 2\varepsilon$.

Niech $\mathbf{F}$ będzie ciałem o charakterystyce różnej od 2 lub algebrą unormowaną z jedyneką. Jung i Sahoo (2000) zajmowali się stabilnością równania funkcyjnego

$$f(x) - g(y) = (x - y) \cdot h(x + y),$$

gdzie $f, g, h : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}$. W dowodzie twierdzenia 2 jest usterka – autorzy skorzystali z przemienności mnożenia w $\mathbf{F}$, a algebra unormowana nie musi być przemienna (zob. Jung, Sahoo, 2000, s. 795, $w_{15} - w_6$) – usterka jest jednak łatwa do skorygowania, wystarczy pisać w iloczynach współczynniki na drugim miejscu (np. xa, x^2a, xb zamiast ax, ax^2, bx).

Wniosek 3 wynikający z pracy Junga i Sahoo (2000) jest zatem – w takiej postaci w jakiej wspomniani autorzy go wpisali – słuszny dla przemiennych algebr unormowanych z jedyneką, a po wyżej opisanej zmianie kolejności czynników jest słuszny dla wszystkich algebr unormowanych z jedyneką. Wniosek ten dla algebr unormowanych z jedyneką można znacznie wzmocnić, stosując opisaną wcześniej w dowodzie lematu 1 metodę eliminacji dwóch funkcji (bez pośrednictwa twierdzenia 2 (Jung, Sahoo, 2000)). Wzmocniona wersja ma następującą postać:

Jeżeli $\mathbf{F}$ jest algebrą unormowaną z jedyneką oraz funkcje $f, g, h : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}$ spełniają nierówność

$$\|f(x) - g(y) - (x - y) \cdot h(x + y)\| \leq \varepsilon \quad (x, y \in \mathbf{F}),$$

to istnieją stałe $a, b, c, d \in \mathbf{F}$ z $\|c - d\| \leq \varepsilon$ takie, że:

$$\|f(x) - x^2a - xb - c\| \leq \varepsilon,$$

$$\|g(x) - x^2a - xb - d\| \leq \varepsilon,$$

$$h(x) = xa + b$$

dla wszystkich $x \in \mathbf{F}$.

Obserwacja ta sugeruje możliwość przeniesienia wyników opisanych wcześniej na funkcje określone na algebrze unormowanej z jedyneką i przyjmujące wartości

w tej algebrze. Wypisanie stosownych uogólnień i sprawdzenie wszystkich szczegółów dowodowych jest dobrą zachętą do twórczości matematycznej studentów wyższych roczników studiów matematyki.

Literatura

- Aczèl, J.: 1985, A mean value property of the derivative of quadratic polynomials - without mean values and derivatives, *Math. Mag.* **58**(1), 42–45.
- Fidyk, E.: 2014, *O stabilności pewnego równania funkcyjnego związanego z twierdzeniem lagrange’a*, Praca magisterska, Instytut Matematyki Uniwersytetu Pedagogicznego w Krakowie, Kraków.
- Jung, S., Sahoo, P.: 2000, On the stability of a mean value type functional equation, *Demonstr. Math.* **XXXIII**(4), 793–796.
- Szostok, T., Wąsowicz, S.: 2011, On the stability of the equation stemming from Lagrange MVT, *Appl. Math. Lett.* **24**, 541–544.

*Instytut Matematyki
Uniwersytet Pedagogiczny
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
e-mail edyta.fidyk@onet.com.pl,
e-mail siudut@up.krakow.pl*