Barbara Nawolska

Czy uczniowie klasy I szkoły podstawowej myślą rekurencyjnie? Wyniki badań dzieci ośmioletnich

Słowa kluczowe
myślenie, wnioskowanie (dedukcyjne i redukcyjne), rekurencja, myślenie rekurencyjne, ciągi liczbowe, stosowanie analogii, błędy uczniowskie

Wprowadzenie

Myślenie zawsze było w centrum zainteresowań badaczy, a zdolność myślenia uznawana za wyraz inteligencji człowieka. Dużo wiemy o myśleniu, zwłaszcza o myśleniu ludzi dorosłych, są oni bowiem w stanie opowiedzieć, jak myśleli. Dzieci tego nie potrafią, dlatego ich sposób myślenia odkrywamy, np. na podstawie analizy rozwiązywanych przez nie problemów.

Ze względu na współczesne potrzeby informatyczne istotne jest stosowanie rekurencji – ważnego zagadnienia w programowaniu komputerów, stąd pomysł podjęcia badań nad myśleniem rekurencyjnym dzieci w młodszym wieku szkolnym.

W artykule prezentuję wyniki badań dotyczących myślenia rekurencyjnego dzieci ośmioletnich na podstawie ich umiejętności rozwiązywania zadań wymagających kontynuowania – uzupełniania ciągów liczbowych typu rekurencyjnego.

O myśleniu, wnioskowaniu i rekurencji

Terminem 'myślenie' posługujemy się dość często – nawet wiele razy dziennie. Ale czy uświadamiamy sobie, czym ono jest? Sięgnijmy do leksykonu: myślenie to „czynność umysłu polegająca na przetwarzaniu, za pomocą operacji umysłowych, informacji zawartych w spostrzeżeniach, wyobrażeniach i pojęciach" (*Nowy leksykon PWN* 1998: 1127). Kozielecki (1995: 91) dodaje, że myślenie jest czynnością umysłową obejmującą: planowanie, przewidywanie, projektowanie, odkrywanie, ocenianie, rozumienie i wnioskowanie. Zatem dzięki myśleniu możemy rozwiązywać różnorodne problemy, w tym logiczne i matematyczne.

W strukturze myślenia uwzględnia się trzy komponenty: materiał, operacje i reguły. Materiał to rodzaj informacji przetwarzanych w procesie myślenia. Operacje umysłowe to przekształcenia dokonywane na reprezentacjach umysłowych, reguły zaś to sposoby porządkowania łańcucha operacji umysłowych. Reguły odpowiadają za sposób komponowania operacji umysłowych w pewną całość podporządkowaną zazwyczaj realizacji celu, któremu służy myślenie (por. Nęcka, Orzechowski, Szymura 2006: 436).

Materiałem myślenia są informacje zakodowane w spostrzeżeniach (wzrokowych, słuchowych, przestrzennych, dotykowych, kinestetycznych itp.), wyobrażeniach, czyli tzw. obrazach umysłowych, oraz w pojęciach (konkretnych i abstrakcyjnych). Pochodzą ze środowiska zewnętrznego lub z pamięci długotrwałej. Obrazy umysłowe można podzielić ze względu na różne kryteria. Jeśli kryterium podziału będą uprzednie doświadczenia, to wyróżnia się obrazy reprodukcyjne i antycypacyjne. Według kryterium operacyjnego wyróżnia się obrazy statyczne, kinetyczne i transformacyjne (por. Kielar-Turska 2003: 95).

Ze względu na rodzaj przetwarzanych informacji wyróżnia się **myślenie**: sensoryczno-motoryczne (konkretne), bazujące na aktualnych spostrzeżeniach oraz abstrakcyjno-pojęciowe, bazujące na pojęciach (w tym abstrakcyjnych) i wyobrażeniach (por. Kozielecki 1995: 104). Uwzględniając inne kryteria podziału, można mówić o myśleniu produktywnym i reproduktywnym, twórczym i odtwórczym (por. tamże: 118–119), dedukcyjnym i redukcyjnym itp. Jeśli więc materiałem myślenia są wyobrażenia (obrazy) antycypacyjne, możemy mówić o myśleniu antycypacyjnym. Jeśli w myśleniu wykorzystujemy rekurencję – o myśleniu rekurencyjnym.

Do podstawowych operacji myślowych psychologowie zaliczają: analizę i syntezę, natomiast wśród pochodnych operacji wyróżniają porównywanie, abstrahowanie, uogólnianie. Niektórzy wymieniają jeszcze takie operacje, jak: zastępowanie, sprawdzanie, poszukiwanie, odrzucanie, kombinowanie, wybieranie, redukowanie, integrowanie itp. (por. tamże: 107). Niektórzy psychologowie wspominają o nieskończenie wielu operacjach umysłowych (por. Nęcka, Orzechowski, Szymura 2006: 437).

W procesie myślenia, korzystając z operacji myślowych, prowadzimy różnorodne wnioskowania – rozumowania. **Wnioskowanie** to „rozumowanie polegające na wyprowadzaniu, zgodnie z prawami logiki (regułami wnioskowania) ze zdań uznanych za prawdziwe (przesłanek) - nowych twierdzeń (wniosków)" (*Nowy leksykon PWN* 1998: 1931). Innymi słowy, jest to formułowanie wniosków na podstawie przesłanek. Wszelkie wnioskowania dzielą się na zawodne (wnioskowania redukcyjne, indukcyjne i przez analogię) oraz niezawodne, do których zaliczamy wnioskowania dedukcyjne. We **wnioskowaniu dedukcyjnym** (wprost) uznaje się za prawdziwe tylko zdania wyprowadzone ze zdań prawdziwych na podstawie ich logicznych następstw (por. tamże: 352). **Wnioskowanie redukcyjne** (wstecz) polega na dobieraniu do zdania prawdziwego takiego zdania, z którego to pierwsze wynika. Jest to wnioskowanie zawodne (uprawdopodobniające), gdyż z prawdziwego następstwa wyprowadza się racje niekoniecznie prawdziwe (por. tamże: 1459).

Jednym z ważniejszych współcześnie wnioskowań jest myślenie **rekurencyjne**, czyli wnioskowanie, które jest wykorzystywane w matematyce oraz w informatyce.

Rekurencja zwana także **rekursją** (ang. *recursion*, z łac. *recurrere*, 'przybiec z powrotem') to „sposób definiowania procedur i funkcji w algorytmach i programach [...] polegający na umieszczaniu w treści procedury (funkcji) odwołań do tej samej procedury (funkcji)" (*Wielka encyklopedia PWN*; 2004: 237). Rekurencja jest jedną z najważniejszych metod konstruowania rozwiązań i algorytmów oraz podstawową techniką wykorzystywaną w funkcyjnych językach programowania. Zgodnie ze znaczeniem informatycznym algorytm rekurencyjny to taki, który korzysta z samego siebie, a program rekurencyjny to taki, który wywołuje sam siebie.

Typowym przykładem zastosowania rekurencji jest liczenie silni ($n!$), zdefiniowanej jako: $n! = n\cdot(n-1)!$ gdy $n>0$ i $n! = 1$ gdy $n=0$.

Innym przykładem zastosowania rekurencji jest definicja ciągu Fibonacciego:

fib(0) = 0, fib(1) = 1, fib(k) = fib(k-1) + fib(k-2) dla $k > 1$. Definiuje ona ogólny (k –ty) wyraz ciągu przez wyrazy go poprzedzające. Innymi słowy, definiuje funkcję, odwołując się w definicji do niej samej.

Każda definicja rekurencyjna potrzebuje przynajmniej jednego przypadku bazowego (nierekurencyjnego). W przypadku ciągu Fibonacciego są to wartości dla 0 i 1. W przeciwnym wypadku nigdy się nie zakończy. Dla przykładu, obliczenie fib(4) wygląda następująco:

fib(4) = fib(3) + fib(2) = [fib(2) + fib(1)] + [fib(1) + fib(0)] = [fib(1) + fib(0) + fib(1)] + [fib(1) + fib(0)] = [1 + 0 + 1] + [1 + 0] = 3.

MYŚLENIE DZIECI W WIEKU WCZESNOSZKOLNYM

Wraz z rozpoczęciem nauki w szkole następuje u dzieci rozwój procesów poznawczych, takich jak myślenie, spostrzeganie, uwaga oraz pamięć. Myślenie rozwija się w toku nauki szkolnej i jest ściśle związane z rozwojem mowy i innych procesów psychicznych.

Rozwój poznawczy ma charakter indywidualny i może być uzależniony od wielu czynników. Zmiany rozwojowe jednostki zależą od czynników biologicznych (np. stanu neurofizjologicznego) i wyposażenia genetycznego jednostki (np. pamięć krótkotrwała, pojemność uwagi, szybkość przetwarzania informacji). Zależą one również od indywidualnego doświadczenia i aktywności jednostki (por. Trempała 2002: 40). Stąd też biorą się duże różnice w indywidualnym rozwoju myślenia u dzieci.

Według J. Piageta w okresie od 7 do 12 roku życia dziecka następuje przejście od stadium przedoperacyjnego do stadium operacji konkretnych. Dziecko osiąga w tym okresie wiele zdolności związanych ze zdobywaniem i przetwarzaniem informacji o otaczającej je rzeczywistości i o sobie na poziomie konkretu. Dzięki temu możliwe są operacje na pojęciach matematycznych. W okresie tym tworzą się operacje logiczne, zwane ugrupowaniami, takie jak szeregowanie, dodawanie, odejmowanie, klasyfikowanie. Dziecko przeprowadza je na konkretnych obiektach, nie umie jednak formułować reguły lub prawa w postaci uogólnionej.

Pojawia się też u dzieci myślenie logiczne (por Stefańska-Klar 2003: 135), które jest podstawą wnioskowania przyczynowo-skutkowego. Dzięki temu dziecko potrafi skutecznie wyjaśnić wiele zjawisk i potrafi przewidywać następstwa zdarzeń, co jest podstawą rozwiązywania problemów umysłowych. Rozwija się także zdolność do decentracji poznawczej, czyli umiejętność uwzględniania różnych punktów widzenia oraz integrowania ich w wielostronny i obiektywny obraz rzeczywistości. Kształtuje się umiejętność tworzenia sekwencji (słownych, ruchowych, myślowych) oraz serii będących wynikiem porządkowania obiektów, np. ze względu na długość, masę czy liczebność (por. tamże:136).

Dziecko w młodszym wieku szkolnym zdolne jest do abstrahowania i uogólniania. W procesie abstrahowania oddziela wybrane cechy przedmiotów lub zjawisk od nich samych. Dokonuje abstrakcji pozytywnej, gdy wyodrębnia cechy istotne, i abstrakcji negatywnej, gdy pomija cechy nieistotne W procesie kształtowania pojęć stosuje uogólnienia, czyli łączenie cech wspólnych dla całej klasy obiektów. Uogólnianie pełni istotną rolę w wykrywaniu praw, jakie rządzą zjawiskami i ujmowaniu związków istniejących między nimi. W okresie szkolnym intensywnie rozwijają się procesy analizy, czyli myślowego podziału całości na części lub wyodrębniania cech przedmiotów lub zjawisk. Także procesy syntezy polegającej na łączeniu w myśli różnych części w nowe całości. Wraz z rozwojem analizy i syntezy rozwija się także umiejętność porównywania, czyli wyszukiwania podobieństw i różnic między pojęciami lub przedmiotami. Dziecku w tym wieku łatwiej jest wyszukiwać różnice niż ujmować cechy wspólne. Potrafi ono dokonywać porównań analitycznych, lecz ma jeszcze trudności w odróżnianiu cech istotnych od przypadkowych.

Rozwija się wyobraźnia dziecka. Jest ono zdolne do przedstawiania sobie zjawisk, przedmiotów, których nie widziało. Jego zdolność antycypowania kolejności ruchów rozwija się około 8. roku życia, natomiast przewidywanie kolejności wraz z określeniem relacji między ruchami pojawia się około 11. roku życia. Antycypowanie przekształceń (ok. 8. r.ż.) odnosi się najpierw do stanu początkowego i końcowego, bez możliwości wyobrażania sobie przejść symbolizujących ciągłość (por. Kielar-Turska 2003: 95). Umie porządkować zdobytą wiedzę w pewien system. Pamięć dziecka z pamięci mechanicznej i mimowolnej przekształca się w pamięć logiczną (abstrakcyjna) i dowolną, a skuteczność zapamiętywania w okresie od 7. do 11. roku życia wzrasta dwukrotnie. Ulega zmianie charakter uczenia się. Uczeń „stopniowo opanowuje logiczne sposoby zapamiętywania i reprodukowania materiału, przy czym umiejętność takiego uczenia się i zapamiętywania stale wzrasta" (Wołoszynowa 1986: 107). W związku z dojrzewaniem centralnego układu nerwowego rozwija się u dzieci zdolność skupiania uwagi, która ma początkowo charakter mimowolny, z czasem zaś przybiera charakter dowolny.

Wymagania programowe dla kształcenia zintegrowanego

Zgodnie z *Podstawą programową* z 23 grudnia 2008 r. (Dz. U. z dnia 15 stycznia 2009 r. Nr 4, poz. 17) do najważniejszych umiejętności zdobywanych przez ucznia w kształceniu ogólnym w szkole podstawowej należą: „myślenie matematyczne – umiejętność korzystania z podstawowych narzędzi matematyki w życiu codziennym oraz prowadzenia elementarnych rozumowań matematycznych; myślenie naukowe – umiejętność formułowania wniosków opartych na obserwacjach empirycznych" (*Podstawa programowa* 2009, s. 35). Ponadto ważnym „zadaniem szkoły podstawowej jest przygotowanie uczniów do życia w społeczeństwie informacyjnym. Nauczyciele powinni stwarzać uczniom warunki do nabywania umiejętności wyszukiwania, porządkowania i wykorzystywania informacji" (tamże: 36).

W zakresie opanowania treści matematycznych uczeń kończący klasę. I: „kontynuuje regularny wzór [...]; w zakresie liczenia i sprawności rachunkowych: a) sprawnie liczy obiekty (dostrzega regularności dziesiątkowego systemu liczenia), wymienia kolejne liczebniki od wybranej liczby, także wspak (zakres do 20); zapisuje liczby cyframi (zakres do 10), b) wyznacza sumy (dodaje) i różnice (odejmuje), manipulując obiektami lub rachując na zbiorach zastępczych, np. na palcach; sprawnie dodaje i odejmuje w zakresie do 10, poprawnie zapisuje te działania" (tamże: 44).

Badania dzieci ośmioletnich

Wymagania programowe, szczególnie te dotyczące myślenia matematycznego i myślenia naukowego oraz kontynuowania regularnego wzoru, zainspirowały mnie do przeprowadzenia badań diagnostycznych nad myśleniem matematyczno-rekurencyjnym dzieci kończących klasę I szkoły podstawowej. Uwzględniłam możliwości dzieci ośmioletnich dotyczące pisania, czytania, liczenia, zapisywania liczb i znajomości działań arytmetycznych, dlatego badałam uczniów kończących klasę I, a nie na początku edukacji szkolnej.

Postawiłam sobie następujące pytanie badawcze: **Czy i w jakim stopniu dzieci ośmioletnie zdolne są do wnioskowania rekurencyjnego?**

By odpowiedzieć na to pytanie, sformułowałam następujące problemy szczegółowe:

P1. Czy i w jaki sposób skuteczność wnioskowania rekurencyjnego zależy od materiału, na którym się ono odbywa?

P1.1. Czy i w jaki sposób skuteczność wnioskowania rekurencyjnego zależy od działań arytmetycznych (dodawania i odejmowania)?

P1.2. Czy i w jaki sposób skuteczność wnioskowania rekurencyjnego zależy od wielkości liczb we wzorze?

P1.3. Czy i w jaki sposób skuteczność wnioskowania zależy od długości i od stopnia skomplikowania wzoru?

Ponadto starałam się odpowiedzieć na pytania:

P2. Jakie operacje myślowe i ułatwienia stosują dzieci w zadaniach wymagających myślenia rekurencyjnego?

P3. Jakie błędy popełniają dzieci podczas rozwiązywania zadań wymagających myślenia rekurencyjnego?

W celu uzyskania odpowiedzi przeprowadziłam pod koniec roku szkolnego (a więc pod koniec pierwszego roku nauki) badania diagnostyczne 132 uczniów z pięciu klas I krakowskich szkół podstawowych. Narzędziem badawczym był zestaw siedmiu zadań, które uczniowie rozwiązywali samodzielnie, pisemnie. W każdym zadaniu podanych było kilka kolejnych wyrazów ciągów liczbowych wraz z poleceniem *Przyjrzyj się, jak dobrane są liczby. Dopisz kolejne.* Zadanie ucznia polegało na odkryciu zasady konstruowania kolejnych wyrazów ciągu i dopisaniu jego czterech brakujących wyrazów. Przykłady w zadaniach są niezależnymi od siebie ciągami liczbowymi. Każdy jest inny, zbudowany według innej reguły. W tabeli 1. podaję zadania wraz z ogólnymi wzorami rekurencyjnymi i rozwiązaniem.

Tab. 1. Zadania użyte w badaniach wraz ze wzorami i rozwiązaniami

zad.	Przyjrzyj się, jak dobrane są liczby. Dopisz kolejne	Wzór rekurencyjny	Rozwiązanie
a)	3, 6, 9, 12, 15, ... , ... , ... , ...	$a_1=3$, $a_{k+1}=a_k+3$ dla $k>0$	3, 6, 9, 12, 15,18, 21, 24, 27
b)	5, 10, 15, 20, 25, ... , ... , ... , ...	$b_1=5$, $b_{k+1}=b_k+5$ dla $k>0$	5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45
c)	1, 2, 4, 7, 11, 16, ... , ... , ... , ...	$c_1=1$, $c_{k+1}=c_k+k$ dla $k>0$	1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, 37, 46
d)	1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, ... , ... , ... , ...	$d_1=1$, $d_{2k}=d_{2k-1}+1$, $d_{2k+1}=d_{2k}+2$ dla $k>0$	1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16
e)	40, 38, 36, 34, 32, ... , ... , ... , ...	$e_1=40$, $e_{k+1}=e_k-2$ dla $k>0$	40, 38, 36, 34, 32, 30, 28, 26, 24
f)	75, 70, 65, 60, 55, ... , ... , ... , ...	$f_1=75$, $f_{k+1}=f_k-5$ dla $k>0$	75, 70, 65, 60, 55, 50, 45, 40, 35
g)	50, 46, 47, 43, 44, 40, 41, .. ,...,..., ..	$g_1=50$, $g_{2k}=g_{2k-1}-4$, $g_{2k+1}=g_{2k}+1$ dla $k>0$	50, 46, 47, 43, 44, 40, 41, 37, 38, 34, 35

W **zad. a)** dany jest rosnący ciąg arytmetyczny o pierwszym wyrazie równym 3 i różnicy 3. Każdy następny wyraz ciągu jest liczbą o 3 większą od wyrazu bezpośrednio go poprzedzającego. Wystarczyło ten ciąg uzupełnić liczbami: 18, 21, 24, 27.

W **zad. b)** dany jest również rosnący ciąg arytmetyczny o pierwszym wyrazie równym 5 i różnicy 5. Każdy następny wyraz ciągu jest o 5 większy od wyrazu bezpośrednio go poprzedzającego. Należało ten ciąg uzupełnić liczbami: 30, 35, 40, 45.

W **zad. c)** dany jest niełatwy ciąg: 1, 2, 4, 7, 11, 16, ..., ..., ... , ... Wymagał on zauważenia, że do wyznaczenia kolejnych liczb należy do pierwszej, a więc 1, dodać 1, do następnej 2 i dalej dodawać kolejne liczby naturalne: 3, potem 4 itd. Aby wyznaczyć $k+1$ wyraz ciągu, trzeba było do wyrazu k dodać liczbę k [$c_{k+1} = c_k + k$], a więc ciąg uzupełnić liczbami: 22, 29, 37, 46. W ciągu tym jest zmienna różnica zależna od numeru wyrazu ciągu.

W **zad. d)** podano ciąg o dość skomplikowanym wzorze. Tu każdy wyraz o numerze parzystym jest o 1 większy od wyrazu poprzedzającego, a każdy wyraz o numerze nieparzystym o 2 większy od poprzedzającego. Ciąg ten, z dwiema różnymi różnicami, należało uzupełnić liczbami: 11, 13, 14, 16.

W **zad. e)** dany jest malejący ciąg arytmetyczny o pierwszym wyrazie równym 40 i różnicy (–2). Każdy następny wyraz ciągu jest liczbą o 2 mniejszą od wyrazu bezpośrednio go poprzedzającego. Uzupełnienie tego ciągu liczbami: 30, 28, 26, 24 wydawało się łatwe.

W **zad. f)** dany jest malejący ciąg arytmetyczny o pierwszym wyrazie równym 75 i różnicy (–5), a więc liczby, które należy uzupełnić, to 50, 45, 40, 35.

W **zad. g)** podany został najtrudniejszy, malejący ciąg o skomplikowanym wzorze. Tu każdy wyraz o numerze parzystym jest o 4 mniejszy od wyrazu poprzedzającego, a każdy wyraz o numerze nieparzystym o 1 większy od poprzedzającego. Różnice między wyrazami wynoszą: –4, +1, –4, +1. Miałam nadzieję, że chociaż niektórzy uczniowie to zauważą i dopiszą liczby 37, 38, 34, 35.

Zmienną główną w prowadzonych badaniach jest umiejętność rozumowania rekurencyjnego (poziom tego rozumowania) uczniów kończących klasę I. Uszczegółowieniem tej zmiennej jest: poziom rozumowania rekurencyjnego – zależny od materiału: dodawanie lub odejmowanie, wielkości danych liczb (ich zakres) – oraz długość i stopień skomplikowania rekurencyjnego wzoru (por. tab. 1.) danego ciągu.

W celu ustalenia poziomu rozumowania rekurencyjnego dzieci ośmioletnich poddałam analizie – zarówno pod względem umiejętności wnioskowania rekurencyjnego (reguły doboru liczb), jak i poprawności rachunkowej – uczniowskie rozwiązania zadań. Za każde bezbłędnie rozwiązane zadanie przyznawałam 4 punkty. Jeżeli uczeń odkrył wzór rekurencyjny, ale popełnił pomyłkę w obliczeniach lub/i w zapisie liczby, przyznawałam 3 lub 2 punkty. Jeśli w złożonym ciągu o skomplikowanym wzorze uczeń odkrył tylko jedną prawidłowość, przyznawałam za rozwiązanie zadania 2 punkty. Jeśli przy tym popełnił jakąś pomyłkę w obliczeniach lub zapisie, przyznawałam 1 punkt. Za całkowicie błędne rozwiązania było zero punktów. Przy analizowaniu wielu zadań obliczałam średnią arytmetyczną przypadającą na jedno zadanie.

Uwzględniając średnie arytmetyczne, przyjęłam następujące **poziomy rozumowania** rekurencyjnego dzieci:

od 0,00 do 2,00 punktów – poziom niski (N),
od 2,01 do 3,00 punktów – poziom średni (Ś),
od 3,01 do 4,00 punktów – poziom wysoki (W).

Zmienne szczegółowe przedstawiam w tabeli 2.

Tab. 2. Wykaz zmiennych szczegółowych

<table>
<tr><th colspan="3">Zmienne szczegółowe</th><th>Zadanie</th><th colspan="2">Poziom zależny od średniej liczby punktów</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Działanie</td><td rowspan="3">dodawanie</td><td>jedna różnica</td><td>a, b</td><td>N 0 – 2 pkt.
Ś 2,01 – 3 pkt.
W 3,01 – 4 pkt.</td><td rowspan="3">N 0 – 2 pkt.
Ś 2,01 – 3 pkt.
W 3,01 – 4 pkt.</td></tr>
<tr><td>dwie różnice</td><td>d</td><td>N 0 – 2 pkt.
Ś 2,01 – 3 pkt.
W 3,01 – 4 pkt.</td></tr>
<tr><td>wiele zmieniających się różnic</td><td>c</td><td>N 0 – 2 pkt.
Ś 2,01 – 3 pkt.
W 3,01 – 4 pkt.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">odejmowanie</td><td>jedna różnica</td><td>e, f</td><td>N 0 – 2 pkt.
Ś 2,01 – 3 pkt.
W 3,01 – 4 pkt.</td><td rowspan="2">N 0 – 2 pkt.
Ś 2,01 – 3 pkt.
W 3,01 – 4 pkt.</td></tr>
<tr><td>dwie różnice</td><td>g</td><td>N 0 – 2 pkt.
Ś 2,01 – 3 pkt.
W 3,01 – 4 pkt.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Wielkość danych liczb</td><td colspan="2">zakres do 25</td><td>a, b, c, d</td><td colspan="2">N 0 – 2 pkt.
Ś 2,01 – 3 pkt.
W 3,01 – 4 pkt.</td></tr>
<tr><td colspan="2">zakres większy niż 25</td><td>e, f, g</td><td colspan="2">N 0 – 2 pkt.
Ś 2,01 – 3 pkt.
W 3,01 – 4 pkt.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Długość i stopień skomplikowania wzoru</td><td colspan="2">krótki nieskomplikowany wzór</td><td>a, b, e, f</td><td colspan="2">N 0 – 2 pkt.
Ś 2,01 – 3 pkt.
W 3,01 – 4 pkt.</td></tr>
<tr><td colspan="2">długi skomplikowany wzór</td><td>c, d, g</td><td colspan="2">N 0 – 2 pkt.
Ś 2,01 – 3 pkt.
W 3,01 – 4 pkt.</td></tr>
</table>

Wyniki badań

Zgodnie z przyjętymi kryteriami zanalizowałam 132 prace uczniów klasy I. W tabeli 3 przedstawiam zbiorcze zestawienie wyników uzyskanych za każde zadanie osobno i ich obliczenia procentowe.

Tab. 3. Zbiorcze zestawienie wyników rozwiązanych zadań

Zadanie		Rozwiązania				Suma punktów	Średnia liczba punktów
		bezbłędne 4 pkt.	częściowo poprawne 1 – 3 pkt.	błędne 0 pkt.	brak rozwiązania 0 pkt.		
zad.a)	liczba rozw.	82	20	18	12	382	2,89
	procent	62%	15%	14%	9%		
		77%		23%			
zad.b)	liczba rozw.	98	4	14	16	402	3,04
	procent	74%	3%	11%	12%		
		77%		23%			
zad.c)	liczba rozw.	40	22	38	32	212	1,60
	procent	30%	17%	29%	24%		
		47%		53%			
zad.d)	liczba rozw.	40	34	26	32	228	1,72
	procent	30%	26%	20%	24%		
		56%		44%			
zad.e)	liczba rozw.	58	16	22	36	270	2,04
	procent	44%	12%	17%	27%		
		56%		44%			
zad.f)	liczba rozw.	50	16	14	52	236	1,78
	procent	38%	12%	11%	39%		
		50%		50%			
zad.g)	liczba rozw.	12	16	22	82	76	0,57
	procent	9%	12%	17%	62%		
		21%		79%			

Dane przedstawione w tabeli 3 wraz z analizą zadań (materiału i reguł z nimi związanych) pozwalają na sformułowanie wniosku, że najlepiej poradzili sobie uczniowie z rozwiązaniem zadań **a)** i **b)** (po 77% rozwiązań bezbłędnych lub częściowo poprawnych). W obu zadaniach wzory są nieskomplikowane, ciągi są rosnące (łatwiej się „liczy" wprost niż wstecz), a dobór liczb wymaga od dzieci dodawania, a więc działania łatwiejszego w porównaniu z odejmowaniem. Porównując sposób rozwiązania tych dwu zadań (**a** i **b**), zauważamy, iż łatwiejsze dla dzieci okazało się zadanie **b** (74% bezbłędnych rozwiązań) niż zadanie **a** (62% bezbłędnych rozwiązań). Dodawanie po 5 (liczenie po 5) okazało się dla dzieci łatwiejsze niż dodawanie po 3 (liczenie po 3).

Biorąc pod uwagę zadania **e)** i **f)**, które są analogiczne do zadań **a)** i **b)**, ale ze względu na konieczność liczenia wstecz (ciągi malejące) i związaną z tym konieczność odejmowania są trudniejsze od wcześniejszych. Zauważamy, że procent ich rozwiązań bezbłędnych lub częściowo poprawnych wynosi odpowiednio 56% i 50%, a więc zdecydowanie mniej niż za zadania **a)** i **b)**. Ponadto łatwiejsze dla dzieci było zadanie **e** (44% bezbłędnych rozwiązań) niż zadanie **f** (38% bezbłędnych rozwiązań). Odejmowanie po 2 okazało się łatwiejsze niż odejmowanie po 5.

Analizę wyników, zgodnie z kryteriami ujętymi w tabeli 2, rozpoczęłam od odpowiedzi na pierwsze pytanie problemowe (dotyczące skuteczności wnioskowania rekurencyjnego, zależnego od materiału, na którym prowadzone jest rozumowanie) oraz na pierwsze pytanie szczegółowe (dotyczące działań arytmetycznych – dodawania i odejmowania – jakie należy stosować w celu rozwiązania zadania). Łączne zestawienie wyników z uwzględnieniem materiału w postaci działań prezentuję w tabeli 4.

Tab. 4. Wyniki badań zależności rozumowania od działania arytmetycznego

<table>
<tr><th colspan="2">Działanie</th><th>Zad.</th><th>Suma pkt.</th><th>Średnia art.</th><th>Po ziom</th><th>Suma pkt.</th><th>Średnia arvt.</th><th>Po ziom</th></tr>
<tr><td rowspan="3">dodawanie</td><td>jedna różnica</td><td>a, b</td><td>784</td><td>2,96</td><td>Ś</td><td rowspan="3">1224</td><td rowspan="3">2,31</td><td rowspan="3">Ś</td></tr>
<tr><td>dwie różnice</td><td>d</td><td>228</td><td>1,74</td><td>N</td></tr>
<tr><td>wiele zmieniających się różnic</td><td>c</td><td>212</td><td>1,60</td><td>N</td></tr>
<tr><td rowspan="2">odejmowanie</td><td>jedna różnica</td><td>e, f</td><td>506</td><td>1,91</td><td>N</td><td rowspan="2">582</td><td rowspan="2">1,46</td><td rowspan="2">N</td></tr>
<tr><td>dwie różnice</td><td>g</td><td>76</td><td>0,57</td><td>N</td></tr>
</table>

Analiza danych zebranych w tabeli 4 pozwala sformułować następujące wnioski:

Jeżeli materiałem rozumowania rekurencyjnego są zadania wymagające stosowania dodawania (zad. **a**, **b**, **c**, **d**), to wyniki tego rozumowania są na poziomie wyższym niż wyniki rozumowania w zadaniach wymagających stosowania odejmowania (zad. **e**, **f**, **g**). W zakresie dodawania jest to poziom średni (2,31), natomiast w zakresie odejmowania poziom niski (1,46). Ponadto w zakresie samego dodawania, gdy materiałem są zadania z jedną stałą różnicą (zad. **a**, **b**), wynik rozumowania 2,96 jest na poziomie wyższym niż w zadaniu z dwiema różnicami (zad. **d**) – 1,74, ten zaś jest wyższy niż w zadaniu z wieloma zmieniającymi się różnicami (zad. **c**) – 1,60. Podobnie jest w zakresie samego odejmowania. Wprawdzie w obu przykładach (jedna różnica oraz dwie różnice) ogólny poziom rozumowania jest niski, to jednak przy jednej różnicy (zad. **e**, **f**) wynosi on 1,91 i jest wyższy niż przy dwóch różnicach (zad. **g**) – 0, 57.

Wniosek

Skuteczność wnioskowania rekurencyjnego zależy od działania i jest większa, gdy materiałem myślowym jest dodawanie, mniejsza zaś, gdy materiałem jest odejmowanie.

Drugi z wyróżnionych problemów szczegółowych dotyczył skuteczności wnioskowania rekurencyjnego w zależności od zakresu liczb, na których prowadzone jest rozumowanie. Łączne zestawienie wyników z uwzględnieniem wielkości liczb – ich zakresu prezentuję w tabeli 5.

Tab. 5. Wyniki badań zależności rozumowania od wielkości liczb

Wielkość danych liczb	Zadanie	Suma punktów	Średnia aryt.	Poziom
zakres do 25	a, b, c, d	1224	2,31	Ś
zakres większy niż 25	e, f, g	582	1,46	N

Analiza danych zebranych w tabeli 5 pozwala sformułować następujące uogólnienia:

Jeżeli rozumowanie rekurencyjne jest realizowane na liczbach w niewielkim zakresie do 25 (zad. **a**, **b**, **c**, **d**), to wyniki tego rozumowania są na poziomie wyższym niż wyniki rozumowania w zadaniach wymagających posługiwania się większymi liczbami niż 25 (zad. **e**, **f**, **g**). W zakresie do 25 jest to poziom średni (2,31), natomiast w zakresie powyżej 25 poziom niski (1,46).

Wniosek

Skuteczność wnioskowania rekurencyjnego zależy od wielkości liczb i jest większa, gdy zakres liczb jest mniejszy, mniejsza zaś przy większym zakresie liczbowym.

Trzeci z wyróżnionych problemów szczegółowych dotyczył skuteczności wnioskowania rekurencyjnego w zależności od długości i stopnia skomplikowania ciągów liczbowych, na których prowadzone jest rozumowanie. Łączne zestawienie wyników z uwzględnieniem stopnia komplikacji prezentuję w tabeli 6.

Tab. 6. Wyniki badań zależności rozumowania od skomplikowania wzoru

Długość i stopień skomplikowania wzoru	Zadanie	Suma pkt.	Śr. aryt.	Poziom
krótki, nieskomplikowany wzór	a, b, e, f	1290	2,44	Ś
długi, skomplikowany wzór	c, d, g	516	1,30	N

Analiza danych zebranych w tabeli 6 pozwala dostrzec, że jeżeli rozumowanie rekurencyjne jest realizowane na ciągach liczbowych, których wzór jest krótki i nieskomplikowany (zad. **a**, **b**, **e**, **f**), to wyniki tego rozumowania są na poziomie wyższym niż wyniki rozumowania w zadaniach wymagających posługiwania ciągami o wzorach długich i skomplikowanych (zad. **c**, **d**, **g**). W łatwiejszych przykładach jest to poziom średni (2,44), w bardziej skomplikowanych zaś poziom niski (1,30).

Wniosek

Skuteczność wnioskowania rekurencyjnego zależy od długości i od stopnia skomplikowania wzoru i jest większa przy wzorach nieskomplikowanych, mniejsza zaś w przeciwnym układzie.

By odpowiedzieć na pierwszą część drugiego pytania badawczego (Jakie operacje myślowe i ułatwienia stosują dzieci w zadaniach wymagających myślenia rekurencyjnego?), należało prześledzić zadania i proces ich rozwiązywania, wyodrębniając w tym procesie operacje myślowe niezbędne do ich rozwiązania.

Aby możliwe było rozwiązanie zadań, uczniowie musieli posługiwać się analizą i syntezą, porównywaniem, abstrahowaniem i uogólnianiem.

Na początku mieli się zapoznać z danym ciągiem jako całością – **synteza** pierwotna. Następnie dokonać **analizy** i zapoznać się z każdym wyrazem ciągu, **porównać** wszystkie pary wyrazów sąsiednich, **poszukać** zależności między nimi, **abstrahować** od wielkości liczb i koncentrować się na ich własnościach i wzajemnych stosunkach. Później należało **uogólnić** dostrzeżone stosunki i **zastosować** to uogólnienie w uzupełnieniu ciągu. Kolejnym krokiem było ponowne dokonanie syntezy (synteza wtórna) całości i **sprawdzenie**, czy zastosowane uzupełnienie pasuje do całości ciągu. Tu po **weryfikacji** mogło nastąpić **przyjęcie** zastosowanej reguły lub jej **odrzucenie.** Przy odrzuceniu całą procedurę należało powtórzyć, a przy jej powtarzaniu należało w analizie i porównywaniu **wybierać** inne **podobieństwa** i inne **różnice** niż w pierwszym przykładzie. Te operacje należało powtarzać tak długo, aż uzyskało się poprawne rozwiązanie. Uczniowie, którzy nie byli zdolni do realizacji wymienionych operacji myślowych, nie podejmowali próby rozwiązania zadania. Ci zaś, którzy wykonywali opisane operacje, lecz nie wszystkie, uzyskiwali albo niepoprawne rozwiązania, albo tylko częściowo poprawne.

By odpowiedzieć na drugą część pytania drugiego, dokonałam analizy jakościowej prac. Uczniowie, rozwiązując zadania, próbowali stosować dwa rodzaje ułatwień. Jednym z nich było **stosowanie analogii**. Np. uczennica po odkryciu sposobu uzupełnienia ciągu w zad. **a)** do wszystkich pozostałych zadań zastosowała tę samą zasadę i wszędzie niepoprawnie wpisywała kolejne liczby o 3 większe od liczb je poprzedzających. Musiała kierować się analogiami (wszędzie były ciągi liczbowe). Podobnie jak ona, wielu posługiwało się analogiami. Przy ustaleniu trafnych analogii uzyskiwali poprawne rozwiązania. Jednakże nie wszystkie były prawidłowe. Np. jeden uczeń zauważył, że trzy początkowe wyrazy ciągu **d)** są identyczne z trzema początkowymi wyrazami ciągu **c)**, zastosował więc do zad. **d)** przepis poprzednio odkryty. Żeby wyznaczyć 8. wyraz, do liczby 10 dodał 7 (wynik = 17). Dalej, by wyznaczyć 9. wyraz, do 17 dodał 8 (wynik = 25). Potem jeszcze dodał 9 i na końcu 10. Tak więc uzupełnił ciąg **d)** liczbami 17, 25, 34, 44. Jego metoda nie jest pozbawiona sensu, ponieważ porównując początkowe wyrazy dwóch ciągów, uczeń doszukał się prawidłowości, której nie było. Zabrakło tu etapu weryfikacji.

Drugim stosowanym przez uczniów ułatwieniem był **zapis różnicy** między wyrazami ciągu. To bardzo skuteczne ułatwienie, stosowane przez wielu uczniów, pomagało im zauważyć prawidłowości, pamiętać o nich i dzięki temu poprawnie uzupełnić ciągi. Np.

-4 +1 -4 +1 -4 +1
g) 50, 46, 47, 43, 44, 40, 41, 37, 38, 34, 35

Wniosek

W rozwiązywaniu zadań wymagających myślenia rekurencyjnego uczniowie stosują wszystkie możliwe dostępne operacje myślowe, starają się też stosować ułatwienia, korzystając z analogii (nie zawsze trafnych) i zapisując dostrzeżone prawidłowości.

By odpowiedzieć na trzecie pytanie, dotyczące błędów popełnianych przez dzieci podczas rozwiązywania zadań wymagających myślenia rekurencyjnego, należało je wnikliwie prześledzić. Błędne odpowiedzi uczniów wynikały często z **pomyłki w obliczeniach** lub **pomyłki w zapisie liczby**, a nie z niedostrzeżenia prawidłowości. Np. w zad. **a)** dziecko wpisało liczby: 18, 31, 34, 37. Zauważmy, że różnice wynoszą odpowiednio [+3,+13,+3,+3] i jest to najwyraźniej pomyłka w zapisie liczby (zamiast 21 zapisana została liczba 31). Przykład podobnej pomyłki znaleźć można w rozwiązaniu zad. **b)**, w którym dziecko zamiast 45 napisało 49. Inny błąd w zad. **b)**: uczeń wpisał liczby 30, 35, 45, 55. Różnice wynoszą tu odpowiednio [+5,+5,+10,+10]. Można sądzić, że uczeń zauważył prawidłowość (różnicę 5), zaczął poprawnie uzupełniać ciąg, lecz „rozpędził się" i dwie ostatnie liczby wyznaczył o 10 większe od poprzednich. Potrzebne „piątki" widział w zapisie liczb 35, 45, 55.

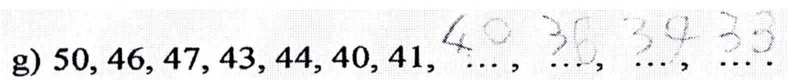
Jeden uczeń zapewne **pomylił linie**, gdyż w zad. **e)** wpisał liczby takie, jakie powinny być w zad. **f)**.

Byli uczniowie, którzy – jakby **bezmyślnie** – w wielu zadaniach wpisywali kolejne liczby naturalne, poczynając od ostatniej danej.

Byli też tacy, którzy źle uzupełniali ciąg, ale nie robili tego bezmyślnie. Ich błędy wynikały często z zastosowania **nietrafnych analogii** (por. wcześniejsze rozważania) lub z **analizy tylko wybranych fragmentów ciągu** danego. Np. w zad. **c)** wpisali kolejne liczby: 17, 18, 19, 20, zapewne po przeanalizowaniu tylko dwu pierwszych wyrazów ciągu, którymi były kolejne liczby 1 i 2. Inni uzupełniali ten ciąg liczbami 21, 26, 31, 36. Różnice [+5,+5,+5,+5]. Najwyraźniej był to efekt sprawdzenia tylko różnicy między ostatnimi danymi wyrazami, a ponieważ wynosiła ona właśnie

5 (16 – 11 = 5), tak uzupełnili kolejne liczby. Podobnie w zad. **d)** kilkoro dodawało stale liczbę 2, wpisując kolejno: 12, 14, 16, 18. Takie postępowanie było prawdopodobnie wynikiem analizy różnicy dwóch ostatnich podanych wyrazów. Błędów tych można było uniknąć, gdyby pojawiło się sprawdzenie rozwiązania. Najwidoczniej uczniowie ci **nie dokonali weryfikacji swoich pomysłów**, co należy uznać za kolejny typ błędu.

Byli uczniowie, którzy – po odkryciu dobrej zasady – popełniali **błąd przy łączeniu ciągów liczb już danych z ciągiem liczb dopisanych.** Błędy łączenia miały trojaki charakter. Np. w zad. **d)** były dwie różnice: 1 i 2. Uczniowie, uzupełniając ciąg, wpisywali liczby: 12, 13, 15, 16. Dodawali zatem 2, 1, 2, 1, zamiast 1, 2, 1, 2. **Zmienili więc kolejność różnic.** Inny typ błędu przy „sklejeniu" ciągów polegał na **„gubieniu" jednego wyrazu łączącego.** Np. w zad. **e)** wpisano 28, 26, 24, 22, zamiast 30, 28, 26, 24. Zgubiono więc jeden wyraz ciągu równy 30. Inny błąd polegał na **tworzeniu całkowicie odrębnego ciągu** według odkrytej zasady. Np. w zad. **g)**.



chłopiec utworzył własny ciąg o zależności analogicznej, jak w ciągu danym, lecz niepowiązany z istniejącym (brak sklejenia). Po 7. wyrazie ciągu, a więc po liczbie 41, powinna być liczba o 4 mniejsza, czyli 37 i dalej o 1 większa, czyli 38. Tu uczeń rozpoczął tworzenie własnego ciągu od liczby 40, lecz – co bardzo ważne – zachował zasadę jego tworzenia.

Wniosek

Do najczęściej popełnianych błędów podczas rozwiązywania zadań wymagających myślenia rekurencyjnego należą:

- zwykłe pomyłki w obliczeniach lub zapisie liczb albo zapisie rozwiązania w niewłaściwym miejscu,
- stosowanie nietrafnych analogii,
- brak pełnej analizy całego ciągu i uwzględnianie tylko niektórych prawidłowości dostrzeżonych w jego fragmentach,
- brak „sklejenia" ciągu,
- brak weryfikacji pomysłów rozwiązania.

By odpowiedzieć na główne pytanie, czy i w jakim stopniu dzieci ośmioletnie zdolne są do wnioskowania rekurencyjnego, dokonałam jeszcze jednej analizy. Wyniki przedstawiam w tabeli 7.

Tab. 7. Wynik poziomu rozumowania rekurencyjnego badanych dzieci

<table>
<tr><th>Poziom</th><th>Suma punktów za zadania (max) 7zad·4 pkt.=28 pkt.</th><th>Liczba uczniów z danym wynikiem</th><th colspan="2">Procent uczniów z danym wynikiem</th></tr>
<tr><td>N</td><td>0–14</td><td>60</td><td colspan="2">45%</td></tr>
<tr><td>Ś</td><td>15–21</td><td>42</td><td>32%</td><td rowspan="2">55%</td></tr>
<tr><td>W</td><td>22-28</td><td>30</td><td>23%</td></tr>
</table>

Z danych w tabeli 7 wynika, że 23% ośmiolatków, czyli uczniów klasy I szkoły podstawowej, rozumuje rekurencyjnie na poziomie wysokim. Ponad połowa (55%) prezentuje poziom co najmniej średni. Mniej niż połowa (45%) prezentuje niski poziom rozumowania rekurencyjnego.

Wniosek

Nie wszystkie dzieci ośmioletnie zdolne są do wnioskowania rekurencyjnego. Jest ono dostępne ponad połowie badanych dzieci, a prawie jedna czwarta prezentuje w tym zakresie poziom wysoki.

Podsumowanie

Ponad połowa ośmiolatków potrafi nie tylko obliczać prawidłowo sumy i różnice liczb, lecz także – i to jest najcenniejsze – wnikliwie analizować przedstawione przykłady. Dzieci są spostrzegawcze: zauważają różnorodne prawidłowości, odkrywają reguły budowy nawet skomplikowanych ciągów liczbowych, trafnie wskazują kolejne wyrazy ciągów. Bazują głównie na analogii, stosują rozumowanie rekurencyjne, umiejętnie formułują hipotezy, lecz nie zawsze potrafią je zweryfikować.

Uczniowie w rozwiązywaniu zadań typu rekurencyjnego popełniali różnorodne błędy, których przyczyny były często „nierekurencyjne". Wynikały one ze zwykłych pomyłek, ze stosowania nietrafnych analogii, ze złego „sklejania" ciągów i z nieuwzględniania wszystkich prawidłowości. Tych błędów można by uniknąć, gdyby uczniowie byli przyzwyczajeni do autokontroli, gdyby mieli nawyk weryfikowania swoich działań. Tego można i warto uczyć. W tym aspekcie można łatwo i szybko osiągnąć poprawę.

Zadania, takie jak zastosowane w badaniach regularne sekwencje ciągów liczb, sprzyjają stosowaniu rekurencji, pozwalają dzieciom dostrzegać i wykorzystywać prawidłowości w matematyce, wskazują na uporządkowanie tego działu nauki, na jego harmonię oraz wskazują kierunek dalszych poszukiwań matematycznych wzorów, przygotowują także grunt do ćwiczeń w programowaniu komputerów. Działania takie są bardzo ważne w edukacji dzieci, a ponadto, ponieważ są przewidywalne i harmonijne, dają dzieciom poczucie bezpieczeństwa i stają się dla nich przyjazne. Niestety, omawiana problematyka zadań jest prawie nieobecna w kształceniu matematycznym dzieci w szkole polskiej. Nasi uczniowie nie mają więc zbyt wielu okazji do takich odkryć, jakie towarzyszyły rozwiązującym zadania z omawianego zestawu.

Skuteczność rozumowania rekurencyjnego dzieci ośmioletnich zależy od materiału, na którym jest ono realizowane. Im materiał jest bardziej znany, „dobrze oswojony", tym efekty takiego rozumowania są lepsze. Wyniki w zakresie rozumowania rekurencyjnego dzieci można by polepszyć w stopniu znacznym, prowadząc zajęcia rozwijające takie umiejętności. Zajęcia takie byłyby w pełni zgodne z zaleceniami ujętymi w najnowszej *Podstawie programowej.*

LITERATURA

Kielar-Turska M., 2003, *Średnie dzieciństwo. Wiek przedszkolny*, [w:]. B. Harwas-Napierała, J. Trempała (red.), *Psychologia rozwoju człowieka. Charakterystyka okresów życia człowieka*, t. 2, PWN, Warszawa, s. 83–129.

Kozielecki J., 1995, *Myślenie i rozwiązywanie problemów*, [w:] T. Tomaszewski (red.), *Psychologia ogólna. Percepcja. Myślenie. Decyzja*, PWN, Warszawa, s. 91–154.

Nęcka E., Orzechowski J., Szymura B., 2006, *Psychologia poznawcza*, PWN, Warszawa.

Nowy leksykon PWN, 1998, hasła: Myślenie, Rekurencja, Wnioskowanie, B. Petrozolin-Skowrońska (red.), PWN, Warszawa, s. 1127, 1466, 1931.

Podstawa programowa z komentarzami, 2009, t. 1: *Edukacja przedszkolna i wczesnoszkolna* z dnia 23 grudnia 2008, Dz. U. z dnia 15 stycznia 2009 r. Nr 4, poz. 17.

Stefańska-Klar R., 2003, *Późne dzieciństwo. Młodszy wiek szkolny*, [w:] B. Harwas-Napierała, J. Trempała (red.), *Psychologia rozwoju człowieka. Charakterystyka okresów życia człowieka*, t. 2, PWN, Warszawa, s. 130–162.

Trempała J., 2002, *Rozwój poznawczy*, [w:] B. Harwas-Napierała, J. Trempała (red.), *Psychologia rozwoju człowieka. Rozwój funkcji psychicznych*, t. 3, PWN, Warszawa s. 9–44.

Wielka encyklopedia PWN, 2004, t. 23, hasło: Rekurencja, PWN, Warszawa, s. 237.

Wołoszynowa L., 1986, *Młodszy wiek szkolny*, [w:] M. Żebrowska (red.), *Psychologia rozwojowa dzieci i młodzieży*, PWN, Warszawa, s. 522–683.