WYŻSZA
SZKOŁA
PEDAGOGICZNA
IM. KOMISJI
EDUKACJI
NARODOWEJ
W KRAKOWIE

PRACE MONOGRAFICZNE WYŻSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ W KRAKOWIE
ÉTUDES MONOGRAPHIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE A CRACOVIE

STEFAN TURNAU

ROLA PODRĘCZNIKA SZKOLNEGO W KSZTAŁCENIU POJĘĆ I ROZUMOWAŃ MATEMATYCZNYCH NA POZIOMIE PIERWSZEJ KLASY PONADPOCZĄTKOWEJ

WYDAWNICTWO NAUKOWE WSP · KRAKÓW 1978

Stefan Turnau

ROLA PODRĘCZNIKA SZKOLNEGO W KSZTAŁCENIU POJĘĆ I ROZUMOWAŃ MATEMATYCZNYCH NA POZIOMIE PIERWSZEJ KLASY PONADPOCZĄTKOWEJ

PRACE MONOGRAFICZNE
WYŻSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ
W KRAKOWIE

Tom XXX

ÉTUDES MONOGRAPHIQUES
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
A CRACOVIE

Wydawnictwo Naukowe
Wyższej Szkoły Pedagogicznej

STEFAN TURNAU

ROLA PODRĘCZNIKA SZKOLNEGO W KSZTAŁCENIU POJĘĆ I ROZUMOWAŃ MATEMATYCZNYCH NA POZIOMIE PIERWSZEJ KLASY PONADPOCZĄTKOWEJ

Kraków 1978
Wydawnictwo Naukowe
Wyższej Szkoły Pedagogicznej

Recenzenci:

prof. dr ANNA ZOFIA KRYGOWSKA
prof. dr ZBIGNIEW SEMADENI

WYDAWNICTWO NAUKOWE WSP KRAKÓW, UL. KARMELICKA 41
Nakł. 200+74 egz. Ark. wyd. 9,5. Zam. 750-78. E-15-1548. Cena zł 24.—

Przedmowa

W wyniku obserwacji efektów pierwszych reform nauczania matematyki w latach sześćdziesiątych, zwanych obecnie reformami pierwszej fali[1], stało się jasne, że zakorzenione głęboko zasady tradycyjnej metodyki nauczania tego przedmiotu mogą spowodować wypaczenie koncepcji i celu reformy, a nawet przekształcenie nauczania matematyki w parodię. Wśród różnych sposobów zapobiegania takim zjawiskom, przede wszystkim dokształcania nauczycieli w zakresie dydaktyki matematyki, próbuje się też znaleźć drogę do myśli ucznia w jak najmniejszym stopniu korzystającą z pośrednictwa nauczyciela. W literaturze anglosaskiej pojawił się nawet termin "teacher-proof material"; słowo "teacherproof" jest tu żartobliwym odpowiednikiem słowa "weather-proof" - odporny na wpływy atmosferyczne.

Przypomnijmy, że drogę taką otworzył na użytek mas już parę stuleci temu Gutenberg. Jednak w tradycyjnej praktyce nauczania matematyki w szkole podstawowej podręcznik jako "intelektualna strawa" dla ucznia odgrywał znikomą rolę. Dla większości uczniów jego tekst był niezrozumiały, tj. nie przekazywał w sposób pełnowartościowy pojęć i rozumowań. Zamiast próby nauczania rozumienia tekstu podręcznika, nauczyciele w ogromnej większości rezygnowali z posługiwania się tym środkiem przekazu. Koncepcja dydaktyczna autora podręcznika była natomiast źródłem inspiracji nauczyciela i za jego pośrednictwem trafiała do ucznia. Dopóki głównym celem nauczania było opanowanie przez uczniów określonej porcji gotowej wiedzy - poprawna transmisja treści podręcznika była możliwa nawet przy jej rozumieniu u nauczającego tylko na poziomie ucznia. Staje się to niemożliwe, gdy za główny cel procesu dydaktycznego uznamy matematyczną aktywizację ucznia. Tu transmisja podręcznika przez nauczyciela traci w ogóle sens, a nauczanie wymaga szerokiej i pogłębionej wiedzy w zakresie matematyki, psychologii i pedagogiki. Wysoka kompetencja nauczyciela ma tu szczególnie doniosłe znaczenie na najniższym szczeblu szkoły, kiedy kształtują się fundamentalne pojęcia i nawyki myślowe.

---

[1] Por. /K r y g o w s k a 1977c/. Teksty w nawiasach ukośnych stanowią odsyłacze do Bibliografii znajdującej się na końcu pracy /s. 153-154/.

Sytuacja ta spowodowała pojawienie się na przełomie lat siedemdziesiątych nowego typu podręczników, będących jakby mariażem tekstów programowanych i tradycyjnych podręczników, przeznaczonych do samodzielnej lektury ucznia i mających w założeniu sterować jego aktywnością. Autorzy zalecali nauczycielowi minimum ingerencji w pracę ucznia. Podręczniki te,stopniowo doskonalone,stanowią dotąd najlepszą realizację idei podręcznika "teacherproof", a jednak ich analiza ujawnia wiele istotnych wad, zaś stosowanie ich w nauczaniu daje wyniki często dalekie od oczekiwanych. Jednocześnie nie mają one - jak na przykład teksty programowane - ogólnej koncepcji teoretycznej.

Praca niniejsza ma na celu wyodrębnienie środków typu podręcznikowego, a więc dających się przedstawić w druku, które poprzez lekturę działałyby motywująco i aktywizująco /w sensie aktywności matematycznej/ na czytelnika w wieku 10-12 lat, prowadząc do poprawnego kształtowania się w jego umyśle pojęć matematycznych i umiejętności rozumowań typu matematycznego. Problem ten podyktowany został praktyczną potrzebą: piszący te słowa stanął wobec zadania pokierowania zespołem autorskim podręcznika matematyki dla klasy IV szkoły 10-letniej. Doświadczenie nabyte w ciągu wielu lat nauczania na poziomie przeduniwersyteckim, doświadczenie w zakresie kształcenia dydaktycznego przyszłych a także czynnych nauczycieli matematyki, wreszcie liczne obserwacje lekcji matematyki na różnych poziomach w Polsce i w innych krajach, wśród nich wielu lekcji eksperymentalnych, świadomie zorientowanych przez uczącego na aktywizację uczniów, stanowią dla autora źródło ogólnej orientacji w charakterze czynników utrudniających upowszechnienie nauczania aktywnego; zarówno tych, które nie sprzyjają podjęciu odpowiednich działań przez nauczyciela, jak i tych, które ograniczają efektywność takich działań. Nie zamierzamy ukrywać, że wypadkowa tych doświadczeń ma aspekt negatywny, to jest pozwala przede wszystkim odpowiedzieć na pytanie, co n i e sprzyja nauczaniu aktywnemu, a więc też jaki n i e sprzyja mu podręcznik. Sformułowane w zakończeniu zasady konstrukcji podręcznika, a także przygotowany tekst podręcznika, stanowią reakcję na te ujemne doświadczenia. Te zabiegi konstruktywne wymagały jednak wcześniejszego przeprowadzenia dokładnej analizy wspomnianych czynników negatywnych dla ich sprecyzowania i opisu. Posłużyliśmy się w tym celu podręcznikami szkolnymi różnych krajów, które przebadaliśmy pod kątem najważniejszych aktywności matematycznych. Choć staraliśmy się wydobyć z nich to wszystko, co sprzyja autentycznej aktywności czytelnika, nie czyniliśmy tego jednak w nadziei, że synteza zawartych w nich idei lub kompilacja pomysłów szczegółowych rozwiązań może doprowadzić do konstrukcji modelu podręcznika aktywizującego. Ich zasadnicza rola sprowadza się natomiast do dwu funkcji:

1° pozwoliły na wyodrębnienie i sprecyzowanie szeregu cech podręcznika, nadanych przez autora ze świadomym zamiarem aktywizacji czytelnika, niekiedy nawet z pozoru aktywizujących, które w rzeczywistości na aktywność nie mają wpływu, lub kierują ją na tory wybiegające poza zakres najszerzej rozumianej matematyki, albo wreszcie hamują wszelką aktywność intelektualną ucznia[2]; pozwoliły więc na daleko idące uszczegółowienie i obiektywizację intuicji opartych na doświadczeniu dydaktycznym;

2° ułatwiają jasne przedstawienie wszystkich omawianych tu idei i zasad, dostarczając przy tym ich naturalnej i autentycznej egzemplifikacji.

Tekst podręcznika analizować można w trzech hierarchicznie usytuowanych płaszczyznach:

1) w płaszczyźnie matematycznej koncepcji stanowiącej podstawę dla opracowania dydaktycznego,

2) w płaszczyźnie autorskiej wizji dydaktycznej realizacji przyjętej koncepcji matematycznej,

3) w płaszczyźnie sposobu konkretyzacji tej wizji w tekście podręcznika.

Z punktu widzenia naszych celów najwłaściwsza byłaby następująca pozycja metodologiczna: przyjęcie za materiał badawczy tylko tych podręczników, które, niezależnie od prezentowanej koncepcji matematycznej, napisane są ze świadomym nastawieniem na maksymalną aktywizację ucznia, i ich analiza już wyłącznie w trzeciej płaszczyźnie, pod kątem doboru środków dla podręcznikowej konkretyzacji tej koncepcji dydaktycznej. Przyjęcie tej pozycji nie było jednak możliwe. Główną przeszkodę stanowił fakt, że wobec przyjęcia podręcznika za jedyny materiał dla badań, zarówno koncepcję matematyczną, jak i wizję dydaktyczną autora mogliśmy jedynie z niego odtworzyć z większą lub mniejszą dokładnością[3]. Tak więc analiza podręcznika w drugiej, a także pierwszej płaszczyźnie z konieczności poprzedza badanie jego formalnych aspektów, a często nawet dominuje nad nim.

Wyjaśnienia wymaga też dobór podręczników użytych jako materiał do analiz i porównań. Ze zrozumiałych względów zbiór kilkudziesięciu podręczników, jakie udało się zgromadzić, stanowi zaledwie małą cząstkę tego, co ukazało się na rynku księgarskim Europy w ciągu ostatnich lat. Za jego reprezentatywnością, nie statystyczną, ale właśnie wyznaczoną przez cel i

---

[2] Nie podejmowaliśmy jednak wyczerpującej dyskusji nad ujęciem matematycznym i dydaktycznym omawianych podręczników, gdyż wykraczałoby to poza cele tej pracy.

[3] Dla ścisłości trzeba dodać, że w niektórych przypadkach dysponowaliśmy także równoległym do podręcznika "przewodnikiem nauczyciela". "Przewodniki" te jednak, poza wyjaśnieniami matematycznymi, rozwiązaniami zadań i praktycznymi wskazówkami metodycznymi, nie zawierają głębszego komentarza dydaktycznego. Niewielką pomoc stanowiły też przedmowy do książek, mówiące raczej o ogólnych intencjach niż o zasadach konstrukcji podręcznika.

charakter badań, przemawia fakt, że zebrano je nie przypadkowo, ale w większości otrzymano jako renomowane, czy to ze względu na osobę autora, czy też ośrodek, w którym powstały. Pozwala to ufać, że choć zbiór ten objętościowo stanowi nikły ułamek produkcji podręcznikowej, treściowo obejmuje znaczną część dorobku dydaktyki matematyki ostatnich lat.

Analizowane podręczniki przeznaczone są w większości dla pierwszej klasy ponadpoczątkowej, w sensie omówionym dalej w punkcie 1.1. Niekiedy jednak, z różnych względów, posłużyliśmy się podręcznikami dla klas niższych, a więc należących do szczebla początkowego, nie niżej od trzeciego roku nauczania. Przyjąwszy bowiem założenie, że pierwsza klasa ponadpoczątkowa powinna być klasą przejściową, w której naiwne ujęcia i język z klas poprzednich mają się stopniowo i powoli przekształcać w bardziej formalne, ścisłe i ogólne, uważaliśmy za celowe wzięcie pod uwagę wszystkich wartościowych rozwiązań, także tych naiwnych, nadających się - po stosownej transformacji - do wykorzystania na interesującym nas poziomie. Przy tym w niektórych seriach podręczników, pomiędzy książkami dla trzeciego, czwartego a nawet piątego roku nauczania /już ponadpoczątkowego/ nie ma istotnej różnicy w strukturze czy języku; dla niektórych celów wybór jednej z tych książek jest więc nieistotny, gdy z innych względów dogodniej jest użyć podręcznika dla niższej klasy.

Badając sposób ujęcia określonego tematu w podręczniku, zastosowanie określonego środka graficznego czy językowego itp., należy rozpatrywać je w kontekście wcześniejszego okresu nauczania, który z pewnym przybliżeniem odtworzyć można na podstawie podręczników dla niższych klas. Ze względu na niedostępność źródeł w wielu przypadkach nie udało nam się tego uczynić, co stanowi niewątpliwą wadę metodologiczną pracy.

Z krótkiej charakterystyki przeprowadzonych badań widać, że leżą one z natury na pograniczu dydaktyki matematyki, pedagogiki i psychologii. Lektura tej książki mogłaby też na nie wprowadzonym czytelniku uczynić wrażenie dociekań o charakterze w znacznej części pedagogicznym. Jednak metodologicznie biorąc, wymienione dyscypliny nie są tu traktowane równorzędnie. Wiele poruszonych zjawisk i użytych pojęć opisano ogólnie i zbadano w ramach pedagogiki lub psychologii. Poprzedzenie dokonanych przez nas specyficznych analiz krótką pedagogiczno-psychologiczną charakterystyką tych zjawisk i pojęć było niejednokrotnie konieczne dla należytego przedstawienia problemu. Charakterystyki te odgrywają jednak zawsze rolę z a ł o ż e ń b a d a w c z y c h, nie zaś rezultatu przeprowadzonych badań. Ze względów konstrukcyjnych nie było możliwe zebranie tych założeń na początku pracy; są one wplecione w opisy badań. Sądzimy jednak, że czytelnik wyodrębni je z łatwością.

A oto w zarysie treść książki. We w s t ę p i e (1) dokonujemy dokładniejszego określenia poziomu nauczania, którym się zajmujemy, i ukazujemy jego specyfikę. Wyjaśniamy także, dlaczego potoczne kryteria wartości podręcznika matematyki nie mogą być użyte dla jego naukowej analizy. R o z d z i a ł 2 poświęcony jest próbie opisu typowych aktywności matematycznych występujących w toku procesu nauczania u ucznia 10-12-letniego. Opierając się na danych psychologii rozwojowej, precyzujemy w nim pojęcie aktywności poznawczej w odniesieniu do uczenia się matematyki, a także omawiamy charakterystyczną dla tego przedmiotu aktywność badawczą ucznia na tym poziomie. Jak poprzez podręcznik dostarczyć uczniowi wzorców aktywności rozwijających otwartą postawę wobec problemów, wprowadzających w proces matematyzacji itp. - oto problem, na który staramy się odpowiedzieć tu i w dalszych rozdziałach. R o z d z i a ł 3 odpowiada na pytania, na czym polega i jak przebiega kształtowanie pojęć matematycznych w niższych klasach, jak można wprowadzić je w podręczniku. Definicją ogólną uczeń i tak nie będzie umiał się posługiwać; jak więc, operując tylko przykładami, prawidłowo ukształtować pojęcie? W r o z d z i a l e 4 wyjaśniamy istotę rozumowania prematematycznego, będącego namiastką dowodu jedynie dostępną dla ucznia na rozważanym poziomie, a następnie ukazujemy, jak w różnych podręcznikach uzasadnia się twierdzenia. Rozumowaniu prematematycznemu dziecka towarzyszy zawsze konkretna manipulacja. Czy więc podręcznik jest właściwym środkiem przekazu wzorców takich rozumowań? R o z d z i a ł 5 dotyczy kwestii, kiedy i jak uczyć dzieci rozumienia języka matematycznego dorosłych, oraz jaką rolę może tu odegrać podręcznik. Pewne jest tylko jedno: język ten jest dla większości dzieci niezrozumiały i wymaga podobnego potraktowania jak języki obce. W r o z d z i a l e 6, o treści najdalej wkraczającej na teren pedagogiki, rozważamy doniosłą dla efektywności wszelkich innych środków zastosowanych w podręczniku sprawę środków motywacji psychicznej do jego studiowania. Czy zamiast wprowadzać do podręcznika matematyki z wątpliwym skutkiem kształcącym i wychowawczym tematykę gospodarczą, nie lepiej wykorzystać w nim autentyczne zainteresowania dzieci dla motywacji uczenia się matematyki? R o z d z i a ł 7 omawia zasadniczą w świetle współczesnej wiedzy o nauczaniu matematyki kwestię struktury dydaktycznej podręcznika i języka, jakim operuje. Omówiono tu między innymi szeroko funkcje zupełnie nowej formy tego języka - dialogu. Komiks stanowi ulubioną przez młodzież formę literatury sensacyjnej, przygodowej, romansowej, fantastycznej, a nawet popularnonaukowej. W jakim stopniu celowe byłoby zastąpienie partiami komiksowymi odstręczającego naukową napuszonością tekstu tradycyjnych podręczników? W z a k o ń c z e n i u (8) zebrano i sformułowano wnioski z przeprowadzonych badań, jako zasady konstrukcji podręcznika matematyki dla pierwszej klasy ponadpoczątkowej. Aneksy zawierają wybrane fragmenty analizowanych podręczników.

Dopełnieniem zawartych w książce teoretycznych rozważań, próbą syntezy i konkretyzacji płynących z nich wniosków, jest podręcznik dla IV klasy szkoły 10-letniej w Polsce /Turnau 1978/ jako wynik pracy zespołowej. Nie należy jednak podręcznika tego traktować jako dosłownej i "doskonałej" ilustracji tych wniosków. Jak wspomnieliśmy, wizja dydaktyczna nie określa jednoznacznie jej podręcznikowej realizacji. Mimo że autorzy starali się kierować nakreśloną w tej pracy wizją dydaktyczną, świadomi są nie zawsze dobrych rozwiązań, zwłaszcza po okresie pierwszych prób wykorzystania tego podręcznika w samodzielnej pracy uczniów. Nie ma podręcznika uniwersalnie dobrego. Ale nawet podręcznik "lokalnie" zadowalający może powstać tylko w drodze prób i stopniowych ulepszeń.

1. WSTĘP

1.1. Nauczanie początkowe i ponadpoczątkowe

We wszystkich krajach Europy, a prawdopodobnie w większości krajów świata, system szkolny, o bardzo skądinąd zróżnicowanej strukturze, dzieli się na okres zwany elementarnym lub początkowym, gdzie wszystkich przedmiotów uczy jeden nauczyciel-wychowawca, i okres następny (tu zróżnicowanie struktury jest najsilniejsze), gdzie poszczególnych przedmiotów uczą, w zasadzie, nauczyciele-specjaliści. Pierwszy rok tego drugiego okresu nazwiemy umownie pierwszą klasą ponadpoczątkową. Okres początkowy waha się w poszczególnych krajach, i wynosi:

3 lata (wiek 7-10 lat) np. w systemie szkoły 10-letniej w Polsce, także w ZSRR,

4 lata (wiek 7-11 lat) np. w Czechosłowacji i na Węgrzech,

5 lat (wiek 6-11 lat) (z podziałem na dwa podokresy) np. we Francji,

6 lat (wiek 5-11 lat) (także z podziałem na dwa podokresy) np. w Wielkiej Brytanii.

Pierwsza klasa ponadpoczątkowa jest więc czwartym, piątym, szóstym lub siódmym rokiem nauki dziecka, co stawia pod znakiem zapytania możliwość traktowania jej jako określonego poziomu nauczania, niezależnego od systemu szkoły. Z drugiej jednak strony wiek dzieci w tej klasie różni się tylko o rok: jest to bowiem wiek 10-11 lub 11-12 lat. Przy tym, jak sądzimy (co niżej zostanie uzasadnione), charakter nauczania spowodowany typem wykształcenia nauczyciela odgrywa tu rolę daleko istotniejszą niż długość okresu nauczania poprzedzającego tę klasę. Dlatego w dalszym ciągu pierwszą klasę ponadpoczątkową traktować będziemy jako poziom nauczania porównywalny w różnych krajach.

Jak dotąd, na ogół uważa się, że pierwsza klasa ponadpoczątkowa przypada mniej więcej w ustalonym przez Piageta okresie przełomu w sposobie myślenia, kiedy to "zachodzi w myśleniu dziecka zasadnicza zmiana, która jest uwieńczeniem operacji konstruowanych w okresie drugiego dzieciństwa: przejście od myślenia konkretnego do myślenia 'formalnego', czyli hipotetyczno-dedukcyjnego'/1966, s.67/". Zarówno program nauczania jak i organizacja tego nauczania w pierwszej klasie ponadpoczątkowej stawia dziecko przed koniecznością przekroczenia tego punktu krytycznego w tej właśnie klasie. Dziecko, któremu z tych czy innych względów się to nie uda, padnie nieuchronnie ofiarą tzw. niepowodzenia szkolnego. Przyczyna może leżeć w bardzo wielu czynnikach, wśród których naturalna nierównomierność rozwoju poszczególnych dzieci oraz zbytni przeskok w metodach nauczania i wymaganiach stawianych dzieciom mają chyba największy udział. O ile nie zostaną podważone wyniki badań, prowadzonych ostatnio w Wielkiej Brytanii, według których opisany przez Piageta przełom w myśleniu występuje daleko później niż sądzono dotąd, sytuację ucznia pierwszej klasy ponadpoczątkowej trzeba będzie uznać za dramatyczną.

Według mądrej, głęboko demokratycznej i humanistycznej koncepcji ery powojennej, całe nauczanie matematyki - od przedszkola po uniwersytet - powinno być systematycznym rozwijaniem matematycznych pojęć, rozumowań i metod w sposób dostosowany do aktualnego etapu rozwoju jednostki. Prawo do nauki oznacza prawo do t a k i e j nauki. Wszelkie przeskoki w ujęciach, środkach i metodach nauczania są z tą koncepcją sprzeczne. Sprzeczny z nią byłby więc także przeskok na progu pomiędzy nauczaniem początkowym i pierwszą klasą wyższego cyklu.

Wiele uczyniono wysiłku w kierunku zrozumienia przez nauczycieli klas początkowych orientacji i celów nauczania matematyki, a także stosowanych tu nowych środków. Pomimo tego, że prezentowanych w tej książce badań nie można uznać za zakończone, i dalsze doskonalenie nauczycieli tego poziomu jest niezbędne, mimo że konieczne jest wypracowanie właściwego systemu matematycznego kształcenia nauczycieli tych klas w ramach studiów inicjalnych, trzeba uwzględnić, że w sposobie pojmowania matematyki, a więc i jej nauczania, przez nauczyciela-pedagoga i nauczyciela-matematyka będzie występować zawsze głęboka różnica. Nauczyciel-pedagog będzie rozumiał liczne pojęcia matematyczne nieco naiwnie, w silnym związku z konkretem, nie dostrzegając rozmaitych trudności i pułapek, jakie przynosi posługiwanie się nimi. Być może, ten bliższy dziecięcemu charakter rozumienia matematyki odbija się korzystnie na jej nauczaniu w klasach początkowych, a płynące stąd korzyści przeważają nad skutkami ewentualnych popełnianych przez nauczyciela błędów. Sprawa ta należy do obszernej i trudnej problematyki kształcenia matematycznego nauczycieli klas najmłodszych.

Z uwagi tej wyciągnąć można od razu ważny dla nas wniosek. Jeśli różnica w sposobie podejścia do matematyki nauczyciela w klasach początkowych i w pierwszej klasie ponadpoczątkowej jest naturalną koniecznością, jeśli przeskok w dydaktycznym ujęciu matematyki jest niepożądany, jeśli wreszcie nauczyciel klas początkowych nie może, ze względu na specyfikę swego wykształcenia, zmienić charakteru ujmowania matematyki pod koniec nauczania początkowego, to niezbędne staje się zbliżenie nauczania w pierwszym okresie za tym progiem do nauczania początkowego i stopniowe późniejsze jego przekształcanie w kierunku dalej idących uogólnień i abstrakcji. Stawia to przed nauczycielem matematyki trudne zadanie dydaktyczno-pedagogiczne, w wypełnieniu którego podręcznik uczniowski może być w dużej mierze pomocny. Konieczne staje się więc wypracowanie podręcznika nie tylko poprawnego pod względem matematycznym i dydaktycznym w tradycyjnym rozumieniu tej poprawności, ale uwzględniającego całą tę specyfikę i złożoność problematyki kształcenia matematycznego na tym poziomie.

1.2. Podręcznik „trudny" — określeniem relatywnym

Badania zmierzające do naukowo uzasadnionej konstrukcji podręcznika matematyki dla określonego poziomu nie mogą być prowadzone w kierunku uściślenia i obiektywizacji potocznych określeń "trudny" - "łatwy", "dobry" - "zły" itp. Są to bowiem pojęcia zależne od wielu parametrów, których ustalenie nawet w konkretnej sytuacji i w określonym momencie nie wydaje się możliwe. Pokażemy to najpierw w odniesieniu do określenia "trudny".

Podręcznikiem uczniowskim posługuje się nie tylko uczeń, ale w dotychczasowej praktyce może nawet częściej - nauczyciel, znajdując w nim wzorcowe sformułowania, przykłady, dowody, zadania, środki motywacji itp. a także częściowo inspirację dla organizacji nauczania: kolejność pojęć, proporcje różnych typów ćwiczeń itp. Z tego względu na trudność podręcznika patrzeć trzeba nie tylko z punktu widzenia użytkownika-ucznia, ale z punktu widzenia użytkownika-nauczyciela.

Z punktu widzenia ucznia podręcznik jest trudny, jeżeli jego lektura (czy raczej studiowanie) wymaga dużego skupienia, wielokrotnego powracania do tych samych ustępów, wykonywania wielu ćwiczeń zmuszających do dłuższego namysłu lub niełatwych rachunków itp.; krótko - intensywnej pracy umysłowej. Podręcznik jest łatwy, jeżeli "wszystko jest od razu jasno wytłumaczone", a więc po krótkiej lekturze i zapamiętaniu treści lub sformułowań można tę wiedzę stosować lub na żądanie reprodukować.

Tak rozumiana trudność podręcznika jest, oczywiście, relatywna ze względu na indywidualne uzdolnienia i wiedzę ucznia: podręcznik trudny dla jednego ucznia może się okazać mniej trudny lub łatwy dla innego. Jednak w pewnym stopniu trudność podręcznika może być przez autora zamierzona i zdeterminowana jego budową: tak będzie z natury rzeczy w przypadku ujęć problemowych. Ujęcie problemowe, w którym problemy rozwiązywane przez ucznia i prowadzące go do tworzenia pojęć czy odkrywania twierdzeń dominują nad warstwą informacyjną, ma za zadanie ułatwić kształcenie u uczniów samodzielności i twórczego stosunku do wiedzy. Realizacja tego celu byłaby utrudniona przez nauczanie podające, oparte na podręczniku łatwym, w którym wszelkie ewentualne trudności zostały usunięte lub znacznie ułatwione, gdzie starannie pominięto sytuacje mogące zrodzić wątpliwość lub błąd.

Odkryliśmy więc jeszcze jeden czynnik relatywizujący trudność podręcznika. Podręcznik trudny dla szybkiej percepcji wiedzy może być łatwiejszy dla realizacji nowoczesnych celów kształcenia i na odwrót.

Z drugiej jednak strony trudności w percepcji tekstu będą działały zniechęcająco, czy nawet odstręczająco na ucznia nie umotywowanego we właściwym kierunku, nie umiejącego przyjąć pozytywnej postawy wobec trudności, a tym bardziej na ucznia nie mającego doświadczenia ani wprawy w lekturze tekstu matematycznego, czy wreszcie tego, którego sprawności umysłowe lub wiedza sprawiają, że próg trudności podręcznika jest zbyt wysoki do pokonania. Czy sprzeczność, jaką stanowi pozytywny i negatywny walor problemowego charakteru, a więc i trudności percepcyjnej podręcznika, może być usunięta lub złagodzona w takim stopniu, aby podręcznik problemowy mógł służyć za podstawę samodzielnej pracy każdego ucznia odpowiedniej klasy lub podstawę nauczania? Jest to jedno z pytań, na które będziemy chcieli znaleźć pozytywną odpowiedź.

Przejdźmy do analizy trudności podręcznika z punktu widzenia użytkownika-nauczyciela, posiadającego pełne przygotowanie w zakresie swojego przedmiotu. Dla niego trudności percepcyjne podręcznika są nieistotne, (co wcale nie znaczy, że będzie on mógł natychmiast odpowiedzieć na każde postawione w podręczniku pytanie, rozwiązać bez wahania każdy problem; podręcznik prawdziwie problemowy pozostanie takim nawet dla zawodowego matematyka). Dla nauczyciela podręcznikiem trudnym jest ten, który stwarza trudności przy organizowaniu nauczania na jego podstawie. Tego rodzaju trudność stwarza wielu nauczycielom podręcznik zawierający np. materiał zbyt obszerny, by dał się zmieścić w przewidzianej liczbie godzin. Jednak i w tym znaczeniu trudność podręcznika jest na ogół relatywna.

Trudności związane z organizacją nauczania w oparciu o dany podręcznik zależą od zamierzonej metody i formy tego nauczania, w szczególności od tego, czy te ostatnie są zgodne, czy nie, z dominującym charakterem podręcznika. Jeżeli nauczyciel zamierza organizować nauczanie w sposób problemowy, to podręcznik problemowy może w dużej mierze ułatwić realizację tego zadania. Problemowy układ podręcznika w sposób bardziej lub mniej jawny odzwierciedla dialog autora z uczniami, często będący rekonstrukcją autentycznych sytuacji w klasie, z uwzględnieniem trudności, jakie tam wystąpiły, oraz z wykorzystaniem błędów popełnionych przez uczniów. Rzecz jasna, próba wyreżyserowania lekcji w kierunku możliwie dosłownego odtworzenia zarysowanego w podręczniku dialogu mogłaby dać rezultat będący zaprzeczeniem nauczania problemowego. Jednak problemowy tekst podręcznika daje co najmniej propozycje sytuacji problemowych, które mogą być przez nauczyciela odtworzone w klasie i dalej już rozwijane w naturalnym jego dialogu z uczniami lub w samodzielnej pracy uczniów. Doświadczenie autora wskazuje, że samodzielne znalezienie stosownych sytuacji problemowych przekracza możliwości bardzo wielu nauczycieli, sprawiając tym samym, że problemowe organizowanie nauczania matematyki w oparciu o podręcznik tradycyjny, informujący, a więc "łatwy", okazuje się dla nich bardzo trudne.

I na odwrót, jeżeli nauczyciel naucza z przewagą metod podających, to opieranie się na podręczniku problemowym, zmuszającym do rekonstrukcji zawartych w nim treści matematycznych i budowania z nich innego układu dydaktycznego, a także doboru i odpowiedniego ułożenia zadań i ćwiczeń, będzie stanowiło dodatkową trudność. Podręcznik problemowy będzie wówczas dla nauczyciela trudny, łatwym zaś okaże się tradycyjny.

1.3. Podręcznik „dobry" — określeniem relatywnym

Usiłowanie skonstruowania teoretycznego choćby modelu podręcznika "doskonałego" dla danego poziomu byłoby fikcją, stwarzającą jedynie pozór zbliżenia się do nieistniejącego ideału. Oto bowiem tylko cztery spośród wielu czynników, od których zależy przydatność podręcznika jako środka nauczania.

1) O treści i strukturze podręcznika decydować musi przede wszystkim struktura szkolnictwa i cele kształcenia. Współcześnie w różnych krajach są one bardzo różne, a w każdym kraju, także w Polsce,ulegają zmianom ewolucyjnym, niekiedy nawet rewolucyjnym. Na przykład w szkolnictwie angielskim - mimo dużych zmian w ostatnim dwudziestoleciu - dzieci w 11 roku życia przechodzą nadal przez egzamin selekcyjny, po którym są kwalifikowane bądź do "modern school" - średniej szkoły dla mas, bądź do jednej ze szkół o wyższym poziomie nauczania, do których przyjmowane są tylko dzieci uznane za zdolne. Cele kształcenia w "modern school" nie przewidują przygotowania ucznia do studiów wyższych, co daje ogromną swobodę w doborze treści nauczania i ich ujęcia w podręczniku. Można więc cały nacisk położyć tu na aktywizację każdego ucznia według jego chęci i możliwości, bez potrzeby uwzględniania wymogów wyższego szczebla kształcenia. Z drugiej strony programy i podręczniki dla uczniów uzdolnionych mogą być nastawione na w miarę szybki rozwój myślenia ścisłego, abstrakcyjnego, mogą od początku wprowadzać konwencjonalny język matematyki itd., nie licząc się z trudnościami, które napotkałby przy takim ujęciu uczeń słabszy. Rzecz jasna, "dobry" podręcznik dla szkół angielskich nie będzie dobry dla szkoły polskiej.

Rodzaj i hierarchia bezpośrednich celów nauczania matematyki mają również poważny wpływ na strukturę i treść podręcznika. Dla przykładu rozpatrzmy zagadnienie kształcenia sprawności w rachunku numerycznym. Kiedyś był to główny cel nauczania matematyki, w każdym razie w ciągu pierwszych sześciu lat nauczania. W ostatnim dziesięcioleciu pojawiła się silna tendencja do znacznej redukcji ćwiczeń w rachunku pisemnym, tłumacząca się m.in. wejściem na rynek tanich elektronicznych kalkulatorów kieszonkowych. Obecnie tendencja ta osłabła, a nawet można zauważyć pewien nawrót do rachunku, głównie pamięciowego. Jest jasne, że stanowisko wobec tej sprawy w bardzo istotny sposób musi wpływać na zawartość, a może także strukturę podręcznika. Cytowane w tej pracy podręczniki angielskie /P a l i n g 1972/ nie wprowadzają wcale pisemnych algorytmów rachunkowych, których miejsce zajęły tabele i nomogramy. Uczeń rozwiązuje tu ćwiczenia rachunkowe z pomocą tych środków, bądź pamięciowo. W jeszcze silniejszym stopniu na budowę podręcznika wpływać musi stosunek autora do dedukcyjnego organizowania materiału, źródła toczących się wciąż ostrych polemik. Podobne przykłady można z łatwością mnożyć.

2) W wielu krajach, w tym również w Polsce, autor podręcznika jest krępowany narzuconym z góry szczegółowym programem nauczania. Program zaś decyduje nie tylko o treści podręcznika; wpływa on, a przynajmniej powinien wpływać na jego strukturę. Inaczej bowiem będzie ujęty w podręczniku program obszerny, wymagający od ucznia szybkiego zapamiętania wielu rzeczy, inaczej zaś program skromny, dający nauczycielowi dużo czasu na opracowanie poszczególnych tematów i dużą swobodę manewru. Różnice w strukturze podręcznika będą zapewne jakościowe, a nie określone tylko proporcjami liczbowymi.

Struktura podręcznika wiąże się też ze strukturą programu, w szczególności sposobem uwzględnienia w programie indywidualnych różnic uzdolnień i zainteresowań uczniów. Niekiedy system nauczania przewiduje tak zwane zajęcia fakultatywne, odbywające się poza godzinami przeznaczonymi dla wszystkich uczniów, i program określa treść tych zajęć, będącą poszerzeniem lub przedłużeniem materiału wspólnego. Wówczas autor podręcznika staje przed trudnym zadaniem takiego zorganizowania materiału, by praca na lekcjach wspólnych mogła odbywać się w rytmie dla wszystkich uczniów dostępnym, a przede wszystkim, by maksymalnie uaktywniała i rozwijała tych uczniów, którzy w matematycznych zajęciach fakultatywnych nie będą uczestniczyć. Jednocześnie materiał wspólny powinien podsuwać lub niekiedy formułować problemy otwarte, dalsze kierunki rozwijania teorii itp., które byłyby przedmiotem zajęć fakultatywnych. Konstrukcja dobrego, a więc aktywizującego, a przynajmniej dającego materiał do aktywizacji uczniów podręcznika w tym układzie wydaje się szczególnie trudna.

3) Treść, struktura i język podręcznika w ogromnym stopniu powinny zależeć od kształtu podręczników dla wcześniejszych i późniejszych pozio-

mów nauczania. Nieuwzględnianie tego (przykłady łatwo wskazać) powoduje, że kształtowanie pojęć odbywa się ani nie liniowo, ani nie spiralnie, ale całkowicie chaotycznie. Łatwo doprowadzić tu do sytuacji, w której uczeń poznaje po raz drugi to samo pojęcie, będąc przekonany, że uczy się rzeczy całkowicie nowej, o której nigdy nie słyszał. Łatwo też o sytuację odwrotną - pomieszanie w umyśle ucznia pojęć zupełnie różnych.

Mówiąc o wzajemnej korelacji podręczników dla różnych klas nie można jednak ograniczać się do uwzględnienia ich treści merytorycznej. Podręcznik może bowiem też być podstawą dla poznania specyficznego języka matematyki, w tym języka symbolicznego i różnych form przedstawienia graficznego struktur. Podręcznik może uczyć schematów rozumowania, specjalnych algorytmów itp. Podręcznik wreszcie, z natury rzeczy, niezależnie od ewentualnych wskazań programu, kładzie nacisk na jedne sprawy, lżej traktuje inne. Właściwa realizacja tych funkcji podręcznika wymaga jego głębokiej strukturalnej korelacji z podręcznikami zarówno dla wyższej jak i dla niższej klasy.

Najlepszym bodaj rozwiązaniem, zabezpieczającym niemal całkowicie przed izolacją podręcznika w jakimkolwiek jego aspekcie, jest tworzenie przez zespoły autorów całych serii podręczników dla określonego szczebla nauczania. (I tu jednak wartość serii zależy od kształtu podręczników stosowanych na niższym i wyższym szczeblu). Rozwiązanie to jest już zasadą stosowaną przez wydawnictwa wielu krajów. Nie wnikając w przyczyny, dla których nie przyjęło się ono dotychczas w Polsce, zauważmy tylko, że z tego punktu widzenia można by mówić jedynie o wartości dydaktycznej serii, a nie - wchodzących w jej skład poszczególnych podręczników.

4) Na koniec - sprawa cech indywidualnych, "piętna autorskiego" w podręczniku. Pogląd na to, jak dalece odrębność podręcznika, wynikająca z osobistych predylekcji, stylu języka, zapatrywań itp. autora bądź kierownika zespołu autorskiego, jest pożądana z punktu widzenia efektywności kształcenia, nie jest jednolity. Niewątpliwie, jakieś miejsce dla swobodnej prezentacji własnych koncepcji jest konieczne, choćby dla zapewnienia prawidłowego rozwoju dydaktyki matematyki. Czy jednak podręczniki seryjne, tworzone jako rozwinięcie programu i podporządkowane określonemu systemowi nauczania, powinny być, jak się niekiedy obserwuje, pozbawione wszystkiego, po czym rozpoznać można autora? Oczywiście, o tego rodzaju postulacie nie ma mowy tam, gdzie o produkcji podręczników decydują przede wszystkim względy komercyjne; podręcznik oryginalny ma większą szansę na podbicie rynku, niż podręcznik "szary", choćby dydaktycznie bardzo dobry. Tam jednak, gdzie centralne planowanie i państwowa produkcja umożliwia wydanie wyłącznie najlepszych pozycji, zajęcie w tej sprawie stanowiska jest niezbędne.

2. AKTYWNOŚĆ MATEMATYCZNA UCZNIA

2.1. Aktywność ucznia w teorii i praktyce nauczania

Nauczanie matematyki (i nie tylko matematyki) rozumie się współcześnie niemal powszechnie jako organizowanie uczenia się, tj.organizowanie takiej aktywności intelektualnej i fizycznej ucznia, w toku której następuje kształtowanie pojęć, dostrzeganie, rozumienie i przyswajanie ich własności, wreszcie opanowywanie określonych umiejętności. Dobre nauczanie oznacza m.in. właściwe dostosowanie organizowanych aktywności uczniów do założonych z góry celów nauczania.

W ciągu ostatnich kilkunastu lat zrobiono wielki wysiłek dla sprecyzowania celów i bezpośrednich wyników nauczania matematyki, jednakże nadal występują odnośnie nich znaczne rozbieżności poglądów, spowodowane zresztą różnorodnymi czynnikami. Rozbieżności te są dodatkowo bardzo znacznie spotęgowane przez przepaść dzielącą cele postulowane i cele realizowane w podręcznikach i w praktyce nauczania. Sytuację tę charakteryzuje D.A. Quadling w Sprawozdaniu dla III Międzynarodowego Kongresu Nauczania Matematyki w Karlsruhe w roku 1976 na temat kształcenia matematycznego na poziomie liceum i klas pomaturalnych:

> I tak, podczas gdy określenie celów jest ważne dla reformatorów, osób zajmujących się kształceniem nauczycieli, twórców programów nauczania i autorów podręczników, stwierdza się, że wielu uczniów i ich nauczycieli ukierunkowuje swą pracę na cele znacznie bardziej ograniczone: mianowicie na przyswojenie wiadomości i sprawności wymienionych w programie i podręczniku oraz nabycie umiejętności stosowania ich w pewnych specyficznych sytuacjach. Te aspekty kształcenia matematycznego, których nie dało się wtłoczyć do podręcznika i zbioru ćwiczeń i których nie bada się w czasie egzaminów, nie mają szans na zajęcie istotnego miejsca w nauczaniu matematyki na tym poziomie.

Opis ten wydaje się odpowiadać w większym nawet stopniu praktyce nauczania matematyki na niższych szczeblach. Lekcja matematyki jest tu ukierunkowana wyłącznie na jak najszybsze, najtrwalsze i najbardziej niezawodne opanowanie przez uczniów łatwo dających się określić sprawności i wiadomości wraz z ich stosowaniem w stereotypowych sytuacjach, a umiejętności nauczyciela i jakość jego pracy mierzy się stopniem osiągnięcia tego celu, wyrażającym się zarówno poprawnością odpowiedzi uczniów, jak i liczbą uczniów, którzy osiągnęli wymagany stopień opanowania materiału. Przy tym stwierdzić trzeba, że wzorcem dla tak zorientowanego nauczania jest na ogół podręcznik, nastawiony całkowicie na "przystępne" wprowadzenie określonych programem pojęć, ich własności, operacji, reguł postępowania itp. oraz dostarczenie materiału ćwiczeniowego ułatwiającego ich opanowanie.

Ten stan rzeczy pozostaje w oczywistej sprzeczności z zyskującymi coraz szerszą akceptację postulatami, jakie wysuwa się w stosunku do powszechnego kształcenia matematycznego młodzieży do lat 16, a więc kształcenia mającego służyć nie tylko przygotowaniu do szkół wyższych szczebli. Tu kształcenie wąskich sprawności i umiejętności powinno być jedynie środkiem dla osiągnięcia celów znacznie ogólniejszych i ważniejszych, które ogólnie scharakteryzować można jako rozwijanie aktywności umysłowych i intelektualizacja postaw. Mówi o tym Z. Krygowska:

> Sformułowania w rodzaju "rozwijanie otwartej postawy wobec problemów", "wprowadzanie w proces matematyzacji"itd. stanowią tylko punkty orientacyjne dla procesu nauczania i punkty zbieżności różnych dróg tego procesu, nigdy nie osiągane definitywnie. Są to cele specyficzne kształcenia matematycznego, do których dążymy w każdym okresie nauczania, jeżeli mu chcemy nadać charakter rozwijający. Cała tajemnica nauczania matematyki tkwi więc w umiejętności ciągłej orientacji na te cele realizacji celów bardziej bezpośrednich /K r y g o w s k a 1976/.

Każdy, kto zna szkołę, wie, że na radykalną zmianę orientacji nauczania i jego oceny nie może wpłynąć ani formułowanie ogólnych celów kształcenia matematycznego, ani instruowanie nauczycieli, jak je realizować, jeżeli takiej nowoczesnej orientacji nie będzie reprezentował podręcznik, używany w klasie przez uczniów i nauczyciela. Jeżeli więc za główny cel nauczania stawiamy sobie kształcenie u uczniów pojęć i rozumowań typu matematycznego, to podręcznik musi przede wszystkim wprowadzać w pojęcia i rozumowania typu matematycznego, nie zaś tylko wprowadzać i wyjaśniać nową terminologię oraz instruować o sposobach osiągania określonych wyników w określonych sytuacjach. Podręcznik musi dostarczać wzorców dla takich aktywności uczniów, przez które będzie się "rozwijać otwarta postawa wobec problemów", które będą "wprowadzać w proces matematyzacji" itp. Tylko wówczas istnieje szansa, że zniknie przepaść między postulowanymi i realizowanymi celami nauczania matematyki.

Postulat aktywności ucznia w procesie nauczania (a więc i uczenia się) jest od dawna zaliczany przez pedagogikę do podstawowych zasad nauczania. Pedagogika ujmuje jednak tę aktywność ogólnie, jako poznawczą, w której "podstawową rolę odgrywają porównywanie, analiza i synteza, abstrahowanie i uogólnianie, rozumowanie indukcyjne i dedukcyjne" /U r b a ń c z y k 1960, s.105/. Odkryciem dydaktyki matematyki jest to, że organizowana przez nauczyciela aktywność ucznia może być podyktowana przez operacje tkwiące w samej matematyce. Może więc ona składać się z "czynności konkretnych, wyobrażonych, czy pomyślanych, które mogłyby się stać bądź pierwszym ogniwem przyspieszonej w procesie nauczania interioryzacji, prowadzącej do abstrakcyjnych operacji występujących w danej sytuacji matematycznej, bądź mogłyby służyć jej upoglądowieniu czy etapowej konkretyzacji myśli ucznia - łatwo gubiącej się w rozumowaniu bez takiej chwilowej stabilizacji -

czy wprawieniu w ruch tego rozumowania, do czego właśnie jakaś konkretna czy wyobrażona czynność wystarcza, itp." /K r y g o w s k a 1977, s.93/. Do prawidłowego doboru takich aktywności prowadzi więc "dydaktyczna analiza danej sytuacji matematycznej /.../[4] mająca na celu ujawnienie tych czynności /.../" (tamże). Wprowadzone przez Z.Krygowską dydaktyczne pojęcie czynnościowego nauczania matematyki jest więc pojęciem istotnie nowym, nie mieszczącym się w ogólnym pojęciu nauczania opartego na aktywności uczniów. "Czynnościowe nauczanie matematyki jest postępowaniem dydaktycznym uwzględniającym stale i konsekwentnie operatywny charakter matematyki równolegle z psychologicznym procesem interioryzacji prowadzącym od czynności konkretnych i wyobrażeniowych do operacji abstrakcyjnych" (tamże, s.127).

Przez aktywność matematyczną ucznia rozumieć tu będziemy aktywność skierowaną na kształtowanie pojęć i rozumowań typu matematycznego, stymulowaną przez problemy abstrakcyjne lub problemy teoretyczne dotyczące sytuacji konkretnych.

2.2. Aktywność matematyczna dorosłego i dziecka

Aktywność matematyczna dziecka 10-12-letniego jest różna zarówno od aktywności matematycznej ucznia klas początkowych, jak i od tej, do której zdolny jest uczeń klasy VI i wyższych. Wynika to z bardzo istotnej zmiany, jaka zachodzi w tym okresie w myśleniu dziecka: z myślenia "konkretnego" staje się ono myśleniem "formalnym" czyli "hipotetyczno-dedukcyjnym". Oznacza to, że "logiczne operacje zaczynają być transportowane z płaszczyzny konkretnej manipulacji na płaszczyznę samych idei, wyrażonych w jakimkolwiek języku /.../, ale pozbawionych oparcia w percepcji doświadczeniu czy nawet przeświadczeniu" /P i a g e t 1966, s.68/. Odrębność aktywności matematycznej dziecka w tym okresie będzie się więc zaznaczać dwiema istotnymi cechami: po pierwsze - stale rosnącą dostępnością rozumowań abstrakcyjnych, i po drugie - brakiem doświadczenia i nawyków niezbędnych do operowania takimi rozumowaniami na sposób dorosłego. Niektóre aktywności, stanowiące u dorosłego jeden akt myśli, u dziecka w tym okresie będą się składały z oddzielnych etapów, z których każdy wymaga pokonania innych trudności. Tak na przykład dostrzeżenie wspólnej struktury kilku sytuacji (dla wykorzystania tej obserwacji i nabytego doświadczenia w rozwiązaniu nowego problemu) i jej ogólny opis (rysunkowy, werbalny czy symboliczny) stanowi u dorosłego praktycznie jeden akt: uważamy uogólnienie za dokonane, gdy zostanie opisane, zaś posługiwanie się uogólnieniem utożsamiamy z posługiwaniem się jego zewnętrzną formą. Tymczasem doświadczenie uczy, że u dziecka w omawianym okresie dostrzeżenie wspólnej struk-

[4] Kropki w nawiasach ukośnych wskazują opuszczenia w cytowanym tekście.

tury i możliwość jego wykorzystania w nowej sytuacji występuje przed umiejętnością opisania tej struktury w jakimkolwiek języku, w szczególności w konwencjonalnym języku matematyki zawierającym zmienne, a także umiejętnością skorzystania z takiego gotowego opisu. Stwierdza to wyraźnie J.Bruner /B r u n e r 1964, s.41/:

> Gdy dziecko jest jeszcze w etapie operacji konkretnych, potrafi ono uchwycić intuicyjnie i konkretnie wiele podstawowych pojęć z zakresu matematyki, nauk przyrodniczych, humanistycznych i społecznych, lecz jedynie w kategoriach operacji konkretnych. Można wykazać, że dzieci w piątej klasie potrafią opanować gry matematyczne, których reguły oparte są na matematyce wyższej: istotnie, umieją one dojść, w drodze indukcji, do tych reguł i nauczyć się stosować je w praktyce. Jednakże byłyby bezradne, gdyby ktoś próbował narzucić im formalny, matematyczny opis tego, co robiły, chociaż w swoim zachowaniu doskonale potrafią kierować się tymi regułami /.../. Później, gdy dzieci osiągną odpowiedni etap rozwoju i nabędą wprawy w operacjach konkretnych, będzie czas zapoznać je z niezbędnym aparatem formalnym /.../. Najważniejszym elementem nauczania pojęć podstawowych jest pomaganie dziecku w stopniowym przechodzeniu od myślenia konkretnego do używania bardziej odpowiednich sposobów myślenia. Jednak próżne są starania, by dopiąć tego przez podawanie wyjaśnień formalnych, opartych na logice: jest ona obca umysłowi dziecięcemu, a jej implikacje są dla niego jałowe. Nauczanie matematyki odbywa się przeważnie w ten właśnie sposób. Dziecko, zamiast uczyć się rozumieć istotę stosunków matematycznych, uczy się stosować pewne techniki czy recepty, bez zrozumienia ich sensu i wzajemnego związku. Nie są one przetłumaczone na jego sposób myślenia. Otrzymawszy niewłaściwe początki, dziecko łatwo uwierzy, że najważniejsze dla niego, to "być dokładnym", chociaż dokładność ma więcej wspólnego z rachunkami niż matematykę.

2.3. Aktywności umysłowe dziecka rozwiązującego zadanie matematyczne

Powierzchowna obserwacja lekcji matematyki w szkole podstawowej prowadzi do wyróżnienia rozwiązywania zadań jako najczęściej występującej aktywności uczniów. Dopiero głębsza analiza tego procesu pokazuje, jak bardzo jest on niejednorodny, z jak wielu różnych aktywności umysłowych się składa, jak bardzo zależy zarówno od charakteru zadania jak i od indywidualnego poziomu rozwoju umysłowego ucznia.

Rozróżnimy tu następujące rodzaje aktywności umysłowej ucznia 11 - 12-letniego występujące przy rozwiązywaniu zadań matematycznych:

1) schematyzację i a) przedstawienie rysunkowe, b) opis werbalny skierowany na matematyzację, c) opis symboliczny - sytuacji realnej lub fikcyjnej,

2) rozwiązanie izolowanego zadania,

3) działanie prowadzące do dostrzeżenia i wykorzystania analogii sytuacji lub zadania z poznaną wcześniej sytuacją lub rozwiązanym wcześniej zadaniem,

4) działanie prowadzące do dostrzeżenia i wykorzystania wspólnej struktury kilku sytuacji lub zadań, bądź wspólnej metody postępowania,

5) ogólny opis dostrzeżonej wcześniej wspólnej struktury kilku sytuacji lub zadań, bądź wspólnej metody postępowania,

6) stosowanie ogólnego opisu metody postępowania do rozwiązania zadania posiadającego strukturę pozwalającą na zastosowanie tej metody,

7) odczytywanie tekstu: a) opisu sytuacji, b) zadania, c) rozwiązania, d) opisu ogólnego rodzaju sytuacji, zadania lub metody postępowania.

Wyróżnione aktywności stanowią etapy przygotowania ucznia do matematycznego podchodzenia do problemów, zarówno rzeczywistych jak i teoretycznych. Nie są to etapy w sensie chronologicznym, gdyż jakakolwiek zamierzona izolacja tych aktywności byłaby pryncypialnie błędna. Są one jednak częściowo uszeregowane według przyjętego, na podstawie licznych obserwacji, wzrastającego stopnia trudności dla ucznia 11-12-letniego. Tak np. konstrukcja czy też odczytanie (i wykorzystanie) ogólnego opisu wspólnej struktury jest - jak to już wspomnieliśmy - trudniejsze od jej dostrzeżenia, a nawet wykorzystania tej obserwacji. Świadom tych trudności, a jednocześnie konieczności stopniowego ich pokonywania dla wykształcenia u uczniów otwartej postawy wobec problemów i wyposażenia ich w niezbędne umiejętności heurystyczne, nauczyciel może do pewnego stopnia manipulować tymi aktywnościami przez odpowiedni dobór zadań i sposobu ich sformułowania. Pokażemy to na przykładach.

2.4. Różne poziomy aktywności na jednej lekcji matematyki (przykład)

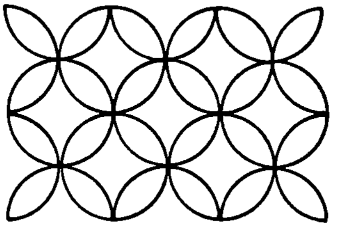
Przykładem organizowania przez nauczyciela aktywności różnych poziomów przez formułowanie serii zadań dotyczących tej samej sytuacji jest następująca propozycja dydaktyczna, wypróbowana zresztą w klasie /T u r n a u 1974/.

Dzieci mają do dyspozycji wzór jak na rys.1, szablon jak na rys.2, papier i ołówek.

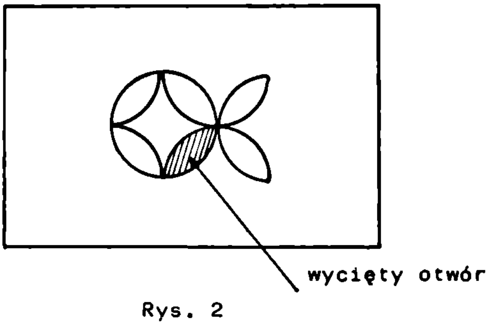
P r o b l e m I. Wyobraź sobie, że jesteś malarzem pokojowym. Dostałeś zamówienie pokrycia ściany tym oto wzorem za pomocą otrzymanego szablonu.

Rozwiązanie tego problemu przez dziecko będzie się składać z następujących po sobie przewidywań, prób ich realizacji, korekty przyjętych hipotez, aż do ustalenia algorytmicznego programu postępowania. Niektórzy uczniowie będą - być może - próbowali uprościć, zracjonalizować znaleziony już program. Po zakończeniu tej pracy dziecko będzie umiało na żądanie zademonstrować swoją metodę, nie będzie jednak przygotowane do jej opisania. Będzie to więc aktywność typu 4.

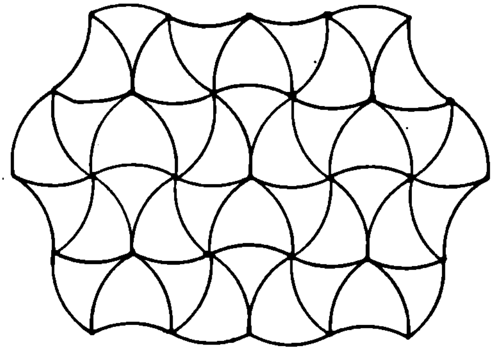
Sformułowanie opisu wykrytej metody postępowania, tj. aktywność typu 5, wymaga pokonania innego typu trudności, do czego konieczna jest motywacja w postaci nowego interesującego problemu. Opis powinien być two-



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

rzony z perspektywą wykorzystania go w sposób jedynie właściwy:dla utrwalenia dokonanego odkrycia lub przekazania go innej osobie. Drugi problem będzie więc problemem komunikacji.

P r o b l e m II. Już wiesz, jak rysować ten wzór. Lecz masz też pomocnika, który będzie się posługiwał tym samym szablonem. Musisz mu wytłumaczyć swoją metodę. Spróbuj sformułować dla niego instrukcję, możliwie krótkę i łatwą do zrozumienia.

. Problem jednoznacznego opisu operacji wykrytej w wyniku poszukiwań czy eksperymentu, bądź poznanej w drodze obserwacji w dotychczasowym nauczaniu stawiano u nas wyraźnie dopiero na poziomie klas licealnych. W tej formie może on być postawiony już znacznie wcześniej.

Dyskusja nad zaproponowanymi przez uczniów opisami może dytyczyć zarówno opisywanego algorytmu (jego poprawności i prostoty) jak i samego opisu (jego jednoznaczności, jasności, zwięzłości, użytej terminologii, symboliki itp.). Będzie to więc aktywność skierowana na świadome tworzenie przez uczniów ogólnego sformułowania. Użyte litery i symbole będą naturalnym wynikiem potrzeby i jako takie powinny być przez uczniów bez trudu zaakceptowane i rozumiane.

Po rozwiązaniu podobnego P r o b l e m u III, dotyczącego innego ornamentu (rys.3), uczniowie otrzymuję problem IV.

P r o b l e m IV. Jaka jest istotna różnica między pierwszą a drugą instrukcją?

Odpowiedź na to pytanie (o różnicy decydują obroty czwartego rzędu i trzeciego rzędu w grupach pierwszego i drugiego ornamentu) wymaga odczytania tekstów obu instrukcji dla dokonania ich analizy i porównania. Jest to więc aktywność 7 z naszej listy. Trzeba podkreślić, że lektura nie ma tu na celu przyswojenia określonej wiedzy, ale jest etapem pracy badawczej. Zrozumienia tekstu przez ucznia nie musi sprawdzać nauczyciel; zrobi to sam uczeń, porównując swój wynik z wynikami kolegów. Rozwiązując ten problem uczniowie raz jeszcze przekonają się o celowości precyzyjnego opisu i dogodności opisu symbolicznego.

Wreszcie problem wymagający korzystania z gotowego opisu ogólnego (tu: instrukcji kreślarskiej), a więc aktywności 6:

P r o b l e m V. Narysuj dwa proste wzory zbudowane z odcinków, które można by rysować za pomocą szablonu według tych samych instrukcji, które przygotowałeś dla otrzymanych wzorów.

Rozwiązanie może polegać na wycięciu w szablonie dowolnej figury o brzegu złożonym z odcinków i narysowaniu fragmentu ornamentu tym szablonem według jednej z instrukcji. Wprawdzie uczeń będzie tu odczytywał nie tekst nowy, ale dobrze znany, bo własny, jednak rozwiązanie zadania będzie wymagało posłużenia się tym tekstem, i to w sposób autentyczny: nie będzie tu ani potrzebne, ani możliwe odwoływanie się do innych źródeł informacji, (np. przykładów wzorcowych), co dzieje się często, gdy uczeń ma wykonać zadanie według danego ogólnego przepisu, definicji czy twierdzenia, których nie może zrozumieć.

2.5. Trudności dziecka w rozumieniu pisanego tekstu matematycznego

Czytanie i pisanie jest - jak określił Wygotski-"abstrakcją drugiego stopnia". Słowo mówione "zastępuje"(tj. desygnuje) określony przedmiot, stan lub pojęcie (tj. myśl). Słowo pisane zastępuje zaś (tym razem w dosłownym sensie) słowo mówione. Fakt ten jest zapewne głównym powodem, choć nie jedynym, dla którego czytanie i pisanie jest umiejętnością daleko trudniejszą od słuchania i mówienia.

Przy wypowiedzi ustnej jest obecny słuchacz - jej adresat. Dialog odbywa się więc zawsze w określonych warunkach społecznych, które w dużej mierze sterują wypowiedziami. Rozmówca przez swoje natychmiastowe reakcje na wypowiedzi wpływa na treść i formę następnych, ułatwiając konstruowanie wypowiedzi optymalnych dla ich funkcji komunikatywnej. Piszący nie ma czytelnika, który by mu na gorąco pomagał w konstrukcji tekstu. Może go sobie jedynie wyobrazić, a kontrolę nad komunikatywnością tekstu musi przejąć sam. Czytelnik z kolei nie może tekstu przystosować do swoich potrzeb, musi go odczytać i zrozumieć w postaci zamyślonej przez autora, nie zawsze dla niego optymalnej.

Innym ważkim czynnikiem wpływającym na większe trudności odbioru przekazu pisanego jest brak występujących przy mówieniu ubocznych środków wyrazu, takich jak mimika i gest.

Wreszcie, w przypadku uczniów 10-11-letnich, czynnikiem często decydującym o możliwości lub niemożności zrozumienia tekstu jest stopień opanowania techniki czytania. Jeżeli wziąć pod uwagę, że dziecko takie ma za sobą 10 lat nauki łatwiejszej sztuki mówienia i słuchania i tylko 3 lata nauki trudniejszego czytania, to jasna się stanie doniosłość tego czynnika. Wiadomo z praktyki, że wiele dzieci klasy IV nie czyta biegle. Te zaś nawet, które technikę głośnego czytania opanowały zadowalająco, zbyt wiele wysiłku muszą poświęcić na samo odczytywanie tekstu, by wystarczyło go na logiczną analizę tekstu w celu zrozumienia treści.

W rezultacie, jak wykazały próby, dla większości dzieci w tym wieku tekst matematyczny, a więc taki, w którym występują sformułowania ogólne (tym bardziej, gdy użyto w nim zmiennych) nie jest w pełni zrozumiały, tj. jego rozumienie nie wystarcza dla poprawnego wykorzystania zawartych w nim informacji. Autorzy podręczników, w których znajdują się tego rodzaju ustępy, bądź ignorują te fakty, bądź też świadomie podręcznik uczniowski adresuję w części nie do ucznia, lecz do nauczyciela (cel takiej decyzji nie byłby wcale sam przez się oczywisty i wymagałby osobnej analizy).

Dla przykładu zacytujemy fragment podręcznika dla klasy III H.Moroza: Nasza matematyka /1975, s.48/:

Niech a oznacza liczbę elementów zbioru Z, b liczbę elementów zbioru D. Zbiory Z i D nie mają elementów wspólnych. W zbiorze Z ∪ D jest a + b elementów. W zbiorze D∪Z jest b+a elementów. Wiemy już, że tworząc złączenie D∪Z otrzymaliśmy ten sam zbiór, więc liczba a + b jest równa liczbie b+a. Tę własność ma każda para liczb.

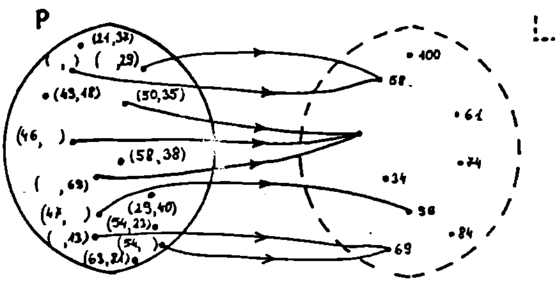
$$Z \cup D = D \cup Z$$
$$a+b = b+a$$

Dodawanie liczb jest przemienne.

Dobraliśmy tu celowo przykład ekstremalny. Tekst zawiera bowiem sformułowane z użyciem zmiennych rozumowanie oparte na przechodniości równości, z pewnością w tej formie i w l e k t u r z e niedostępne dla większości dzieci trzeciej klasy.

A oto tekst zadania z tego samego podręcznika:

Elementami zbioru P są pary liczb. Elementami zbioru L są liczby. Suma liczb zapisanych na początku czerwonej strzałki równa się liczbie zapisanej na końcu tej strzałki. Wykonaj rysunek w zeszycie. Narysuj wszystkie strzałki i uzupełnij brakujące liczby. Czy istnieje w zbiorze L liczba, do której nie dochodzi żadna strzałka? Czy w zbiorze P istnieje para liczb, z której nie wychodzi żadna strzałka? Wyjaśnij, dlaczego? (s.11)



Jest to zadanie w pełni dostępne dla większości dzieci III klasy, jednak pod warunkiem, że rysunek będzie z nauczycielem zanalizowany, a każde polecenie formułowane oddzielnie i zaraz realizowane lub badane. Nie wydaje się jednak, by tekst ten mógł stanowić podstawę dla samodzielnej pracy ucznia: zawiera zbyt wiele informacji, poleceń i pytań na raz.

Nie tylko więc zmienne i ogólne sformułowania stanowią dla dziecka przeszkodę w zrozumieniu tekstu, ale także brak opanowania techniki czytania, pozwalającej analizować tekst i korzystać w pracy z odpowiednio wybranych jego fragmentów. Dodajmy, że z tą trudnością, w odpowiednio zmienionej skali, nie może się uporać także wielu uczniów szkoły średniej.

2.6. Podsumowanie

Wnioski wypływające z rozważań na temat aktywności matematycznej ucznia:

1. Tradycyjne nauczanie matematyki, nastawione na szybkie i trwałe wpojenie uczniom wiedzy i umiejętności matematycznych, nie realizuje formułowanych obecnie celów kształcenia matematycznego, w szczególności nie rozwija u uczniów aktywności intelektualnych, typowych dla matematyki.

2. Pomiędzy poznaniem matematycznym dorosłego i dziecka, nawet w odniesieniu do jednej i tej samej sytuacji problemowej, występują głębokie różnice. W szczególności przekaz językowy, mający dla dorosłego zasadnicze znaczenie, odgrywa w przypadku dziecka wchodzącego dopiero w okres myślenia abstrakcyjnego rolę daleko mniejszą. Usiłowanie wprowadzenia w myślenie abstrakcyjne za pośrednictwem formalnych wyjaśnień kończy się na ogół opanowaniem nierozumianych i izolowanych technik i recept.

3. Podstawową drogą stopniowego przechodzenia od myślenia konkretnego do abstrakcyjnego jest rozwiązywanie problemów dotyczących sytuacji konkretnych, gdzie poszczególne operacje mogą być imitowane z pomocą odpowiednio dobranego materiału. Stworzona sytuacja problemowa powinna przy tym umożliwiać stopniowanie abstrakcyjności pytań a także poszukiwanie rozwiązań z różnym stopniem ogólności i różnymi środkami.

3. PODRĘCZNIK A KSZTAŁTOWANIE POJĘĆ MATEMATYCZNYCH

3.1. Pojęcia matematyczne i ich kształtowanie u dziecka

Pojęcie matematyczne wiąże się dla matematyka nierozerwalnie z jego definicją. Zdaje on sobie wprawdzie sprawę z tego, że pewna liczba pojęć teorii, którą się zajmuje, to pojęcia niezdefiniowane, rozumiane "intuicyjnie" w przypadku teorii naiwnej, i przyjętych formalnie jako pierwotne w torii aksjomatycznej, jest ich jednak niewiele i na ogół nie one, ale właśnie te zdefiniowane są przedmiotem badań. Matematyk widzący nauczanie tylko w perspektywie uprawianej przez siebie nauki na ogół niechętnie i tylko pod naciskiem pedagogicznej argumentacji o niedostępności definicji dla ucznia godzi się na operowanie w nauczaniu licznymi pojęciami bez ich definiowania; zwłaszcza tam, gdzie określenie jednych za pomocą innych daje się sformułować w sposób pozornie łatwy. Kiedy indziej zaś, gdy definicja okazuje się dostępna (uczeń, po zapoznaniu się z nią, umie w łatwym przypadku rozstrzygnąć, czy badany obiekt pod nią podpada) matematyk ten jest skłonny uważać takie zrozumienie i zapamiętanie definicji za równoznaczne z poznaniem przez ucznia pojęcia. Stosuje przy tym analogię z własną aktywnością badawczą lub samokształceniową.

W istocie, definicja zdaje się być podstawą wszelkich rozumowań matematycznych, zwłaszcza w początkowym stadium rozwoju teorii. Niewątpliwie też na pewnym etapie rozwoju myślenia w ogóle i dojrzałości matematycznej definicja może być głównym sposobem poznawania nowych pojęć, niekiedy nawet ich tworzenia. Zanim jednak etap ten nadejdzie, elementarne pojęcia matematyczne muszą się kształtować na drodze nieformalnej, zbliżonej do tej, na której powstają i inne pojęcia ogólne. Droga ta może, ale nie musi, być zorientowana na określoną definicję matematyczną; może, ale nie musi, być taką definicją zamknięta. Już dziś wiadomo, że w okresie reform "pierwszej fali", których jednym z najważniejszych haseł było maksymalne zbliżenie nauczania szkolnego do matematyki-nauki, popełniono wiele błędów przez niewłaściwą interpretację tego hasła, a m. in. przez przesadną i jednostronną orientację formowania pojęć na ich "współczesne" ujęcie w matematyce. Obecnie zarysowuje się w niektórych ośrodkach dydaktyki matematyki (np. IOWO w Utrechcie), a także w nauczaniu w niektórych krajach (np. w Anglii i Holandii), wyraźna tendencja do tworzenia dla pojęć matematycznych bardzo szerokiej bazy intuicyjnej, nie usystematyzowanej w zamierzony sposób zgodnie z określoną teorią matematyczną, i to nie tylko w szkole elementarnej, ale również na początku nauczania średniego. Być może, etap ten należałoby uznać nie za kształcenie matematyczne, ale za wstęp do niego, lub - jak proponuje Z. S e m a d e n i /28/ - utworzone w ten sposób pojęcia za prematematyczne (autor ten podkreśla jednocześnie, że prematematyka jest zarazem fragmentem i sposobem uprawiania matematyki). W każdym jednak razie uważa się dziś coraz powszechniej, że etap ten jest konieczny poniżej pewnego stopnia dojrzałości uczniów (której moment bywa przyjmowany arbitralnie i bardzo różnie), a w stosunku do niektórych pojęć nawet na wyższych szczeblach nauczania.

Nie wnikając głębiej w istotę rozumienia pojęć matematycznych - przedmiot jednego z najtrudniejszych problemów psychologii poznania i dydaktyki matematyki, zauważmy, że rozumienie to wymaga dysponowania dostatecznie ostrym kryterium rozróżniania obiektów podpadających i nie podpadających pod pojęcie. W "dojrzałej" matematyce rolę tę pełni definicja. Co służy za kryterium rozróżniania na etapie prematematycznym? Nie wydaje się, by znalezienie pełnej odpowiedzi na to pytanie było łatwe. W literaturze opisano liczne fakty bezbłędnego operowania przez uczniów abstrakcyjnym pojęciem, a więc rozróżniania obiektów wchodzących i nie wchodzących w jego zakres, mimo iż żadne jednoznaczne i obiektywne kryterium rozróżniania nie zostało do końca sformułowane /P a p y 1968, rozdz.2, F r e u d e n t h a l 1973, s.410/. Można przypuszczać, że kryterium rozróżniania ma różny charakter w przypadku różnych pojęć, a także dla różnych uczniów; że zależy ono również od sposobu wprowadzenia pojęcia.

Niewątpliwie, prematematyczne poznanie pojęcia opiera się na przykładach i tak zwanej definicji ostensywnej (czy - jak ją nazywa H. Freudenthal - demonstratywnej), to jest wskazaniu z jednoczesnym nazwaniem. Jednak zarówno liczba i funkcja przykładów, jak i rola innych (szczególnie werbalnych) faktorów w tym procesie mogą być bardzo różne: od jedynego przykładu paradygmatycznego - po bardzo liczne przykłady i kontrprzykłady porównywane pod względem różnorodnych cech, od analizy całkowicie niewerbalnej (na przykład w toku gry lub manipulacji) - po szeroką słowną analizę cech, zestawienie w mowie lub na piśmie cech wspólnych itp. Wspomnieć też wypada o bardzo istotnej roli, jaką niekiedy odgrywa tu schemat graficzny, syntetyzujący zaobserwowane cechy istotne lub wspólne, zjawiający się nieraz całkiem spontanicznie. Mając na uwadze całą tę różnorodność dróg poznania, łatwo zrozumieć, jak różne muszą być w poszczególnych przypadkach kryteria rozróżniania. Rozróżnianie może więc polegać m.in. na porównywaniu przykładu badanego z paradygmatycznym, na całkowicie lub częściowo werbalnej analizie jego cech, na porównywaniu go ze schematem graficznym itd.

Przyswojenie nowego pojęcia matematycznego nie dokonuje się w drodze jednorazowego, krótkotrwałego aktu poznawczego, ale w długotrwałym i skomplikowanym procesie, w wielu przypadkach trwającym nieprzerwanie. Dla wielu pojęć elementarnych mających liczne i różnorodne naturalne zastosowania w matematyce, a przede wszystkim poza matematyką (jak pojęcie liczby naturalnej, pojęcie proporcjonalności, pojęcia elementarnych figur geometrycznych), proces ten może przebiegać niemal samorzutnie, pod warunkiem dostarczenia uczniowi wystarczającej liczby okazji posłużenia się tymi pojęciami; rzecz jasna, prawidłowe pokierowanie nim przyczyni się do bardziej pogłębionego ukształtowania tych pojęć. Natomiast w innych przypadkach, gdy pojęcie jest tylko obiektem badań lub służy specjalnym celom w wąskim zakresie sytuacji (co najmniej na rozważanym poziomie), np. pojęcie dzielnika lub liczby ujemnej, konieczne jest specjalne programowanie procesu jego kształtowania. Wydaje się przy tym, choć brak na to dowodów eksperymentalnych, że proces ten nie może być ściśnięty w naprzód założonym okresie czasu bez poważnego uszczerbku dla jego efektów. Przeciwnie, sądzić można - zarówno na podstawie obserwacji nauczania jak i wyników badań psychologicznych - że jak najwcześniejsze jego rozpoczęcie i długotrwałe kontynuowanie, uwzględniające stadia rozwojowe myślenia uczniów, przyniesie najlepsze efekty w postaci pojęć głęboko i trwale przyswojonych.

Mówiąc najogólniej, na proces kształtowania pojęcia składają się różnorodne aktywności ucznia i dokonywane przez niego obserwacje oraz rozwiązywanie przez niego różnorodnych problemów, w których to pojęcie występuje, najpierw implicite, potem explicite. Z pewnością ważną rolę odgrywa w tym procesie język, a więc słowne opisywanie i nazywanie pojęć. Jednak co do momentu i sposobu użycia tu języka występują znaczne różnice poglądów. Według jednych (np. D i e n e s) wstępna faza procesu kształtowania pojęcia musi przebiegać niewerbalnie, a przedwczesne użycie słownych opisów lub nazw proces ten bezpowrotnie zniekształca. Według innych (psychologowie i pedagodzy radzieccy) słowo powinno od początku towarzyszyć aktywności ucznia, gdyż jest niezastąpione dla racjonalizacji i radykalnego przyspieszenia procesu kształtowania się pojęć. Wielu dydaktyków zajmuje pozycję pośrednią pomiędzy tymi dwiema skrajnościami, uważając, że zachęcenie uczniów od początku do opisywania w dowolnej formie swych czynności oraz obserwacji, lub lepiej - stwarzanie sytuacji, w których takie opisy są w naturalny sposób umotywowane, sprzyja procesowi tworzenia i ugruntowywania pojęć.

3.2. Rola podręcznika w kształtowaniu pojęć matematycznych u dziecka

W zakresie kształtowania pojęć podręcznikowi (czy serii podręczników) przypada szczególnie ważna rola. Można w nim bowiem zawrzeć przemyślany i opracowany w szczegółach program dydaktyczny (słowo "program" rozumiemy tu szeroko, a nie jedynie w sensie teorii nauczania programowanego), stymulujący i organizujący aktywności uczniów skierowane na ukształtowanie odpowiedniego pojęcia. Przy założeniu, że podręcznik jest przez ucznia studiowany w zasadzie w kolejności stron, oraz przy rezygnacji z narzuconej logiczną hierarchię kolejności tekstu na rzecz kolejności właściwej dydaktycznie, można w ten sposób zaprogramować proces długotrwały, a więc dydaktycznie najkorzystniejszy. Jasne jest, że tak dokładne zaprogramowanie procesu kształtowania wielu pojęć naraz, a następnie konsekwentne realizowanie tego programu w klasie przez nauczyciela, tylko w rzadkich przypadkach byłoby wykonalne. Nauczyciel na ogół częściowo tylko planuje, częściowo zaś improwizuje swoje działanie w klasie. Możliwość bezpośredniej reakcji nauczyciela na zachowanie uczniów, a więc występowanie sprzężenia zwrotnego pomiędzy organizatorem aktywności a jej realizatorami, ma tu oczywiste zalety. Sądzić jednak należy, że proces ogólnie kierowany przez dydaktycznie prawidłowo skonstruowany i zawarty w podręczniku program, a w szczegółach korygowany przez nauczyciela, mającego ciągły kontakt z uczniami, byłby najbardziej efektywny.

Stosunek autorów podręczników matematyki dla pierwszej klasy ponadpoczątkowej do omówionych tu spraw jest, jak łatwo przewidzieć, bardzo różny. Gdy chodzi o rolę sformułowań słownych, spotkać można zarówno podręczniki, w których słowna a niekiedy także symboliczna definicja pojęcia zjawia się wkrótce po pierwszych przykładach, jak i takie, gdzie nie ma żadnych ogólnych sformułowań określających pojęcie, a tekst słowny zawiera jedynie polecenia i pytania. Także pod względem stosunku do procesu kształtowania pojęcia spotykamy rozwiązania skrajne: z jednej strony - zamykające wprowadzenie pojęcia (lub zgrupowania pojęć) na niewielu stronach podręcznika, bez powracania do tego tematu (poza zastosowaniami), z drugiej - rozkładające ten proces na niewielkie dawki, przewidziane do realizacji w okresie rocznym lub kilkuletnim.

3.3. Wprowadzenie liczb dodatnich i ujemnych w wybranych podręcznikach

Omówimy kilka przykładów wprowadzenia w podręcznikach dla poziomu zbliżonego do omawianego pojęć liczb dodatnich i ujemnych oraz dodawania i odejmowania takich liczb. Ten wybór pojęć dla egzemplifikacji ma swe uzasadnienie w charakterze tych pojęć oraz w braku tradycji ich wprowadzania na tym poziomie.

W przeciwieństwie do terminologii dotyczącej wielu innych pojęć, jak liczby naturalne, elementarne figury geometryczne czy prawdopodobieństwo, terminy związane z liczbami ujemnymi i dodatnimi niemal nie mają zastosowań poza matematyką. Jedyną chyba sytuacją, w której uczeń klasy czwartej ma okazję użycia w sposób naturalny znaku i słowa "minus" (a także "plus")) jest odczytywanie skali termometru. Model ten nie ma zresztą bezpośredniego zastosowania przy wprowadzaniu działań, gdyż dodawanie temperatur nie ma fizycznego sensu. Wszelkie inne, tworzone dla celów dydaktycznych zastosowania tych terminów noszą wyraźne znamiona sztuczności, przejrzystej także (a może tym bardziej!) dla uczniów. Zauważmy, że nawet w mechanice elementarnej, gdzie użycie "liczb skierowanych" (jak nazywa się je w podręcznikach angielskich) wydaje się najbardziej naturalne, w praktyce często się bez nich obchodzimy, preferując określenia " w przód - wstecz", " w górę - w dół" itp.

Konwencjonalny charakter tych pojęć stwarza szczególne trudności ich umotywowania, co powinno sprawić, że sposób ich wprowadzenia będzie szczególnie ostro ukazywał koncepcję dydaktyczną autora. Ponieważ pojęcia te zostały do nauczania na tym poziomie wprowadzone niedawno i brak tradycji w sposobie ich ujmowania, wielu indywidualnych ujęć można się więc spodziewać w różnych podręcznikach. Przejdźmy do przykładów.

P r z y k ł a d 1.

Dwa podręczniki francuskie (typu "fiches de travail") /G a l i o n 1973/ - G i /B e r n a r d a 1971/ - B[5] wprowadzają liczby całkowite w sposób podobny. Obydwa ujęcia streścimy razem, zwracając uwagę na różnice między nimi.

---

[5] Dla uniknięcia nieporozumień wyjaśniamy, że podręczniki te są przeznaczone dla klasy "sixième", a więc pierwszej klasy szkoły średniej, której 11-12-letni uczniowie mają za sobą 5 lat nauki szkolnej. Klasa ta odpowiada jednak podanej we wstępie charakterystyce pierwszej klasy ponadpoczątkowej.

Punktem wyjścia jest zabawa w wyciąganie z woreczka żetonów dwóch kolorów. Liczby wyciągniętych żetonów tworzą pary, dla których - w różnej kolejności - wprowadza się dodawanie i podział na klasy równoważności. Podręcznik G poleca wyciągać żetony (czy też wyobrazić sobie ich wyciąganie) bez jakiejkolwiek motywacji, bez motywacji też każe łączyć dwie kupki wyciągniętych żetonów, co prowadzi do dodawania par liczb naturalnych. W podręczniku B wyciąganie żetonów jest elementem g r y : żetony wyciąga się losowo, żetony czerwone dają punkty wygrywające, żetony niebieskie - przegrywające. To na pozór drobne uzupełnienie dostarcza naturalnej motywacji dla klasyfikacji par, a następnie dla ich dodawania. Klasyfikacja par jest w obydwu podręcznikach oparta na przypisaniu każdej parze liczby z "indeksem", którym w podręczniku G jest litera r (rouge - czerwony) lub n (noire - czarny) wskazująca nadmiar żetonów (np. 2^r, 3^n), zaś w podręczniku B - litera G (gagnant - wygrywający) lub P (perdant - przegrywający) wskazująca wartość (wielkość straty lub zysku) danej pary dla grającego (np. 2^G, 3^P). W obydwu ujęciach mówi się o wypisywaniu wszystkich par równoważnych na jednej karcie, nazwanej odpowiednim symbolem: w B jest to liczba drukowana kolorem czerwonym lub niebieskim (zgodnie z dominującym kolorem żetonów), w G - liczba z "indeksem". W każdym z podręczników ten środek poglądowy odgrywa jednak inną rolę. W B o wypisywaniu par na kartach tylko się m ó w i, nie zachęcając ucznia do realizacji tego, a nawet nie przedstawiając karty z wypisanymi na niej parami (przedstawione na rysunkach karty są p u s t e). Od razu też karta zamienia się w pojęcie abstrakcyjne, gdyż symbolom "karta 2" ("2" czerwone), "karta 3" ("3" niebieskie) nadaje się znaczenie odpowiednich z b i o r ó w p a r. Odpowiednie pytania mają też zwrócić uwagę ucznia na nieskończoność tych zbiorów. To pojęcie i ten symbol liczby całkowitej zostają zachowane do końca książki (a więc i nauczania w tej klasie). W G natomiast uczeń konkretnie wypisuje pary na przygotowanych rysunkach "kart", a po niewielu ćwiczeniach informuje się go, że odtąd karty 4^r i 3^n będą się nazywały odpowiednio 4^+ i 3^-, zaś kilka wierszy dalej - że 4^+, 3^-, 0, 2^- itp. są nowymi liczbami, zwanymi liczbami całkowitymi.

W obydwu ujęciach wprowadzono kilka poglądowych modeli zbiorów par liczb naturalnych. Oto przykład ćwiczenia z podręcznika B.

Oto tabela. W pierwszej kolumnie wypisano pierwszoligowe drużyny piłkarskie. W drugiej kolumnie podano liczbę zdobytych przez drużynę bramek. W trzeciej kolumnie podano liczbę bramek zdobytych przez przeciwników. Dla St-Étienne odczytamy parę (57,21) i zanotujemy wynik 36^P, tj. 36 bramek w i ę c e j (en plus). Dla Red-Star odczytamy parę (30,32) i zanotujemy wynik 2^M, tj. 2 bramki m n i e j (en moins).

1. Uzupełnij tabelę.
2. Które pary są równoważne? Napisz zbiór E otrzymanych wyników.
3. Uporządkuj elementy E od wyniku najkorzystniejszego do najmniej korzystnego.

4. Jak w fiszce 59 napisz pary na narysowanych przez siebie kartach. Uwaga! Kolory czerwony i niebieski możesz wybrać na dwa sposoby. Określ dokładnie każdorazowo swój wybór. W każdym z tych dwu przypadków uporządkuj wyniki od najkorzystniejszych do najmniej korzystnych.

(Nie cytujemy tabeli, o której mowa w ćwiczeniu).

Podczas gdy w podręczniku B te poglądowe modele występują niezależnie od siebie, a dostrzeżenie ich wspólnej struktury pozostawia się inwencji ucznia (co najwyżej sugerując to użyciem podobnej symboliki), to autorzy podręcznika G starają się tę wspólną strukturę ukazać, czy to przez formę graficzną tekstu, czy to explicite. Dla pokazania tego zacytujemy dosłownie początkowy fragment wprowadzenia do liczb całkowitych z podręcznika G.

1 a) W worku są żetony czerwone i czarne. Wyciągnij z niego garść żetonów, np. trzy czerwone i pięć czarnych. Przedstaw wybrane żetony za pomocą pary

$$(3\ ;\ 5)$$

3 czerwone 5 czarnych

Gdybyś wyciągnął 5 żetonów czerwonych i 3 czarne, napisałbyś parę

$$(5\ ;\ 3)$$

5 czerwonych 3 czarne

b) Wyciągnij dwie garście żetonów; przedstawiają je pary np. (3;5) i (7;1). Złącz te dwie garście w jedną. Ile masz żetonów czerwonych? Ile masz żetonów czarnych? Napiszesz:

2 a) Na parkingu liczymy wjeżdżające i wyjeżdżające samochody. Po upływie każdej godziny zapisujemy wynik za pomocą pary liczb naturalnych.

P r z y k ł a d:
W ciągu godziny wjechały trzy samochody, pięć wyjechało; ten ruch samochodów przedstawimy za pomocą pary (3;5).
Co przedstawia para (5;3)?
Co przedstawia para (0;0)?

b) Oto dwa kolejne wyniki:
1. godzina (3;5)
2. godzina (7;1)
Ile samochodów wjechało w ciągu tych dwóch godzin? Ile samochodów wyjechało w ciągu tych dwu godzin? Jaka para przedstawia ten wynik? Napiszesz:

$$(3;5)\ \boxed{+}\ (7;1) = (10;6)$$

Znak $\boxed{+}$ jest znakiem dodawania par liczb naturalnych.
P a r a (10;6) jest s u m ą p a r (3;5) i (7;1).

Jest jasne, że zarówno przez równoległe rozmieszczenie opisów tych dwu sytuacji na jednej stronie, jak i przez dobór liczb, autorzy skierowują uwagę ucznia na istotne analogie między tymi sytuacjami, dla których wspólny model matematyczny stanowi zbiór par liczb naturalnych z dodawaniem $\boxed{+}$. Nieco dalej o tym izomorfizmie mówi się wyraźnie. Mianowicie po wprowadzeniu kart z parami równoważnymi, które dla "zabawy żetonami" mają nazwy 4^r, 3^n itp., zaś dla "zabawy w garaż" - "4 więcej", "3 mniej" itp., uczeń otrzymuje polecenie: "Sprawdź na kilku przykładach, że karta 4^r zabawy żetonami i karta "4 więcej" zabawy w garaż zawierają te same pary. Odtąd będziemy oznaczać te karty 4^+ ". Analogiczny tekst odnosi się do drugiego rodzaju kart.

Zauważmy od razu, że w poleceniu "sprawdź na kilku przykładach" wyraża się brak ufności w możliwość samodzielnego dostrzeżenia i intuicyjnego rozumienia przez ucznia izomorfizmu tych sytuacji konkretnych: wówczas takie sprawdzenie jest czynnością niepotrzebną aż do śmieszności. Jeżeli w istocie uczeń tego izomorfizmu nie dostrzegł, jest wątpliwe, czy sprawdzenie incydencji kilku par do tego się przyczyni. (W tym podręczniku zaznacza się wyraźna tendencja do podsuwania uczniowi uogólnień empirycznych).

Wprowadzenie dodawania liczb całkowitych jest w obydwóch podręcznikach poprzedzone sprawdzeniem na przykładach, bez żadnego wsparcia intuicji, zgodności dodawania par z równoważnością par, i w obydwu dodawanie liczb całkowitych określa się przez dodawanie dowolnie wybranych par zapisanych na odpowiednich "kartach". Zacytujemy fragment tekstu G.

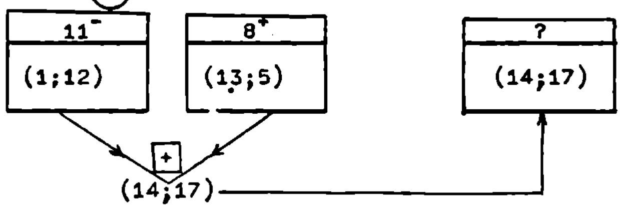
W tej tabeli możesz zauważyć, że jeżeli tworzysz sumę pary z karty 2^- i pary z karty 6^+, otrzymasz parę z karty 4^+. Dla streszczenia tych wyników możesz napisać:

$$2^- \oplus 6^+ = 4^+$$

4^+ jest s u m ą liczb całkowitych 2^- i 6^+.
$\oplus$ jest znakiem d o d a w a n i a w Z.

Po serii ćwiczeń znajdujemy następujący schematyczny przepis dodawania liczb całkowitych.

Jak obliczyć $11^- \oplus 8^+$?



Uzupełnij:

$$11^- \oplus 8^+ = \ldots$$

W dalszym tekście tego podręcznika nie wspomina się o możliwości dodawania liczb całkowitych bez pośrednictwa par ani o kanonicznym wyborze par.

Inaczej w podręczniku B, ufając najwidoczniej, że uczeń sam szybko odkryje inny algorytm dodawania, już w czwartym ćwiczeniu po wprowadzeniu dodawania poleca się:

"Tym razem bez posługiwania się parami uzupełnij:..."
(tu następują przykłady rachunkowe).

W określeniu dodawania par i dodawania liczb całkowitych w żadnym z tych podręczników nie użyto zmiennych. Podczas gdy w B nie używa się ich do końca (poza marginesowo potraktowaną ogólną definicją odejmowania), także dla sformułowania praw dodawania (przemienności, łączności, neutralności 0), to w podręczniku G prawa działań już w następnej "fiszce" formułuje się z użyciem zmiennych (którymi zresztą autorzy posługują się od początku).

Odejmowanie w podręczniku G wprowadza się za pomocą formalnej definicji:

$$a - b = a + opp(b)$$

("opp" od opposé znaczy "przeciwna do"), dowodząc następnie, że

$$(a - b) + b = a.$$

Nieco więcej troski o motywację dla definicji tego działania ukazuje podręcznik B, gdzie wprowadza się odejmowanie wychodząc od równań postaci

$$x + a = b,$$

pozwalając uczniowi w toku ćwiczeń odkryć, że rozwiązaniem tego równania jest liczba b + opp(a).

Opracowanie tego tematu w obydwu podręcznikach kończy się rozszerzeniem zakresu wprowadzonych pojęć na liczby dziesiętne. Ujęcie to ma charakter formalny. Jest to w istocie klasyczna konstrukcja grupy liczb całkowitych z dodawaniem, uproszczona przez pominięcie niezbędnych dowodów i uprzystępniona przez liczne wprowadzające i ugruntowujące numeryczne ćwiczenia i przykłady. Jedynie w podręczniku B czyni się wysiłek dla dostarczenia odpowiedniej dla wieku uczniów motywacji, jaką jest gra, w której wprowadzane pojęcia mają wyraźny i naturalny związek z miarą sukcesu lub porażki. W podręczniku G zabawa żetonami może mieć tylko znaczenie manipulacyjnej konkretyzacji operacji, które prowadzą do nowych pojęć. Manipulacje te będzie zresztą uczeń wykonywał zapewne tylko w wyobraźni. Podobną rolę konkretyzacji operacji formalnych odgrywają inne poglądowe sytuacje, prezentowane w przykładach i ćwiczeniach. Wprawdzie niektóre z nich są przedstawione tak, jakby miały ilustrować praktyczne zastosowanie wprowadzonych pojęć (par liczb naturalnych i liczb z "indeksem"), jak na przykład wyjeżdżające i wjeżdżające na parking samochody, wysiadający z autobusu i wsiadający do niego pasażerowie, ale sztuczność tych sytuacji i problemów jest przejrzysta. Słusznie więc autorzy nie chcą się na nich opierać.

W obydwu podręcznikach temat ten został ujęty w sposób niemal zwarty. W B jest on zawarty w kolejnych "fiszkach" 87-96 na końcu podręcznika, w G pomiędzy "fiszkami" na temat odejmowania liczb całkowitych a początkowymi umieszczono "fiszki" na temat geometrii ("długość odcinka", "przybliżanie długości", "długość okręgu"); jest to jednak nieistotne rozciągnięcie w czasie kształtowania pojęć dotyczących liczb całkowitych. Wprawdzie "fiszki" mogą być realizowane w klasie w kolejności zaplanowanej przez nauczyciela, a więc niekoniecznie zgodnej z ich numeracją, należy jednak sądzić, że numeracja jest odautorską propozycją tej kolejności. Zgodnie z nią, wprowadzenie po raz pierwszy pojęć liczby całkowitej oraz sumy i różnicy liczb całkowitych nastąpi w ciągu kilku lub kilkunastu lekcji pod koniec roku szkolnego. A z charakteru zadań można wnosić, że - według tej koncepcji - uczniowie powinni nabyć już pewnej wprawy w operowaniu nowymi liczbami.

Wybór tej konstrukcji liczb całkowitych dla zapoznania po raz pierwszy z pojęciami liczby dodatniej i ujemnej uczniów 11-letnich budzi poważne zastrzeżenia. Umotywowanie tej konstrukcji, gdzie na umowność i obcość terminologii nakłada się jeszcze matematyczne wyrafinowanie tej dwuetapowej definicji, stwarza szczególne trudności. W tej sytuacji od opracowania tego tematu w podręczniku oczekiwać można szczególnego pietyzmu i uwzględnienia uznanych zasad dydaktyki. Nie znajdujemy tego jednak w żadnym z cytowanych podręczników.

Konstrukcja par oraz równoważność par mogłyby być umotywowane na przykład odpowiednio określoną grą, która prowadziłaby do tworzenia par liczb naturalnych, zaś znalezienie strategii prowadzącej do wygranej wymagałoby dostrzeżenia równoważności par. Gra taka powinna być rozgrywana konkretnie i dostatecznie długo. Innym środkiem motywacji mogłoby być wielokrotne notowanie przez uczniów stanów początkowych i końcowych zmian różnych wielkości tam, gdzie istotne są tylko wielkość i kierunek zmiany; dostrzeżenie przez uczniów, że notowanie stanu początkowego i końcowego jest zbędne, byłoby odkryciem liczb dodatnich i ujemnych. Także rozciągnięcie kształtowania tych pojęć w dłuższym okresie czasu przez rozrzucenie związanych z nimi aktywności w większej liczbie "fiszek" byłoby psychologicznie korzystniejsze, a dodatkowo umożliwiałoby naturalne powiązanie tych pojęć z innymi (np. rozbudowaną tu nauką o zbiorach i relacjach, wśród nich relacjach równoważnościowych, a także translacją).

P r z y k ł a d 2

W podręcznikach serii /SMP/ pojęcia liczb dodatnich, ujemnych oraz ich dodawania i odejmowania opracowano w dwóch etapach w tomach B i C (kolejne tomy tej serii są oznaczone wielkimi literami alfabetu).

W książce B wprowadza się "liczby skierowane", zapisywane ze znakiem + lub -, jako uniwersalne symbole, których można użyć w wielu różnych sytuacjach. Rozdział ten rozpoczyna się od następującego przykładu i ćwiczenia.

Oto poranny fragment rozkładu dnia pewnego ucznia.

7.45 Przebudzenie
8.00 Wstawanie
8.30 Wyjście z domu
8.35 Wstąpienie po Billa

8.40 Wsiadanie do autobusu
8.55 Przybycie do szkoły
9.00 Sprawdzenie obecności
9.15 Apel
9.35 Pierwsza lekcja

Ponieważ chłopiec ten ma trudności z dostatecznie wczesnym wstawaniem i punktualnym przybyciem do szkoły, przypiął sobie ten rozkład nad łóżkiem. Aby łatwiej mu było dotrzeć na czas do szkoły, chce wiedzieć, ile czasu mu zostało przed "godziną zerową", to jest sprawdzeniem obecności. Dlatego jego rozkład wygląda teraz tak:

Liczby minut przed sprawdzeniem obecności	75	7.45 Budzik mnie budzi
	60	8.00 M u s z ę wstać
	30	8.30 Wychodzę do szkoły
	25	8.35 Wstępuję po Billa
	20	8.40 Wsiadam do autobusu
	5	8.55 Przychodzę do szkoły
	0	9.00 Sprawdzenie obecności
Liczby minut po sprawdz. obecn.	15	9.15 Apel
	35	9.35 Pierwsza lekcja

1.(a) Przerysuj ten rysunek w zeszycie, zostawiając miejsce na umieszczenie następujących zdarzeń w właściwych miejscach:

(i) 8.15: śniadanie,
(ii) 8.25: czyszczenie butów,
(iii) 8.50: odjazd autobusu,
(iv) 9.10: zejście na apel,
(v) 9.30: koniec apelu.

(b) Przyjmując czas przybycia do szkoły za "godzinę zero", podaj liczbę minut, jakie zostały przed przybyciem, lub liczbę minut po przybyciu, dla każdego zdarzenia.

2. Wykonaj podobny rozkład pokazujący twoje czynności poranne. Zdecyduj, co będzie twoją "godziną zero" i dla każdej czynności zapisz liczbę minut przed lub po godzinie zero.

Dalsze ćwiczenia dotyczą innych sytuacji:

- człowiek stojący nad wodą na wysokim brzegu, w którym jest wejście do groty, pod powierzchnią wody płynący nurek,
- określenie wieku kolegów względem własnego,
- określenie szerokości i długości geograficznej,
- określenie temperatury ciała różnych ssaków względem temperatury ciała człowieka.

Po nich czytamy:

W przykładach z poprzedniego paragrafu wszystkich pomiarów dokonywano począwszy od pewnego punktu odniesienia, niekiedy zwanego "zerem". Każdy punkt można wybrać jako zero; jest to sprawa umowna.

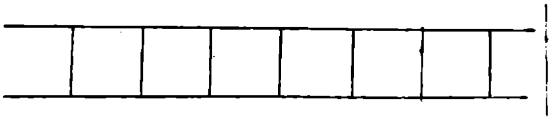
Używaliśmy słów jak "przed" i "za", "nad" i "pod", "na wschód", i "na zachód", "na północ" i "na południe", "młodszy" i "starszy". Słowa te określają nam kierunek odczytywanych liczb, w tę lub w tamtę stronę od zera.

Ten schemat pojawia się tak często, że wymyślono nowy zbiór liczb. Ten zbiór może być użyty we wszystkich tych sytuacjach i nazywa się zbiorem "liczb skierowanych". Liczby po jednej stronie zera będą się nazywać dodatnimi i będą miały "+"; liczby po drugiej stronie będą się nazywały ujemnymi i będą miały "-".

Na przykład na rysunku 2, gdzie zerem jest 9.00, przybycie do szkoły można przyjąć za $^{-}5$, a apel za $^{+}15$.

Po kilku ćwiczeniach w opisywaniu różnych sytuacji z pomocą liczb dodatnich i ujemnych rozdział kończy się rozszerzeniem osi liczbowej w lewo od zera.

W książce C pojęcia te opracowane są na nowo, pozornie bez związku z wprowadzonymi w książce B. Bazę pojęciową dla liczb całkowitych i działań na nich stanowi tu jeden model o charakterze geometrycznym - ruchy pionka wzdłuż liniowej planszy.



Ruchy w prawo i opisujące je liczby nazywa się "niebieskimi", ruchy i liczby w lewo - "zielonymi". Liczby "niebieskie" i "zielone" to "shift numbers", co można by przełożyć na polski jako "liczby-ruchy". W związku z grami rozgrywanymi na tej planszy, gdzie ruchy są wyznaczane rzutem kostkami z wypisanymi na ścianach "niebieskimi" i "zielonymi" liczbami, ujawnia się pojęcia sumy liczb całkowitych oraz liczb przeciwnych. Dopiero wówczas przywołuje się wprowadzone wcześniej liczby skierowane i pokazuje się możliwość ich użycia dla określenia ruchów pionka. "Liczby skierowane" i "liczby - ruchy" stają się synonimami. Rekonstruuje się też oś liczbową pokazując, że ruch zaczynający się w 0 kończy się w punkcie, któremu przypisana jest liczba tego ruchu. Dodawanie - już jawne - liczb całkowitych oparte jest do końca na modelu geometrycznym: składaniu przesunięć wzdłuż osi.

Osobliwością jest tu sposób ujęcia odejmowania. Wychodząc od równości oczywistej $^{+}3 - {}^{+}3 = 0$ i wcześniej odkrytej $^{+}3 + {}^{-}3 = 0$ autorzy sugerują, że $- {}^{+}3$ znaczy to samo co $+ {}^{-}3$.
Sprawdza się to na kilka analogicznych przykładach, a potem w następujących ciągach równości:

(a)	(b)	
$^{+}2 - {}^{+}2 = 0$	$^{+}4 - {}^{+}4 = 0$	$^{+}4 + {}^{-}4 = 0$
$^{+}3 - {}^{+}2 = {}^{+}1$	$^{+}4 - {}^{+}3 = {}^{+}1$	$^{+}4 + {}^{-}3 = {}^{+}1$
$^{+}4 - {}^{+}2 =$	$^{+}4 - {}^{+}2 =$	$^{+}4 + {}^{-}2 = {}^{+}2$
$^{+}5 - {}^{+}2 =$	$^{+}4 - {}^{+}1 =$	$^{+}4 + {}^{-}1 = {}^{+}3$
$^{+}6 - {}^{+}2 = {}^{+}4$	$^{+}4 - 0 =$	$^{+}4 + 0 = {}^{+}4$
$^{+}7 - {}^{+}2 =$	$^{+}4 - {}^{-}1 =$	$^{+}4 + 1 = {}^{+}5$
$^{+}8 - {}^{+}2 =$	$^{+}4 - {}^{-}2 =$	$^{+}4 + {}^{+}2 = {}^{+}6$
	$^{+}4 - {}^{-}3 =$	$^{+}4 + {}^{+}3 = {}^{+}7$

Narzuca się przy tym uczniowi następujące wnioskowanie przez analogię: "Ponieważ liczba, od której odejmujemy $^{+}2$, jest za każdym razem o jednostkę większa, wydaje się rozsądne oczekiwać, że wyniki także będą za każdym razem o jednostkę większe". Rozumowanie to jest oczywiście błędne: monotoniczność różnicy względem odjemnej jest tu założeniem, a nie wnioskiem. Założenie to jest przy tym oparte na ryzykownej analogii, dla której nie widać intuicyjnej podstawy. Uczeń do końca nie dowiaduje się tu, co z n a c z y odjąć, zmuszony jest zadowolić się umiejętnością numerycznego w y k o n y w a n i a odejmowania. Takie potraktowanie odejmowania rażąco odbiega od ujęcia wcześniejszych pojęć.

Ujęcie to jest przykładem rozwijania pojęć w różnych aspektach intuicyjnych, a nie - jak to postuluje aktualny program szkoły dziesięcioletniej w Polsce oraz programy niektórych innych krajów - w sposób pojęciowo i logicznie jednolity. Wymaga to zapewne większej ilości czasu, ale prowadzi do wykształcenia prawdziwych, głęboko rozumianych pojęć, a nie jedynie ich formalnych namiastek. W pierwszym etapie wprowadza się liczby dodatnie i ujemne jako abstrakcyjny schemat wielu różnych sytuacji. Schemat ten poznaje uczeń nie z gotowego opisu, ale w drodze kierowanej poleceniami i pytaniami s c h e m a t y z a c j i . Ważną rolę w tym procesie odgrywa zabieg, który przy powierzchownym spojrzeniu może robić wrażenie banalnego ćwiczenia rachunkowego. Jest to mianowicie polecenie skonstruowania nowej skali przy innym wyborze zera. Dzięki temu uczeń uświadomi sobie bardzo dobrze, że punkt 0 jest uniwersalnym punktem odniesienia, który w praktyce może być przyjęty rozmaicie, zależnie od potrzeby i wygody. Uświadomi to sobie lepiej niż z lektury końcowego komentarza. Brak tu natomiast aktywności nastawionych na ujawnienie dowolności wyboru z w r o t u dodatniego i ujemnego, co dla ukształtowania tych pojęć jest równie ważne.

Ten pierwszy etap prowadzi więc do wytworzenia w umyśle ucznia liczb-schematów, nie związanych żadną - poza narzucającym się porządkiem - strukturą. Użyte tu konkretne sytuacje nie dają też intuicyjnej podstawy dla wprowadzenia działań na nowych liczbach. Nie jest to więc jeszcze schematyzacja typu matematycznego, którą odłożono do drugiego etapu.

Drugi etap kształtowania tych pojęć przebiega inaczej niż pierwszy. Zamiast wielu konkretnych modeli i szukania dla nich wspólnej struktury algebraicznej, mamy tu tylko jeden model paradygmatyczny, model geometryczny, dla którego struktura grupy addytywnej jest bardzo naturalna, a elementy, transformacje i ich składanie łatwe do konkretno-graficznego przedstawienia. Badając ten model, uczeń najpierw częściowo odkrywa jego strukturę, potem stwierdza, że daje się on opisać przy pomocy poznanych wcześniej liczb dodatnich i ujemnych, a więc, że wykryte działania można wykonywać w zbiorze tych liczb, wreszcie uzupełnia badanie struktury, teraz już jako struktury zbioru liczb całkowitych.

Porównując to ujęcie z ujęciem prezentowanym w Przykładzie 1. nie możemy zapominać, że obrano tu drogę dydaktycznie łatwiejszą, ale matematycznie nie tak "czystą". Łatwo tu pojęcia arytmetyczne oprzeć na intuicji geometrycznej, znacznie trudniej je na tej drodze zdefiniować (autorzy zresztą takiej próby nie podejmują). Niezależnie jednak od odmienności koncepcji naukowej, koncepcja dydaktyczna, w niektórych szczegółach wątpliwa, w całości wydaje się bliższa współczesnym poglądom na dydaktyczne programowanie procesu kształtowania pojęć matematycznych.

P r z y k ł a d 3

Opracowane obecnie przez zespół w Państwowym Instytucie Pedagogicznym w Budapeszcie /M u n k a l a p o k/ z roku 1976 stanowią zaadaptowaną do ostatecznie zatwierdzonego programu wersję wcześniejszego wydania eksperymentalnego, wypróbowanego na szeroką skalę. Podręcznik ten, rozwijający zatem przemyślaną i sprawdzoną koncepcję dydaktyczną (której głównym twórcą jest T. Varga), jest tym bardziej interesujący. Ponieważ przy tym materiały te tworzone były równolegle z programem nauczania i w tym samym zespole, analizę opracowania w nich liczb dodatnich i ujemnych poprzedzimy rzutem oka na rozwinięcie tego tematu w opracowanym w tym Instytucie programie nauczania matematyki /Országos Pedagogiai Intézet/.

Kształtowanie tych pojęć rozpoczyna się w klasie II tematem "Oś liczbowa. Rzut oka na liczby dodatnie i liczby ujemne" i trwa aż do klasy VII (w klasie VIII - ostatniej klasie szkoły podstawowej program nie przewiduje explicite żadnego tematu arytmetycznego). W klasie III program zawiera: "Termometr. Dług i majątek. Liczby ujemne. Dodawanie i odejmowanie z użyciem narzędzi rachunkowych, w prostych przypadkach", zaś w klasie IV "Modele liczb ujemnych (temperatura, dług i majątek, miniony czas itp.). Miejsce na osi liczbowej liczb ujemnych, zera, liczb dodatnich; porównywanie liczb. Dodawanie i odejmowanie liczb ujemnych i dodatnich w prostych przypadkach". Jednak w w y m a g a n i a c h temat ten pojawia się po raz pierwszy w klasie IV w następującym sformułowaniu: "Znajdowanie na osi liczbowej miejsc liczb ujemnych i dodatnich. Porządkowanie liczb dodatnich i ujemnych według wielkości. Rozwiązywanie prostych zadań na dodawanie i odejmowanie z liczbami ujemnymi". W klasie V dochodzą jedynie: mnożenie i dzielenie w obrębie liczb całkowitych oraz pojęcie wartości bezwzględnej, a w klasie VI działania na liczbach nie tylko całkowitych. Ale dopiero program klasy VII w kontekście działań na liczbach rzeczywistych mówi o "kształtowaniu algorytmów", co pozwala wnosić, że wcześniej uczniowie powinni wykonywać działania opierając się na modelach i za pomocą przyrządów /osi liczbowej, suwaka/.

Jak więc widać, program przewiduje bardzo niespieszne i nieformalne kształtowanie omawianych pojęć, a jawną algorytmizację działań dopiero w szóstym roku tego procesu. Stąd już widać, jak bardzo koncepcja ta odbiega od wciąż aktualnej gdzie indziej tradycji.

Przyjrzyjmy się teraz opracowaniu tych pojęć w podręczniku/»M u n k a l a p o k« 1976/ dla klasy III, a więc drugiego roku ich kształtowania. Znaki + i - , słowa "dodatni" i "ujemny", oraz dodawanie i odejmowanie liczb całkowitych pojawiają się tu po raz pierwszy, co uzasadnia porównanie tego właśnie podręcznika z innymi, przeznaczonymi dla nieco wyższych klas, a także inicjującymi naukę o liczbach całkowitych. Dodajmy też, że budowa i język »Munkalapok« dla klas II-IV, a także dla klasy V o przejściowym programie, nie różnią się od siebie w sposób istotny.

Każda strona tego podręcznika [6] ("munkalap" - "karta robocza") prowadzi ucznia przez kilka (na ogół trzy) aktywności nie pozostające z sobą w żadnym związku tematycznym. Na 14 stronach (prawie 10% całości) znajdują się aktywności dotyczące interesujących nas pojęć. Nie są one przy tym rozrzucone równomiernie, ale zgrupowane w sześciu seriach, w każdej na sąsiednich lub prawie sąsiednich stronach. Przeplatają się w nich cztery typy problemów: 1. zmiany temperatury (serie I i II), 2. dług i majątek (serie II, III i IV), 3. porównywanie liczb całkowitych (serie III i IV), 4. dodawanie i "ukryte" odejmowanie (dobieranie brakującego składnika) liczb całkowitych (serie III, IV, V i VI). Problemy tego samego typu występujące w różnych seriach często są do siebie bardzo podobne; uczeń będzie więc rozwiązywał podobne problemy, ale z dość znacznym interwałem czasowym, a nie "na jednym oddechu", jak w tradycyjnym nauczaniu.

Każda z tych aktywności przedstawia się uczniowi jako seria prostych zadań na zastosowanie rachunku (na liczbach naturalnych) w nowej sytuacji praktycznej lub z praktyką blisko związanej. Znak liczby nie kreuje nowego pojęcia, jest tylko symbolem użytym dla skrótowego opisania tej sytuacji, dla eliminacji nadmiaru słów. Na tym etapie nie ma więc nie tylko jawnego, ale nawet ukrytego formalizowania pojęć związanych z liczbami dodatnimi i ujemnymi. Ich kształtowanie dokonuje się na drodze naturalnych rozumowań, które dopiero w przyszłości znajdą swoje formalne odbicie w definicjach i algorytmach.

Dotychczas pokazane ujęcia były bądź wynikami poszukiwania środków dydaktycznych dla poglądowego sparafrazowania definicji matematycznych (liczby całkowitej jako zbioru par liczb naturalnych lub jako miary wektora względem osi), bądź koncepcjami opartymi na opisie i analizie naturalnych sytuacji konkretnych, nie pretendującymi do zgodności z jakąkolwiek teorią matematyczną. Przykład, który prezentujemy jako ostatni, ukazuje podejście całkiem odmienne.

---

[6] Obszerny fragment tekstu przytaczamy w Aneksie 1, s.127.

Przykład 4

Jest to ujęcie pochodzące z "Mathématique Moderne" vol. 1 /Papy'ego/.[7] Rozdział "liczby całkowite wymierne" następuje tu bezpośrednio po wprowadzeniu numeracji dwójkowej, gdzie prócz zwykłej symboliki pozycyjnej stosuje się przedstawienie liczb na "abaku":

Ilustruje się w ten sposób manipulacje żetonami, które uczniowie w klasie mogą wykonywać konkretnie, dodając i odejmując liczby w tym systemie. Jako opis konkretnych manipulacji uczniów należy też rozumieć tekst, który w całości przytaczamy w Aneksie 3.

Po takim wprowadzeniu liczba całkowita będzie dla ucznia "liczbą kolorową" lub "liczbą (naturalną) ze znakiem". Na następnej stronie, w związku ze zmianą znaku i symbolem -a, mówi się nawet wyraźnie: "Nie zapominaj, że a oznacza liczbę całkowitą wymierną, to jest liczbę naturalną zaopatrzoną w znak. Oznaczamy przez -a liczbę a ze zmienionym znakiem (lub kolorem)."

Czy jest to więc tylko ujęcie stosowane przed laty, krytykowane a nawet skompromitowane jako niepoprawne matematycznie, i - zdawałoby się - zarzucone, a tu odświeżone jedynie nowymi środkami dydaktycznymi? Wydaje się, że autorowi przyświecała tu inna idea, której z sobie wiadomych powodów nie rozwinął: idea "neutralizacji konfliktu", która prostą drogą prowadzi do pojęcia grupy. Zauważmy, że wprowadzono tu nie oddzielnie liczby dodatnie i liczby ujemne, ale od razu pary "antagonistycznych" liczb przeciwnych. Matematycznie można by tę konstrukcję ująć jako zanurzenie półgrupy liczb naturalnych w grupie "całkowitej". O istnieniu u autora takiej intencji świadczy nie tylko "bitwa" jako model wprowadzający, oraz uwaga na końcu ustępu, ale także fakt, że dodawanie wprowadzono od razu wraz z nowymi liczbami. Było to zresztą koniecznością, gdyż w operacji dodawania kryje się sens "antagonizmu". Wydaje się, że konsekwentne trzymanie się tej idei mogłoby dać dydaktycznie interesujące i matematycznie poprawne wprowadzenie tych pojęć.

Wprowadzenia dokonano tu jednorazowo, w zwartym wykładzie. Jest to rzeczywiście wykład, gdyż ten tekst, w przeciwieństwie do tekstów z poprzednich trzech przykładów, nie organizuje jawnie żadnej aktywności ucznia: nie ma w nim pytań ani poleceń, a jedynie informacje. Nie znaczy to, rzecz jasna, by autor nie uważał aktywności za pożądaną; nie zalicza jednak najwidoczniej stymulacji i organizowania takiej aktywności do zadań podręcznika.

---

[7] Zob. odnośnik na s.31.

Pojęcia liczby całkowitej i sumy scharakteryzowane tu zostały wyłącznie na przykładach, a w przytoczonym w całości tekście tego paragrafu - nawet w sposób niepełny. Dopiero bowiem w uwadze wyjaśniającej do ćwiczeń mówi się: "Zauważ, że - IIOI i - IIII oznaczają liczby c tym samym znaku, reprezentowane przez żetony tego samego koloru. Dodajemy je zwyczajnie!" Takie ujęcie rażąco odbiega od formułowanych w innych miejscach precyzyjnych definicji; dla przykładu zacytujemy definicję iloczynu liczb całkowitych:

"Iloczyn dwóch liczb całkowitych wymiernych jest iloczynem ich wartości bezwzględnych, zaopatrzonym znakiem +, jeżeli czynniki mają ten sam znak, znakiem -, jeżeli czynniki nie mają tego samego znaku".

Można zrozumieć powody takiego zróżnicowania tekstu, trudno jednak uznać to za metodologicznie i dydaktycznie poprawne.

Omówione przykłady pokazują ogromną różnorodność decyzji autorów podręczników, podejmowanych w dążeniu do optymalnego sprostania trzem sprzecznym nieraz postulatom: zgodności z teorią matematyczną, oparcia pojęć na modelach wziętych z naturalnego środowiska ucznia i doboru środków dających najsilniejszą motywację. Decyzje te stają się jeszcze trudniejsze, gdy trzeba dostosować podręcznik do narzuconego z góry sztywnego i szczegółowego programu, wyznaczającego kolejność i zakres wprowadzanych pojęć.

3.4. Podsumowanie

Sposoby wprowadzania w podręcznikach dla omawianego poziomu pojęć matematycznych odpowiadają, co uwidoczniono w dokonanym przeglądzie ujęć liczb dodatnich i ujemnych, występującym obecnie trzem filozofiom nauczania matematyki. Według jednej z nich (reprezentowanej m.in. przez H.Freudenthala) nauczanie to powinno służyć zdobywaniu przez uczniów umiejętności schematyzowania i opisywania w kategoriach matematycznych otaczającej ich rzeczywistości. Jakakolwiek wewnętrzna globalna strukturyzacja matematyki leżącej u podstawy tego opisu jest ze względu na ten cel obojętna, a jej narzucanie przeszkadza w osiągnięciu zamierzonych efektów kształcenia. (Dopuszcza się jednak lokalną organizację dedukcyjną niewielkich fragmentów teorii matematycznych, i to nie nazbyt wcześnie). W szczególności zgodność wprowadzanych pojęć matematycznych z ich definicjami w określonej teorii matematycznej jest z punktu widzenia takiej koncepcji nieistotna. Daleko większą rolę odgrywa bogactwo naturalnych modeli tych pojęć, służące ich głębokiemu intuicyjnemu rozumieniu i umożliwiające szerokie stosowanie w różnorodnych sytuacjach. Zwolennicy tej filozofii nie przywiązują też w swych podręcznikach wagi do tego, aby pojęcia wprowadzać w sposób m a t e m a t y c z n i e e l e m e n t a r n y, tj.

aby środki propedeutyczne dawały się łatwo przełożyć na formalizm zgodny z określoną teorią matematyczną. Wysiłek swój kieruję natomiast na i n t u i c y j n i e   e l e m e n t a r n e wprowadzenie pojęć, tj.uzyskiwanie ich w drodze bezpośrednich, prostych abstrakcji z określonych naturalnych sytuacji konkretnych. Prowadzi to niekiedy do pojęć z matematycznego punktu widzenia dalekich od elementarności, co wyklucza ich ewentualną późniejszą formalizację na wyższym szczeblu nauczania, formalizację zgodną z wykształconymi intuicjami. Ten brak ograniczeń formalnych daje autorowi podręcznika niemal nieograniczoną swobodę w doborze środków dydaktycznych i konkretnych modeli pojęć, stwarza jednak równocześnie potencjalne niebezpieczeństwo powiększenia trudności w późniejszym dostrzeganiu różnicy pomiędzy pojęciem naiwnym a pojęciem matematycznym w rozumieniu współczesnym, tj. pojęciem poprawnie zdefiniowanym w terminach matematycznych.

Pozostałe dwie filozofie nauczania matematyki stawiają ukazywanie uczniowi matematyki w kształcie, jaki nadają jej ogólne struktury,za główny cel nauczania, realizowany od najniższego szczebla szkoły. Przy tym jednak, według jednego kierunku (np. G. Papy) podstawę dla abstrahowania tych struktur stanowić powinna naturalna rzeczywistość, chociaż dla potrzeb dydaktycznych odpowiednio ograniczona i wyidealizowana, według drugiego - sytuacje konkretne lub abstrakcyjne, sztucznie dla tego celu spreparowane i możliwie odległe od rzeczywistości naturalnej, przeszkadzającej - jak twierdzą zwolennicy tego kierunku - prawidłowemu abstrahowaniu struktur przez zawarty w niej ładunek intuicji. W podręcznikach tworzonych zgodnie z tymi koncepcjami kształcenia matematycznego pojęcia wprowadzane są w sposób wyraźnie ukierunkowany na określone ich ujęcia w matematyce, a więc użyte w podręczniku środki dydaktyczne mają służyć propedeutyzacji tego wybranego ujęcia. Założenie takie narzuca doborowi tych środków ścisłe ograniczenia, zwiększając znacznie trudności w dobrej dydaktycznie realizacji zamierzeń autora. Ujęcia do nich dostosowane cechuje też często nienaturalność warstwy motywacyjnej.

Każda z wymienionych trzech filozofii kształcenia matematycznego ma swych gorących zwolenników, którzy w jej obronie posługują się przekonującymi argumentami. Nie podejmujemy tu próby rozstrzygnięcia tego sporu, poprzestając na dokonanym przeglądzie niektórych implikacji tych koncepcji dla wprowadzania pojęć w podręcznikach matematyki, wyjaśniającym - jak sędzimy - powody, dla których pierwszą z nich uważamy za najodpowiedniejszą na poziomie pierwszej klasy ponadpoczątkowej.

4. ROZUMOWANIA PREMATEMATYCZNE A TEKST PODRĘCZNIKA

4.1. Rozumowanie prematematyczne jako propedeutyczna forma dowodu

W analizie trudności przedstawienia w tekście podręcznika matematyki dla omawianego poziomu rozumowań stanowiących odpowiednio przystosowane wersje dowodów matematycznych, posłużę się wprowadzonym przez Z. S e m a d e n i e g o /1976/ pojęciem rozumowania prematematycznego, które tu rozumieć będziemy nieco szerzej.

Dążąc do możliwie pełnego zbliżenia matematyki nauczanej na dowolnym szczeblu szkoły do matematyki sensu stricto, dydaktycy różnych krajów wypracowali, głównie w ciągu ostatniego ćwierćwiecza, wiele środków konkretrych (graficznych i manipulacyjnych), pozwalających na takie przedstawienie rozumowań ogólnych i abstrakcyjnych, że stają się one dostępne czy to dla dziecka czy dla dorosłego niematematyka. Rozumowanie takie prowadzi się zazwyczaj w szczególnym przypadku (określonym explicite lub przez dobór sytuacji konkretnej), ale tak, ze nie korzysta się z żadnych specyficznych cech tego szczególnego przypadku. Przy tym poszczególnym krokom w takim rozumowaniu towarzyszą na ogół pewne czynności rysunkowe lub manipulacje wykonywane na materiale konkretnym, zastępujące w pewnym sensie konstrukcje werbalne lub symboliczne, dokonywane w konwencjonalnej procedurze dowodzenia.

Dla konstrukcji rozumowań prematematycznych szczególnie dobrze nadaje się kombinatoryka, na co zwrócił uwagę P. Nowicki w swej (niepublikowanej) pracy doktorskiej. Dla przykładu rozważmy problem liczebności iloczynu kartezjańskiego dwóch zbiorów skończonych (w sformułowaniu zrozumiałym dla dzieci - liczby możliwych kombinacji par tanecznych, strojów itp.). Ustawienie przez dzieci żetonów reprezentujących elementy danych zbiorów wzdłuż boków prostokąta, a następnie próbne tworzenie par przez przesuwanie tych żetonów równolegle do odpowiednich boków, prowadzi do odkrycia przez wiele dzieci, że liczba wszystkich par jest równa iloczynowi liczb elementów danych zbiorów. Matematyk dokona z łatwością formalizacji tego rozumowania w konwencjonalnym języku, a jednocześnie odbiorca-niematematyk ma pełne poczucie jego ogólności i logicznej spójności.

Niektóre z takich rozumowań mogą być prowadzone już przez dzieci klas początkowych, inne wymagają pewnej dojrzałości, są wreszcie i takie, które zachowując swój prematematyczny charakter, tj. wniosku ogólnego opartego na rozumowaniu w szczególnym przypadku z konkretną realizacją poszczególnych kroków, przy tym dającym się sformalizować, dostępne są dopiero dla osoby w matematyce zaawansowanej. Liczne przykłady takich rozumowań znaleźć można w przeznaczonych dla różnych szczebli nauczania książkach G.Papy'ego.

Niemal wszystkie przykłady rozumowań prezentowanych jako rozumowania prematematyczne, bądź po prostu występujących w podręcznikach szkolnych i odpowiadających powyższej charakterystyce takich rozumowań, to rozumowania dające się sprowadzić do wprowadzonego przez Z. Krygowską schematu "uzmiennienia stałej" lub do naturalnej rekurencji. W pierwszym przypadku występują w nich liczby, lub skończone zbiory, będące podstawą rozumowania. Akt jego uogólnienia sprowadza się do uświadomienia sobie nieistotności wyboru danych liczb, czy liczebności zbiorów, do "uzmiennienia" tych stałych. Pod ten schemat podpada powyższy przykład. W drugim przypadku, po wykonaniu kilku kroków polegających na zwiększeniu danej liczby o 1, następuje uświadomienie regularności tego przejścia, z konkluzją "tak samo będzie za następnym razem i tak dalej". Być może, do prematematycznych zaliczyć by można także niektóre rozumowania geometryczne, oparte na intuicyjnym rozumieniu własności symetrii i innych przekształceń. W podręcznikach dla klas początkowych i niższych klas szkoły średniej nie spotyka się ich jednak niemal wcale. Jak się wydaje, są one po prostu zbyt trudne dla tego poziomu.

4.2. Rozumowania prematematyczne a podręcznik uczniowski

Jak wspomnieliśmy, rozumowania prematematyczne pojawiły się przede wszystkim jako parafrazy dowodów matematycznych dostępne dla dzieci w pierwszych latach nauczania. Tworzono je, aby sprostać postulatowi reformy nauczania, iż poznanie matematyczne powinno od pierwszych lat być oparte na rozumieniu, nie zaś na wierze i pamięci. Niemal powszechnie unikano przy tym uproszczonych dowodów werbalnych, zastępując je różnymi formami opartych na konkrecie rozumowań prematematycznych. Na podstawie dotychczasowych doświadczeń można bowiem sądzić, że w wieku 10, 11, a może nawet 12 lat rozumowania prowadzone werbalnie bądź przy użyciu symboliki matematycznej są na ogół niedostępne i jedynie ich forma prematematyczna może być przez większość dzieci zrozumiana. Jako wniosek z tej hipotezy przyjąć trzeba, że tylko prematematyczne rozumowania mają rację bytu w uczniowskim podręczniku matematyki dla tego poziomu.

Rozumowania prematematyczne są jednak integralnie związane z konkretnymi manipulacjami, których na tym poziomie nie można pominąć ani zastąpić opisem czy rysunkiem. (Często wielokrotne i niemal mechaniczne powtarzanie przez ucznia pewnych czynności prowadzi do odkrycia przez niego ważnej regularności). A podręcznik z natury rzeczy nie zawiera niczego poza tekstem i rysunkami. Zatem podręcznik nie może zawierać pełnych (w sensie psychologicznym) rozumowań prematematycznych.

Logiczna i rozsądna byłaby w tej sytuacji decyzja rezygnacji z podręcznika jako środka przekazu matematyki (wraz ze stanowiącymi jej integralną część dowodami). Uczniowie pracowaliby wówczas pod kierunkiem nauczyciela, wyposażeni w różnorodne środki konkretne i - ewentualnie - zbiór zadań. W istocie, tendencja do zastępowania w najmłodszych klasach tradycyjnych podręczników matematyki zbiorami zadań występuje w świecie już od szeregu lat. Co prawda, motywacją wydaje się tu być także dążenie do maksymalnej indywidualizacji pracy z uczniami, której przeszkadza jednolity dla wszystkich przekaz wiadomości za pośrednictwem podręcznika. Taki zbiór zadań jest często przez wydawcę "obudowywany" zestawem różnorodnych materiałów demonstracyjnych i manipulacyjnych, których użyciem kieruje w klasie nauczyciel (np./B r e i d e n b a c h 1972/).

Takich rozwiązań dla pierwszej klasy ponadpoczątkowej nie spotyka się na rynku wydawniczym tam, gdzie klasa ta należy już do szkoły średniej, której wysoka ranga obliguje autorów do tworzenia "uczonych" podręczników. Natomiast np. eksperymentalne podręczniki węgierskie »M u n k a l a p o k« dla klasy IV, V i VI są w istocie zbiorami zadań usystematyzowanych przez autorów w sposób dydaktycznie zamierzony, lecz niekoniecznie w sekwencję logiczną.

Dla ilustracji omówimy trzy kolejne strony podręcznika do klasy V, które zawiera Aneks 2 (s.130).

Wszystkie trzy strony zawierają zadania związane z dzieleniem, jednak każda ma nieco inny charakter. Strona 45 zawiera trzy podobne zadania na podział proporcjonalny. Nie ma tu żadnego wzoru rozwiązywania takich zadań (można przypuszczać, że nie są to pierwsze zadania tego typu). Na stronie 46 są trzy zadania, z których każde ma inny cel dydaktyczny: 1. ma zwrócić uwagę na monotoniczność ilorazu jako funkcji dzielnika względnie dzielnej, 2. kontrastuje stałość iloczynu (a więc odwrotną proporcjonalność) i stałość ilorazu różnic (a więc proporcjonalny przyrost) ze stałością sumy, wreszcie 3. ilustruje rozdzielność ilorazu względem sumy. Strona 47 jest znowu monograficzna: wszystkie trzy zadania są poświęcone pewnemu schematowi rozumowania opartego na proporcjonalności dwu wielkości. Przy tym zadanie 1. jest rozwiązane i stanowi przykład wzorcowy.

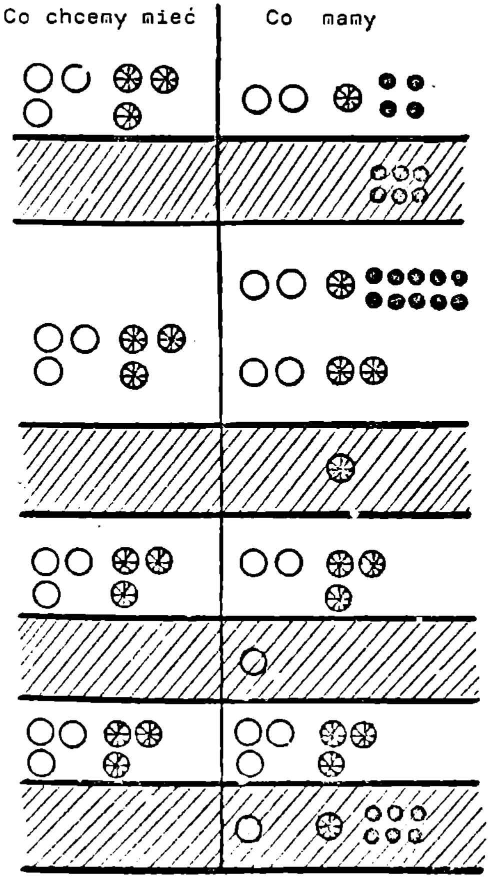
Brak tu jakichkolwiek uogólnień czy w syntetyczny sposób sformułowanych praw, reguł itp. Nie ma ich nie tylko bezpośrednio po wprowadzających przykładach i zadaniach, ale także nigdzie w tej książce. Autorzy pozostawili najwidoczniej nauczycielowi troskę o taką syntezę (o ile w ogóle uważa się ją za potrzebną czy pożądaną).

W punkcie 3. na stronie 46 i w punkcie 1. na stronie 47 znajdujemy wzorcowe przykłady, które stanowią w istocie szczątkową postać rozumowań prematematycznych. Tu i tam operacji dzielenia odpowiada wykonywany na rysunku podział figury geometrycznej na odpowiednią liczbę równych części, co prowadzi następnie do dalszych konsekwencji. Brak tu jednak samych rozumowań, pokazano jedynie na rysunku ich efekty. Rozumowanie musi uczeń odtworzyć sam, może z pomocą nauczyciela. I w tym aspekcie podręcznik dostarcza więc uczniowi zadanie ("Odtwórz rozumowanie:"), a nie informację.

Istnieje jednak w niektórych przypadkach możliwość nie tyle przedstawienia w podręczniku ile stymulowania przez podręcznik rozumowań prematematycznych. Pokażemy to, analizując najpierw w aspekcie takiej stymulacji fragmenty kilku podręczników, a następnie prezentując ujęcia, których stymulujące efekty powinny być - zgodnie z hipotezę - większe.

P r z y k ł a d 1 /N e u n z i g-S o r g e r 1969, s.33/

Zadanie: 330 - 214 = $\boxed{}$ Odpowiednie równanie: 214 + $\boxed{}$ = 330



Musimy dodać 6 czarnych żetonów

Otrzymujemy: 10 czarnych, 1 niebieski i 2 czerwone żetony

Zastępujemy i otrzymujemy: 2 niebieskie, 2 czerwone żetony.

Musimy dodać 1 niebieski żeton

Otrzymujemy: 3 niebieskie, 2 czerwone żetony

Musimy dodać 1 czerwony żeton

Otrzymujemy: 3 niebieskie i 3 czerwone żetony

Razem dodaliśmy: 1 czerwony, 1 niebieski i 6 czarnych żetonów.

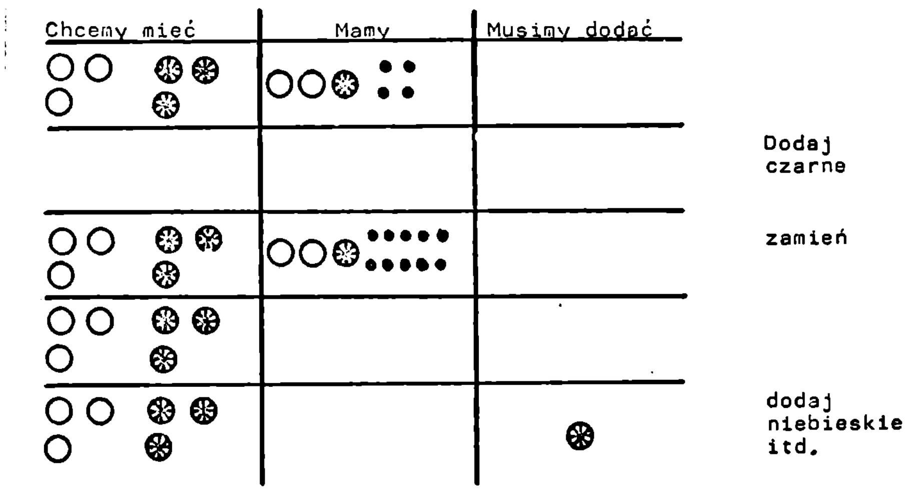
Rozwiązanie: $\boxed{}$ = 116

To wprowadzenie algorytmu odejmowania przez uzupełnianie odjemnika (przykładów takich jest w podręczniku kilka) na formę opisu realizacji zadania za pomocą żetonów. Opis ten jest przy tym tworzony równolegle w dwu formach: 1. "filmu", tj. serii rysunków ilustrujących układy żetonów po każdej manipulacji, 2. w formie werbalnej.

Można sobie wyobrazić następującą formę pracy z tym tekstem: uczeń zasłania tekst, ustawia żetony zgodnie z równaniem i wykonuje kolejne manipulacje samodzielnie: po każdorazowym ustawieniu żetonów odsłania kolejny fragment tekstu, porównuje swój układ z narysowanym, ewentualnie odczytuje tekst słowny. Taka forma samodzielnej pracy wymagałaby od ucznia bardzo dojrzałej motywacji, jakiej trudno oczekiwać u dziecka niespełna 10-letniego. Będzie to więc możliwe w najlepszym razie w ramach pracy "równym frontem" pod kierunkiem nauczyciela. Tekst ten, zawierający pełny werbalny opis rozumowania prematematycznego z ilustracją rysunkową każdego kroku, nie wyzwala więc rozumowania prematematycznego u dzieci.

Ten podstawowy walor dydaktyczny można by zaś łatwo uzyskać, usuwając całkowicie lub częściowo tekst słowny i pozostawiając uczniowi większość rysunków do uzupełnienia. Na przykład, można by ten fragment ująć następująco:

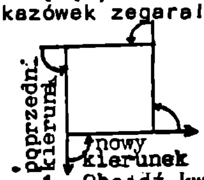
Pomagając sobie żetonami, uzupełnij rysunki.



Rysunki mogą być tak dobrane, że o poprawności swego rysunku lub błędzie uczeń dowiaduje się już w następnym kroku (sprawę samokontroli przy samodzielnej pracy ucznia z podręcznikiem omówimy oddzielnie).

P r z y k ł a d 2 /N e u n z i g-S o r g e r 1969, s.53/

Narysuj kredą kwadrat na podłodze klasy. Obierz punkt na jego brzegu nie będący wierzchołkiem i obejdź raz kwadrat. Idź przeciwnie do ruchu wskazówek zegara!

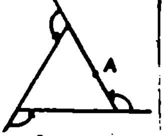


obrót kwadransowy w lewo

Poruszasz się tak:
Na bokach nie zmieniasz kierunku. W każdym wierzchołku musisz wykonać obrót kwadransowy w lewo. Gdy znajdujesz się ponownie w punkcie wyjścia, masz za sobą cztery obroty kwadransowe w lewo, razem pełny obrót.

1. Obejdź kwadrat zgodnie z ruchem wskazówek zegara i opisz swoją drogę!

2. Narysuj na podłodze trójkąt równoboczny. Obejdź boki tego trójkąta zgodnie (niezgodnie) z ruchem wskazówek zegara, wychodząc z dowolnego punktu nie będącego wierzchołkiem. Opisz swoją drogę!



Jak duży jest obrót w każdym wierzchołku?
Jak duży jest łączny obrót po powrocie do punktu wyjścia?
Porównaj łączny obrót w przypadku kwadratu z obrotem w przypadku trójkąta równobocznego!

3. /Analogiczne zadanie z dowolnym trójkątem/[8]

4. /Analogiczne zadanie dot. kwadratu, trójkąta równobocznego i dowolnego na rysunku/

5. /Zadanie dotyczące obiegu wzdłuż okręgu narysowanego na podłodze/

6. /Zadanie dotyczące obiegu wzdłuż dowolnej krzywej narysowanej na podłodze/.

Tekst ten ma inną strukturę niż tekst z poprzedniego przykładu. Zadania dla uczniów są poprzedzone przykładem wzorcowym: opis całej realizacji wydanego na początku polecenia poparty schematyczną ilustracją rysunkową, a także krótkie rozumowanie i jego konkluzja[9]. Na tym przykładzie uczeń będzie wzorował swoje działanie (taka wydaje się być intencja Autorów) i związane z nim rozumowanie w następnych zadaniach.

Jeżeli wstępny przykład jest dla uczniów w pełni zrozumiały (czego tu nie będziemy dyskutować), to ujęcie takie zdaje się wystarczająco stymulować odpowiednią aktywność i związane z nią rozumowanie prematematyczne. A jednak tak nie jest. Zauważmy bowiem, że przykład wzorcowy nie ilustruje rozwiązania żadnego problemu, którego tu nie sformułowano. Uczeń nie może w żadnym punkcie przewidzieć, ani co powinien obserwować, ani do jakich wniosków z poczynionych obserwacji będzie zmierzał. Pozostaje mu uważnie odczytać cały ten tekst, i - przypuszczalnie - odczytywać go jeszcze parokrotnie przy rozwiązywaniu zadań, aby możliwie wiernie naśladować całe postępowanie.

---

[8] Tekst w nawiasach ukośnych wewnątrz cytatu jest streszczeniem odpowiedniego fragmentu oryginału.

[9] Ten fragment budzi zastrzeżenia natury dydaktycznej. Jak wynika z dalszych zadań, Autor zmierza do dalekiego uogólnienia tej pierwszej obserwacji. Powinien więc wniosek (obrót o kąt pełny) oprzeć na powrocie wędrowca do poprzedniej pozycji, a rachunek (4 kąty kwadransowe dają kąt pełny), możliwy tylko w nielicznych przypadkach szczególnych (w dodatku ważny tylko w niektórych geometriach!), wykorzystać dla uzupełniającej weryfikacji tego wniosku.

A tymczasem temat ten można oprzeć na problemie porównywania kątów obrotu przy obieganiu różnych krzywych i łamanych. Można by więc zacząć od określenia kątów obrotu dziecka stojącego w środku tarczy "zegara" i nosem wskazującego godziny, potem obserwować dwa takie "zegary", wreszcie skojarzyć obrót "wskazówki" z obrotem dziecka obiegającego różne krzywe narysowane na "tarczy zegara". Szczególne własności niektórych przypadków i ich zgodność z wnioskiem ogólnym, dotyczącym pełnego obiegu, zjawiłyby się wówczas same w sposób naturalny. Tekst taki mógłby się składać z samych poleceń i pytań, bez wzorcowego rozwiązania. Użyteczność wzorcowego rozwiązania nie budzi zastrzeżeń, gdy celem jest nauczenie pewnego postępowania algorytmicznego; jest ono jednak zbędne lub nawet szkodliwe, gdy chodzi o stymulację pojęciowego rozumowania u uczniów.

4.3. Prematematyczne uzasadnienia rozdzielności mnożenia względem dodawania w wybranych podręcznikach

Następne przykłady prezentują wprowadzenie w różnych podręcznikach rozdzielności mnożenia względem dodawania liczb naturalnych. Łatwy dowód tego prawa, oparty na elementarnych własnościach operacji monogościowych), daje się łatwo przekształcić w rozumowanie prematematyczne, wykorzystujące silną poglądowość kraty prostokątnej. Ślad tej idei znajdujemy też we wszystkich cytowanych podręcznikach, jednak z punktu widzenia aktywizacji czytelnika ujęcia są różne.

P r z y k ł a d 3 /J. H a y e n 1976, s.143/

1. Kaseta "super-8" zawiera 15 m filmu.

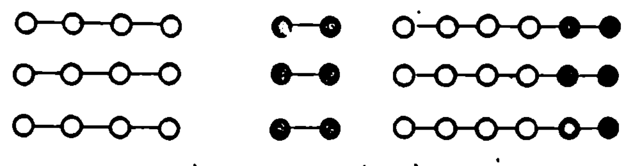
a) Pani Mueller nakręciła w czasie urlopu 6 filmów i zamierza je skleić razem. Jaki długi będzie film urlopowy?

b) Urodziny sfilmowano na 3 filmach. Jaki długi jest film urodzinowy?

c) Filmy urlopowy i urodzinowy mają być sklejone. Czy zapełnią one rolkę 120-metrową?

d) Z ilu części składa się ten film? Policz na tej podstawie długość filmu.

2.



Przedstaw tak samo: a) $5\cdot7+4\cdot7 = (5+4)\cdot7$

b) $4\cdot5+4\cdot3 = 4\cdot(5+3)$

Mnożenie jest rozdzielne względem dodawania:
$(a+b)\cdot c = a\cdot c+b\cdot c$ i $c\cdot(a+b) = c\cdot a+c\cdot b$
Przykład: $(4+2)\cdot3 = 4\cdot3+2\cdot3$ i $3\cdot(4+2) = 3\cdot4+3\cdot2$

Wprowadzenie rozdzielności podzielono tu na trzy części: zagadnienie praktyczne, przedstawienie geometryczne, sformułowanie ogólne w zapisie algebraicznym. Jedynie ilustracja geometryczna zawiera implicite rozumowanie prematematyczne prowadzące do dostatecznie ogólnej konkluzji. Jednak polecenie ("Przedstaw tak samo...") nie zmusza ucznia do odtworzenia tego rozumowania. Może on rekonstruować rysunki mechanicznie, zmieniając tylko liczbę kulek stosownie do danych. Zagadnienie praktyczne (nie będziemy tu wnikać w jego aspekt motywacyjny) prowadzi jedynie do odkrycia, że długość filmu można znaleźć dwiema drogami. Jest jednak wątpliwe, czy uczeń samodzielnie uogólni to odkrycie choćby tylko w sensie transferu na inne sytuacje, a także, czy dostrzeże jego związek z punktem 2 i ogólnym sformułowaniem prawa rozdzielności.

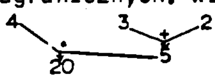
P r z y k ł a d 4/H a y e n 1976/

Gerd, Petra i Silke poznali w czasie pobytu za granicą trzech uczniów z Anglii i trzech z Francji. Do każdego chcą po powrocie wysłać kartkę z pozdrowieniami. Ile kartek zostanie wysłanych?

Petra liczy:

Jest 3+2 przyjaciół zagranicznych. Więc będzie 4•(3+2) kartki:

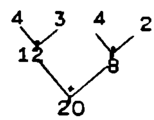
$4\cdot(3+2)$
$= 4\cdot 5$
$= 20$



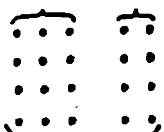
Udo liczy inaczej:

Będzie 4.3 kartek do Anglii i 4•2 kartek do Francji:

$(4\cdot 3)+(4\cdot 2)$
$= 12 + 8$
$= 20$



Petra i Udo otrzymali ten sam wynik: $4\cdot(3+2)=(4\cdot 3)+(4\cdot 2)$.



Czy sposoby liczenia Petry i Udo zawsze prowadzą do tego samego wyniku? Sprawdź to na jeszcze jednym przykładzie:

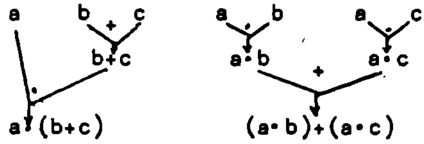
$25\cdot(4+11)$ $= /.../$ $\qquad (25\cdot 4)+(25\cdot 11)$ $= /.../$

Widzisz, że: $25\cdot(4+11) = (25\cdot 4)+(25\cdot 11)$.
Ta regularność wystąpi także we wszystkich innych stosownych przykładach także w przypadku sum o większej liczbie składników:

Jeżeli masz jakąś liczbę pomnożyć przez sumę, możesz /.../. W obu przypadkach otrzymasz ten sam rezultat. (Prawo rozdzielności).

Mnożenie jest r o z d z i e l n e względem dodawania.
Dla wszystkich liczb naturalnych w miejscu a, b, c zachodzi:

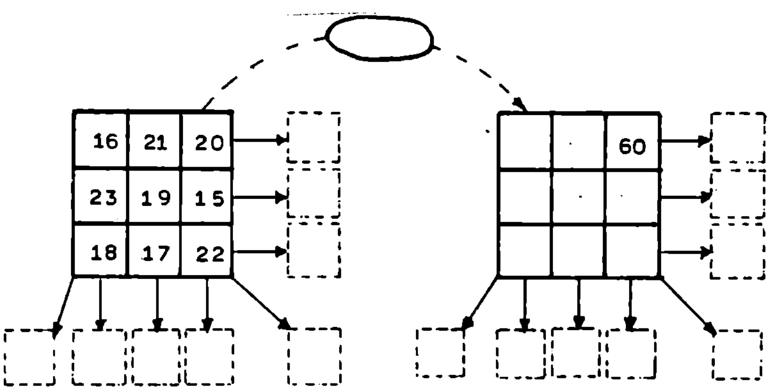
$$a\cdot(b+c) = (a\cdot b)+(a\cdot c)$$



Jest istotna różnica między przedstawieniem rozwiązania zagadnienia praktycznego tu i w poprzednim przykładzie. Tu, zarówno tekst werbalny jak i dwa schematy graficzne pozwalają od razu dostrzec ogólność rozumowania (choć oczywiście, co do jej samodzielnego dostrzeżenia przez czytelnika nie można mieć żadnej pewności); tam intencji takiej się nie dostrzega. Autor psuje jednak w dalszym ciągu ewentualny efekt dostrzeżenia przez ucznia ogólnego prawa, rozmawiając z nim tak, jakby zobaczył tylko zgodność wyników w tym szczególnym przypadku. Każe mu w i e r z y ć, że regularność ma charakter ogólny, nie biorąc jakby pod uwagę tego, że uczeń mógł już samodzielnie nabrać przekonania o jej ogólności. Autorowi jakby bardziej zależało tu na dobrym formalnym zrozumieniu przez ucznia samego twierdzenia, niż na prematematycznym doprowadzeniu go do tego twierdzenia.

P r z y k ł a d 5 /G a l i o n 1973, F i c h e 33/[10]

a) Oto dwa kwadraty. Sprawdź, że lewy kwadrat jest magiczny, pisząc w pustych okienkach znalezione sumy.
Pomnóż przez 3 wszystkie liczby z pierwszego kwadratu: napisz iloczyny w odpowiednich okienkach drugiego kwadratu.

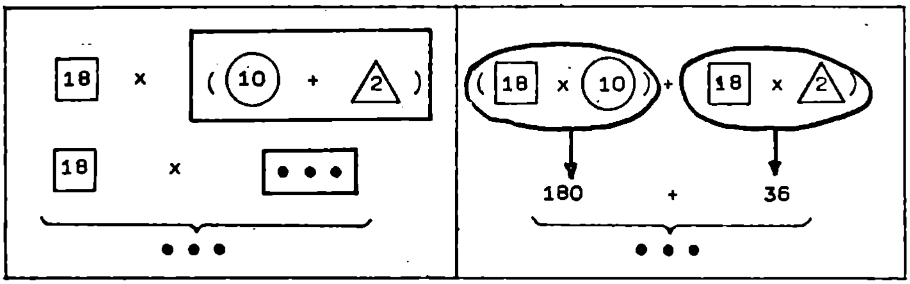


Czy otrzymany kwadrat jest magiczny?

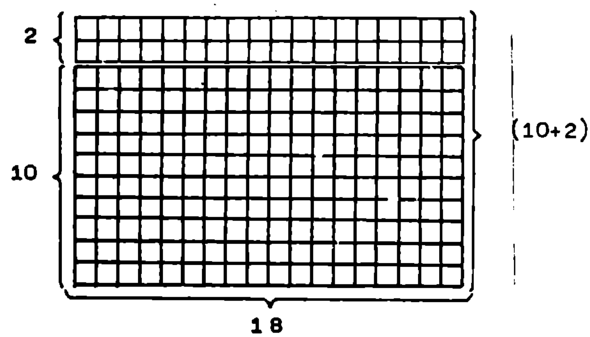
---

[10] Por. odnośnik na s.31.

b) Uzupełnij poniższy schemat. Z lewej masz policzyć iloczyn 18 przez (10+2) : 18•(10+2). Z prawej masz policzyć sumę liczb (18•10) i (18•2) : (18•10)+(18•2).



Te dwa rachunki prowadzą do znalezienia dwoma sposobami liczby kwadratów tej kratki, zawierającej 18 rzędów po dwa czarne kwadraty i 18 rzędów po 10 czerwonych kwadratów.



c) /Ćwiczenia, których celem jest weryfikacja rozdzielności na dalszych przykładach czysto rachunkowych/.

d) Własność zilustrowana tymi ćwiczeniami jest rozdzielnością mnożenia względem dodawania.

Mnożenie jest rozdzielne względem dodawania znaczy dla dowolnych liczb a, b, c $a\cdot(b+c) = (a\cdot b) + (a\cdot c)$ i $(b+c)\cdot a = (b\cdot a) + (c\cdot a)$

Użyte na początku kwadraty magiczne grają tu rolę wybitnie motywacyjną. W tym kontekście nie wiążą się one bezpośrednio z rozdzielnością. Dopiero w punkcie b) znajdujemy prematematyczną podstawę dla rozdzielności, pokazaną jednak bezproblemowo i z wysunięciem schematu rachunkowego na plan pierwszy. (Czy uczeń, który zrozumiał schemat rachunkowy, będzie zgłębiał rysunek i towarzyszący mu tekst, który może wziąć za dalsze objaśnienie tego schematu?). W dodatku najważniejszy moment rozumowania (wyniki muszą być równe,bo obydwa dają liczbę tych samych kwadracików) został tu w ogóle pominięty.

A więc i w tym renomowanym podręczniku brak autentycznej stymulacji u ucznia prematematycznego rozumowania prowadzącego do odkrycia prawa rozdzielności, a cały nacisk położono na zrozumienie przezeń związanych z rozdzielnością algorytmów.

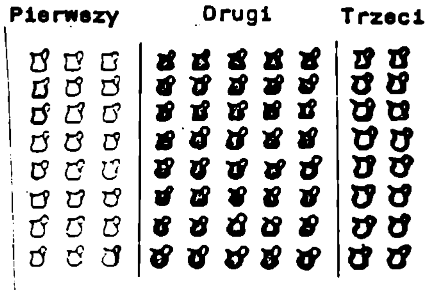
P r z y k ł a d 6 /F i l l o y 1975, s.26/

W pewnym zakładzie pracuje 3 garncarzy. Dzień pracy trwa 8 godzin. Pierwszy garncarz wytwarza 3 dzbanki na godzinę. W tym samym czasie drugi wytwarza 5, a ostatni 2 dzbanki.

Chcemy się dowiedzieć, ile dzbanków wytwarzają wszyscy trzej w ciągu dnia.

Produkcja dzienna:

Pierwszy garncarz	$3 \cdot 8 = 24$
Drugi garncarz	$5 \cdot 8 = 40$
Trzeci garncarz	$2 \cdot 8 = 16$
Ogółem	80



Możemy również policzyć następująco:

Całkowita produkcja na godzinę	$3 + 5 + 2 = 10$
Liczba godzin	8
Całkowita produkcja dzienna	$10 \cdot 8 = 80$

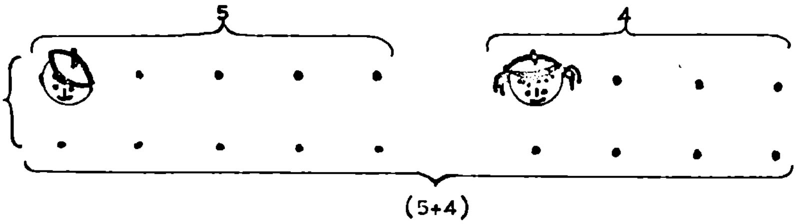
W dalszym ciągu znajduje się podobne wprowadzenie rozdzielności mnożenia względem odejmowania oraz ćwiczenia na zastosowanie rozdzielności w postaci gotowych schematów do wypełnienia, np.

$6 \cdot 13 + 2 \cdot 13 = (\Box + \Box) \cdot 13 = \Box \cdot 13 =$

Rozumowanie wypunktowane tu układem tekstu może być następująco streszczone: czy obliczymy oddzielnie dzienną produkcję każdego z garncarzy i dodamy otrzymane liczby, czy też obliczymy najpierw ich łączną produkcję w ciągu godziny, a potem w ciągu dnia, musimy otrzymać tę samą liczbę, bo liczymy za każdym razem te same dzbanki. Rozumowanie to może być zinterpretowane geometrycznie na znajdującym się obok rysunku, czego jednak autorzy nie zrobili. Niemniej rozumowanie to jest silnie przekonujące i mogłoby być uznane za wystarczające prematematyczne uzasadnienie prawa rozdzielności, gdyby zjawiło się u ucznia, choćby tylko w odniesieniu do tego konkretnego przypadku. Autorzy nie zostawiają uczniowi jednak pola do działania, nie tylko dyktując cały schemat rachunku, ale wykonując nawet każde wyliczenie. I tu bierne odczytanie przez ucznia tekstu i zwrócenie przez niego całej uwagi na technikę rachunku wydaje się najbardziej prawdopodobne.

P r z y k ł a d 7 /J ó ż w i c k i : Matematyka w klasie III, WSiP 1976, s.33/

Zuchy stały na zbiórce w dwuszeregu. W każdym szeregu było 5 chłopców i 4 dziewczynki. Jak obliczyć, ile było zuchów na tej zbiórce?



I sposób: $2\cdot(5+4) = 2\cdot 9 = 18$

II sposób: $2\cdot 5 + 2\cdot 4 = 18$

Przy obu sposobach obliczeń otrzymaliśmy ten sam wynik. Na zbiórce stało 18 zuchów. Mamy więc równość:

$$2\cdot(5+4) = 2\cdot 5 + 2\cdot 4$$

Widzimy, że aby pomnożyć 2 przez sumę liczb 5 i 4, możemy pomnożyć 2 przez 5, następnie 2 przez 4 i otrzymane iloczyny dodać. Jest to własność r o z d z i e l n o ś c i m n o ż e n i a w z g l ę d e m d o d a w a n i a. Taką własność mają dowolne liczby a, b, c:

$$\boxed{a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c}$$

W poprzednich przykładach krata prostokątna stanowiła dodatkową ilustrację, czy nawet model sytuacji występującej w zagadnieniu realnym, na którym oparte było wprowadzenie rozdzielności, lub też była użyta niezależnie od tego zagadnienia. Tu autor postarał się o wybór takiej sytuacji realnej, z którą geometryczny układ elementów liczonego zbioru jest integralnie związany, jest przez to bardziej naturalny niż w tamtych przykładach. Wybór to więc na pozór dydaktycznie korzystny.

Jednak w perspektywie głęboko pojmowanych celów kształcenia sprawa przedstawia się inaczej. Jednym z najistotniejszych momentów myślenia matematycznego, którego rudymenty należy wpajać od pierwszych lekcji matematyki, jest modelowanie, tj. konstruowanie właściwego modelu dla sytuacji realnej lub abstrakcyjnej. Gdyby nawet uznać za przedwczesne próby samodzielnego konstruowania przez uczniów klasy III modelu geometrycznego dla iloczynu sumy przez liczbę, to i tak przeciwstawienie badanej sytuacji abstrakcyjnej (tj. wyrażonej tylko w liczbach i działaniach) czy realnej jej modelowi geometrycznemu jest w świetle tego celu nauczania dydaktycznie korzystniejsze niż doprowadzenie do zlania się ich w umyśle dziecka. Jest to przykład ilustrujący głoszoną przez dydaktyków matematyki (ale nie przez pedagogów!) dewizę, że nie zawsze lepsze jest to, co dla dziecka w danym momencie łatwiejsze.

Pod względem problemowości i możliwości stymulowania prematematycznego rozumowania dzieci ujęcie to jest podobne do występujących w innych przykładach, sprawy tej nie będziemy więc tu oddzielnie dyskutować.

P r z y k ł a d 8. Aneks 7 (s.147) prezentuje poświęcony rozdzielności paragraf radzieckiego podręcznika dla klasy IV pod redakcją A.I. Markuszewicza /1970/. Dla należytego zrozumienia dydaktycznych aspektów tego ujęcia konieczne jest uwzględnienie następujących faktów.

1. Podręcznik realizuje liniową koncepcję nauczania: co raz opracowane, powinno być przez ucznia zapamiętane (co najwyżej wymaga powtórzenia) i może być następnie w dowolny sposób wykorzystane.

2. Wzór na pole prostokąta jest tematem programu klasy III i nie jest w klasie IV powtórnie opracowywany, a jedynie stosowany w kilku zadaniach poprzedzających ten paragraf.

3. W podręczniku tym w jednym z pierwszych paragrafów wprowadza się pojęcie zmiennej (jako litery, za którą można podstawić nazwy, w szczególności nazwy liczb), a w dalszych - ocenę logiczną formy zdaniowej i pojęcie termu (zwanego tu wyrażeniem liczbowym lub wyrażeniem ze zmiennymi) z licznymi ćwiczeniami na znajdowanie wartości liczbowej termów przy różnych podstawieniach. Nie ma jednak niczego, co przygotowałoby ucznia do rozumienia ogólnego prawa w zapisie literowym (pierwszym zapisanym w tej formie prawem jest przemienność dodawania).

Tekst wprowadzający prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania jest w istocie d o w o d e m tego prawa opartym na przesłankach geometrycznych: wzorze na pole prostokąta i (intuicyjnie oczywistej) addytywności pola; fakt, że w dowodzie tym miejsce zmiennych zajmują stałe, nie zmienia jego logicznej struktury, a rozumowanie może być przez ucznia natychmiast uogólnione przez "uzmiennienie stałych". W zadaniu 546 proponuje się następnie czytelnikowi przeprowadzenie analogicznego rozumowania, prowadzącego do prawa rozdzielności mnożenia względem odejmowania.

Dowód ten różni się istotnie od prematematycznych uzasadnień tego prawa, jakie znajdujemy w innych podręcznikach. Rozdzielność nie wynika tu bowiem z przesłanki, której p r a w d z i w o ś ć j e s t b e z p o ś r e d n i o w i d o c z n a, ale z twierdzenia (wzoru na pole prostokąta) należącego do przyswojonej już w i e d z y . Akceptacja takiego rozumowania wymaga od ucznia postawy zaufania do wyuczonego twierdzenia, pozwalającego nie tylko stosować je w szczególnych przypadkach, ale także "przetwarzać" na nowe, ogólne wnioski. Występuje obawa, czy dla wielu uczniów, będących dopiero w okresie przejściowym ze stadium myślenia konkretnego do stadium myślenia formalnego, hipotetyczno-dedukcyjnego, rozumowanie to nie jest niedostępne i może być tylko werbalnie przyswojone.

4.4. Prawo arytmetyczne jako równoważność programów rachunkowych

Odpowiedź na nasuwające się pytanie, czy możliwe jest takie ujęcie w podręczniku dla ucznia rozdzielności mnożenia względem dodawania, które nie posiadałoby wad omówionych w związku z cytowanymi przykładami, wymaga dydaktycznej analizy tego tematu.

Term arytmetyczny (również stały, a tym bardziej zawierający zmienne) posiada poza swym czysto logicznym sensem nazwy czy funkcji nazwo-nazwowej także ważny sens operacyjny: jest programem rachunku. To drugie znaczenie jest dominujące dla dziecka, które niemal od pierwszych lekcji matematyki uczy się realizować takie programy. Dodajmy, nauczyciel często wymaga od ucznia słownego odczytania z wyrażenia kolejnych kroków programu, zanim ten zacznie rachunek. Znak równości uczeń często traktuje jako znak zakończenia kolejnego etapu realizacji programu rachunkowego, nie myśląc wcale o identyczności liczb określonych napisanymi wyrażeniami. (Świadczą o tym m.in. znane błędy popełniane często przez uczniów). Czynione niekiedy wysiłki w kierunku zwrócenia uwagi uczniów na identycznościowy sens znaku równości odnoszą na ogół mały skutek, gdyż nie są zgodne z całą frazeologią arytmetyki szkolnej i charakterem większości ćwiczeń rachunkowych.

W tej sytuacji prezentowanie prawa rozdzielności (czy innej własności działań) przede wszystkim jako twierdzenia o równości (czy raczej równowartościowości) termów byłoby dla uczniów nienaturalne, a jego efekty byłyby wątpliwe. Prawo to powinno być przez uczniów pojmowane także jako równoważność dwóch programów rachunkowych, pozwalająca zawsze jeden z tych programów zamienić na drugi (domyślne, bo oczywiste: bez zmiany wyniku).

Pogląd, że trzeba najpierw nauczyć "zwyczajnie" prawa rozdzielności, a potem uczyć, jak i gdzie się je stosuje, nie wydaje się słuszny. Dającym się obserwować efektem takiego nauczania jest to, że uczniowie uczą się rachunku i rozwiązywania zadań niezależnie od poznanych wcześniej praw arytmetycznych, często nie zdając sobie wcale sprawy z tego, że ich postępowanie jest ściśle związane z tymi prawami.

Rozdzielność mnożenia względem dodawania wprowadza się zwykle w ten sposób (tak jest we wszystkich cytowanych przykładach), że znajduje się dwa wyrażenia określające miarę pewnej wielkości (liczebność zbioru, pole figury itp.); ich równość jest oczywista ze względu na to, że oznaczają te samą miarę tej samej wielkości. Podejście to zyska jedynie na naturalności, gdy je ujmiemy jako równoważność programów rachunkowych prowadzących do tej miary, pod warunkiem jednak, że zastosowanie tych programów zostanie odpowiednio umotywowane. Stanowiące punkt wyjścia sytuacje problemowe powinny być tak skonstruowane, by ten lub tamten program rachunku okazywał się najbardziej naturalny, najbardziej racjonalny, lub z jeszcze innych względów najodpowiedniejszy. Wówczas uczeń będzie miał okazję odkrycia obydwu występujących w prawie rozdzielności programów rachunku, a następnie ich równoważności. Będzie wtedy te programy dobrze odróżniał, mając przy tym świadomość zarówno konieczności adekwatnego do sytuacji wyboru, jak i możliwości zastąpienia jednego z tych programów drugim.

Dodajmy, że wypróbowana i często stosowana sytuacja, jaką jest szczególny dobór danych w rachunku, najlepiej pamięciowym (np. $18 \cdot 27 + 18 \cdot 73$), gdzie zmiana programu rachunku zgodnie z prawem rozdzielności skutecznie ułatwia wykonanie rachunku, stanowi jedynie motywację dla zmiany programu rachunkowego. Ten typ motywacji może więc być wykorzystany dopiero wówczas, gdy prawo rozdzielności jest już uczniom znane.

A oto dwa przykłady sytuacji motywujących odkrycie i zastosowanie odpowiednich programów rachunkowych.

P r z y k ł a d 1

Rozważmy dwa zadania dotyczące produkcji dowolnych wyrobów liczonych na sztuki.

Z a d a n i e 1. Dzienna produkcja robotników A, B jest równa odpowiednio 9, 6. Oblicz łączną produkcję tych robotników w ciągu: dnia, tygodnia, miesiąca, roku.

Naturalny i najracjonalniejszy zarazem jest następujący program wyliczeń.

Produkcja dzienna: $9 + 6 = 15$,
produkcja tygodniowa około: $6 \cdot 15 = 90$,
produkcja miesięczna około: $25 \cdot 15 = 375$,
produkcja roczna, około: $12 \cdot 365 = 4380$.

Konieczność znalezienia sumy $9 + 6$ determinuje dalsze postępowanie: mnożenie tej sumy przez liczbę dni czy miesięcy. Obliczanie za każdym razem oddzielnie produkcji robotników A, B i dodawanie tych liczb byłoby wysoce nieekonomiczne (zwiększa wydatnie liczbę wykonywanych działań).

Z a d a n i e 2. Dzienna produkcja robotników A, B jest równa odpowienio 9,6. Oblicz tygodniową produkcję każdego z nich oraz obu razem.

Tym razem wyliczenia przeprowadzimy następująco:

tygodniowa produkcja A: $6 \cdot 9 = 54$,
-"- -"- B: $6 \cdot 6 = 36$,
-"- -"- obu: $54 + 36 = 90$.

Tu z kolei żądanie obliczenia oddzielnie tygodniowej produkcji A i B wyznaczyło kolejność rachunków.

Jeżeli po rozwiązaniu tych zadań uczeń spojrzy na wyniki obydwu, stwierdzi, że łączną tygodniową produkcję obliczał dwukrotnie dwoma sposobami, które dały - oczywiście - ten sam wynik. Przy tym każdy z tych sposobów był odpowiedni w kontekście odnośnego zadania, a żaden nie ma uniwersalnej przewagi nad drugim. Tak więc w tym typie motywacji wybór programu rachunkowego jest podyktowany strukturą pytań postawionych w zadaniu.

P r z y k ł a d 2

Uczeń otrzymuje prostopadłościenne pudełko i zadanie obliczenia pola jego powierzchni bocznej. (Pudełko może przedstawiać pokój mieszkalny, którego ściany mają być pokryte tapetami; trzeba obliczyć ilość tapety). Stwierdza, że ściany są prostokątami, mierzy więc ich boki, mnoży i sumuje:

$$a \cdot c + b \cdot c + a \cdot c + b \cdot c$$

Następnie polecamy odcięcie podstaw i rozcięcie powierzchni bocznej wzdłuż jednej krawędzi. Uczniowie dostrzegają, że otrzymana figura jest prostokątem, jej pole można więc obliczyć jak pole prostokąta. Jeden z boków jest równy a + b + a + b, drugi - c, pole jest więc równe

$$(a+b+a+b)\cdot c$$

I tu odkrywane przez uczniów programy rachunku są adekwatne do sytuacji, w której uczniowie zostali postawieni. Dopóki widoczne są cztery prostokąty wchodzące w skład powierzchni bocznej - właściwe jest obliczenie pola każdego z nich i dodanie otrzymanych liczb. Gdy zaś okazało się, że te cztery prostokąty tworzą jeden duży prostokąt - naturalne jest obliczenie.od razu pola tego dużego prostokąta, co wymaga tylko niewielkiego przetworzenia uzyskanych wcześniej danych. Rozwiązując to zadanie uczeń nie tylko odkryje dwa programy rachunkowe (równoważne w sposób oczywisty),ale uświadomi sobie też możliwość zamiany jednego z nich na drugi (szczególny dobór liczb a,b,c może tu dostarczyć dodatkowej motywacji).

Odkładając na razie kwestię wykorzystania omówionych sytuacji w podręczniku dla wprowadzenia na tej drodze rozdzielności mnożenia względem dodawania, omówmy jeszcze motywujące formy użycia do tego celu modelu o niezaprzeczalnie wielkiej wartości dydaktycznej - kraty prostokątnej.

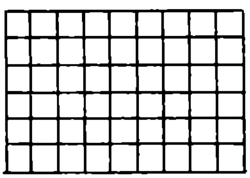
Model ten może więc być użyty w postaci s t a t y c z n e j (tj.jako gotowy rysunek, układ klocków itp.), przeznaczony do obserwacji, bądź w postaci d y n a m i c z n e j , co znaczy, że jest on całkowicie lub częściowo konstruowany lub przekształcany przez ucznia. Niżej przedstawimy szczegółowo przykład modelu dynamicznego.

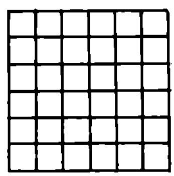
Z drugiej strony krata może być użyta jako model b e z p o ś r e d n i, gdy problem dotyczy np. znajdowania liczby węzłów lub oczek kraty, bądź jako model p o ś r e d n i, kiedy węzły lub oczka kraty reprezentują inne obiekty,których dotyczy problem. Obydwa te sposoby użycia kraty można odnaleźć w cytowanych wyżej przykładach.

Model ten może pełnić różne funkcje dydaktyczne. W szczególności może być użyty n a e t a p i e o d k r y w a n i a przez ucznia występujących w prawie rozdzielności programów rachunkowych, bądź po ich odkryciu, jako środek p o g ł ę b i a j ą c y rozumienie tego prawa i u t r w a l a j ą c y je w pamięci.

Pokażemy, jak można kratę prostokątną wykorzystać jako model dynamiczny, pośredni w procesie odkrywania przez uczniów rozdzielności mnożenia względem dodawania. Takie jej wykorzystanie wydaje się najpełniejsze i najbardziej efektywne.

Niech produkowane przedmioty, o których mowa w zadaniach 1 i 2, będą reprezentowane kostkami. W toku rozwiązywania zadania 1 polecamy uczniowi przedstawić szeregami kostek produkcję dzienną robotników A i B, a następnie ich produkcję tygodniową. Powstaną wówczas dwa układy kostek:





Rozwiązując zadanie 1, uczeń będzie każdą operację interpretował na tym modelu:

- znajduję tygodniową produkcję A - mnożę dzienną produkcję A przez 6 dni - mnożę liczbę kostek w rzędzie przez liczbę rzędów, itd.

Podobnie, rozwiązując zadanie 2 - będzie interpretował rachunek na modelu kostkowym:

- znajduję dzienną produkcję obu robotników - dodaję dzienne produkcje A i B - dodaję liczby kostek w pierwszym rzędzie, itd.

Odkryte przez ucznia w wyniku analizy rozwiązań tych zadań prawo rozdzielności zinterpretuje on w tym modelu np. następująco:

Klocki są ułożone w dwie kolumny tej samej długości. Żeby znaleźć tę liczbę można:

- pomnożyć długość szeregu w każdej kolumnie przez długość kolumny i dodać iloczyny,
- dodać długości szeregów w jednej i w drugiej kolumnie i pomnożyć sumę przez wspólną długość kolumny.

(Nie chodzi tu o dokładny opis słowny całego postępowania w językowo zamkniętej formie, ale o uświadomienie sobie samego procesu rachunkowego, wsparte choćby tylko demonstracją).

4.5. Stymulacja rozumowania prematematycznego przez podręcznik

Obecnie zajmijmy się możliwością zawarcia przedstawionych tu idei dydaktycznych w tekście podręcznika. Przypomnijmy: tekst powinien co najmniej stymulować odkrycie przez ucznia prawa rozdzielności jako równoważności dwóch programów rachunkowych odnoszących się do tej samej sytuacji określonego typu. Przy tym taka funkcja tego tekstu powinna być niemal niezawodna; znaczy to, że konstrukcja przez ucznia błędnego programu powinna być praktycznie niemożliwa, a stymulacja powinna być skuteczna dla każdego normalnie rozwiniętego dziecka w tej klasie.

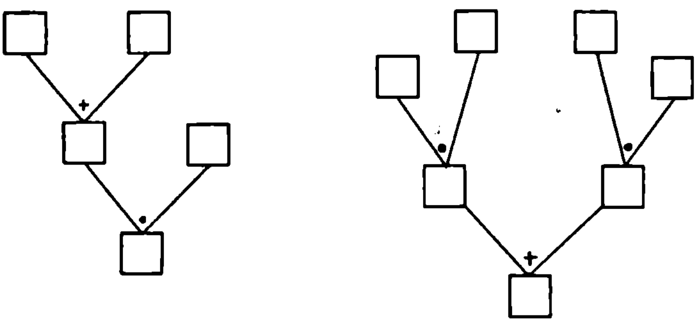
Sformułowanie w sposób przystępny zadań typu 1 i 2 z przykładu I, a także przygotowanie uczniowi schematu rozwiązania (np. w postaci tabelki do wypełnienia) praktycznie wykluczającego błędne rozumowanie, nie przedstawiają trudności. Nie będzie też trudne opracowanie ciągu informacji, pytań i poleceń rozwijających sytuację problemową z przykładu II. Także manipulacje kostkami, prowadzące do konstrukcji modelu typu kraty prostokątnej, mogą być zastąpione czynnościami rysunkowymi na papierze kratkowanym, dającymi się łatwo opisać słownie lub przekazać w postaci rysunku.

Istotną trudność stanowi natomiast znalezienie pisemno-rysunkowej formy skutecznej stymulacji u ucznia refleksji nad otrzymanymi wynikami, refleksji prowadzącej do dostrzeżenia między zastosowanymi programami rachunkowymi związku semantycznego (równoważności) i formalnego. Jak pokazuje doświadczenie, na formułowane w tekście polecenia w rodzaju "Porównaj...!" jak i pytania typu "Co wspólnego dostrzegasz...?" reaguje jedynie część uczniów omawianego poziomu nauczania. Wyjścia z tej trudności trzeba więc szukać we właściwym doborze poleceń i pytań, na które prawidłowo reaguje większość uczniów: poleceń wykonania określonych czynności (manualnych, graficznych, rachunkowych itp.) i pytań odnoszących się do konkretnych (także pisemnych werbalno-symbolicznych lub rysunkowych) sytuacji, na które można odpowiedzieć krótko i jednoznacznie.

Refleksję nad rozwiązaniami zadań 1 i 2, prowadzącą do konfrontacji dwóch sposobów obliczania produkcji tygodniowej i uświadomienia ich równoważności, można by stymulować następującym tekstem.

➤Na jakie pytanie odpowiadałeś w zadaniu 1 i w zadaniu 2?

Drzewa przedstawiają dwie drogi rachunku. Którą stosowałeś w zadaniu 1, a którą w zadaniu 2?



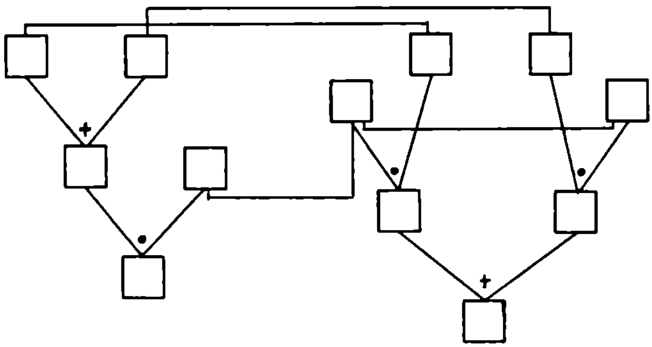
Uzupełnij:

9 - to dzienna produkcja robotnika A

6 - to ...

Wypełnij puste okienka. Wpisując każdą liczbę, określ jej znaczenie.

W górne okienka tych drzew wpisz dowolne liczby tak, by w okienkach połączonych były liczby równe.



Czy jesteś pewien, że wykonując działania otrzymasz w dowolnych okienkach równe liczby?

Wypełnij pozostałe okienka i sprawdź, czy miałeś rację.

Jeżeli otrzymane wyniki cię dziwią, przypomnij sobie, jakie znaczenie miały poszczególne okienka.

Jeżeli rozwiązaniu zadań będzie towarzyszyła konstrukcja przez ucznia modelu na kracie prostokątnej - refleksja powinna być skierowana także na ten model. Wreszcie podobną serią poleceń i pytań można skierować ucznia na analizę dwóch programów wyliczenia pola powierzchni bocznej prostopadłościanu.

Pokazaliśmy w ten sposób możliwość stymulowania za pomocą tekstu podręcznika rozumowania prematematycznego, prowadzącego do odkrycia własności ogólnej wraz z jej uzasadnieniem. Zrobiliśmy to na przykładzie twierdzenia, posiadającego łatwe do konstrukcji i silnie przekonujące uzasadnienia prematematyczne. Takie sprzyjające okoliczności nie towarzyszą wielu innym twierdzeniom ogólnym wprowadzanym w niższych klasach szkoły podstawowej. Należą do nich m.in. cechy podzielności liczb. Stosowane dotąd w podręcznikach klasy V w Polsce i w zachodnioeuropejskich podręcznikach dla szkoły średniej dowody, polegające na odpowiednim rozkładzie liczby na sumę iloczynów, są zbyt trudne dla klasy IV, gdyż wymagają sprawnego posługiwania się własnościami działań oraz korzystania z twierdzeń o podzielności termów. (Nb. dowody te znalazły się w podręcznikach "Matematyka dla klasy IV" H. Łabanowskiej, WSiP 1977, a także W. Zawadowskiego, WSiP 1978). Dowody te mogą być przerobione na rozumowania prematematyczne dające się konkretyzować manipulacyjnie lub rysunkowo, jednak zbyt złożone, by można je stymulować poleceniami i pytaniami w sposób równie przystępny, jak w przypadku rozdzielności mnożenia względem dodawania. Z drugiej strony ich wyłożenie nie aktywizuje myśli ucznia, nie przynosząc tym samym żadnych efektów.

Jest jednak pomiędzy realizowanymi przez czytelnika poleceniami i odpowiadaniem na pytania a wykładem forma pośrednia: dialog, którego osoby stawiają i rozwiązują zadania, pytają i odpowiadają, popełniają błędy i poprawiają je, nie dowierzają, dziwią się i przekonują wzajemnie.

Dialogowany tekst, zawierający prematematyczny dowód podzielności przez 3, prezentujemy w Aneksie 8 (s.149). Tą formą tekstu podręcznika zajmujemy się szerzej w rozdziale VII.

4.6. Podsumowanie

Rozważania tego rozdziału podsumujemy w następujących punktach:

1. Dowody matematyczne, nawet proste, przedstawione w konwencjonalnym słowno-symbolicznym języku matematyki, są niedostępne dla dużej części uczniów 10-12-letnich.

2. Dostępne na tym poziomie są rozumowania, choć ogólne i swoiście ściste, jednak zintegrowane z wykonywanymi równocześnie operacjami konkretnymi, opisywane niekiedy w języku słowno-symbolicznym odnoszącym się do tych operacji konkretnych, niekiedy zaś niewerbalnie - poprzez same te operacje.

3. Przedstawienie tak rozumianych rozumowań prematematycznych w podręczniku dla ucznia jest niemożliwe, gdyż ich konkretno-operacyjna istota pozostaje w sprzeczności z naturą tekstu jako formy przekazu. Z drugiej strony ich opis (a więc także opis wykonywanych przy tym operacji konkretnych) w formie wykładu (nawet ilustrowanego rysunkami) jest dla ucznia w tym wieku zbyt trudny w odbiorze.

4. Tekst podręcznika może natomiast stymulować u ucznia rozumowanie prematematyczne za pomocą odpowiednio skonstruowanej serii poleceń i pytań.

5. Rozumowania prematematyczne zbyt złożone na to, by można je było w taki sposób stymulować, mogą być dostępnie dla ucznia opisane w formie dialogu, operującego potocznym językiem ucznia i zawierającego niekonwencjonalne sformułowania, wyrażenia emocjonalne, wypowiedzi błędne itp., a więc z użyciem środków dodających mu autentyczności[11].

5. PODRĘCZNIK A NAUKA ROZUMIENIA TEKSTU MATEMATYCZNEGO

5.1. Tekst matematyczny i jego rozumienie

Od szkoły żąda się współcześnie, by uczyła, jak się uczyć, podręcznikom szkolnym zaś wyznacza się funkcję przygotowania do samokształcenia. W. Okoń, mówiąc o funkcji samokształceniowej podręcznika, stwierdza, że "tą drogą jest również udostępnienie uczniowi podstawowych technik uczenia się: czy to z tekstów pisemnych, czy ..." /W.O k o ń, 1973, s.78/. A "ta technika nie jest dana uczniowi wraz z alfabetem, trzeba się jej stopniowo i systematycznie uczyć" /Z.K r y g o w s k a 1977, s.15/. Prawda ta, uznana przez dydaktykę ogólną, wydaje się mieć szczególną wagę w przypadku matematyki. Lektura tekstu matematycznego wymaga w większym niż gdzie indziej stopniu wysiłku, niejednokrotnie twórczego, szczególnej koncentracji uwagi, umiejętności szybkiego zapamiętywania znaczenia licznych symboli i terminów i - co najistotniejsze - stosowania specjalnej techniki lektury. Z. Krygowska (op.cit.) pokazuje, na jak ogromne trudności napotyka uczeń, nauczany matematyki zawsze przez bezpośredni kontakt z nauczycielem, gdy po raz pierwszy staje wobec zadania przyswojenia sobie nowych treści z podręcznika. Podaje też przykłady, świadczące o skuteczności konsekwentnych działań nauczyciela w kierunku przygotowania ucznia do takiej lektury. Przykłady te dotyczą tylko poziomu liceum; postulat takiego ukierunkowania nauczania na tym poziomie jest oczywisty i całkowicie realny.

W perspektywie jednolitej szkoły 10-letniej w Polsce, gdzie jedyny wyraźny przedział wystąpi pomiędzy trzecim a czwartym rokiem nauczania, nasuwa się pytanie, w jakim momencie właściwe będzie rozpoczęcie nauki studiowania tekstu matematycznego. Wybór optymalnego momentu ma tu znaczenie bardzo istotne z wielu względów.

Praca nad tekstem matematycznym wymaga dostarczenia uczniowi odpowiedniej porcji takiego tekstu w podręczniku. Tekst taki będzie zaś z natury

---

[11] Propozycja ta została szerzej rozwinięta w 7.4.

rzeczy informujący, a nie sterujący aktywnością poszukiwawczą ucznia, co radykalnie obniży jego wartość dydaktyczną z punktu widzenia uczenia się samej matematyki. Jeżeli więc praca nad takim tekstem na danym poziomie miałaby być i tak nieskuteczna, lepiej język podręcznika dostosować maksymalnie do jego funkcji aktywizującej. Z drugiej strony istotne są efekty tej pracy w momencie opuszczenia szkoły przez ucznia,a nie w toku nauki; nie ma więc powodu rozpoczynać jej wcześniej, niż jest to niezbędne dla osiągnięcia celu w terminie. Jednak dotąd nie wiadomo, jaki czas jest na to potrzebny, ani też,czy wczesne rozpoczynanie tej pracy przynosi lepsze efekty.

Tekst matematyczny jest jakby kondensatem rozumowań i wniosków, uzyskanych przez autora na skomplikowanej, nieciągłej i nieliniowej drodze myśli, w jego własnym języku, na ogół różnym od konwencjonalnego języka tekstu. Zrozumienie takiego tekstu (operatywne, a nie tylko formalne, według rozróżnienia Z. Krygowskiej) wymaga pracy idącej jakby w odwrotnym kierunku: przetworzenia go na własną myśl i własne widzenie czytelnika, na sformułowania niekonwencjonalne, formalnie niepoprawne, pełne skrótów i niedomówień, za to dla niego pełne treści, dające głębokie poczucie zrozumienia. Matematyk wykonuje tę pracę w odniesieniu do tekstów elementarnych, a także dotyczących znanej mu dobrze dziedziny, sprawnie i bez wysiłku, niemal automatycznie, jak muzyk, odczytujący i "słyszący" z nut utwór muzyczny, nawet bez instrumentu. Uczniowi brak tej sprawności, automatyzm musi zastąpić świadomą i zorganizowaną pracą, nie obejdzie się też bez instrumentarium. Na to jednak, by wysiłek ten mógł być skuteczny, by doprowadził do odprężającego poczucia zrozumienia, uczeń musi rozporządzać "własną" matematyką, będącą jakby układem odniesienia dla matematyki odcyfrowywanej z tekstu, zespołem nieformalnych struktur, w który włączone musi być każde nowe pojęcie czy rozumowanie.

Rozumienie jako włączenie w system struktur myślowych zostało wielokrotnie i w różny sposób zbadane i opisane przez psychologów (R.Skemp opiera na tym całą koncepcję uczenia się). Ten aspekt rozumienia matematyki ma ważkie implikacje dydaktyczne, także w przypadku rozważanego przez nas problemu. Trzeba bowiem przyjąć, że praca nad tekstem, nauka przekładania tekstu matematycznego na język własny czytelnika, nie może przynieść właściwych efektów, jeżeli p r z e d t e m w umyśle tego czytelnika nie wytworzyły się struktury pojęciowe, do których mógłby się on odwołać. Z kolei proces dydaktyczny, prowadzący do wytworzenia tych struktur, nie może być oparty na tekście konwencjonalnym, choćby ułatwionym, zawierającym jednak elementy wymagające owego przekładu i pozostające bez niego pustym ciągiem słów i symboli.

Właściwe kształcenie rozumienia tekstu matematycznego powinno więc być poprzedzone etapem przygotowawczym, w którym uczeń przyswaja sobie pojęcia i wzorce rozumowań za pośrednictwem przykładów, własnej aktywności odtwarzającej lub poszukiwawczej, wreszcie - języka obrazowego, jak najbliższego potocznemu, nie wolnego od koniecznych niedomówień i wieloznaczności, operującego wszelkimi środkami wyrazu, jakie okażą się przydatne. Na tym etapie pożądane będzie stopniowe i ostrożne przygotowywanie ucznia do biernego i czynnego posługiwania się specyficznymi środkami i zwrotami konwencjonalnego języka matematyki, jak zmienne wyrażenia kwantyfikatorowe itp. Tu wreszcie rozpocząć można rozwijanie poczucia konieczności uściślania wypowiedzi (przez stwarzanie sytuacji motywujących tę potrzebę) i naukę korzystania z niektórych środków uściślania. A więc zamiast pracy nad tekstem matematycznym, stopniowe przyzwyczajanie do operowania pojedynczymi składnikami języka matematyki, wraz z motywacją ich użycia opartą na naturalnej potrzebie.

Obserwowane trudności uczniów pozwalają uznać, że ten etap przygotowawczy, rozpoczęty w klasie pierwszej, nie może być zakończony na szczeblu początkowym, w każdym razie przy obecnie realizowanym programie i aktualnym stylu nauczania. Konieczne wydaje się jego przedłużenie na pierwszą klasę ponadpoczątkową, albo i dalsze. Uznanie tej konieczności musi mieć zasadniczy wpływ na język i strukturę podręczników dla wspomnianych klas.

W dalszym ciągu tego rozdziału omówimy dwa zagadnienia dotyczące języka podręczników matematyki dla rozważanego poziomu: zagadnienie wyrażania ogólności oraz zagadnienie użycia zmiennych.

5.2. Sposoby wyrażania ogólności w tekście podręcznika

5.2.1. Charakter matematycznych twierdzeń ogólnych, jako takich formalnie jednorodnych, okazuje się wysoce zróżnicowany ze względu na ich naiwne rozumienie pojęciowe. Wyróżnimy trzy typy twierdzeń: dotyczące własności obiektów, zbiorów i operacji. Oczywiście, nie jest to podział ze względu na logiczną budowę twierdzeń: zbiór i operacja są - formalnie biorąc - obiektami, operacja może być określana jako relacja, a więc zbiór, itd. Kryteria tego podziału leżą w sferze aktywności dziecka badającego prawdziwość wypowiedzi ogólnej.

Dla sprawdzenia np. wypowiedzi "Klocki żółte mają długość 5", wystarczy sięgnąć po klocek żółty i zmierzyć jego długość, a następnie powtórzyć tę czynność jeszcze parokrotnie (dzieci uważają weryfikację kilku losowo wybranych przypadków za zupełnie wystarczającą). Zupełnie podobnie przebiegać będzie sprawdzenie wypowiedzi "Liczba mająca w rzędzie jedności zero jest podzielna przez pięć". Są to typowe t w i e r d z e n i a o o b i e k t a c h . Inaczej jednak będzie przebiegać weryfikacja wypowiedzi

"Liczba podzielna przez 6 jest też podzielna przez 3". Tu nie można po prostu "sięgnąć" po liczbę podzielną przez 6 dla zbadania jej własności. Liczbę taką trzeba bądź skonstruować (jako wielokrotność 6), bądź też znaleźć badając podzielność kilku liczb przez 6. Dla sprawdzającego tę wypowiedź dziecka od początku na pierwszy plan wysuwa się związek w ł a s n o - ś c i podzielności przez 6 z podzielnością przez 3, lub inaczej - podzielność przez 3 jawi się jako własność z b i o r u liczb podzielnych przez 6. Twierdzenie to zaliczamy zatem do t w i e r d z e ń o z b i o - r a c h. Typowym przykładem t w i e r d z e n i a o o p e r a c j i jest wypowiedź "Suma nie zależy od kolejności składników". Tu prymitywne dziecięce sprawdzanie wypowiedzi polega na wielokrotnym wykonywaniu dodawania i porównywaniu wyników. Dla dziecka twierdzenie to wyraża własność wykonywanej operacji, nie zaś obiektu czy zbioru.

Elementarne twierdzenia o obiektach są analogiczne do zdań języka potocznego i twierdzeń formułowanych w innych naukach. Aby się o tym przekonać, wystarczy porównać powyższe przykłady z następującymi wypowiedziami:

"Ósemka" jeździ do Bronowic.

Człowiek młody jest pełen energii.

U ssaków temperatura ciała jest stała.

Analogia ta sprawia, że do zrozumienia takich twierdzeń dziecko przygotowuje się, odkąd świadomie zacznie posługiwać się mową. Twierdzenia te rozumiane są też przez dzieci bez trudu i bez specjalnych zabiegów dydaktycznych. Oczywiście, nierzadko trafiają się błędy i trudności typu logicznego (jak nierozróżnianie implikacji i równoważności, czy częsty błąd: "Przekątne równoległoboku są równe; na przykład przekątne prostokąta"). Nie są to jednak błędy ani trudności specyficzne dla matematyki. Ich stopniowa eliminacja może być celem nauczania nie tylko matematyki, ale także języka polskiego i innych dyscyplin szkolnych. Twierdzenia o obiektach (w większości są to twierdzenia o treści geometrycznej) formułuje się w podręcznikach na ogół czysto werbalnie (tj. bez użycia zmiennych) i bez wcześniejszego specjalnego przygotowania do ich rozumienia. Z wyżej omówionych względów wydaje się to całkowicie słuszne.

Operacja (np.działanie arytmetyczne, przekształcenie geometryczne) w myśleniu pojęciowym nie jest obiektem. Jest właśnie operacją na obiektach, procesem odbywającym się według określonego programu. Operacja nabiera sensu w momencie jej wykonywania, nazwa jej jest zaś jedynie hasłem, sygnałem do rozpoczęcia kryjącego się pod nią procesu. Rozumieć twierdzenie o operacjach znaczy więc rozumieć, w jakich przypadkach i jakie zmiany programu dopuszcza to twierdzenie. Formułowanie twierdzeń o operacjach tak, jakby operacje były obiektami, nie odpowiada takiemu pojmowaniu operacji i nie sprzyja prawidłowemu rozumieniu tych twierdzeń. Zresztę takie werbalne, a dostatecznie proste sformułowanie tych twierdzeń bez użycia zmiennych jest możliwe tylko w najbardziej elementarnych przypadkach. Już czytelne (bez dłuższej i wymagającej przygotowania analizy tekstu) sformułowanie rozdzielności mnożenia względem dodawania bez użycia zmiennych nie wydaje się realne.

Powszechnie w matematyce przyjęta forma twierdzeń o operacjach wymaga użycia termów, zbudowanych ze zmiennych i symboli funkcyjnych. Na przykład, rozdzielność mnożenia względem dodawania sformułujemy następująco: dla każdych a, b, c, $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$

Jest to w istocie twierdzenie o równości funkcji określonych termami $a.(b+c)$ i $a.b+a.c$. Dla matematyka i dla każdego, kto język ten opanował i umie spontanicznie "przełożyć" to sformułowanie na takie, gdzie mowa o programach rachunku i zamianie jednego programu na inny, jest to sformułowanie - ze względu na zwięzłość, przejrzystość i jednoznaczność - bodaj optymalne. Jest ono dla matematyka tak naturalne i jasne, że wielu autorów nie waha się tak ujmować twierdzenia w podręcznikach matematyki nawet dla najniższych klas. Np. w podręczniku T. Jóźwickiego dla klasy III /J ó ź w i c k i 1976, s.33/ czytamy: "Taką własnośc mają dowolne liczby a,b,c:

$$a \cdot (b+c) = a\cdot b + a.c".$$

Tymczasem jednak trudności uczniów w rozumieniu języka zawierającego zmienne są daleko większe niż może się wydawać (do sprawy tej powrócimy w następnym paragrafie) i sprawiają, że sformułowania takie często pozostają dla nich martwe.

Tak więc rozumienie przez dzieci twierdzeń ogólnych o operacjach w konwencjonalnym sformułowaniu napotyka na trudności z dwóch powodów: takiego ich ujmowania, jakby były to twierdzenia o obiektach, oraz użycia w tych sformułowaniach zmiennych.

Twierdzenia o zbiorach, choć nie stwarzają tych trudności natury pojęciowej, są również formułowane w matematyce najczęściej i najchętniej z użyciem zmiennych, a sformułowania te są przenoszone do podręczników szkolnych bez należytego uwzględnienia braku u dzieci przygotowania do ich rozumienia.

5.2.2. Jasne jest, że uświadomienie ogólności jakiegoś związku nie zawsze i niekoniecznie musi być wywołane informacją werbalną (np.w postaci odpowiedniego twierdzenia). Powinno stanowić zasadę dydaktyczną takie organizowanie procesu formowania się pojęć, by świadomość regularności związków zjawiała się u ucznia samorzutnie, a jej werbalizacja stanowiła jedynie formalny wyraz tego już dokonanego aktu. Werbalizacji tej można też zaniechać, jeżeli z jakichś względów byłaby ona przedwczesna, niepożądana, lub językowo zbyt trudna.

Takie podejście znajdujemy w podręczniku dla IV klasy szkoły meksykańskiej /F i l l o y 1975/. Rozdzielność mnożenia względem dodawania wprowadza się tu na jednym przykładzie (przykład ten cytujemy in extenso w rozdziale 4, s.55) jednak w sposób pozwalający na dostrzeżenie przez ucznia ogólności tego prawa. Następnie, bez jednego nawet słowa mówiącego o tej ogólności, proponuje się uczniowi rozwiązanie zadań przez wypełnienie "okienek", do czego skorzystanie z prawa rozdzielności jest konieczne.

Oczywiście, nie ma żadnej pewności, że pierwszy przykład wprowadzający rozdzielność doprowadzi ucznia do samorzutnego uświadomienia sobie rozdzielności jako ogólnego prawa. Przypuszczenie takie wydaje się nawet nadmiernie optymistyczne. Rozwiązując pierwsze ćwiczenia może on działać nie opierając się na tym prawie, ale stosując formalną analogię. Można jednak przypuszczać, że dalsze przykłady ukazujące pojęciowy aspekt rozdzielności, a także dalsze zastosowania tego prawa w różnorodnych ćwiczeniach, będą stopniowo kształtowały i ugruntowywały w umyśle ucznia świadomość tej ogólnej regularności, którą kiedyś wyrazi w słowach lub symbolach. Wyżej mówiliśmy o tym, dlaczego na tym poziomie może być uważane za niecelowe słowne formułowanie tego typu twierdzeń ogólnych, a także przedstawianie ich w postaci algebraicznej. Być może, tymi właśnie względami autorzy tego podręcznika motywują swoją rezerwę wobec wypowiadania w jakiejkolwiek formie twierdzeń ogólnych, gdy w innych podręcznikach dla tego samego, a nawet niższego poziomu sformułowań takich nie brak. Mogli jednak skorzystać z różnych sposobów skierowania myśli ucznia na tę regularność, którą ujawniają w przykładzie, i ułatwić tym samym jej odkrycie. Sposobami tymi zajmiemy się obecnie.

5.2.3. Nie ma skuteczniejszego sposobu stymulowania myślenia ucznia nad postawienie mu pytania, na które będzie chciał odpowiedzieć, a nie będzie mógł zrekonstruować odpowiedzi przez formalne naśladowanie wzorca. Mówiąc inaczej, przez postawienie go w sytuacji problemowej. Pytanie może być sformułowane explicite lub sugerowane implicite przez kontekst werbalny, graficzny lub inny konkretny.

Myśl ucznia można skierować na ogólność związku wprowadzonego na jednym przykładzie poleceniami i pytaniami zmuszającymi do zmiany występujących w przykładzie stałych na inne i prowadzącymi w konsekwencji do uświadomienia nieistotności ich wyboru, do ich "uzmiennienia". Metodę tę omawia Z. Krygowska /1977 a, s.156/.

Przypuśćmy dla przykładu, że rozdzielność iloczynu względem sumy została pokazana za pośrednictwem kraty prostokątnej na przykładzie:

$$2\cdot(5+4) = 2\cdot 5 + 2\cdot 4$$

Oto polecenia i pytania, jakie mogłyby po tym nastąpić.

- Zamiast 2 rzędów weź 3. Liczby kratek w rzędzie nie zmieniaj. Napisz podobnie, jak obliczysz dwoma sposobami liczbę kratek.

- Zmień jeszcze raz liczbę rzędów. Czy możesz zastosować te same sposoby obliczenia liczby kratek? Napisz je.

- Zmień liczby kratek w rzędzie: zamiast 5 i 4 weź 3 i 6. Czy znowu możesz tak samo obliczać liczbę kratek? Napisz, jak będziesz rachował.

• - Zmień jeszcze raz liczby kratek w rzędzie i napisz dwa sposoby obliczania liczby wszystkich kratek.

Szczególnie istotny jest tu samodzielny wybór danych przez ucznia, którego brak w najbliższym temu ujęciu podręczniku /N e u n z i g a-S o r g e r a/. Dowolność tego wyboru lepiej uświadomi uczniowi ogólność twierdzenia niż informacja o tej ogólności, na przykład taka, jak w podręczniku dla klasy III /T.J ó ź w i c k i e g o /.

"Taką własność mają dowolne liczby a, b, c: $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ ", nawet jeżeli z podobnymi sformułowaniami uczeń spotkał się już wcześniej.

Sytuacja problemowa zorientowana na percepcję regularności może być też związana z odpowiednio dobranym schematem graficznym. Stworzy ją pytanie, jakimi liczbami bądź znakami można wypełnić "okienka" schematu (zob. § 4.3) dla otrzymania określonych wyników bądź spełnienia określonych warunków. Nawet jeżeli odpowiedź ucznia sprowadza się do przykładowego wypełnienia "okienek", daje to okazję do zorientowania się przez niego zarówno w swobodzie wyboru liczb jak w koniecznych ograniczeniach. Problem ten może uświadomić mu ogólność twierdzenia, mimo że nigdzie w słowach nie zostanie to wyrażone.

5.3. Użycie i rozumienie zmiennych a tekst podręcznika

5.3.1. Zmienna ma dwa aspekty znaczeniowe: liczby (punktu itp.), której wartości nie znamy lub nie chcemy określać, oraz miejsca pustego, w które można podstawić dowolny term. W nauczaniu szkolnym zawsze kładziono dużo większy nacisk na pierwszy z tych aspektów. Rozwiązując równanie uczeń myśli o niewiadomej jako o poszukiwanej nieznanej liczbie; odpowiedź daje w formie równości " $x = \ldots$", którą rozumie tak: oto nieznana dotąd wartość liczby x okazuje się równa ... (Zauważmy, że nie miałoby sensu myśleć w tym kontekście o x jako miejscu pustym[12]. Zmienne w sformułowaniu twierdzeń ogólnych są rozumiane jako "dowolne" liczby (punkty itp.), a więc takie, których aktualna wartość nie ma znaczenia dla prawdziwości zdania.

---

[12] Mamy tu na myśli nauczanie tradycyjne, dotychczas niemal powszechne. Trzeba jednak wspomnieć o próbach wprowadzania od początku pojęcia równoważności warunków, gdzie np. równanie $2x = 4$ i $x = 2$ były dla ucznia równoważnymi warunkami z miejscem pustym x.

Najczęściej wykonywane przez ucznia podstawienia, to podstawienie za zmienne symboli stałych (na ogół liczebników), co ten aspekt znaczeniowy zmiennej dodatkowo umacnia: "x jest liczbą, na przykład 5". Nierozumienie sensu podstawiania i brak technicznego opanowania tej operacji ujawnia się w szkole wówczas, gdy za zmienne trzeba podstawić inne zmienne lub termy złożone. Oto kilka przykładów:

- trudności z obliczeniem wyrazu ciągu o numerze n+1,
- trudności z zastosowaniem twierdzenia Pitagorasa, sformułowanego z użyciem liter A, B, C na oznaczenie wierzchołków trójkąta, do trójkąta, w którym oznaczenia wierzchołków są inne, a tym bardziej gdy "kolidują" z tamtymi oznaczeniami,
- traktowanie relacji $m+n \mid n$ jako odwrotnej do $n \mid m+n$.

Niedostateczne rozwinięcie u ucznia formalnego aspektu zmiennej i poleganie na jej "naturalnym" rozumieniu (jako niesprecyzowanej bliżej, zaszyfrowanej nazwy) kryje w sobie jeszcze inne poważne niebezpieczeństwo. Liter w tekście matematycznym używa się często także w roli stałych: jako chwilowych nazw ad hoc określanych obiektów (użytych w roli przykładów w ćwiczeniach itp.) Wówczas litera taka funkcjonuje inaczej niż zmienna; w szczególności w całym kontekście oznacza jeden i ten sam obiekt. W tym można upatrywać przyczynę często obserwowanego zbyt trwałego wiązania przez uczniów zmiennej z jej intuicyjnym sensem w określonym kontekście. Związane z tym trudności dobrze ilustruje u wielu uczniów występujące nierozumienia twierdzenia o indukcji, gdy dla sformułowania założeń i tezy użyto tej samej litery, i zdecydowana poprawa tego rozumienia, gdy w założeniu dziedziczności użyto innej zmiennej niż w tezie twierdzenia.

Swobodne i poprawne posługiwanie się przez uczniów językiem matematyki wymaga więc, by obok "naturalnego" kształcić formalny aspekt zmiennych i technikę biernego jak i czynnego operowania nimi.

Przede wszystkim konieczne jest dobre rozróżnianie przez uczniów zmiennych i stałych. Nie sprzyja temu stwarzanie sytuacji, w których ta sama litera jest jednocześnie stałą i zmienną. W podręczniku H. M o r o - z a "Nasza matematyka" dla klasy III sytuacje takie spotykamy wielokrotnie (najwidoczniej jest to świadomie przez Autora stosowane). Oto przykład /M o r o z 1975, s.66/:

"Oznaczmy literą A zbiór wszystkich dziewczynek jednej klasy, literą B zbiór wszystkich chłopców tej klasy. /.../ Możemy więc napisać:

$$A \cup B = B \cup A$$

W zbiorze A jest a elementów, w zbiorze B jest b elementów /.../, więc liczba a+b jest równa liczbie b+a. Tę własność ma każda para liczb.

$$A \cup B = B \cup A$$
$$a + b = b + a$$

Dodawanie liczb jest przemienne.

Skoro Autor uważa za celowe i potrzebne takie sformułowanie praw przemienności dodawania zbiorów i liczb, to byłoby lepiej, gdyby użył w przykładzie innych liter (lub słów, skrótów itp.) na oznaczenie występujących tam zbiorów i liczebników, inne zaś zarezerwował dla pełnienia roli zmiennych.

Podobnie jest w wielu innych podręcznikach. Oto jeszcze jeden przykład:

W podręczniku /B e r n a r d 1971/ dla klasy "de-sixième" na stronie 13 sformułowano definicję iloczynu kartezjańskiego H zbiorów A i B w bezpośrednim następstwie przykładu, gdzie A = $\{2,3,4,5\}$, B= $\{4,5,6,7,9\}$ zaś H jest iloczynem kartezjańskim tych zbiorów.

Wdrażanie uczniów do rozróżniania zmiennych i stałych powinno być prowadzone świadomie w ramach kształcenia ich języka matematycznego. Podręcznik ma tu ważne i oczywiste zadania do spełnienia, choć wprowadzenie explicite pojęć zmiennej i termu, jak to czyni podręcznik dla klasy V /H a y e n 1976/ (zob.Aneks 5), świadczy chyba o zbytnim przejęciu się nimi. Wydaje się, że we wstępnym etapie wprowadzenia liter do języka preferowanie niektórych liter do roli zmiennych jest dydaktycznie uzasadnione. Konieczne oswajanie uczniów z relatywnym charakterem zmiennych i parametrów można odłożyć na później. Wreszcie w niektórych podręcznikach spotkać można sformułowania, przedstawiające zmienną jako zaszyfrowaną, ale ustaloną liczbę. Oto przykład zaczerpnięty z "Mathématique Moderne 1" Papy'ego /P a p y 1964, s.320/.

- Pomyśl pewną liczbę całkowitą wymierną.
-...
-Oznaczmy ją przez a.
Uwaga! Jeżeli pomyślałeś 2, a = 2 = +2.

W ten sposób Autor przygotowuje czytelnika do rozumienia związków ogólnych sformułowanych z użyciem liter:

$$-(-a) = a, \quad (-a) + (-b) = -(a + b) \text{ itp.}$$

Można przypuszczać, że zabieg ten w istocie ułatwia uczniowi rozumienie tych związków jako równoważności programów rachunkowych. Rodzi się jednak obawa, że nie ułatwia on, a może nawet utrudnia, przyswojenie formalnego aspektu zmiennej, a także włączenie zmiennych do czynnego języka matematycznego ucznia. Wymaga to zbadania i ewentualnego opracowania środków przeciwdziałających tym skutkom.

5.3.2. Jako prematematyczne zastępniki liter w roli zmiennych stosuje się obecnie szeroko dawno już przez niektórych dydaktyków zalecane puste "okienka", w które uczeń może wpisywać cyfry lub inne symbole. Przy ich pomocy zapisuje się równania, nierówności i inne formy zdaniowe, a także formułuje się twierdzenia ogólne. Umieszcza się je nie tylko w tekście liniowym, ale także w różnego rodzaju grafach i schematach, gdzie zastępują węzły lub oznaczenia krawędzi.

Rozpatrzmy kilka przykładów wprowadzania w podręcznikach twierdzeń ogólnych z użyciem "okienek".

P r z y k ł a d 1. W podręczniku "Mathematik B5" /R o l l e r 1974/ dla sformułowania niektórych związków między działaniami autorzy używają "okienek" trzech kształtów: okrągłe, kwadratowe i trójkątne, przy czym z każdym kształtem związany jest inny kolor: biały, czerwony lub zielony, którym "okienko" jest zamalowane[13]. Wewnątrz "okienek" niekiedy wpisane są liczby. Oto definicja odejmowania, sformułowana przy użyciu tej symboliki.

W klasie 5 wśród 42 dzieci jest 24 chłopców. Ile jest dziewczynek w tej klasie?

$$\underset{ch}{24} + \underset{dz}{\ldots} = 42 \quad \text{lub} \quad \begin{array}{r} 24 \\ \underline{+\ \ldots} \\ -\ 42 \end{array}$$

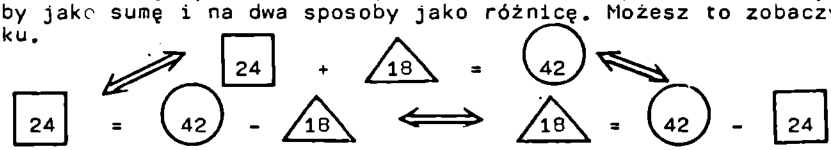
Gdy pytamy nie o łączną liczbę chłopców i dziewczynek, a więc o sumę, ale o liczbę chłopców albo o liczbę dziewczynek w jakiejś klasie, to zadanie

$\boxed{24}$ + 18 = ◯

przekształca się w zadanie $\boxed{}$ + 18 = 42 albo w zadanie $\boxed{24}$ + △ = 42

Wtedy piszemy $\boxed{}$ = 42 - 18 △ = 42 - $\boxed{24}$

/.../ Związek między liczbami 24, 18 i 42 można napisać na cztery różne sposoby jako sumę i na dwa sposoby jako różnicę. Możesz to zobaczyć na rysunku.



"Okienka" zdają się służyć tu przede wszystkim ułatwieniu tego, co Z. Krygowska nazywa "uzmiennieniem" stałych: uświadomieniu sobie przez ucznia, że liczby użyte w przykładzie są nieistotne (mogłyby one być zastąpione jakimikolwiek innymi), ważne są działania i ich kolejność. Patrzącemu na ten rysunek najpierw rzucają się w oczy kolorowe "okienka", potem dopiero napisane w nich liczby. Nie ma jednak w tym podręczniku ćwiczeń, w których aktywność ucznia polegałaby na rysowaniu lub wypełnianiu "okienek". Dodajmy jeszcze, że "okienka" występują w tym podręczniku jedynie w początkowej partii. Najpierw równolegle z nimi, a potem wyłącznie, używa się języka konwencjonalnego z literami w roli zmiennych. Brak przy tym jakiegokolwiek pomostu łączącego oba te języki. "Okienka" nie zostały więc świadomie użyte jako środek przygotowujący ucznia do rozumienia zmiennej.

P r z y k ł a d 2. W książce N e u n z i g a-S o r g e r a dla klasy III /1969/ rozdzielność mnożenia względem dodawania wprowadza się następująco:

1) pokazuje się poglądowo, że $3\cdot4 + 3\cdot5 = 3\cdot(4+5)$,

2) poleca się analogiczne sprawdzenie, że $4\cdot4 + 4\cdot5 = 4\cdot(4+5)$, a następnie $5\cdot4 + 5\cdot5 = 5\cdot(4+5)$,

---

[13] Ze względów technicznych nie mogliśmy uwzględnić kolorów w niniejszym tekście.

3) Nasze wyniki możemy łącznie przedstawić następująco:

$$\square \cdot 4 + \square \cdot 5 = \square \cdot (4+5).$$

W pierwszym zadaniu w każdym okienku była liczba 3. Sprawdź, że mogą tam się znaleźć także liczby 2, 6 i 8,

4) poleca się sprawdzenie prawa rozdzielności w dalszych trzech przypadkach (dwie liczby stałe),

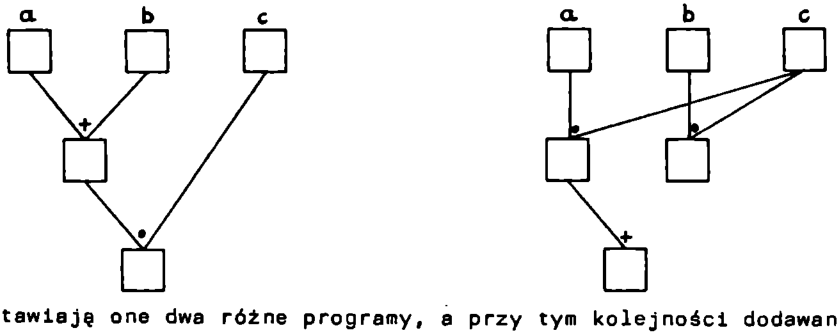
5) poleca się łączne przedstawienie tych wyników w formie "reguły jak wyżej".

Uczeń nie tylko odczytuje tu wyrażenie z "okienkiem", ale posługuje się też "okienkiem" czynnie w dwu aktywnościach: 1) wpisuje w "okienko" liczebniki (lub je sobie tam wyobraża, przepisuje równość zastępując "okienko" liczebnikiem itp.), 2) komponuje formę zdaniową z "okienkami" w roli zmiennych. Obie te aktywności są najwyraźniej świ domie przez autorów użyte jako przygotowanie do operowania zmiennymi.

P r z y k ł a d 3. W nauczaniu i podręcznikach matematyki dla niższych klas coraz częściej stosuje się różnego typu grafy, w których niektóre lub wszystkie stałe (w wierzchołkach lub przy krawędziach grafu) zastępuje się "okienkami". Grafów takich używa się najczęściej dla formułowania i rozwiązywania zadań rachunkowych, rzadziej dla formułowania twierdzeń ogólnych. A tymczasem one właśnie zdają się najlepiej oddawać operacyjny charakter tych twierdzeń.

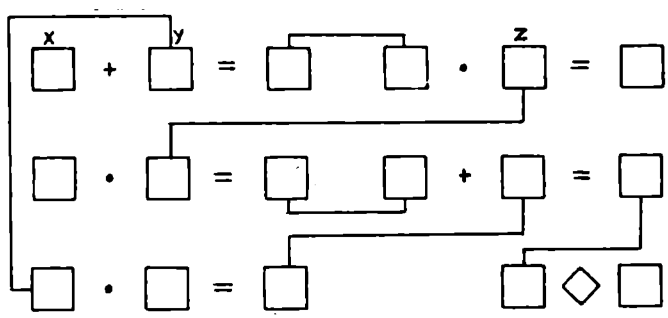
Przykłady takich grafów ilustrujących niektóre własności działań znalazły się w "Naszej matematyce" dla klasy III H. M o r o z a /1975/. Użyto ich tu jednak dla sformułowania dodatkowych ćwiczeń prowadzących do weryfikacji odpowiednich twierdzeń, nie zaś jako konsekwentnie stosowany środek. Nie będziemy więc ich tu cytować, ale omówimy od razu w szerszym kontekście.

a) Rozdzielność mnożenia względem dodawania może być rozumiana jako równoważność następujących drzew.



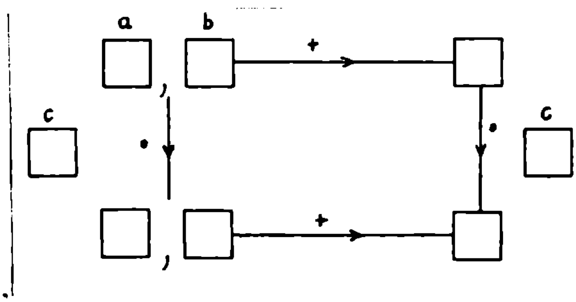
Przedstawiają one dwa różne programy, a przy tym kolejności dodawania i mnożenia oraz "rozdwojenie" się gałęzi mnożenia przez c przy przejściu z pierwszego do drugiego są tu dobitnie uwidocznione w samej formie graficz nej. (Zapis algebraiczny nasuwa na myśl przede wszystkim obecność lub brak nawiasów, co jest nieistotną formalną cechą tego języka). Uświadomienie sobie, że programy te, choć różne, dają zawsze ten sam wynik, będzie wystarczająco pełnym i ogólnym zrozumieniem rozdzielności.

b) W przeciwieństwie do drzew, następujący "organigram okienkowy" skutecznie kamufluje twierdzenie, zgodnie z którym "okienko" ◇ powinno być zastąpione znakiem równości.



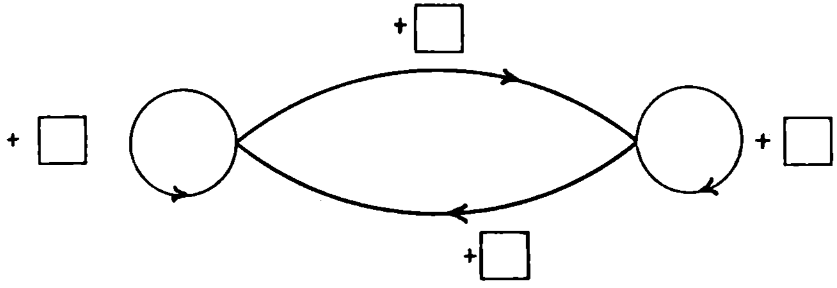
Obowiązuje tu konwencja: "okienka" połączone łamaną zawierają tę samą liczbę. Uczeń wybiera dowolnie liczby x, y, z, a następnie wykonuje wskazane działania, wypełniając "okienka" ich wynikami. Gdy po kilku próbach stwierdzi, że w okienku ◇ zawsze "wychodzi" równość, analizuje schemat i odkrywa w nim rozdzielność mnożenia względem dodawania. Konstruowanie przez uczniów takich organigramów dla poznanych już twierdzeń wydaje się być również dobrym ćwiczeniem pogłębiającym ich rozumienie.

c) Niektórzy dydaktycy (np. T. J. F l e t c h e r) próbują lansować szersze wykorzystanie diagramów przemiennych, schematów stworzonych dla teorii kategorii a znajdujących zastosowania w różnych działach matematyki. Oto taki diagram w wersji "okienkowej" dla prawa rozdzielności mnożenia względem dodawania.



Schemat ten ujawnia różnicę dwu programów rachunku w sposób równie wyraźny jak drzewa i podobnie może być wykorzystany dla celów dydaktycznych.

d) Dla uświadomienia ogólności związku arytmetycznego, a jednocześnie istotności założeń, przy których jest on prawdziwy, użyć można niekiedy także grafów funkcyjnych. (Krawędzie takiego grafu reprezentują funkcje, których nazwy wypisane są przy nich, wierzchołki reprezentują argumenty i wartości tych funkcji). Oto przykład takiego grafu.



W y p e ł n i a j ą c "okienka" tego grafu uczeń przekona się, że "okienka" przy pętlach może wypełnić tylko zerem (a więc 0, i tylko 0 ma tę własność że a + 0 = a), zaś pozostałe liczbami przeciwnymi (liczby a, - a, i tylko takie, mają tę własność, że a + (-a)=0).

Jak widać z powyższych kilku przykładów, rozmaitość form użycia "okienek" jest duża. W każdym przypadku stanowią one bardzo dobry środek przygotowania ucznia do rozumienia zmiennej, przede wszystkim w jej aspekcie formalnym, oraz formy zdaniowej i jej oceny logicznej, do nauki operacji podstawiania (ułatwionej technicznie, co nie jest bez znaczenia w nauczaniu dzieci), wreszcie - do formułowania twierdzeń ogólnych. Metodyka użycia "okienek" nie jest jednak opracowana, a zastosowania tego środka noszą cechy improwizacji, a nie opartego na analizie systemu.

Zwrócimy tu jeszcze uwagę na pewien istotny szczegół. Jak zauważyliśmy, litera może być rozumiana jako "zaszyfrowana" stała lub jako miejsce puste. "Okienka" miały pierwotnie tylko ten drugi sens: właśnie dla jego ukonkretnienia zostały wprowadzone. Ostatnio w podręcznikach można spotkać użycie "okienek" w rachunku algebraicznym w taki sam sposób, jak używa się liter. Na przykład rozwiązanie równania

$$2 \cdot \square + 3 = 5$$

zapisuje się

$$\square = 1.$$

Wydaje się, że jest to już n a d u ż y c i e tego środka nie przynoszęce korzyści dydaktycznych, a być może także utrudniające rozumienie zmiennej.

5.4. Podsumowanie

Nasze rozważania na temat wykorzystania podręcznika dla nauki rozumienia tekstu matematycznego prowadzą do następujących konkluzji.

1. Podręcznik matematyki adresowany do ucznia pierwszej klasy ponadpoczątkowej nie może być napisany w konwencjonalnym języku matematycznym dorosłych, gdyż będzie wówczas dla większości czytelników niezrozumiały. Z drugiej strony, konieczna jest systematyczna i długotrwała praca nad opanowaniem przez uczniów tego języka i podręcznik jest w niej ważnym środkiem nauczania. Jednak moment podjęcia tej pracy należy ustalić eksperymentalnie, a dotychczas nie wiadomo, czy przypada on na pierwszą klasę ponadpoczątkową.

2. Naukę rozumienia tekstu matematycznego należy poprzedzić przyswojeniem sobie przez uczniów podstawowych pojęć i wzorców rozumowań matematycznych za pośrednictwem przykładów, własnej aktywności i zrozumiałego dla nich języka bliskiego potocznemu. Ten etap wstępny obejmować też powinien przyzwyczajanie do operowania pojedynczymi składnikami języka matematyki.

Szczególną wagę należy przywiązywać do nauki operowania zmiennymi, a ważnym etapem pośrednim jest użycie "okienek" zamiast liter.

3. Nie ma rozumienia matematyki bez rozumienia ogólnego charakteru własności pojęć. Jednak dla wyrażenia ogólności nie zawsze wystarcza język potoczny, zaś konwencjonalny język matematyki zawierający zmienne jest dla większości uczniów 10-12-letnich niezrozumiały. Dlatego ogólność należy uświadamiać uczniom nie tylko przez ogólne sformułowania, ale także przez ujęcia problemowe zorientowane na percepcję regularności.

6. PODRĘCZNIK A MOTYWACJA UCZENIA SIĘ

6.1. Motywacja a tradycyjny podręcznik matematyki

Wbrew głoszonym od dawna zasadom dydaktyki ogólnej, wbrew hasłom reformy nauczania ostatnich dziesięcioleci, dominująca wciąż w praktyce szkolnej motywacja uczenia się jest oparta na formalnym przymusie i ocenie wystawianej przez nauczyciela, a w wyższych klasach także - przynajmniej dla części uczniów - na ambicji przejścia do szkoły wyższego stopnia. Ten typ motywacji szkoła zdaje się kształtować od pierwszych lekcji: dzieci znacznie częściej i z dużo większym entuzjazmem chwalą się przed rodzicami "piątkami" niż relacjonują swoje prawdziwe osiągnięcia, odkrycia, czy napotkane, a nie rozwiązane problemy.

Radykalna zmiana tego dominującego charakteru motywacji uczenia się wydaje się być koniecznym warunkiem powodzenia reformy szkoły ukierunkowanej na intelektualną aktywizację każdego ucznia. Realizacja tego postulatu będzie jednak niezwykle trudna. Między innymi dlatego, że jest ona związana z przełamaniem zakorzenionych w całym systemie szkoły wieloletnich tradycji, a także ze zmianą metod i form nauczania na tyle, by mogły się zrodzić i okrzepnąć dostatecznie silnie motywacje wewnętrzne u większości uczniów. Korzenie tych tradycji leżą zaś prawdopodobnie jeszcze głębiej niż system szkolny: w warstwie społeczno-kulturowej. Dominującym czynnikiem motywacyjnym jest dla dziecka obecność i reakcja nauczyciela. Zadanie rozwiązuje się nie dlatego, że jest ciekawe, że jest to pora nauki, że inni koledzy je rozwiązują itp. (choć te względy mogą stwarzać dodatkową zachętę), ale przede wszystkim dlatego, że zadał je nauczyciel. Taki jest akceptowany przez dziecko, nauczyciela, rodziców, kolegów układ stosunków między uczniami i nauczycielem. Dziecku (jeżeli układu tego świadomie nie łamie) nie przychodzi nawet do głowy odsunięcie otrzymanego zadania i zajęcie się innym, bardziej interesującym, ale nie zadanym przez nauczyciela: tu nie ma szansy "wykazania się". Rzecz jasna, nauczyciel swoim postępowaniem może ten układ w pewnym stopniu modyfikować, zachęcając uczniów do większej samodzielności; nie jest jednak w stanie radykalnie go zmienić: jego decyzja pozostanie dla dziecka najważniejszym motywem działania.

Na to, by podręcznik stanowił sam przez się motywację dla lektury i pobudzonej nią aktywności, przyjdzie czekać jeszcze długo, jeżeli w ogóle osiągnięcie takiej postawy u większości uczniów jest realne. Niemniej wydaje się, że podręcznik może odegrać rolę instrumentu stymulującego pewną zmianę tej postawy. Jeżeli jego język, forma i treść będą optymalnie dostosowane do psychiki i zainteresowań współczesnych dzieci, a więc i zróżnicowane, odpowiednio do indywidualnych różnic między dziećmi, to podręcznik ma szansę stać się lekturą, dającą okazję do przygody intelektualnej, pobudzającą wyobraźnię, skłaniającą do stawiania pytań i upartego szukania odpowiedzi na te pytania, krótko - lekturą aktywizującą umysł i uwalniającą go od przesadnego trzymania się autorytetów.

Dążenie do nadania podręcznikowi takiego właśnie charakteru spotykamy u wielu autorów, przy czym stosowane środki bywają bardzo różne. Będzie o nich mowa w dalszej części tego rozdziału.

Postulat uwzględnienia w strukturze podręcznika jego roli motywującej jest nowy i poniekąd sprzeczny z dotychczasowym charakterem nie tylko podręczników szkolnych, ale nawet literatury popularnonaukowej. Podręcznik lub książkę popularnonaukową bierze do ręki ten, kto musi lub chce się czegoś nowego nauczyć lub dowiedzieć. A więc motywacja z założenia poprzedza i stymuluje lekturę. Nie tak dawno Z. M y s ł a k o w s k i /1964 , s.332/ pisał: "Podręcznik ma /.../ służyć do utrwalania i wykończania tego, co już zostało przeżyte i jako przeżycie psychiczne istnieje, niekiedy w formie bardzo swoistej, w systemie personalnym ucznia". A dalej /s.336/: "Żadnego uprzyjemniania, żadnego gadulstwa, żadnego odwoływania się do motywów drugoplanowych: dobra artykulacja, sprawiająca, że podręcznik jest przejrzysty, zwięzłość, zmuszająca do myślenia, jasność i precyzja - oto cechy dobrego podręcznika".

Założenie takie (zauważmy - bardzo ułatwiające napisanie podręcznika) przyjęło wielu autorów podręczników matematyki dla omawianego poziomu w całym świecie, w tym także autorzy książek najnowszych, dostosowanych do awangardowych programów i mieniących się podręcznikami nowoczesnymi (w sensie dydaktycznym).

Należy do nich podręcznik /S e r v a i s 1969/[14], którego autorzy w przedmowie stwierdzają wyraźnie, że swoją książkę uważają za nowoczesną, a jednocześnie zakładają a priori silną spontaniczną motywację ucznia-czytelnika, pozostawiając nauczycielowi dobór środków dla ewentualnego uzupełnienia jej niedostatku. Oto w "Przedmowie do młodego czytelnika" czytamy:

> Niewątpliwie pragniesz iść naprzód! Masz rację. Chcielibyśmy ci pomóc w nauce. Będziesz odczuwał zadowolenie, stając się coraz sprawniejszy. Będziesz dumny ze swoich osiągnięć. Wiele zależy od ciebie! /.../ Chcielibyśmy, abyś rozsmakował się w tej aktywności twórczej.

Zaś w "Przedmowie do nauczyciela" autorzy stwierdzają:

> Korzystając ze swej swobody, nauczyciel będzie mógł dostosować nauczanie do uzdolnień każdego ucznia, pomagając mu w uczeniu się matematyki. W klimacie twórczej aktywności będzie mógł pobudzić ich intuicję w odgadywaniu odpowiedzi i pomysłowość w odkrywaniu drogi postępowania, czuwając przy tym nad rozwijaniem u nich zmysłu samokontroli.

W podręczniku tym formalno-dedukcyjna struktura matematyki odgrywa bardzo istotną rolę. Od początku wprowadza się aksjomaty teorii mnogości, potem aksjomaty geometrii, od początku dowodzi się twierdzeń, zaczynając od twierdzeń oczywistych. Autorzy, nie poprzestając na tym, starają się wyjaśnić czytelnikom ogólne pojęcie aksjomatu, definicji, twierdzenia, dowodu (nb. dowód twierdzenia oczywistego lepiej służy temu ostatniemu celowi niż dowód twierdzenia nieoczywistego). Najwidoczniej jednak nic sobie nie robiąc z dość powszechnego przekonania, że głównym źródłem trudności uczniów w uczeniu się tak ujętej matematyki jest brak motywacji, autorzy mówią tu do czytelnika tak, jakby ten był przejęty pasją poznawczą. Oto na str.7 sformułowano i udowodniono pierwsze twierdzenie o zbiorach, do czego jedyną motywację stanowi następujący wstęp:

---

[14] Odnosi się tu nota na s. 38.

Czy z powyższych aksjomatów i definicji można wywnioskować, że istnieje co najmniej jeden zbiór utworzony z dwu przedmiotów? Z pewnością nie wątpisz w istnienie takiego zbioru, bo poznałeś go przed wprowadzeniem aksjomatów! Prawdziwie interesujące jest dopiero to, że aksjomaty i definicje pozwalają udowodnić ten fakt rozumowaniem. Masz wątpliwości? To proste.

Tu rozpoczyna się dowód zapowiedzianego twierdzenia.

Niewątpliwie, jest to metodologicznie jedynie właściwa motywacja dowodu. Intuicyjna oczywistość twierdzenia uwypukla jeszcze dodatkowo taką właśnie rolę dowodu: pokazanie wywiedlności twierdzenia z aksjomatów i definicji. Zupełnie nie próbują jednak autorzy umotywować rzeczy najistotniejszej: podjęcia problemu wywiedlności. Zakładają, że jest on "prawdziwie interesujący" dla czytelnika, nie troszcząc się o spełnienie tego założenia.

Coraz mniej jednak współczesnych pedagogów, dydaktyków matematyki i autorów podręczników akceptuje takie stanowisko. W. O k o ń /1968/, jeden z czołowych naszych dydaktyków, pisze wyraźnie o samokształceniowej funkcji podręcznika:

Tą drogą /do samokształcenia/ jest przede wszystkim budzenie i rozwijanie zdolności poznawczych człowieka, jego zainteresowań oraz pozytywnej motywacji w procesie uczenia się. Tym postulatom może sprostać podręcznik, w którym przejawia się bowiem bogata inwencja w doborze treści, w łączeniu teorii z praktyką, w bogactwie "otwartych" sytuacji, które zaciekawiają, pobudzają do samodzielnego myślenia i działania, dając zarazem uczniowi wiele satysfakcji i stwarzając tym samym przesłanki do dalszego twórczego wysiłku.

We wcześniejszym zaś artykule adresowanym do nauczycieli autor mówi jeszcze dobitniej /1966, s.9-16/: "...chodzi przecież o to, aby sięgał on /uczeń/ do podręcznika nie pod presją otrzymania złego stopnia, lecz również dla pewnego minimum ukontentowania /.../, jakie daje wędrówka w świat pełen zadziwiających zjawisk z dobrym przewodnikiem w ręku".

6.2. Środki motywacji w wybranych podręcznikach

O motywującym charakterze podręcznika decydować będą jego język, forma i treść. Aspektom formalnym poświęcimy ostatni rozdział tej pracy, tu - zajmiemy się bliżej treścią.

Na treść szkolnego podręcznika matematyki składają się z reguły trzy warstwy:

- warstwa matematyczna,
- warstwa praktyczna, obejmująca zastosowania matematyki, i
- warstwa motywacyjna, obejmująca wszystko, co jest skierowane na obudzenie zainteresowania u czytelnika; nie zawsze daje się ona oddzielić od warstwy praktycznej, a także matematycznej.

Przyjrzyjmy się bliżej tej ostatniej warstwie na przykładach wybranych z kilku podręczników.

Najczęściej bodaj stosowanym środkiem motywacyjnym jest interesująca (w opinii autora) sytuacja realna, mająca pewien związek z opracowywanymi pojęciami matematycznymi. Zdarza się, że jest to przykład zastosowania matematyki, częściej jednak tak nie jest, a związek tej sytuacji z matematyką ma charakter raczej drugorzędny.

P r z y k ł a d 1

W podręczniku /SMP, 1969, book 1/w rozdziale 5 "Kąt" znajduje się ustęp zatytułowany "Radar i położenie". Zawiera on m.in. następującą zwięzłą informację o zasadzie działania radaru.

E k r a n r a d a r u . Wielu z nas widziało obracające się anteny urządzeń radarowych na statkach lub stacjach radarowych na ziemi. Urządzenie radarowe wysyła fale radiowe, które odbijają się od napotykanych po drodze przedmiotów i są z powrotem odbierane przez obracającą się antenę. Na podstawie czasu, jakiego potrzebowała fala radiowa, by dotrzeć do przedmiotu i wrócić, urządzenie radarowe wyznacza odległość tego przedmiotu. Kierunek, w jakim zwrócona jest antena w momencie odbioru odbitej fali, daje kierunek tego przedmiotu. Przedmiot pojawia się na ekranie radaru w postaci jasnego punktu, którego położenie odpowiada położeniu przedmiotu. Skale na ekranie pozwalają na szybkie odczytanie odległości i położenia przedmiotu względem stacji radarowej.

Ta techniczna informacja na temat urządzenia, stosowanego powszechnie w lotnictwie i nawigacji, jednego z tych, które wciąż fascynują prostotą zasady działania i precyzją osiągniętą dzięki bardzo skomplikowanym rozwiązaniom elektronicznym, służy tu jedynie jako pretekst do całej serii ćwiczeń rachunkowych i rysunkowych. Oto kilka przykładów takich ćwiczeń.

Zrób listę 12 miast i wsi w promieniu 25 mil od twego domu. Posłuż się mapą dla znalezienia ich odległości i kierunków względem twego domu i zaznacz ich położenie na diagramie podobnym do ekranu radaru.

Dwa samoloty wylatują z lotniska w tym samym czasie. Jeden leci na azymut 330° z prędkością 600 km/h, drugi kieruje się na wschód z prędkością 1000 km/h. Narysuj diagram i zaznacz na nim pozycję obu samolotów po (a) 6 min, (b) 12 min, (c) 18 min, (d) 24 min. Jaka jest ich wzajemna odległość oraz azymut samolotu lecącego na wschód względem drugiego, w każdym z tych przypadków? Już bez rysowania podaj ich wzajemną odległość i azymuty po 1/2 godziny od opuszczenia lotniska.

Zadania te mają, oczywiście, niewiele wspólnego z rzeczywistymi zastosowaniami wiadomości o kątach i ich mierzeniu: obsługa lotnisk nie zajmuje się takimi problemami, a tym bardziej dla ich rozwiązania nie posługuje się radarem. Tak więc, poza zastosowaniem samych p o j ę ć kąta i jego miary dla opisu działania radaru, ta informacja techniczna należy do warstwy motywacyjnej podręcznika. Nawiązanie do działania radaru i użycie związanych z nim terminów technicznych ułatwia sformułowanie zadań, jednocześnie zaś będzie pobudzać wyobraźnię uczniów, stwarzając korzystny klimat psychiczny dla ich wykonania: zamiast wykonywać "nie wiadomo po co" rachunki i rysunki, uczeń będzie odtwarzał wygląd ekranu radarowego z poruszającymi się na nim świecącymi punktami-samolotami.

W tym samym podręczniku /SMP, 1969/ wykorzystano w celach motywacyjnych fakty zaczerpnięte z historii matematyki. Nie stanowią one tu, jak w niektórych innych podręcznikach matematyki, oderwanych od reszty tekstu interludiów czy osobnych rozdziałów: są użyte właśnie jako motywacja i pretekst dla następujących po nich przykładów i ćwiczeń matematycznych.

Na s.44 znajdujemy tu następującą wzmiankę historyczną:

W czasach starożytnych w wielu krajach używano jedynie najprostszych typów ułamków, tj. ułamków o liczniku 1. Znaczy to, że ułamek ma nad kreską 1, jak $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ i $\frac{1}{8}$. (Liczba pod kreską nazywa się mianownikiem). W piśmie hieroglificznym Egipcjan z liczby III (trzy) tworzono ułamek (jedną trzecią), pisząc nad nią symbol 𓂋, co wyglądało tak: $\overset{\text{𓂋}}{\text{III}}$. Grecy, którzy posługiwali się literami jako liczbami, tworzyli z Γ (trzy) ułamek dodając kreseczkę: Γ'.

Wśród zadań na s.45 znajdujemy następujące:

Egipcjanie napisaliby $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ dla oznaczenia $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ jako $\frac{2}{3}$. Zauważ, że każdy mianownik pojawia się tylko raz. Znajdź sposób zapisania w ten sposób ułamków (a) $\frac{5}{6}$, (b) $\frac{3}{8}$, (c) $\frac{4}{5}$, (d) $\frac{5}{7}$. Czy sądzisz, że każdy ułamek można tak zapisać? Spróbuj znaleźć taki, którego nie można tak zapisać.

Jest to bardzo dobre ćwiczenie ugruntowujące pojęcie i własności sumy ułamków, typu, jaki nieczęsto występuje w podręcznikach: rozkład ułamka na sumę innych przy dość silnie ograniczających warunkach nałożonych na składniki. (Ćwiczenia tego typu były natomiast zawsze bogato reprezentowane w podręcznikach w dziale poświęconym arytmetyce liczb naturalnych). Oczywiście, można je sformułować bez odwoływania się do matematyki starożytnych. W tym kontekście staje się ono jednak nieporównanie ciekawsze, szczególnie dla tych, których fascynuje odkrywanie faktów z życia naszych przodków. Pokazuje, że pewnych rzeczy o ich sposobie rachowania można się dowiedzieć teoretycznie; można je wywnioskować z innych faktów, zaczerpniętych z oryginalnych tekstów. Może więc być wykorzystane nawet do propedeutycznego wprowadzenia w ideę aksjomatyzacji /jednak chyba nie na omawianym poziomie nauczania/. Bez tego kontekstu byłoby tylko jeszcze jednym rachunkiem wykonywanym "nie wiadomo po co".

Chętnie stosowanym środkiem motywacji jest piękno. Słowo to nasuwa na myśl przede wszystkim fotografie i rysunki różnych obiektów architektonicznych, przyrodniczych, artystycznych, których piękno daje się częściowo wyjaśnić własnościami geometrycznymi ich kształtu, a więc głównie symetrią. Zacytujemy tu niebanalny przykład wykorzystania symetrii w celach motywacyjnych.

W nauce o symetrii w podręczniku cytowanym wyżej /SMP,1969/ wykorzystano, rzecz jasna, także symetrię w architekturze i sztukach plastycznych, zarówno w celach motywacyjnych jak i dla konkretyzacji pojęć.

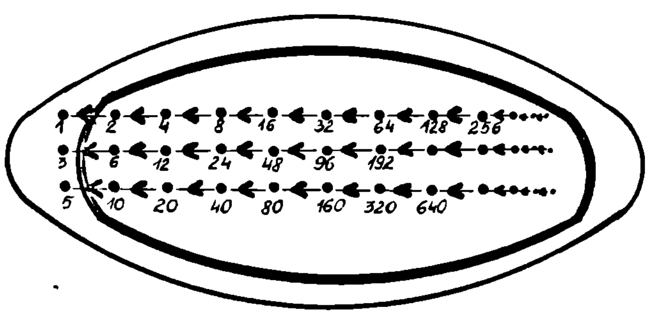
Nie ograniczono się tu jednak do standardowych przykładów fotografii, reprodukcji i rysunków, na których uczeń ma znajdować symetrie. Na s.213 znajduje się następujący przykład.

Większość ludzi woli, gdy budynek lub drzewo posiada płaszczyznę symetrii. Lecz gdy któryś z tych przedmiotów (lub obydwa) stanowi element rysunku, wolą oni, by nie występowały one jako elementy centralne (zob. np. rysunek...) . Czy możesz to wyjaśnić?

To nietypowe pytanie może stać się doskonale umotywowanym punktem wyjścia najpierw do głębokiego namysłu, potem do dyskusji w klasie nad różnorodnymi konsekwencjami posiadania przez figurę płaszczyzny symetrii, co było zapewne intencją autorów.

Nie docenia się zazwyczaj motywacyjnej roli abstrakcyjnego piękna tkwiącego w samej matematyce. Pogląd, że uczniów interesuje i podoba się im tylko to, co ma związek z konkretną rzeczywistością, nie odpowiada prawdzie. Wielu uczniów żywo reaguje na różne regularności bynajmniej nie geometrycznego charakteru, nieoczekiwanie proste wyniki lub wnioski (na przykład zero uzyskane w wyniku długiego rachunku), nieoczekiwane analogie bądź paradoksy. Zauważmy, że to samo raduje i dojrzałego matematyka, tyle że w materiale o wiele bardziej zaawansowanym.

Szczególnie dobitnie piękno może być wyrażone w graficznych schematach sytuacji abstrakcyjnych. Środek ten został ogromnie rozwinięty i do perfekcji doprowadzony przez G. P a p y'e g o w jego słynnych podręcznikach "Mathématique moderne". Negując całkowicie wartość zastosowań w kształceniu matematycznym, autor ten uważa piękno za jedyne autentyczne uzasadnienie nauczania i uczenia się matematyki. Podręczniki jego wyróżniają się wielką ilością dużych wielobarwnych rysunków, z których niektóre są w istocie piękne; nie jako dzieło sztuki, ale w swym abstrakcyjnym wyrazie. Oto dla przykładu rysunek, ilustrujący suriekcję zbioru liczb parzystych na zbiór liczb naturalnych, a więc "przykrywalność" zbioru przez własny podzbiór właściwy /P a p y, 1964, s.200/.



Coraz częściej ostatnio występującym w podręcznikach czynnikiem motywacji są opisy gier. Przykład taki cytowaliśmy w rozdziale 3 na s.31 Ograniczymy się więc jedynie do kilku ogólnych uwag. Gry jako środek nauczania matematyki mający szerokie zastosowanie doceniono niedawno, a więc metodyka posługiwania się tym środkiem nie została jeszcze wypracowana. Gry dydaktyczne można ogólnie podzielić na m a t e m a t y c z n e, tj. takie, gdzie "posunięcia" gry, a także poszukiwanie strategii wygrywającej, mają bezpośredni związek z matematyką (jak w cytowanym przykładzie), p a r a m a t e m a t y c z n e, przez charakter "posunięć" i rozumowań w toku gry sprzyjające kształceniu występujących w matematyce sprawności umysłowych, choć bezpośrednio z matematyką nie związane, i m o t y w a c y j n e , służące jedynie motywacji nakazanego regułami rozwiązywania zadań matematycznych.

Spotykane w podręcznikach opisy gier spełniają jedną z dwu funkcji: podjęcia gry przez czytelnika, bądź sformułowania związanego z grą problemu. Powody tego zróżnicowania mogą być różne. Jednym z nich wydaje się być fakt, że niektóre gry są zbyt mało atrakcyjne, aby warto było podejmować ich rozgrywanie, stanowią jednak niebanalne i komunikatywne wprowadzenie w problem matematyczny. Dotyczy to przede wszystkim gier matematycznych, które najczęściej spotyka się w podręcznikach.

Gra matematyczna wydaje się być dobrym punktem wyjścia do wprowadzenia pojęć matematycznych o charakterze konwencjonalnym, nie dających się łatwo upoglądowić sytuacjami realnymi w sposób pozbawiony sztuczności. Gra, jako sytuacja z natury konwencjonalna, a jednocześnie dzieciom bardzo bliska, nigdy nie czyni niemiłego wrażenia czegoś nienaturalnego, stworzonego jedynie na użytek szkoły, a więc nieciekawego. Dobór rekwizytów i reguł może być całkowicie podporządkowany względom dydaktycznym i motywującym, dając autorowi swobodę podobną do tej, jaką posiada,wprowadzając pojęcia całkowicie abstrakcyjne, a więc bez odwoływania się do pozamatematycznych środków upoglądowienia i motywacji.

Należy przypuszczać, że ten sposób wprowadzania pojęć, a także wykrywania ich własności, znajdzie w podręcznikach dla omawianego poziomu szersze zastosowanie. Rzecz jasna, jak wszędzie w dydaktyce tak i tu, jednostronność i przesada byłaby szkodliwa. Mamy tu na myśli jednostronność, polegającą na ograniczaniu upoglądowienia pojęcia do samej gry i unikaniu ujawnienia jego realnych korzeni[15], oraz przesadę wyrażającą się w usiłowaniu wprowadzenia za pośrednictwem gry jak największej liczby pojęć czy własności. Za przykład właściwego wykorzystania tego środka uważamy cytowane w rozdziale III (przykład 2) wprowadzenie liczb dodatnich i ujemnych w podręcznikach SMP.

---

[15] Tendencję taką obserwuje się ostatnio w zakresie wczesnego wprowadzenia pojęć probabilistycznych.

Mówiąc o motywacyjnej warstwie podręcznika mamy tu stale na myśli motywację dla uczenia się matematyki i aktywności matematycznej. W dawnych podręcznikach matematyki spora część ich treści pozamatematycznych miała przypisaną jeszcze inną funkcję. W intencji realizowania różnorodnych kształcących i wychowawczych celów wprowadzono w nich liczne sytuacje nie dla ukazania zastosowań matematyki, i nie dlatego, że leżały one w kręgu zainteresowań uczniów, a więc mogły działać motywująco, ale właśnie po to, by dopiero zainteresować nimi ucznia lub przekazać mu określone pozamatematyczne informacje. Usiłowania takie - jak wiadomo z codziennej praktyki szkolnej - okazują się najczęściej chybione: nie zmieniają w sposób istotny pozamatematycznej wiedzy ani zainteresowań ucznia, tym bardziej zaś nie motywują go w kierunku aktywności matematycznej, nierzadko zaś działają wręcz odstręczająco.

Doniosłość motywacji "ku matematyce" dla wyników kształcenia matematycznego każe zrezygnować w podręczniku matematyki z wszelkich treści prócz tych, które jej wyraźnie sprzyjają, a tym bardziej z tych, które by mogły prowadzić do jej osłabienia. W szczególności należy zrezygnować z wprowadzenia do niego jakichkolwiek treści pozamatematycznych, których zadaniem nie byłoby kształcenie matematyczne lub kształcenie pozytywnych postaw względem aktywności matematycznej.

6.3. Podsumowanie

W naszym przeglądzie środków motywacji spotykanych w podręcznikach wymieniliśmy następujące:

- sytuacje realne z kręgu spraw interesujących dzieci, bez ich uproszczenia lub wstępnej matematyzacji, w tym sytuacje zaczerpnięte z historii nauki,
- sytuacje fikcyjne strukturalnie zbliżone do realnych, jednak w stosunku do nich uproszczone lub przez sam opis wstępnie zmatematyzowane, bądź też jawnie nierealne, typu bajek (zob.przykład 4 w rozdziale III, s. 50) lub fantastyki naukowej,
- niespodzianki: nieoczekiwanie proste wyniki lub wnioski i inne regularności formalne, sprzeczności, pozorne lub będące wynikiem ukrytego błędu w rozumowaniu,
- sytuacje formalno-graficzne,
- gry dydaktyczne.

Lista ta zapewne nie jest pełna. Można też przypuszczać, że w miarę doskonalenia podręczników pojawiać się będą nowe środki, dotąd nieznane, bądź stosowane tylko w bezpośrednim przekazie ustnym. Na przykład wydaje się możliwe i celowe wprowadzenie do podręczników dłuższych opowiadań, prezentujących ciekawą dla uczniów sytuację i związaną z nią problematykę, której opracowanie mogłoby odbywać się już poza podręcznikiem, w pracy samodzielnej lub dyskusji uczniów z udziałem nauczyciela.

U poszczególnych autorów występuje zazwyczaj naturalna predylekcja do pewnego typu środków motywujących. Nadaje to podręcznikowi swoisty charakter i ułatwia nauczycielowi wydanie subiektywnej oceny, czy książka mu się podoba czy nie, co często decyduje o jej wyborze dla użytku uczniów. Jednak w aspekcie podagogicznym taką predylekcję oceniać trzeba negatywnie. Podręcznik może bowiem motywować k a ż d e g o ucznia tylko pod warunkiem, że treści motywujące będą na tyle zróżnicowane, iż każdy uczeń znajdzie w nim to, co do niego przemawia najsilniej, co najbardziej pobudza jego ciekawość i chęć jej zaspokojenia. Codzienna praktyka szkolna pokazuje, że uczniowie mają tu bardzo różne upodobania. Podręcznik motywujący ogół uczniów (a nie autora!) cechować musi różnorodność treści warstwy motywacyjnej.

7. DYDAKTYCZNA STRUKTURA I JĘZYK PODRĘCZNIKA MATEMATYKI

Przeobrażenie formy i budowy podręczników uczniowskich stanowi jeden z charakterystycznych symptomów reformy nauczania matematyki doby powojennej. Obok kultywowanej przez stulecia i utrzymującej się do dzisiaj, mimo radykalnych zmian treści nauczania, formy książki naukowej, pojawiło się wiele typów materiałów drukowanych (niektórym trudno nawet dać miano książki) odbiegających od tego wzorca, aż po takie, których cały tekst składa się z pytań i poleceń, brak zaś bezpośredniego przekazu wiedzy. Pierwszym bodźcem dla tych zmian były postulaty reformy, a przede wszystkim postulat maksymalnej aktywizacji ucznia, wyzwalania jego inicjatywy, dostarczania mu materiału i okazji do samodzielnych poszukiwań i małych odkryć. Postulatom tym nie odpowiadał tradycyjny podręcznik, w którym dominował przekaz gotowej wiedzy. Trzeba było znaleźć formułę zupełnie nową. Jak jednak zwykle bywa wówczas, wkrótce zjawił się drugi, równie silny, a nie zawsze pozytywny bodziec - konkurencja rynkowa, prowadząca niejednokrotnie do ukrywania mało wartościowych lub powielanych koncepcji w atrakcyjnej formie zewnętrznej. Bez wątpienia jednak prąd ten przyniósł rozwiązania o niepodważalnej wartości dydaktycznej, których ślady są już widoczne w niemal wszystkich współcześnie wydawanych podręcznikach, i które stanowią ważny etap rozwoju nauczania matematyki.

Szkic ten nie ma być pełną monograficzną analizą struktury i języka wydawanych na świecie podręczników matematyki do pierwszej klasy ponadpoczątkowej. Zamierzenie takie byłoby nierealne, choćby ze względu na niedostępność wielu źródeł. Dokonę jedynie przeglądu charakterystycznych rozwiązań na podstawie wybranych spośród dostępnych podręczników europejskich.

7.1. Podręcznik tradycyjny

Pod względem struktury tradycyjny szkolny podręcznik matematyki nie różni się istotnie od podręcznika akademickiego. Treść jest tu usystematyzowana w porządku logicznym i podzielona na części, które dalej będziemy umownie nazywać rozdziałami. Każdy rozdział rozpoczyna się przekazaniem nowych informacji składających się z definicji, twierdzeń i dowodów, po czym następują zadania. W podręczniku znajdujemy też na ogół przykłady, uwagi wyjaśniające itp., stanowiące dydaktyczną warstwę podręcznika. Są one jednak jakby uzupełnieniem zasadniczego schematu i są mu całkowicie podporządkowane. W tekście tradycyjnego podręcznika znajdują się wyróżnienia, uwydatniające fragmenty szczególnie ważne lub przeznaczone do zapamiętania: nowe słowa lub symbole, definicje, twierdzenia, reguły algorytmiczne, wzory algebraiczne itp. Wyróżnia się więc to, co z jednej strony stanowi ostateczny i do pewnego stopnia sformalizowany rezultat pracy matematyka (ukazanej w tekście podręcznika lub nie), z drugiej zaś strony nadaje się do bezpośredniego zastosowania w zadaniach. Te wyróżnione fragmenty są bardzo często uważane, zarówno przez uczniów jak i przez nauczycieli, za minimum wiadomości, którego opanowanie jest wystarczające jako pozytywny efekt nauki. W ten sposób tradycyjny podręcznik kładzie nacisk na określoną tradycyjnym programem wiedzę matematyczną, całkowicie lub w znacznej mierze przemilczając drogę, na której uczeń do niej dojdzie, podpowiadając nawet niejako drogę nakrótszą - pamięciowe opanowanie wyróżnionych fragmentów.

Ukazany obraz tradycyjnego podręcznika matematyki jest dość skrajny. Od czasów, gdy jedynym szkolnym podręcznikiem gemetrii były "Elementy" Euklidesa (w Anglii podobno jeszcze w XX wieku), dokonano w podręcznikach wiele dydaktycznie pozytywnych zmian, wprowadzono fragmenty, mające za zadanie pobudzenie czytelnika do samodzielnych poszukiwań i rozumowań, do c z y n n e j lektury, jednakże przy zachowaniu tradycyjnej struktury.

P r z y k ł a d 1

Przedstawimy tu w skrócie rozdział 4 podręcznika /S e r v a i s 1969/[16] zatytułowany "Płaszczyzna, punkty i proste."

Podrozdział 4.1. "Zbiory w geometrii płaskiej" jest poglądowym i lokalnie-dedukcyjnym przygotowaniem do dalszej części, już w ujęciu aksjomatycznym. Rozpoczyna się on dialogowym opisem eksperymentów rysunkowych:

1. ZBIORY PUNKTÓW

Eksploracja

a) Wiesz już różne rzeczy z geometrii. Przejdziemy je ponownie przy pomocy rysunków, wykorzystując przy tym wiadomości o zbiorach.

[16] Odnosi się do niego nota na s. 38.

Połóż swój arkusz rysunkowy na p ł a s k i e j powierzchni.
- Czy masz odpowiednie ołówki?
Zaznacz p u n k t y.
Ile mógłbyś ich zaznaczyć?
- Dużo, zwłaszcza jeżeli będę je robił bardzo małe.
- Co jest najdokładniejsze?
- Małe punkciki.
- Ale jeżeli będziesz je rysował maleńkie jak koniec igły, jak je zobaczymy?
- Z trudem będzie je widać.
- Żeby dobrze widzieć punkty, będziemy je zaznaczać dość duże, pamiętając wciąż, że reprezentują one punkty bardzo małe, znajdujące się w środku naszych kropek.
- Wyobraź sobie, że wszystkie punkty twojego arkusza zostały zaznaczone. Czy arkusz został całkowicie wypełniony?
- Tak, całkowicie.
- P ł a s z c z y z n a twojego rysunku j e s t z b i o r e m p u n k t ó w .

Dialog wkrótce się kończy, a tekst nabiera charakteru coraz bardziej formalnego.

4. CZWOROKĄTY

Definicje

Niech a,b,c,d będą czterema punktami, takimi że żadne trzy spośród nich nie są współliniowe. Suma

$$[ab] \cup [bc] \cup [cd] \cup [da]$$

jest c z w o r o k ą t e m o b o k a c h

$$[ab], [bc], [cd], [da]$$

i k o l e j n y c h w i e r z c h o ł k a c h a, b, c, d.

Czworokąt abcd jest równoległobokiem wtedy i tylko wtedy, gdy proste

ab i cd
bc i da

są wzajemnie rozłączne, gdyż jeżeli byłyby one równe, punkty a, b, c, d byłyby współliniowe i nie mogłyby być wierzchołkami czworokąta.

Podrozdział 4.1. kończy się następującym podsumowaniem.

- Wszystkiego tego, co było dotąd, już się uczyłeś. Chcielibyśmy tylko to przypomnieć, ustalając z tobą fakty geometryczne, które wyraziliśmy i zapisaliśmy. Własności, jakie zauważyliśmy, mogą być przedstawione w teorii dedukcyjnej, którą rozpoczniemy w następującym paragrafie, zajmując się najpierw najprostszymi z nich. Badanie własności wymagających większego zasobu wiedzy odłożymy do wyższych klas.

Początek podrozdziału 4.2. to wstęp, gdzie po omówieniu zastosowań geometrii w nauce i praktyce autorzy następująco (w dwu zdaniach!) przygotowują czytelnika do pierwszych aksjomatów.

W geometrii płaskiej rozważa się daną płaszczyznę, która jest zbiorem wszystkich punktów i która zawiera wszystkie proste, o których mowa.
Aby skonstruować geometrię płaską w sposób dedukcyjny, przyjmiemy za prawdziwe pewne aksjomaty dotyczące prostych, które dają płaszczyźnie strukturę.

Po tym wstępie jest już niemal czysto akademicki wykład teorii, przerywany jedynie metodologicznymi komentarzami. Oto kilka fragmentów.

2. PIERWSZE AKSJOMATY GEOMETRII

Aksjomat G_1

Istnieją punkty, ich zbiór jest płaszczyzną.

Płaszczyznę będziemy oznaczać przez π a punkty małymi literami a, b, c,...; zmienne punktowe to x, y, z,...

Aksjomat G_2

Każda prosta jest podzbiorem właściwym płaszczyzny.

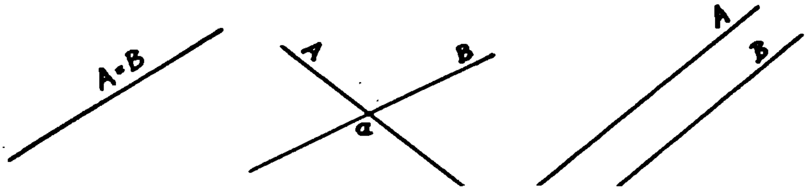
/../

Problem.

Czym może być część wspólna prostej A i prostej B?

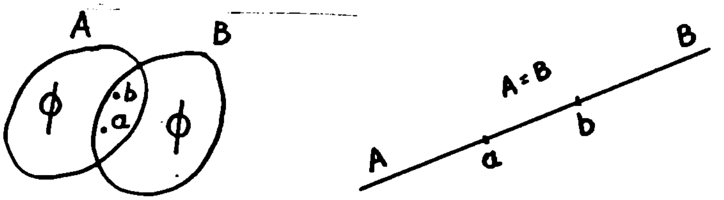
Na rysunku odpowiedź jest widoczna: można mieć, zależnie od przypadku,

1^o $A \cap B = A$ $\quad$ 2^o $A \cap B = \{a\}$ $\quad$ 3^o $A \cap B = \emptyset$.



Co możemy wydedukować z aksjomatów?

1^o Jeżeli prosta A i prosta B zawierają parę (a,b), mamy na podstawie aksjomatu G_4:



2^o Czy jest możliwe, żeby proste A i B miały jedyny punkt wspólny?

Niech A będzie prostą. Na podstawie aksjomatu G_3 nie jest ona pusta. Oznaczmy przez a jeden z punktów prostej A itd.

Podobny charakter ma podrozdział 4.3 poświęcony rownoległości. Rozdział kończy ustęp zatytułowany "Synteza 4", zawierający wszystkie aksjomaty, definicje i twierdzenia. W tekście tym znaleźć można szereg fragmentów i szczegółów redakcji, świadczących o pewnym wysiłku autorów w kierunku aktywizacji czytelnika. Zastosowana na początku forma dialogu może być uważana za wzorzec dla dialogu wewnętrznego i może być zachętą do samodzielnego przekształcania dalszego tekstu w taki wewnętrzny dialog. Jest to jednak typowy dialog lekcyjny, gdzie pytania stawia na ogół nauczyciel, który z kolei "słyszy" tylko odpowiedzi właściwe, to jest takie, jakich oczekuje, bądź odpowiada sam. Nie jest to dialog prawdziwy, w którym zdarzają się błędne wypowiedzi, wątpliwości, spory itp. Dialog ów jest więc jedynie dialogową formą wykładu, nie zmieniającą istotnie charakteru tekstu. Inny moment o aktywizującym charakterze stanowią problemy, (niekiedy nawet wyróżnione tekstem półgrubym na wstępie fragmentów rozumowań. Miałyby one duże znaczenie, gdyby uczeń próbował na nie odpowiedzieć, zanim przystąpi do kontynuowania lektury. Autorzy nie sugerują jednak takiego postępowania ani explicite, ani układem tekstu, problem najpewniej więc odegra rolę daleko mniejszą: informacji o celu następującego po nim rozumowania. (Nie podejmujemy tu ani merytorycznej ani szerszej dydaktycznej dyskusji nad cytowanymi fragmentami).

Jak wspomniano, w podręczniku tradycyjnym zadania umieszcza się na zakończenie każdego rozdziału. Ma to istotne znaczenie dla ucznia, bowiem większość zadań podręcznikowych to ćwiczenia na bezpośrednie zastosowanie jednej definicji lub twierdzenia, bądź ćwiczenia na zastosowanie fragmentu teorii. Zadania te umieszczone są, rzecz jasna, po tym rozdziale, który zawiera definicje i twierdzenia potrzebne do ich rozwiązania. Uczeń, który wie z doświadczenia o takim rozmieszczeniu zadań, znajduje się więc w sztucznie uproszczonej sytuacji: sposób rozwiązania może przecież znaleźć w nie tak obszernym materiale jednego rozdziału. Korzystając więc z podręcznika tradycyjnego, uczeń niewiele będzie miał okazji do samodzielnego rozwiązywania zadań-problemów, bez żadnej sugestii co do zakresu pojęć i twierdzeń, które trzeba będzie wykorzystać.

Książka W. S e r v a i s i w tym względzie zawiera innowację, neutralizującą do pewnego stopnia niektóre niekorzystne aspekty tradycyjnej struktury podręcznika. Rozdział 20, zatytułowany "Zastosowania i zadania", zawiera zbiór różnorodnych i interesujących zadań, nie przypisanych żadnemu z poprzednich rozdziałów. Pomimo tego, że zadania sklasyfikowano tu na "Zadania odnoszące się do zbiorów i relacyj , "Zastosowania działań numerycznych, zastosowanie równań", "System metryczny" i "Procenty i kapitalizacja prosta", wiele zadań wymaga od ucznia znacznej samodzielności w znalezieniu sposobu rozwiązania, w licznych przypadkach - interesującej matematyzacji przedstawionej w zadaniu sytuacji. Zadania takie w dawnych podręcznikach występowały rzadko.

Nasuwa się pytanie, jakie jest prawdziwe przeznaczenie tego typu podręcznika matematyki, traktowanego jako środek nauczania dzieci w wieku 11-12 lat? Czy jego autor, zwracający się niekiedy wprost do czytelnika, ma naprawdę na myśli samodzielną pracę małego ucznia? Na pytanie to trudno odpowiedzieć bez konsultacji autora. Z całą pewnością można jednak stwierdzić, do czego podstawę dają setki obserwowanych przez nas lekcji, że w praktyce nauczania praca ucznia z tekstem podręcznika, zarówno w klasie jak i w domu, występuje ogromnie rzadko. Podręcznik ten pełni więc przede wszystkim rolę podręcznika dla nauczyciela i zbioru zadań dla ucznia. Tej pierwszej także nie wypełnia dobrze. Jak mówi G. W a l u s i n s k i (Manuélisation d'une réforme, "Cahiers pédagogiques", 132, 1975), "aby być w zgodzie z programem (a nawet szczegółowymi instrukcjami, które komisja ministerialna uważała za stosowne zredagować), podręcznik musi objąć wszystko. Wytwarza w ten sposób u nauczyciela przekonanie, że przejść cały program znaczy to, czego wymagał inspektorat generalny: wszystko powiedzieć; a przecież uczyć, to wybierać, doprowadzić do ujawnienia w różnorodnej postaci niektórych istotnych idei". Podręcznik tradycyjny na tym szczeblu nauczania nie tylko nie pomaga realizacji po nowemu pojmowanych celów kształcenia, ale - być może - jest w niej nawet przeszkodą. Miejsce jego miał zająć podręcznik o zupełnie odmiennej strukturze.

P r z y k ł a d 2. Inny rodzaj podręcznika typowo tradycyjnego, akademickiego stanowi opracowany pod kierunkiem A.I. M a r k u s z e w i c z a /1970/ podręcznik dla klasy IV 10-letniej szkoły radzieckiej (zob. Aneks 7). Nie realizuje on, jak podręcznik z poprzedniego przykładu, ambitnej koncepcji matematycznej, niewiele jest też śladów poszukiwania przez autorów środków motywacji i aktywizacji czytelnika: pewna liczba zadań mogących zainteresować ucznia, żartobliwe ilustracje. Tekst pozwala się domyślać, że głównym celem przyjętym przez autorów było szybkie i trwałe opanowanie przez uczniów określonych programem umiejętności i wiedzy. Nie sądzimy, by ten podręcznik (poza tekstem zadań) mógł służyć samodzielnej pracy uczniów; nie wiadomo jednak, czy takie było zamierzenie autorów.

7.2. Tekst sterujący pracą ucznia

7.2.1. Określenie to, pochodzące od Z. Krygowskiej[17], stosuje się do specjalnej formy podręcznika, dla której pierwowzorem były francuskie, "fiches de travail". Nie należy więc ich mylić z bardzo różnorodnymi materiałami drukowanymi obecnie na świecie pod podobną nazwą: "worksheet", "Arbeitsblätter","robočie listki", "zeszyt ćwiczeń". Jest wśród nich wiele materiałów p o m o c n i c z y c h towarzyszących właściwemu podręcznikowi, jak nasze zeszyty ćwiczeń dla klas początkowych. Tekst sterujący jest natomiast tekstem zasadniczym, służącym za podstawę pracy ucznia. W przeciwieństwie do podręcznika tradycyjnego, w którym dominuje p r z e k a z wiedzy, tekst sterujący przede wszystkim o r g a n i z u j e a k t y w n o ś ć ucznia, steruje nią, wyręczając do pewnego stopnia nauczyciela. Przekaz w takim tekście występuje w rozmaitych proporcjach, aż do całkowitego jego braku, nigdy jednak w przewadze.

W swej zasadniczej warstwie tekst sterujący składa się więc z poleceń, pytań i zadań. Ta jego cecha oraz funkcjonowanie niejako w zastępstwie nauczyciela nasuwają naturalne skojarzenie z tekstem programowanym. Nie ulega wątpliwości, że znacznie od tej formy starsza metoda nauczania programowanego wywarła silny wpływ na ideę i postać tekstów sterujących.

[17] Inna stosowana w literaturze nazwa to "teksty semiprogramowane".

Są jednak pomiędzy tekstem programowanym i sterującym głębokie różnice, których tu nie będziemy szczegółowo analizować[18], ograniczając się do omówienia tylko niektórych.

Tekst sterujący w swym założeniu ma organizować autentyczną aktywność matematyczną ucznia, także aktywność poszukiwawczą, prowadzącą do formowania się pojęć i odkrywania ich własności. (Założenia takie formułuje się m.in. w przedmowach do wielu podręczników tego typu, np. /B e r n a r d 1971/) .Tekst sterujący dopuszcza więc - na co zwraca uwagę Z. Krygowska /1977b, s.80/ - "sytuacje otwarte, które trudno byłoby programować bezpośrednio". Tymczasem w metodzie nauczania programowanego przewiduje się na ogół tylko realizację bardzo prostych poleceń i odpowiadanie na bardzo łatwe pytania, a jedno i drugie sprowadza się zazwyczaj do reprodukcji podanej bezpośrednio przedtem informacji; ma to niewiele wspólnego z prawdziwą aktywnością matematyczną.

Tekst sterujący jest podstawą pracy ucznia, jednakże nauczyciel określa sposób jego wykorzystania. Może to być praca indywidualna uczniów, ale także praca w zespołach lub praca "równym frontem" z całą klasą. Nauczyciel może też w dowolny sposób przeplatać pracę z tekstem innymi formami lekcji: dyskusją, wzorcowym rozwiązaniem zadania na tablicy itp. Tymczasem nauczanie programowane jest metodą w zasadzie nie dopuszczającą inwencji nauczyciela; uczeń powinien pracować według programu i zgodnie z załączoną instrukcją.

Program zapewnia uczniowi możliwość natychmiastowego jednoznacznego sprawdzenia każdej odpowiedzi. Stawia to uczącego się od początku w sytuacji sztucznej, niepodobnej do tej, jaka towarzyszy jakiejkolwiek pracy, tym bardziej pracy twórczej. Można przewidywać, że powoduje to niekorzystne nawyki i postawy; m.in. zwalnia ucznia od obowiązków samodzielnego sprawdzenia odpowiedzi, a więc i stałego poszukiwania sposobów sprawdzania - tak ważnego, o ogólnokształcących walorach, celu nauczania matematyki. W tekstach sterujących nie ma odpowiedzi na pytania ani rozwiązań zadań, w każdym razie w bezpośredniej formie.

Obok głębokich różnic, tekst sterujący ma z programowanym wiele cech wspólnych, przede wszystkim formalnych. Jednym z wynalazków nauczania programowanego były zadania polegające na uzupełnieniu luki w tekście, wpisaniu słowa lub znaku w przygotowaną ramkę itp. Ten pomysł został w tekstach sterujących bardzo rozwinięty, dając początek nieznanej dawniej, a bardzo już rozpowszechnionej formie zadań i ćwiczeń dla ucznia. Znaczna część zadań w wielu podręcznikach tego typu polega mianowicie na uzupełnianiu wolnych miejsc w tabelkach, okienkach różnych schematów, czy wypowiedziach

---

[18] Zob./S z n a j d e r 1977/.

skreślaniu, dorysowywaniu[19]. Pozwala to na znaczne ograniczenie wykonywania przez ucznia wielu czynności, z problemem matematycznym w małym stopniu związanych, a absorbujących jego uwagę i pochłaniających wiele czasu. Sposób ten umożliwia także niejednokrotnie znacznie krótsze i jaśniejsze dla ucznia formułowanie zadań, niż wypadłoby to w formie werbalnej. Krótkie "uzupełnij tabelę!" należałoby niejednokrotnie zastąpić długim i zawiłym opisem warunków, dających się natychmiast odczytać z tej tabeli. Ta forma zadań, spreparowana dla celów dydaktycznych i poza nimi niespotykana, stosowana w nadmiarze, może jednak przynieść braki w wykształceniu, jak: nieumiejętność redagowania odpowiedzi i prowadzących do nich rozumowań, samodzielnego konstruowania wyrażeń symbolicznych itp. Wydaje się, że niedopuszczenie do nich jest sprawą właściwej organizacji nauczania i koordynacji stosowanych metod oraz środków.

Innym, formalnym aspektem tekstów sterujących, wzorowanym najpewniej na tekstach programowanych, jest podział tekstu na niewielkie fragmenty,z których każdy zawiera na ogół informacje i polecenia prowadzące do określonej aktywności, oraz kilka związanych z nią pytań, ćwiczeń i zadań. Jednostka tematyczna złożona jest z kilku, niekiedy wielu, takich fragmentów, w niektórych ujęciach występujących kolejno, w innych - przeplatających się. Podział taki nie jest, jak w tekście programowanym, integralną częścią metody; z tekstem sterującym nie jest zresztą związana żadna określona metoda czy forma nauczania.Na pewno jednak ułatwia on uczącemu się organizację własnej pracy i orientację w jej postępie, nauczycielowi zaś - orientację w pracy uczniów i porozumiewaniu się z nimi odnośnie wyników oraz trudności.

7.2.2. Wydawane w różnych krajach podręczniki typu tekstów sterujących, mimo omówionych tu cech wspólnych, różnią się od siebie dość znacznie.Omówimy cztery serie takich podręczników dla klas ponadpoczątkowych, które wybrane zostały jako najlepsze spośród dostępnych, każda zaś posiada odrębny charakter. Pozwoli to na ukazanie szerokich możliwości i perspektywy dalszego rozwoju tej formy książki dla ucznia. Ze względu na przedmiot rozprawy, skupimy uwagę na pierwszych podręcznikach każdej serii, przeznaczonych dla pierwszej klasy ponadpoczątkowej, ograniczając uwagi na temat całej serii tylko do uwag niezbędnych dla naszych celów.

P r z y k ł a d 1 /B e r n a r d 1971/.

Jest to typowy komplet "fiches de travail": pojedyncze kartki formatu A4, z których każda ma numer i tytuł, złączone grzbietem klejonym w taki sposób, że każda może zostać bez trudu oddzielona. Te szczegóły nie

[19] Będą to wyniki krótszych lub dłuższych rozumowań; w tekście programowanym - czynności nie wymagające często żadnego rozumowania.

pozostają bez znaczenia dla sposobu posługiwania się podręcznikiem. Uczniowie mogą bowiem wyjmować poszczególne kartki i wpinać je do skoroszytu pomiędzy czyste kartki papieru. Część zadań wykonują wprost na kartce drukowanej, część zaś całkowicie lub częściowo na czystym papierze.

Materiał rzeczowy jest podzielony na tematy, realizowane w jednej lub kilku kolejnych kartkach. Spis treści ujawnia pogrupowanie tematów:

Zbiory - relacje (kartki 1-22), Liczby naturalne (kartki 23-30), Działania (kartki 31-49), Geometria (kartki 50-62), Relacje (kartki 63-64), Miara (kartki 65-77), Relacje numeryczne (kartki 78-82), Miara (kartki 83-85), Relacje numeryczne (kartka 86), Liczby całkowite względne (kartki 87-96).

W każdej z tych grup dokonano jeszcze jednego podziału przy pomocy liczebników znajdujących się w żywej paginie kartek; np. pierwszą grupę podzielono w ten sposób na cztery części. Jest to układ podobny do tego, jaki występuje w podręcznikach tradycyjnych. Powielanie niektórych działów nie ma nic wspólnego z nauczaniem spiralnym: każdorazowo występuje tu zupełnie nowa tematyka. Przeplatanie różnych działów spotyka się zaś także w podręcznikach dawnego typu.

Dla ukazania charakteru tekstu w Aneksie 4 (s. 135) prezentujemy fragmenty kartek obejmujących grupę tematów: "Relacje numeryczne". Idea dydaktyczna jest tu bardzo wyraźna : zredukować do minimum przekaz informacji w tekście i odbiór informacji w procesie uczenia się, kształcenie pojęć oprzeć na samodzielnej, choć sterowanej, konstrukcji przykładów przez ucznia. Niestety, realizacja tej idei w tym i w wielu innych tekstach sterujących budzi poważne wątpliwości. Zwróćmy uwagę na najistotniejsze wady tego ujęcia.

1) Mimo że definicja odwzorowania liniowego jest sformułowana całkiem ogólnie (ćwiczenie 6 w "Przykładach odwzorowań liniowych"), uczeń jest stale kierowany na wyciąganie ogólnego wniosku na podstawie porównania kilku przypadków szczególnych. Nie znajdujemy najmniejszej nawet sugestii w kierunku rozumowania ogólnego, choćby na wpół intuicyjnego, opartego na paradygmatycznym przykładzie.

2) Ćwiczenia nie stanowią ciągu zbliżającego ucznia stopniowo do pojęcia; przeciwnie, mają charakter oderwany i trzeba wątpić, czy uczeń bez interwencji ze strony nauczyciela dostrzeże łączące je pojęcie odwzorowania liniowego. Na addytywność jako szczególną własność odwzorowania zwraca się uwagę tylko w ćwiczeniu 1 "Przykładów ...". Dalsze przykłady, to już tylko s t o s o w a n i e addytywności, bez sprawdzenia, czy charakter odwzorowania na to pozwala, a także bez zasygnalizowania chociażby, że stosuje się tę samą własność, którą przedstawiono w ćwiczeniu 1. Uczeń najpewniej nie dostrzeże nawet, że stosuje całkiem niebanalną własność funkcji numerycznej, gdyż jedyny kontrprzykład pojawia się dopiero w ćwi-

czeniu 6 i w formie mało atrakcyjnej (pytanie "Czy te odwzorowania są liniowe?" pozwala przewidywać odpowiedź negatywną, która zatem nie będzie dla ucznia zaskakująca). Niespójność przykładów podkreśla Ćwiczenie 7 ; opisane tu operacje mają dość odległy związek z addytywnością odwzorowania liniowego.

3) Dydaktycznie poprawna droga do nowego pojęcia poprzez przykłady, to wyodrębnienie i scharakteryzowanie przez ucznia tych przykładów, które wchodzą w jego zakres spośród wielu różnorodnych sytuacji, zawierających także kontrprzykłady. Drogi takiej uczeń, sterowany tym tekstem, nie przechodzi. Rozwiązuje kolejno podobne do siebie (pod względem matematycznej struktury) zadania, by w przewidzianym momencie po prostu dowiedzieć się z czym miał cały czas do czynienia.

Spełnienie wszystkich postulatów formułowanych współcześnie wobec nauczania matematyki nie jest łatwe, nawet w żywym nauczaniu, tym bardziej w drukowanym tekście, mającym sterować procesem uczenia się. Nie wydaje się jednak, aby autorzy tego podręcznika w ogóle postawili sobie takie zadanie. Koncentrując się na nowej, atrakcyjnej i posiadającej niewątpliwie duże zalety dydaktyczne formie tekstu, poprzestali na realizacji w nim najprostszych, łatwo sprawdzalnych celów nauczania: opanowania przez uczniów algorytmicznych sposobów postępowania w określonych sytuacjach. Wadę tę posiada wiele innych podręczników tego typu, m.in. cytowane już wcześniej podręczniki E.G a l i o n.

Manualne czynności pracującego z tym tekstem ucznia sprowadzają się w większości do wypełniania cyframi lub symbolami wskazanych miejsc tekstu lub rysunku. Niekiedy jednak uczeń powinien napisać dłuższą wypowiedź słowną (np. w Ćwiczeniu 1. "Analizy odwzorowania liniowego"). Ma to oczywiście zaletę: uczeń przyzwyczaja się do formułowania swych myśli i redagowania wypowiedzi na piśmie. Czy jednak wysiłek ucznia będzie owocny, jeżeli - co jest bardzo prawdopodobne - liczne błędne wnioski, uzasadnienia itp. nie pozostaną skorygowane? Obserwowano liczne lekcje matematyki zorganizowane jako samodzielna praca uczniów z tekstem sterującym, gdzie wielu uczniów nie tylko błędnie formułowało wnioski, ale zupełnie błędnie wykonywało polecenia zawarte w tekście i błędnie rozwiązywało zadania, co nie było zauważone przez kierującego pracą nauczyciela. Budzi to wątpliwości co do słuszności stosowania takiej formy nauczania. Jest to jednak zagadnienie wykraczające poza temat tej pracy.

P r z y k ł a d 2 /H a y e n 1976/

Podręczniki te formatem, oprawą, techniką druku, ani szatą graficzną nie różnią się w sposób zauważalny od tradycyjnych podręczników szkolnych. Nawet przekartkowanie książki nie pozwala w niej dostrzec żadnego nowatorstwa, gdyż brak tu miejsc pustych do wypełnienia przez ucznia, tak charakterystycznych dla "fiches de travail". Ich sterujący charakter ujawnia dopiero sam tekst. Książki są wydane bardzo starannie i atrakcyjnie, zawierają barwne ilustracje; najwidoczniej są przeznaczone do wielokrotnego wykorzystania. Takie założenie musiało w pewnej mierze określić charakter poleceń dla ucznia. Jeżeli bowiem wszelkie teksty, rysunki i tabelki, które ma uzupełnić, uczeń musi najpierw przerysować lub przepisać w zeszycie (to polecenie otrzymuje w każdym takim przypadku), tego typu zadania nie mogą być zbyt liczne, a fragmenty przeznaczone do skopiowania w zeszycie - zbytnio rozbudowane. Sterowana takim tekstem praca ucznia w swym zewnętrznym wyrazie będzie więc z konieczności miała charakter zupełnie "tradycyjny" i - naturalny: będzie polegała na pisaniu, rysowaniu i wykonywaniu różnych czynności z użyciem wskazanych materiałów. Posiada to oczywiście wady, ale też wiele zalet; sprawa ta poruszana była w ogólnej charakterystyce tekstów sterujących.

Opiszemy dokładniej podręcznik Gamma 5, Mathematik Grundband für Orientierungsstufen, Gesamtschulen und Realschulen. Zawiera on osiem rozdziałów, z których każdy podzielony jest na podrozdziały (od 6 do 13). Prócz tego na końcu podręcznika umieszczono indeks alfabetyczny terminów oraz wykaz symboli z podaniem ich znaczenia - dodatkowe atrybuty podręcznika typu "naukowego".

Oto tytuły rozdziałów:

I. Liczenie i rachowanie, II Przedstawienie liczb, III Zginanie i rysowanie , IV Mierzenie wielkości, V Równania i nierówności, V Figury symetryczne, VII Mierzenie zawartości, VIII Własności działań.

Jest to na pozór tradycyjnie stosowany układ treści, gdzie każdy temat został opracowany w sposób zwarty i wyczerpujący, zaś geometria, dla urozmaicenia, przeplata się z arytmetyką i algebrą. Jednak wniknięcie w treść poszczególnych rozdziałów ujawnia, że ujęcie to umożliwia stopniowe i rozciągnięte w czasie kształtowanie niektórych pojęć. Rozdział I - to arytmetyka "pojęciowa", gdzie wszelkie rachunki i rozumowania oparte są na modelach geometrycznych i innych. O formalnym aspekcie arytmetyki, a więc sposobach zapisywania liczb i związanych z nimi algorytmach porównywania liczb i wykonywania działań mówi się dopiero w rozdziale II. W obu pierwszych rozdziałach sformułowania ogólne są czysto werbalne (bez użycia zmiennych); przy tym wyraźnie unika się tu sformułowań o zawiłej strukturze. W rozdziale V wprowadza się explicite pojęcia zmiennej (jako miejsca pustego), termu i formy zdaniowej, które w rozdziale VIII będą użyte w sformułowaniu praw działań. Tak więc np. prawa działań, które w rozdziale I są sygnalizowane w ćwiczeniach rachunkowych, a następnie nieformalnie stosowane przez ucznia przy rozwiązywaniu równań i nierówności, ostatecznie formułuje się na samym końcu kursu. Jest to więc układ dyktowany nie przede wszystkim logiczną strukturą materiału, jak było na ogół w dawnych podręcznikach matematyki dla szkoły średniej, lecz względami dydaktycznymi, dostosowany do współczesnej wiedzy o drogach rozwoju myślenia matematycznego ucznia.

Większość rozdziałów (poza "geometrycznymi": III, IV i VI) kończy się paragrafem "Zadania różne". Każdy taki paragraf zawiera zadania o treści abstrakcyjnej lub konkretnej na zastosowanie wiadomości i umiejętności objętych danym rozdziałem. Ani tu ani gdziekolwiek indziej w tym podręczniku nie znajdujemy problemów, pod względem trudności przystosowanych do możliwości ucznia, ale nie związanych bardziej lub mniej wyraźnie z określonym zakresem materiału. Niemniej, wśród "zadań różnych" jest wiele niebanalnych, dobieranych i formułowanych z widoczną troską o ich aspekt motywacyjny. Są tu zadania o treści praktycznej, ściśle związanej z życiem codziennym mieszkańców miasta w RFN. Są też zadania-zagadki oparte na pozornym paradoksie, wymagające odkrycia i wyjaśnienia błędu w rozumowaniu.

Dokładniejsze omówienie rozdziału V zatytułowanego "Równania i nierówności" zawiera Aneks 5.

W podręcznikach sprzed reformy jedyną formą uwzględnienia różnic indywidualnych pomiędzy uczniami-czytelnikami było wyróżnienie np. gwiazdką zadań trudniejszych, niekiedy z określeniem stopnia trudności, a także włączenie do podręcznika materiału "nieobowiązkowego", bądź wykraczającego poza program, bądź stanowiącego pogłębienie wiadomości, uznane przez autora za zbyt trudne dla przeciętnego ucznia. Odzwierciedlała ona związany z całą ówczesną koncepcją nauczania matematyki podział uczniów na niezdolnych, przeciętnie zdolnych i szczególnie uzdolnionych matematycznie. Z góry rezygnując z nauczenia czegokolwiek uczniów niezdolnych, przeznaczano podręcznik głównie dla uczniów "przeciętnie zdolnych", zapewniając im przede wszystkim odpowiedni zasób ćwiczeń sprawnościowych, służących opanowaniu wskazanych przez program umiejętności. Niemal wszystko, co interesujące i wymagające samodzielnego myślenia, było dostępne jedynie uczniom "szczególnie zdolnym".

Współczesna koncepcja nauczania matematyki, traktująca to nauczanie jako systematyczny rozwój określonego typu myślenia i operowania podstawowymi pojęciami matematycznymi u wszystkich uczniów, w miarę ich indywidualnych uwarunkowań psychicznych, zmusza do całkowitego zarzucenia tego tradycyjnego podziału oraz jego uzewnętrznienia w podręczniku.

Autorzy serii Gamma wprowadzili zupełnie inne rozróżnienie tekstu, dla którego podstawą są nie różnice "zdolności", ale - jak się zdaje - głównie różnice zainteresowań i rytmu pracy. Wprowadzono mianowicie następujące znaki rozróżnienia:

5 materiał podstawowy

'6 I rozszerzenie

:7 II rozszerzenie

zadanie częściowe w ramach rozszerzenia

8 materiał dodatkowy podstawowy

°9 materiał dodatkowy I rozszerzenia

:7 materiał dodatkowy II rozszerzenia.

Niestety, autorzy nie wyjaśniają bliżej zasad stosowania tej symboliki, a tekst równieżnie pozwala na jej pełne rozszyfrowanie. Zastosowanie tej symboliki zilustrujemy przykładami.

W cytowanym wyżej paragrafie 8 rozdziału V zadania 4 c)i d) należę do "I rozszerzenia". Można by się domyślać, że nierówności z mnożeniem wykraczają tu poza standardową wiedzę ucznia. Jednak przeczy temu zadanie 5 a), należące do "materiału podstawowego". Także zadanie 16 należy do "I rozszerzenia", ale zadanie 17 do "materiału podstawowego". Rozdział ten nie zawiera zupełnie "materiału dodatkowego". Ta ostatnia kategoria lepiej na ogół daje się dopasować do odpowiednich zadań. Trudno jednak zrozumieć, dlaczego dwa zadania paragrafu "Zbiory wyników" uznano za "materiał dodatkowy I rozszerzenia", gdy brak tu "I rozszerzenia" w "materiale podstawowym".

Być może pierwotny zamysł nie został konsekwentnie zrealizowany. Jednak sama idea rozróżnień wielowymiarowych (tu – dwuwymiarowych) wydaje się użyteczna. Powody, dla których uczeń może potrzebować dodatkowych zadań lub informacji, są różne. Powodem może być rozbudzone zainteresowanie i wywołana nim chęć rozszerzenia lub pogłębienia wiadomości, zastosowania posiadanych wiadomości w nowego typu sytuacjach itp. Wówczas odgałęzienie zasadniczego tekstu powinno mieć charakter "rozszerzenia". Powodem może być jednak także niedostateczne zrozumienie pojęcia czy własności, niepełne ich wyabstrahowanie z podstawowych przykładów, niewystarczające opanowanie nowego algorytmu itp. W tym przypadku pożądane odgałęzienie, to "materiał dodatkowy", rozszerzający zasadniczy tekst raczej ilościowo niż jakościowo. Decyzja (ucznia lub nauczyciela), czy należy kontynuować lekturę tekstu zasadniczego, czy też wejść na jedno z jego odgałęzień, i na które, byłaby tu w założeniu nie funkcją stałych (przynajmniej w pewnym okresie) predyspozycji ucznia, ale funkcją jego aktualnej i zmiennej potrzeby. Takie rozróżnienie zaspokajałoby (w stopniu, w jakim to jest w ogóle możliwe) potrzeby uczniów szczególnie uzdolnionych, ale także tych mniej bystrych, zapewniając im prawidłowy rozwój matematyczny, nie dopuszczając do frustracji spowodowanej niezrozumieniem. Rzecz jasna, prawidłowa, dydaktycznie skuteczna realizacja takiej teoretycznej koncepcji jest bardzo trudna, wymaga wielu lat eksperymentów i pracy nad tekstem. Próby wprowadzania rozgałęzień w tekstach sterujących są, jak dotąd, podejmowane w świecie jedynie sporadycznie. Jedną z nich zawiera cytowana wyżej rozprawa doktorska M. Sznajder.

P r z y k ł a d 3 /P a l i n g 1971/ (zob. Aneks 6).

Według informacji na odwrocie strony tytułowej "seria ta ma zapewnić materiał dla 5-letniego kursu. Książki nr 1, 2 i 3 wraz z Zeszytami pracy dla każdej z nich zawierają materiał dla pierwszych trzech lat. Książka nr 4 i Zeszyt pracy 4, wraz z dwunastoma lub więcej książkami tematycznymi (Topic books) dostarcza pracy w czwartym i piątym roku".

Wynika stąd, że integralną część tego kompletu stanowią, prócz czterech podręczników,"książki tematyczne" - niewielkie monotematyczne broszury popularnonaukowe. Nie będziemy ich tu analizować, gdyż przeznaczone są dla wyższego poziomu nauczania. Trzeba jednak podkreślić, że jest to bardzo interesująca i warta szerszego wypróbowania forma zróżnicowania lektury matematycznej ucznia, umożliwiająca jego kontakt z niemal autentyczną książką naukową, a więc zapewniająca, jak żadna inna, jego przygotowanie do pracy samokształceniowej.

Przypomnienia wymaga fakt, że - inaczej niż w wielu innych krajach europejskich - szkołę średnią w Anglii rozpoczyna uczeń w 11 (a nie 10) roku życia, po 6 (a nie 5 lub 4) latach nauki w szkołach niższego szczebla. Warto o tym pamiętać przy omawianiu zakresu materiału i sposobu jego ujęcia, przeznaczonego - jak należy przypuszczać - dla masowych "modern schools".

Nieliniową, złożoną strukturę książek nr 1, 2 i 3 ujawnia już spis treści. Nie tylko bowiem poszczególne tematy nie są zamknięte w ułożonych kolejno rozdziałach, ale powracają wielokrotnie, niektóre we wszystkich trzech książkach: są one niejednokrotnie tak splecione z sobą, że spis treści nie wskazuje określonych ustępów lecz "obszary" podręcznika, w których dany temat występuje. Na przykład "Systemy numeracji" znajdziemy na stronach: 43-47 książki 1, 13-15, 16, 26-30, 32-33, 46, 69-72, 105 książki 2 i 9-16, 19, 34, 51, 83 książki 3,a więc łącznie w 14 "obszarach". Ale na strony 19-20 spis treści w książce 3 wskazuje nie tylko pod hasłem "Systemy numeracji", ale także pod hasłami "Działania", "Narzędzia rachunkowe" oraz (stronę 12) "Użycie nawiasów". Te cechy spisu treści odzwierciedlają oryginalną budowę podręcznika, a nie tylko - jak można by przypuszczać - samego spisu treści.

Główne tematy, przewijające się na ogół we wszystkich trzech książkach, to "Liczby i działania", "Figury", "Miary", "Wykresy i statystyka". Czytelnika nawykłego do tradycji wywodzącej się z "kontynentu" uderza tu brak nawet śladów systematyzacji materiału opartej na ujęciu dedukcyjnym. Każda sytuacja jest analizowana przy użyciu różnorodnych środków matematycznych, wprowadzanych zresztą na ogół całkowicie intuicyjnie, bez jakiejkolwiek formalizacji, choćby w postaci definicji, podporządkowanych jedynie praktycznym wymogom sytuacji i względom dydaktycznym.

Niezależnie od tytułów rzeczowych, w tekście są cztery rodzaje tytułów, które można by nazwać dydaktycznymi, a które uprzedzają czytelnika o charakterze pracy: 1) "Temat do rozmowy" (w książkach 1 i 2) oraz "Do dyskusji" (w książce 3), 2) "Ćwiczenia", 3) "Przegląd wiadomości" (Review), 4) "Aktywność" (Activity). "Tematy do rozmowy" i "Do dyskusji" - to seria informacji, poleceń i pytań, wprowadzająca nowe pojęcie, metodę, algorytm itp. Po niej następują z reguły "Ćwiczenia", będące bądź łatwymi zadaniami na zastosowanie przede wszystkim dopiero co zdobytych wiadomości, bądź dalszymi przykładami ilustrującymi pojęcie czy ułatwiającymi jego wyabstrahowanie itp. W porównaniu z "Tematem do rozmowy", który ma z reguły charakter otwartego problemu, "Ćwiczenia" są zadaniami raczej sprawnościowymi, przy wykonaniu których uczeń korzysta niekiedy z gotowych rysunków, schematów itp. z "Zeszytu pracy".

"Aktywności" stanowią najbardziej oryginalną, niespotykaną gdzie indziej formę. Mają one bardzo niejednorodny charakter. W większości polegają na wykonywaniu praktycznych pomiarów lub obserwacji, są jednak i inne, o charakterze bardziej teoretycznym (Aktywność 4). Każda wymaga od ucznia pewnego wysiłku, czasem jednak będzie to tylko wysiłek fizyczny (Aktywność 10), kiedy indziej prawdziwy wysiłek umysłowy prowadzący do wynalezienia metody wykonania zadania (Aktywność 2, 5, 7, 9). Rzecz jasna, realizacja tych aktywności nie jest obowiązkowa i uczniowie będą je dobierać według własnych zainteresowań.

Podobnie jak w przypadku serii Gamma , uczeń nie pisze ani nie rysuje niczego w podręczniku. Tabelki do wypełnienia, teksty do uzupełnienia itp. przepisuje najpierw w zeszycie. Niektóre zadania wykonywane są w dołączonym do każdej książki Zeszycie pracy. Zeszyt nie zawiera jednak zadań ani żadnych innych tekstów, jedynie materiały: rysunki, tabele, kontury do wycięcia i sklejenia itp. Jest wykonany najprostszą techniką na tanim papierze, gdyż użyty będzie tylko jednorazowo, gdy podręcznik służyć będzie w ciągu kilku lat.

Podręczniki nie zawierają rozwiązań żadnych zadań. Do kompletu należą jednak także wydane osobno dla każdej książki zeszyty odpowiedzi. Zawierają one tylko odpowiedzi dające się sformułować jednoznacznie oraz realizacje jednoznacznych poleceń, nadające się do przedstawienia w druku. Opracowano je tak sumiennie, że nawet dla zadania 1 z cytowanego w Aneksie "przeglądu wiadomości" znajdujemy "odpowiedź" w postaci rysunku czterech odcinków odpowiedniej długości. Nie wiadomo, czy zeszyty odpowiedzi przeznaczone są dla ucznia, czy też (to przypuszczenie wydaje się bardziej prawdopodobne) posiada je tylko nauczyciel.

Na koniec warto podkreślić, że prezentowane w tych książkach podejście - adedukcyjne - jest bardzo silnie zorientowane na ujawnianie związków matematyki (pojmowanej naiwnie i intuicyjnie) ze środowiskiem i praktyczną działalnością człowieka. W książce 1 są na przykład całe oddzielne ustępy, poświęcone produkcji i dystrybucji mleka i pieczywa. W tym ostatnim "tematu do rozmowy" dostarczają następujące pytania:

Z czego robi się mąkę?
Gdzie jest najbliższy młyn?
Skąd pochodzi pszenica? Znajdź te miejsca na mapie.

Zaś wśród ćwiczeń znajdujemy i takie:

Znajdź w książce kucharskiej, jakie składniki są potrzebne do wyrobu naleśników.
Zapisz ilości składników potrzebnych na podwójną ilość naleśników.
Znajdź łączny koszt tych składników.

Podejście to, niewątpliwie dostępne dla wszystkich uczniów, przy tym silnie motywujące i aktywizujące, ma niezaprzeczalne walory pedagogiczne. Można mu jednak postawić zasadniczy zarzut: zupełnie nie uczy rozumowań ogólnych typu matematycznego, a więc nie odpowiada scharakteryzowanej w 4.1 koncepcji prematematyki. Ani takich rozumowań, ani żadnych pytań naprowadzających nie znajdujemy bowiem nawet w książce 4. Jednakże dla osób uznających, że w kształceniu masowym jest to zbędne, a i tak dla części uczniów niedostępne (poglądu tego nie podzielamy), zarzut ten upada, gdyż uczniowie o uzdolnieniach ponad przeciętną są przyjmowani do szkół innego typu, gdzie otrzymują wykształcenie matematyczne na wyższym poziomie. Być może, takimi właśnie względami kierowali się autorzy tej serii.

P r z y k ł a d 4

Podręczniki węgierskie/"Munkalapok"/ stanowią przykład skrajny z punktu widzenia ilościowego stosunku przekazu wiedzy do poleceń i zadań: brak w nich warstwy informacyjnej (dysponujemy podręcznikami do klasy VI włącznie). Uczniowie nie posiadają przy tym żadnej innej książki, która mogłaby pełnić rolę kompendium wiadomości. Z drugiej jednak strony "Munkalapok", to nie po prostu zbiór zadań, ale s e r i a zadań i poleceń stymulujących różnorakie aktywności uczniów, posiadająca złożoną strukturę dydaktyczną, stanowiąca więc niewątpliwie rodzaj tekstu sterującego.(Fragmenty tych podręczników prezentują Aneksy 1 i 2, zaś dydaktyczną strukturę omówiono na wybranym przykładzie w rozdziale III).

Podręcznik taki stawia wysokie wymagania nauczycielowi, który musi organizować całą aktywność poznawczą uczniów, łącznie z formułowaniem określeń odkrytych pojęć, wysławianiem twierdzeń, opisem algorytmów itp., nie mogąc oprzeć się w tej pracy na podręcznikowych wzorcach. Będzie to dla niedoświadczonego nauczyciela niewątpliwe utrudnienie pracy. Podręcznik taki nie daje też podstawy do nauki rozumienia tekstu matematycznego. Z drugiej jednak strony pamiętać trzeba, że podręcznik, w którym brak tych sformułowań, nie będzie stwarzał okazji do przedwczesnego uczenia się ich przez uczniów, często blokującego rozumienia. Podręczniki te wypróbowywane były dotychczas jedynie w części szkół węgierskich, przez odpowiednio przygotowanych nauczycieli. Nie jest jednak ogólnie znana metodyka pracy z nimi; nie wiadomo też, czy prowadzone są tam systematyczne badania nad formami ich stosowania w nauczaniu lub efektywnością nauczania przy ich użyciu. Trudno więc na razie odpowiedzieć, czy zalety tej wysoce oryginalnej formy podręcznika dominują nad wadami. Nasze dotychczasowe rozważania upoważniają jednak do wysunięcia pewnych teoretycznych zastrzeżeń. Otóż podręcznik taki może stanowić podstawę nowoczesnego i pełnowartościowego nauczania matematyki w klasach początkowych, gdzie panować powinna swobodna aktywność dzieci, nie oparta na lekturze formalnych tekstów i niekoniecznie prowadząca do ich tworzenia i reprodukcji. Jednak już pierwsza klasa ponadpoczątkowa, w której powinno następować stopniowe przestawianie się uczniów na myślenie bardziej ogólne i abstrakcyjne, a także ich przyzwyczajanie się do operowania językiem coraz bardziej formalnym, wymaga podręcznika innego, a nie zachowującego ten sam aformalny i wolny od przekazu charakter. Tym bardziej dotyczy to klas wyższych.

Krytyka ta nie umniejsza jednak wysokiej wartości tej koncepcji podręcznika. Można sądzić, że "Munkalapok" wywrą na przyszłe podręczniki dla klas początkowych także w innych krajach podobny wpływ jak podręczniki Papy'ego wywarły na produkcję książek dla szkoły średniej.

7.3. Język i forma graficzna podręcznika

Formalna strona podręczników, doskonalona zarówno koncepcyjnie jak i technicznie od stuleci, doprowadzona została do dużej perfekcji. Istnieje dziś wiele nowych technik w zakresie składu i druku, środków graficznych, nowych możliwości operowania kolorem, które umiejętnie wykorzystane pozwalają w dużej mierze ułatwić specyficzną,a przez to trudną lekturę tekstu matematycznego. Wymienimy kilka z tych środków.

Tekst, zarówno werbalny jak i symboliczny, bywa rozmieszczony na stronie nie liniowo, ale tak, że tworzy pewną strukturę dwuwymiarową. Dodatkowo niektóre części takiego tekstu łączy się liniami lub strzałkami, wskazującymi powiązania, czy po prostu różne kierunki lektury. Najprostszą taką strukturą jest tabela prostokątna, stosowana już dawniej (zob.cytat na s. 33). Ostatnio obserwuje się znacznie większą swobodę w jej doborze,głównie pod wpływem rewolucyjnych pod tym względem książek G. Papy'ego.

W tekście można dokonywać wyróżnień, których różnorodność jest praktycznie nieograniczona. Ustalenie niektórych konwencji dotyczących wyróżnień może znacznie ułatwić czytelnikowi orientację w tekście: pomóc odróżnić nowy termin od poznanego wcześniej, definicję od twierdzenia, zmienną od stałej, ćwiczenie od problemu itd.

Szczególnie cenna jest możliwość wyróżnień za pomocą koloru. Identyczność kolorów jest przez czytelnika zauważana na pierwszy rzut oka wcześniej niż identyczność kształtów (np. liter czy rysunków). Umożliwia to bardzo czytelne wiązanie z sobą nawet odległych fragmentów tekstu, a także, co jeszcze istotniejsze, tekstu z rysunkiem. Możliwe jest więc na przykład równoległe definiowanie operacji, relacji itp. za pomocą rysunku /np. z użyciem strzałek), symbolicznie i werbalnie, bez konieczności umieszczania tekstu tuż przy odpowiednich częściach rysunku, opisywania rysunku z pomocą liter, czy innych, dawniej stosowanych środków. Wystarczy, aby poszczególne fragmenty tekstu były wydrukowane tym samym kolorem, co odpowiadające im części rysunku. Środek ten jest wciąż jeszcze za mało stosowany; prawdopodobnie jest on,z jednej strony, niedoceniany przez autorów, z drugiej zaś strony, nadal zbyt kosztowny.

Wszystkie te środki nadają się równie dobrze dla przekazu wiedzy,jak i dla przekazu poleceń, pytań i problemów służących aktywizacji matematycznej ucznia. Tę ostatnią ich rolę trudno byłoby przecenić. Im więcej trudu musi uczeń włożyć w samo zrozumienie polecenia, pytania czy problemu, tym słabszą wykaże aktywność matematyczną. Podręcznik aktywizujący wymaga więc właściwego wykorzystania w maksymalnym stopniu wszelkich technik i środków poligraficznych ułatwiających lekturę.

W niektórych podręcznikach, wydanych w okresie reformy, zaznacza się wyraźnie tendencja do ograniczania tekstu na rzecz rysunków i różnego rodzaju schematów. Wraz z jednoczesnym szerokim wprowadzeniem języka symbolicznego daje to w niektórych przypadkach efekt zaskakujący (np. w podręcznikach G. Papy'ego): liczne strony, na których znajduje się kilka wierszy druku i jeden lub dwa duże, wyraziste rysunki. Tekstu jest stosunkowo niewiele także w niektórych podręcznikach semiprogramowanych (zob. Aneksy 1,2,4); tu jednak miejsce jego zajmuje materiał do pracy dla ucznia (tabelki i inne schematy do wypełnienia, uzupełnienia itp.). Wielu autorów, ze swobodą,która w tradycyjnych podręcznikach nie była możliwa, wykorzystuje też różne okazje do zastąpienia rysunkiem (niekiedy humorystycznym) informacji werbalnej (zob. Aneks 2, s.130). Wszystko to tłumaczy się następująco:

- od dawna stwierdzonym faktem, że dłuższy tekst werbalny z zakresu matematyki przedstawiony w piśmie jest dla wielu uczniów 10-11-12-letnich niedostępny, a więc nie nadaje się do skutecznego przekazu wiedzy, a tym bardziej dla aktywizacji ucznia,

- dążeniem do zmiany tradycyjnej roli podręcznika szkolnego: przekształceniem go w książkę, której czytelnikiem będzie przede wszystkim uczeń.

Zarówno wynalezienie zupełnie nowych graficznych środków wyrazu,jak i redukcja tekstu na rzecz tych środków, mają w zamierzeniu autorów ułatwić lekturę, usprawnić przekaz zawartej w książce informacji, a przez to wzmóc jej funkcję aktywizującą. Tendencja ta wydaje się najzupełniej słuszna: nowa forma podręczników była nie tylko charakterystycznym symptomem reformy, ale w dużej mierze przyczyniła się do jej sukcesów. Niemniej, jak każda tendencja, znalazła ona i zbyt gorliwych realizatorów, także wśród swych twórców. M.in. w książkach G. Papy'ego znajdujemy i takie werbalno-symboliczno-graficzne sformułowania, których rozszyfrowanie przedstawia pewną trudność nawet dla matematyka obeznanego z językiem tego autora, a co dopiero dla ucznia. Czy praca nad rozszyfrowaniem takiego sformułowania ma istotną wartość kształcącą? Jakimi należy posłużyć się środkami motywacji, by ucznia nią dostatecznie zainteresować? Pytania te pozostawimy otwarte.

Duże zmiany, w porównaniu z podręcznikami tradycyjnymi, zauważa się także w stylu tekstu werbalnego podręczników. Przede wszystkim uderza stosowana obecnie niemal powszechnie druga osoba liczby pojedynczej, w miejsce dawniej używanych form bezosobowych. Ponieważ jednocześnie autorzy z nieco większą swobodą posługują się wyrazami i zwrotami potocznymi, stwarza to u czytelnika klimat intymnego kontaktu z autorem książki, w sposób oczywisty sprzyjający odbiorowi informacji i przejściu do działania. W miejsce długich, rozwiniętych i "okrągłych" wypowiedzi często spotyka się też krótkie, zwięzłe zdania, zawierające pojedyncze informacje, polecenia lub pytania; każde rozpoczynające się a linea. Zdecydowanie bardziej odpowiada ta forma aktywizującej funkcji książki.

Nastawienie na maksymalną aktywizację ucznia, między innymi poprzez lekturę, nie jest równoznaczne z rezygnacją z przekazu wiedzy za pośrednictwem podręcznika. Tendencja taka, niekiedy obserwowana (zob.np./M u n - k a l a p o k/), nie wydaje się słuszna: przekaz wiedzy stanowi integralny składnik każdego nauczania, a podręcznik jest jednym z najlepiej nadających się do tej roli środków nauczania. Toteż dostrzega się też w podręcznikach próby poszukiwania nowych środków werbalnego przekazu, ułatwiających aktywny jego odbiór. Nie omawiamy tu takich od dawna stosowanych zabiegów, jak wtrącone pytania, polecenia sprawdzenia przykładu itp. Zaprezentujemy natomiast (zob. par.7.4.) formę dialogu, formę dawniej nieznaną, która, być może, stanie się w przyszłości ważnym rodzajem przekazu podręcznikowego.

Bardzo różne jest podejście autorów różnych podręczników dla omawianego poziomu do zakresu wprowadzanej w nich terminologii i symboliki matematycznej. Do pewnego stopnia podręczniki odzwierciedlają tu tendencje aktualnie panujące w poglądach na rolę terminologii i symboliki w nauczaniu matematyki w ogóle, jednak, zwłaszcza ostatnio, występuje w tym względzie znaczna rozbieżność. W podręcznikach dostosowanych do tradycyjnego nauczania w szkole masowej, symbolikę ograniczano do niezbędnych symboli działań i relacji arytmetycznych i niewielu symboli geometrycznych. Próby, poprzedzające pierwszą falę reform, wykazały nieoczekiwaną łatwość uczniów w przyswajaniu biernym i czynnym wielu symboli matematycznych. Spowodowało to zachwyt nad możliwością radykalnego "unaukowienia" szkolnego języka matematyki i, w konsekwencji, wprowadzenie do niektórych podręczników ogromnej liczby symboli i terminów z zakresu logiki, nauki o zbiorach, arytmetyki, geometrii, algebry abstrakcyjnej, topologii, analizy i innych. (Do pewnego stopnia widoczne to jest we fragmentach cytowanych w Aneksach 3 i 4). Podjęta w ostatnich latach krytyka tych reform zaatakowała i ten aspekt "modernizacji" nauczania. Prowadzone ostatnio badania (m.in. w IREM w Strasbourgu) wykazały bardzo powierzchowne, syntaktyczne tylko rozumienie symboliki przez uczniów, którzy operując nią poprawnie w sytuacjach typowych (przez formalne naśladowanie wzorców), stwarzali pozory zadowalającego jej rozumienia. Obserwacje takie spowodowały już pojawienie się tendencji przeciwnej: unikania symboliki na rzecz tekstu werbalnego.

Sądzić należy, że prowadzona obecnie głęboka dyskusja nad ogólnymi celami kształcenia matematycznego mas i jego programem pociągnie za sobą także wyjaśnienie roli symboliki matematycznej w tym kształceniu, a więc i proporcji warstwy werbalnej i symbolicznej w podręczniku uczniowskim.

Inne językowe aspekty podręcznika matematyki omówiono także w rozdziale IV.

7.4. Werbalna warstwa podręcznika

Dla realizacji funkcji samokształceniowej podręcznika, tj. "budzenia i rozwijania zdolności poznawczych człowieka, jego zainteresowań oraz pozytywnej motywacji w procesie uczenia się" (W. O k o ń , zob. s. 80), szczególnie na poziomie klas początkowych i pierwszej klasy ponadpoczątkowej, rolę równie istotną jak treść zdaje się odgrywać forma tekstu werbalnego. W niewielkim stopniu wpływa ona na zewnętrzną atrakcyjność książki, łatwą do uzyskania za pomocą różnych środków graficznych, decyduje natomiast o prawdziwym efekcie lektury, a więc realizacji celów nauczania. Bezosobowa, "sucha", maksymalnie zobiektywizowana forma tekstu podręczników typu akademickiego dostosowana była do ich głównej funkcji - przekazu wiedzy gotowej do opanowania i stosowania. Usprawiedliwianie takiej formy tym, że podręcznik służy do "utrwalania i wykańczania tego, co już zostało przeżyte i jako przeżycie psychiczne istnieje /.../ w systemie personalnym ucznia" (M y s ł a k o w s k i, zob. s. 79) jest na omawianym poziomie i w istniejącym systemie szkolnym pozbawione realnych podstaw, o czym mówiliśmy wcześniej. Z drugiej strony, jak pokazaliśmy w 7.1, łatwo tekst podręcznika "ubarwić" różnymi wstawkami, nie zmieniając przy tym istotnie jego przekazującego charakteru. Konieczne jest więc znalezienie takich form tekstu, które umożliwiałyby wyzwalanie u czytelnika aktywności poszukiwawczej lub przekazywały (bo przekaz jest niezbędny!) wzorce takiej aktywności, nie zaś jej gotowe produkty.

O tym, że nie można polegać na spontanicznej aktywności poszukiwawczej u czytelnika i trzeba ją stymulować przez wprowadzanie do tekstu środków aktywizujących heurezę, wiedziano już dawno. Ograniczano się jednak do pytań i poleceń (a nawet, jak widzieliśmy w przykładzie 1 na s.87 całych dialogów) w t r ą c a n y c h do tekstu (często w nawiasach), a więc o d g r y w a j ą c y c h jawnie drugorzędną rolę. To przypuszczalnie tłumaczy częściowo ich niewielką skuteczność: uczeń, czytając podręcznik, na ogół pomija wszystkie pytania: "dlaczego?" Jeszcze istotniejszy wydaje się jednak brak w tradycyjnym, nawet udoskonalonym, tekście wzorców autentycznej aktywności poszukiwawczej.

Występowanie bardzo istotnej, głębokiej różnicy między twórczością matematyczną, a jej ostatecznym produktem nie ulega wątpliwości dla żadnego matematyka. Różnica ta jest, być może, głębsza w matematyce, gdzie dedukcja jest jedyną akceptowaną metodą argumentacji, niż w naukach empirycznych. I być może, dlatego właśnie często empiryczne czy na granicy empirii leżące postępowanie matematyka w fazie prowadzonych badań jest przezeń jakby wstydliwie ukrywane, nie pozostawiając nawet śladu w ostatecznej relacji wyników tych badań. Nawet bowiem te ujęcia, w których "dochodzi" się do twierdzeń i dowodów zamiast je wprost referować, prezentują konstrukcje pseudoheurezy dokonane ex post, a więc wówczas, gdy właściwa praca badawcza została zakończona. Posiadają one duże znaczenie motywujące dla czytelnika, dostarczając mu satysfakcji współtworzenia, nie mogą jednak stanowić wzorców dla autentycznej pracy poszukiwawczej.

Przedstawianie w tekście podręcznika matematyki przykładów naturalnego postępowania badawczego, zawierającego hipotezy oparte na przykładach, rozważanie szczególnych przypadków, ślepe zaułki, błędy, momenty emocjonalne itp., nie ma więc tradycji. Nie jest też łatwe, jeżeli wziąć pod uwagę formalne rygory, którym podlega tekst podręcznika. Uważa się, że tekst ten nie powinien w niczym uchybiać poprawności językowej (w sensie zgodności z przyjętym standardem) i naukowej (w sensie terminologii i frazeologii). Stosowanie się do tych rygorów przy prezentowaniu niepewnych lub błędnych hipotez, sformułowań tymczasowych, w dalszym ciągu poprawianych i uzupełnianych itp., byłoby rażąco niestosowne, zresztą nie zawsze możliwe.

Środkiem nie stosowanym dotąd na szerszą skalę, który - jak sądzimy - stanie się w przyszłości główną formą przekazu werbalnego w podręcznikach dla kilku najniższych klas, są wypowiedzi dzieci - rówieśników czytelnika książki. Sporadycznie formę tę można spotkać w ostatnio wydawanych podręcznikach, jednak w roli bardzo ograniczonej. Na przykład w podręczniku R o l l e r a /1974/ występuje chłopiec (przedstawia go za każdym razem rysunek-karykatura), zwany Max Schlaumeier (Schlaumeier znaczy po niemiecku chytrus), wypowiadający serię twierdzeń, z których niektóre są fałszywe. Po zacytowaniu twierdzeń Maxa autorzy zwracają się do czytelnika: "W których przypadkach Max ma rację? Czy możesz uzasadnić te prawdziwe wypowiedzi? Jak możesz w pozostałych przypadkach, za pomocą przykładu, przekonać Maxa, że się myli?" Sekwencja ta powtarza się w podręczniku wielokrotnie. Autorzy posłużyli się tu więc uczniem w jednym tylko celu: dla formułowania zadań polegających na wykrywaniu twierdzeń fałszywych; zadań tego typu, bardzo ważnych dla wdrażania uczniów do aktywności poszukiwawczej, nie było w podręcznikach tradycyjnych. W kubańskim podręczniku Z. D i b a /1973/ rola takich wypowiedzi jest inna: dzieci zadają pytania lub dają polecenia czytelnikowi, a także objaśniają wykonywane czynności, rysunki, teksty symboliczne itp. Funkcje wypowiedzi bohaterów podręcznika mogą być jednak daleko bardziej różnorodne:

1) najważniejsza, bo najbardziej chyba rewolucjonizująca tekst podręcznika, funkcja tego środka, to udramatyzowana imitacja naturalnego procesu heurystycznego. Przykład takiego "głośnego" zespołowego rozwiązywania serii zadań, prowadzących do odkrycia cechy podzielności przez 3, zawiera aneks 8 (s.149). Przedstawiony tu proces składa się z następujących faz:

- zaprezentowanego przez Agnieszkę sposobu konkretnego rozwiązania pierwszego z zadań,
- rozwiązania tego samego zadania innym sposobem przez Tomka,
- upraszczającego sposób Agnieszki pomysłu Dyzia, nasuwającego możliwość uogólnienia tego sposobu,
- błędu w rozumowaniu Tomka, spowodowanego czysto formalnym uogólnieniem pomysłu Dyzia dla zastosowania go w nowej sytuacji,
- zademonstrowania przez Agnieszkę prawidłowego zastosowania pomysłu Dyzia w tej sytuacji,
- odkrycia przez Dyzia możliwości jeszcze jednej racjonalizacji w sposobie postępowania Agnieszki, znowu dającej się łatwo uogólnić i przedłużyć.

Oczywiście, jest to jedynie imitacja pracy zespołowej, nie zaś rekonstrukcja pracy jakiegoś autentycznego zespołu uczniowskiego. Autorzy starali się jednak nadać tej imitacji możliwie najbardziej naturalny charakter, a jednocześnie uwzględnić w niej różne charakterystyczne momenty dla prawdziwej aktywności badawczej. Oto niektóre z nich:

- ogólna metoda rodzi się stopniowo w drodze upraszczania i ulepszania postępowania odnoszącego się do szczególnego przypadku,

- próba uogólnienia ujawnia u jednego z uczestników rozmowy przedwczesną i powierzchowną formalizację zaproponowanej przez innych metody postępowania,

- sposób zaproponowany w wyniku błędnego rozumowania sam okazuje się poprawny, a przy tym wyzwala następne odkrycie.

Szczególnie doniosłe znaczenie dydaktyczne ma - jak sądzimy - przytaczanie w takich dialogach wypowiedzi będących wynikiem błędnego rozumowania.

Błędy uczniów były w nauczaniu tradycyjnym traktowane jako karygodne lub co najmniej kompromitujące (ucznia i nauczyciela). Błąd popełniony przez ucznia na lekcji należało jak najszybciej "zlikwidować", tj. przynajmniej poprawić, a w najlepszym przypadku wyjaśnić "winowajcy", na czym błąd polegał. Nauczyciel, jeżeli zdarzyło mu się popełnić błąd w obecności uczniów, stosował na ogół różne wybiegi, by się do tego nie przyznać. Błąd w podręczniku był nie do pomyślenia. Wszystko to przyczyniało się do fałszywego ukazywania uczniom oblicza matematyki traktowanej jako aktywność poznawcza, w której błędy stanowią naturalną konieczność.

Błąd w rozumowaniu jest jedną z cenniejszych sytuacji dydaktycznych. Informacje zdobyte dzięki analizie błędu będą głębiej i trwalej przyswojone niż drogą bezpośrednią. Błąd jest bowiem dla ucznia zdarzeniem nieoczekiwanym i niepokojącym, stwarzającym specyficzną sytuację problemową. Błąd jest sam przez się intrygujący, jego analiza nie wymaga więc żadnej dodatkowej motywacji. Błąd jest niejednokrotnie - jak twierdzi Z. Krygowska /1977, s.74/ - okolicznością "błogosławioną". Doświadczony nauczyciel zamiast czekać na taki "błogosławiony" błąd, celowo go prowokuje.

Błędy cytowane w rozumowaniach prezentowanych w podręczniku i następnie analizowane w tekście powinny więc w pierwszym rzędzie zdjąć z błędu jego piętno w świadomości uczniów i nauczycieli.

Mimo że rozumowania prezentowane w podręczniku w jakiejkolwiek formie nie zastąpią (w sensie dydaktycznym) rozumowań prowadzonych przez samych uczniów, to jednak podręcznik powinien spełniać ważną rolę uzupełniającą. Dialogi w podręczniku mogą być bowiem tak konstruowane przez autora, by wystąpiły w nich szczególnie pożądane dydaktycznie błędy, które w nauczaniu niekoniecznie by się ujawniły, nawet gdyby były obecne w myśli niektórych uczniów. Do takich błędów należą na przykład:

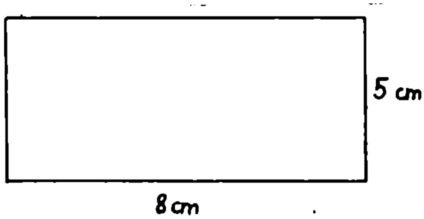
- błędne zastosowanie formalnej reguły,
- powołanie się w rozumowaniu na szczególny przypadek, rysunek itp.,
- nieostrożne uogólnienie pojedynczych faktów,
- przeoczenie jednego z dopełniających się przypadków,

i wiele innych.

2) Prócz udramatyzowanych zespołowych "odkryć" forma dialogowa nadaje się bardzo dobrze dla prezentacji wzorcowych rozwiązań zadań.

Występujące w tradycyjnych podręcznikach matematyki i zbiorach zadań przykładowe rozwiązania odnosiły się głównie do zadań typowych, tj. podpadających pod określony schemat i dających się rozwiązywać również według pewnego wspólnego dla nich schematu. Przykładowe rozwiązania miały tu na celu pokazanie tego schematycznego sposobu rozwiązania, a więc pokazanie, jak *można* rozwiązywać zadania tego typu. Były one jednak najczęściej przyjmowane przez uczniów jako instrukcje postępowania, które *należy* stosować. Taka interpretacja była zresztą naturalna, gdyż podręcznik nie dawał przykładów innego postępowania. W realizacji współcześnie pojmowanych celów nauczania matematyki zadania typowe straciły swe znaczenie. W kształceniu u uczniów otwartej postawy wobec problemu, poszukiwania różnych dróg jego rozwiązania i wyboru najlepszej w danej sytuacji, przyswojenie nawyku stosowania typowych metod do typowych zadań jest wręcz przeszkodą. Zmienić się powinien w tej sytuacji charakter rozwiązań przykładowych, które miałyby uczyć w pierwszym rzędzie poszukiwania dróg rozwiązania, nie zaś stosowania jednej wybranej spośród nich. Trudno o lepszą formę tak rozumianego przykładowego rozwiązania niż imitacja zespołowej dyskusji nad zadaniem, w której po serii prób, także błędnych, wyłaniają się różne sposoby podejścia, następnie krytykowane, odrzucane lub przyjmowane, ulepszane itd. Oto przykład takiej "dyskusji"[20].

Jakie wymiary może mieć prostokąt o polu 3 razy większym od pola tego prostokąta?



Tomek: Pole prostokąta na rysunku obliczam mnożąc 8 . 5. Pole będzie 3 razy większe, jeżeli każdą z tych liczb pomnożę przez 3. Boki nowego prostokąta obliczę tak:

$$\underline{3} \cdot 8 \text{ cm} = 24 \text{ cm}$$
$$\underline{3} \cdot 5 \text{ cm} = 15 \text{ cm}$$

Agnieszka: Twój prostokąt będzie miał pole

$$24 \cdot 15 \text{ cm}^2 = 360 \text{ cm}^2$$

a ten ma

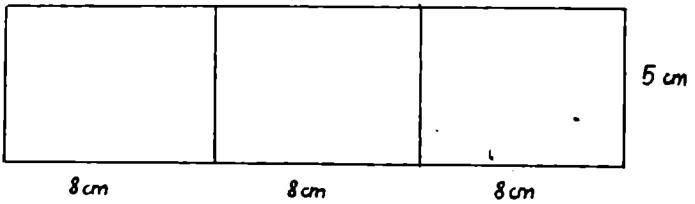
$$8 \cdot 5 \text{ cm}^2 = 40 \text{ cm}^2$$

360 nie jest 3 razy większe od 40, ale aż 9 razy większe!

Dyzio: Zamiast liczyć, można taki prostokąt od razu narysować:

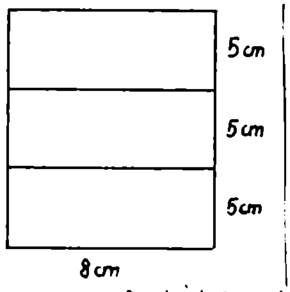
---

[20] Wszystkie przykłady w paragrafie 7.4 pochodzą z podręcznika /T u r n a u 1978/.



Pole tego prostokąta obliczę tak:
(3 . 8) . 5 = 24 . 5 = 120

Agnieszka: Można też narysować tak:



A teraz pole będzie równe:
8 . (3 . 5) = 8 . 15 = 120

Tomek: Wiem, dlaczego źle liczyłem:
mnożyłem przez 3 k a ż d y b o k,
a należy pomnożyć t y l k o j e d e n.

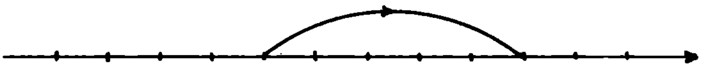
3) Seria rysunków komentowanych w wypowiedziach dzieci stanowi lepszą formę wprowadzenia do gry dydaktycznej niż słowna instrukcja.

W nowoczesnym nauczaniu do bardzo ważnych środków dydaktycznych należą zadania rozwiązywane manipulacyjnie, odnoszące się do materiału konkretnego, oraz gry. Słowne opisy reguł gry czy manipulacji, zwykle z konieczności rozbudowane, nie stanowią dla uczniów niższych klas wystarczającego ich wyjaśnienia. Najskuteczniejsza jest tu, jak uczy doświadczenie, demonstracja, którą w podręczniku zastąpić można serią rysunków z objaśnieniami. Z omówionych wyżej względów najkorzystniejszą formą tych objaśnień zdaje się być komentarz dzieci - "wykonawców" opisywanych czynności, bądź "partnerów" opisywanej gry. Włożone pomiędzy objaśnienia, ich wątpliwości i pytania dotyczące trudniejszych szczegółów pozwolą na pełniejsze i trwalsze zapamiętanie reguł.

Oto dla przykładu wprowadzenie do gry, będącej jednym ze źródeł abstrakcji liczby dodatniej i ujemnej.

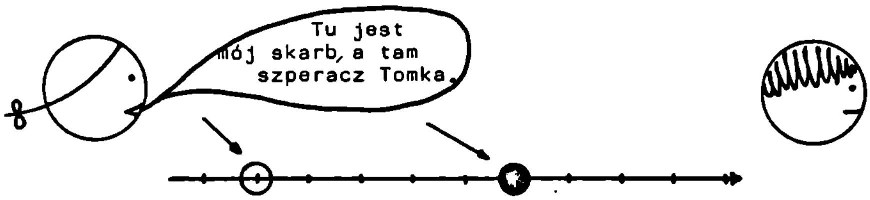
Agnieszka i Tomek grają w "poszukiwanie skarbu", "Skarb", to biały pionek na osi. Agnieszka ukryła swój skarb. Tomek go szuka z pomocą "szperacza". Tomek wydaje szperaczowi rozkazy. Agnieszka przesuwa pionek i mówi "zimniej" lub "cieplej".

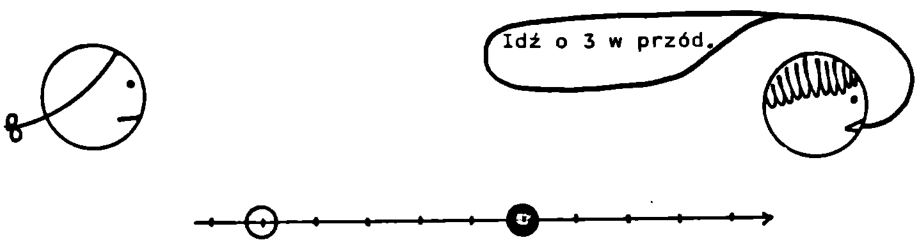
Ruchy szperacza będziemy przedstawiać strzałkę. Na przykład rysunek

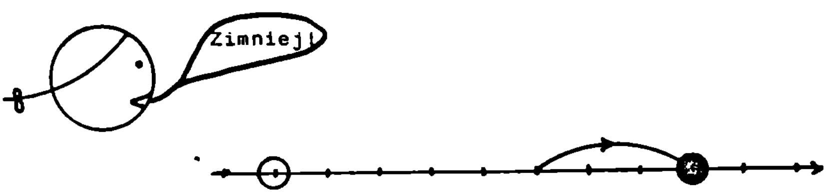


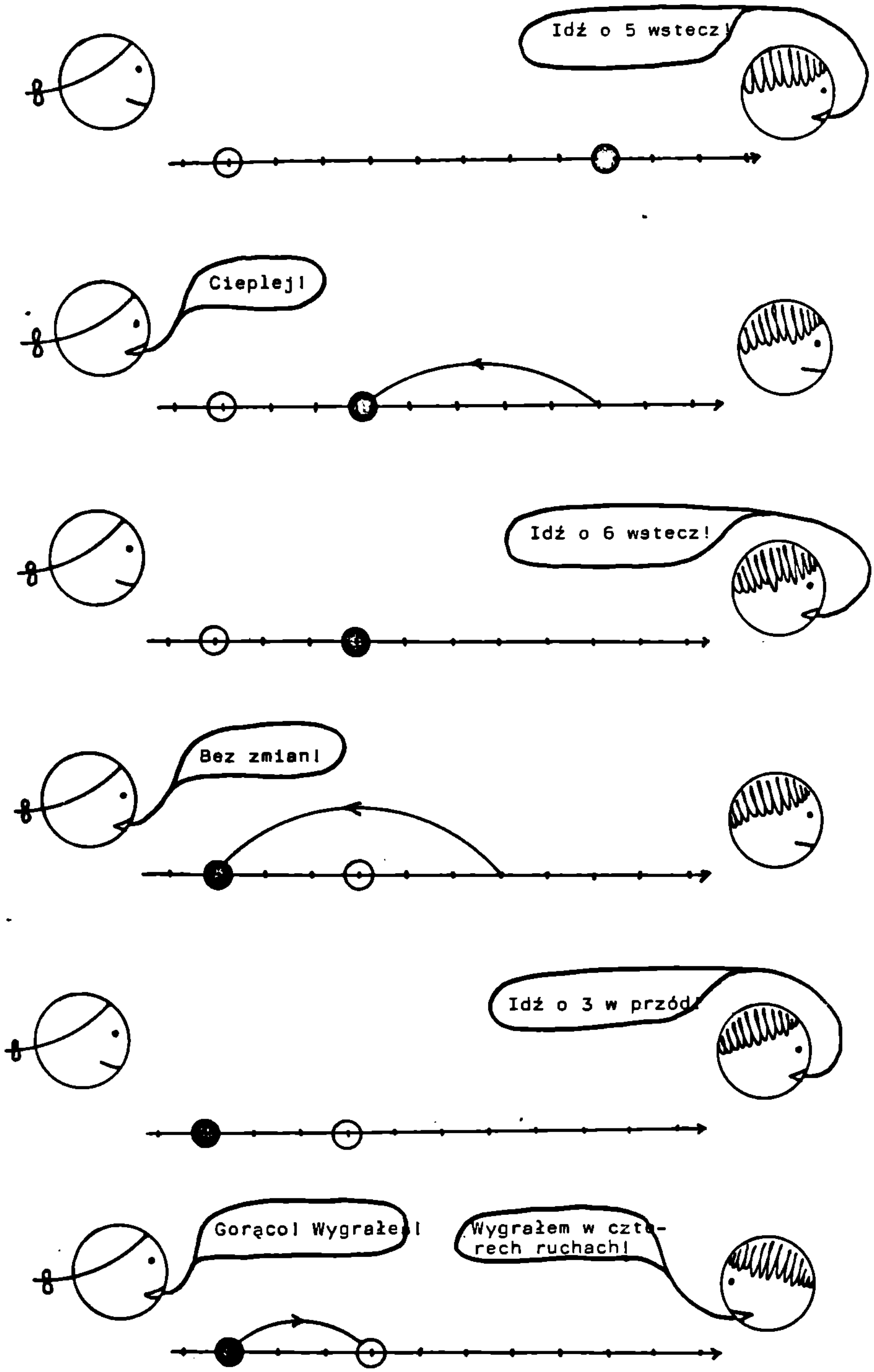
pokazuje, że szperacz przesunął się o 5 jednostek w przód.
Rysunek

pokazuje, że szperacz przesunął się o 3 jednostki wstecz.
Obserwujmy grę.









Tomkowi udało się wygrać w czterech ruchach, a Tobie jak pójdzie?

4) W wypowiedziach dzieci można wprowadzać różne doraźne umowy i oznaczenia.

Uczeń powinien jak najwcześniej przyzwyczajać się do występujących bardzo często w aktywności matematycznej na każdym poziomie czynności oznaczania, nazywania i schematycznego przedstawiania dla chwilowej potrzeby. Nie uczył tego podręcznik tradycyjny, w którym umowy takie były narzucane. I tutaj autentyczna aktywność uczniów w klasie może być w podręczniku naśladowana proponowaniem oznaczeń i nazw przez występujące w nim dzieci. Podane w tej formie będą one uczniom bliższe (zostały wprowadzone jakby przez nich samych), a przy tym będą zachętą do samodzielnego wprowadzania innych oznaczeń i nazw, gdy znowu okaże się to potrzebne.

A oto kilka takich "propozycji".

A. Jako racjonalizację zespołowego liczenia ziarnek maku w makówce, Dyzio proponuje:

"Mam pomysł! Ułatwimy sobie liczenie taką tabelkę i zwykłymi pionkami".

1000	100	10	1

Tomek szybko domyśla się sensu tej propozycji:

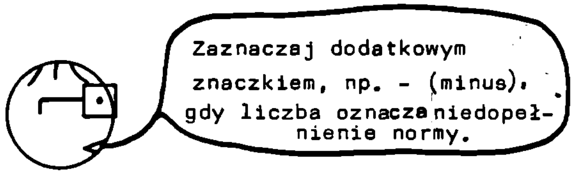
"Już wiem! Odliczę dziesięć ziarenek i położę pionek w rzędzie dziesiątek.
Znowu odliczę /.../
Pionki będę pamiętać, ile razy odliczyłem po dziesięć ziarenek".

B. Agnieszka zapisuje wyniki pracy dzieci przygotowujących kwiaty z papieru dla dekoracji pochodu. Norma, ustalona przez dzieci, wynosi 10 sztuk.

Oto lista Agnieszki i komentarze Adasia oraz Dyzia.

Uczeń	Zrobił kwiatów	W porównaniu z normą
Adaś	13	3
Robert	6	4
Agnieszka	15	5
Małgosia	13	3
Bogdan	7	3

Czy Adaś ma rację?
Ile punktów dostanie Agnieszka? Robert?



5) Dziecko może zapytać o wszystko.

W nauczaniu masowym, a więc przy ogromnym zróżnicowaniu uczniów pod względem sprawności intelektualnej w rozmaitych jej aspektach, sprawą pierwszorzędnej wagi jest nieskrępowanie w zadawaniu przez nich wszelkich pytań. Nie sprzyjają temu, niestety, silna wciąż tradycja nauczania autorytatywnego, powszechne posługiwanie się oceną szkolną jako głównym środkiem motywacji, wreszcie bardzo obszerne programy, stwarzające na lekcjach stałą atmosferę pośpiechu. Uczeń, który nie waha się podnieść ręki, gdy umie (lub sądzi, że umie) odpowiedzieć na postawione pytanie, nie przyzna się do tego, że czegoś nie słyszał, nie zrozumiał, nie wie, wątpi itp. A wiadomo, że w matematyce utrata jednego szczegółu może być powodem zupełnego niezrozumienia całości.

Oczywiście, swobodnych pytań uczniów i wyczerpujących odpowiedzi na nie nie zastąpi żaden podręcznik, niezależnie od formy podania tekstu. Jednakże posługiwanie się odpowiedziami wkładanymi w usta dzieci stwarza możliwość formułowania wszelkich pytań, także tych z pozoru naiwnych czy niemądrych, których wtrącanie w tekst odautorski czyniłoby wrażenie niepoważne, ze szkodą dla funkcji informacyjnej podręcznika. Dające się przewidzieć wątpliwości i trudności zrozumienia w sytuacjach na pozór oczywistych podręcznik może więc uprzedzić przez postawienie - za pośrednictwem fikcyjnego ucznia - odpowiedniego pytania, by je następnie za pomocą odpowiednich środków wyjaśnić. Nie ulega wątpliwości, że wyjaśnienia na pytanie, które "zostało mu z ust wyjęte" uczeń przeczyta z większym zainteresowaniem niż informację nie umotywowaną w taki sposób.

Duże znaczenie może mieć również wzorcowy niejako charakter tych pytań: mogą one stanowić zachętę dla uczniów do odważnego stawiania pytań zawsze, gdy coś wyda im się niejasne.

A oto kilka przykładów takich "naiwnych" pytań.

A. Mamy odczytać liczbę, która ma 7 tysięcy 13 setek i 81 dziesiątek. Zapisujemy ją w tabelce:

1000	100	10	1
7	13	81	0

Porządkujemy zapis tak, aby w każdej kolumnie była jedna cyfra:

1000	100	10	1
7 9	13 1	81 1	0 0

Agnieszka: A skąd te cyfry?

B. Dla obliczenia iloczynu 32 . 1,45 wykonano następujące operacje:

1. 1,45 . 100 = 145
2. 32 . 145 = 4640

Pozostaje wykonać operację

3. 4640 : 100

Tomek: Wystarczy przecinek przesunąć o 2 miejsca w lewo. Ale gdzie jest przecinek?

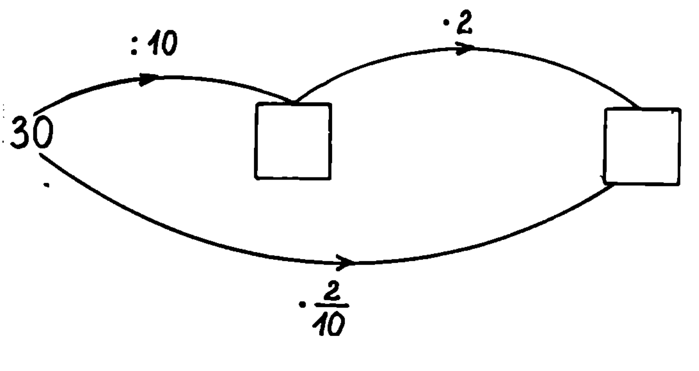
6) W wypowiedziach (lub zwerbalizowanych myślach) dziecka naturalne są przypomnienia wiadomości aktualnie potrzebnych.

W podręczniku tradycyjnym bardzo rzadko występowały powtórzenia umów, reguł, zasad itp., często niezbędne dla pełnego rozumienia tekstu. W celu odtworzenia ich uczeń musiał (najczęściej na wyraźne polecenie nauczyciela) odszukać te wiadomości w innym miejscu książki. Repetycje byłyby w podręczniku o strukturze książki naukowej, nie naśladującej jednakże procesu dydaktycznego, czymś obcym i sztucznym. W podręczniku, który ma być przewodnikiem ucznia w jego pracy, repetycje rzeczy wyjątkowo ważnych lub aktualnie potrzebnych będą w pełni zgodne z jego strukturą i funkcjami. Szczególnie naturalny charakter będą miały powtórzenia w formie przypominania sobie odpowiednich wiadomości ogólnych lub przykładów przez ucznia-obserwatora.

Oto kilka przykładów.

A. Dyzio: Jedna ósma kwadratu może mieć różne kształty.
Agnieszka: Ale zawsze musi być jedną z ośmiu r ó w n y c h części.

B. Jak znaleźliśmy $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$ i $\frac{4}{10}$ z 30?
Tomek: Najpierw p o d z i e l i l i ś m y 30 przez 10 ...
Agnieszka: ... a potem wynik pomnożyliśmy przez 1, przez 2 i przez 4.
Dyzio: W klasie III zapisywaliśmy to tak:



Wymieniliśmy te funkcje dialogowej formy tekstu, które aktualnie wydają nam się najistotniejsze i które zostały świadomie wykorzystane w eksperymentalnym podręczniku /T u r n a u 1978/. Należy jednak sądzić, że dalszy rozwój tej formy ekspresji ujawni jeszcze dalsze, być może ważniejsze jej zastosowania.

7.5. Podsumowanie

W wyniku przeprowadzonej analizy podręczników wyróżnić można dwa zasadnicze typy:

1) podręcznik tradycyjny, zbliżony charakterem i budową do akademickiego (oczywiście z odpowiednim dostosowaniem poziomu), w którym dominuje przekaz gotowej wiedzy i ćwiczenia dla jej utrwalenia,

2) tekst sterujący pracą ucznia, nastawiony na aktywizację czytelnika za pomocą proponowanych mu zadań i problemów, gdzie przekaz został zredukowany do niezbędnego minimum.

Nasuwa się wniosek, że ten drugi typ podręcznika powinien w przyszłości wyprzeć podręcznik tradycyjny z klas młodszych, w szczególności z pierwszej klasy ponadpoczątkowej.

Nowe podręczniki matematyki operują wieloma nie stosowanymi dawniej technikami druku, bogatszą szatą graficzną, itp. Inny jest też ich język: bliższy potocznego, mniej formalny, a za to bardziej komunikatywny. Odchodzi się już od niedawnej mody na szerokie wprowadzanie symboliki matematycznej od pierwszych lat nauczania. Stosowanie różnych środków w podręcznikach nie wyszło jednak jeszcze ze stadium prób, a rozmaite, nie zawsze najlepsze pomysły, reklamowane przez wydawnictwa, wchodzą do praktyki nauczania, nieraz ze szkodą dla wyników.

Jednym z nowych środków jest zaproponowana przez nas dialogowa forma tekstu. Jednak dopiero badania eksperymentalne pokażą, czy posiada ona oczekiwane zalety.

8. ZAKOŃCZENIE

Dokonana analiza wybranych podręczników w niektórych ich aspektach, która doprowadziła do wyodrębnienia i opisu ich wad i zalet ze względu na przyjętą za naczelną funkcję matematycznej aktywizacji czytelnika, pozwala na sformułowanie niektórych zasad konstrukcji podręcznika aktywizującego dla pierwszej klasy ponadpoczątkowej. Częściowo dokonano tego w formie bezpośrednich wniosków, w ramach poszczególnych rozdziałów. Wnioski te zostaną zebrane i uzupełnione.

8.1. Okres około dwudziestu lat wdrażania nowych koncepcji nauczania matematyki na wszystkich poziomach pozwolił na jasne uświadomienie nie docenianego dawniej faktu, że łatwo jest zmienić treść nauczania, lecz niezmiernie trudno zmienić nauczanie jako takie. Zbyt powszechnie nauczanie, zwłaszcza na niższym szczeblu, jest identyfikowane z wyuczaniem. Zbyt wiele (poza tradycją) jest czynników sprzyjających takiemu rozumieniu nauczania (m.in. w strukturze i bazie materialnej systemu oświaty), by można było dokonać tu szybkiej i na szeroką skalę reformy, stosując jedynie, możliwe zresztą w ograniczonym tylko zakresie, dokształcanie nauczycieli i zachęcanie ich do radykalnej zmiany stosowanego dotąd przez nich (i wobec nich!) postępowania dydaktycznego. Konieczne jest zastosowanie środka, który nie tylko ułatwiałby nauczanie-aktywizację, ale też uniemożliwiał nauczanie-wyuczanie. Wydaje się, że wobec powszechnego, silnego wzorowania się nauczycieli w organizowaniu nauczania na podręczniku uczniowskim, możliwe jest częściowe przynajmniej spełnienie tego postulatu przez odpowiednią konstrukcję podręcznika.

Najprostszym sposobem takiej blokady wyuczania będzie wyeliminowanie z podręcznika lub znaczne zredukowanie materiału nadającego się do wyuczania. Materiał taki łatwo wskazać: zwięzłe sformułowania reguł (definicji, twierdzeń, algorytmów), wzory wyrażone językiem symbolicznym, sekwencje zadań rozwiązywanych standardowo (postępowaniem dającym się ująć w algorytm lub prawie algorytm), stereotypowe rysunki. Nie znaczy to, że zwięzłe sformułowania definicji i twierdzeń, symboliczne zapisy, metody algorytmiczne itd. mają być wyeliminowane z nauczania: byłoby to pozbawianiem ucznia ważnych i wygodnych dla przyswojenia, przekazu i stosowania form wiedzy matematycznej. Chodzi jedynie o podanie ich w taki sposób i w takim miejscu, aby nie nadawały się do wyuczania, albo ich wyuczanie nie mogło już zaszkodzić aktywizacji matematycznej ucznia. Można w tym celu stosować równocześnie różne zabiegi odnoszące się do struktury podręcznika, jego tekstu i środków graficznych.

1) Reguły (definicje, twierdzenia, algorytmy) powinny być sformułowane możliwie późno (ze względu na moment nieformalnego wprowadzenia pojęć, do których się odnoszą), a w każdym razie po długiej sekwencji zadań, rozwiązywanych pojęciowo, a więc bez ich pomocy. Na przykład algorytmiczne reguły działań na ułamkach powinny być wprowadzone dopiero po długiej sekwencji zadań wymagających wykonywania tych działań, rozwiązywanych przez uczniów przy wykorzystaniu tylko pojęcia ułamka.

2) Reguły powinny być formułowane w taki sposób, aby na plan pierwszy wydobyć ich treść (a więc przede wszystkim oparte na regule postępowanie), nie zaś opisujący je tekst. Można to uzyskać stosując m.in.:

- przykład paradygmatyczny zamiast ogólnego sformułowania,
- włożenie reguły (z ewentualnym rozbiciem jej na części) "w usta"

fikcyjnych postaci książki, wypowiadających ją w trakcie jej odkrywania, a więc w związku z konkretnym przykładem,

- posługiwanie się w sformułowaniu reguł językiem możliwie przystępnym, bliskim potocznemu (co nie pozostaje w sprzeczności z poprawnością i ścisłością sformułowania).

3) Reguła nie powinna występować sama jako wyodrębniona graficznie synteza. Regułom powinny zawsze towarzyszyć przykłady ich stosowania, traktowane jako konieczne ich uzupełnienie.

4) Wzory symboliczne (prawa działań, wzory geometryczne itp.) powinny być wprowadzane po sekwencji zadań pozwalających na operatywne zrozumienie zawartych w tych wzorach reguł.

5) Zadania nie powinny być układane w sekwencje zadań rozwiązywanych przy zastosowaniu tej samej reguły (wzoru, algorytmu itp.). Przeciwnie, należy możliwie często umieszczać obok siebie zadania z pozoru podobne lecz wymagające zastosowania zupełnie różnych sposobów postępowania.

6) Przykładowe rozwiązania zadań powinny wydobywać na plan pierwszy nie określony sposób rozwiązania, ale postępowanie heurystyczne; w szczególności powinny ujawniać charakterystyczne i łatwe do popełnienia błędy oraz możliwe podejścia i drogi rozwiązania.

8.2. Eliminacja formalnych, zewnętrznych cech podręcznika świadczących o jego matematycznym charakterze bez dalszych głębokich zmian w jego strukturze prowadziłaby do zastąpienia nauczania matematyki nauczaniem rozwiązywania różnorodnych zadań praktycznych. Tymczasem właściwym celem tego zabiegu jest zastąpienie wyuczania gotowej matematyki rozwijaniem matematycznej aktywności.

Podręcznik ma być przewodnikiem ucznia, pomagającym mu w różnych sytuacjach, w jakich zostanie postawiony, trafić na ścieżkę wiodącą ku matematyce. Abstrakcje i uogólnienia będące podstawą dla przyszłych pojęć i twierdzeń matematycznych muszą być zawsze głównym celem aktywności ucznia stymulowanej przez podręcznik, któremu służą wszelkie zastosowane środki. Sytuacje konkretne i zadania o treści praktycznej powinny więc być zawsze punktem wyjścia i pretekstem do takich abstrakcji i uogólnień (dokonywanych niekoniecznie explicite, ale także w niezwerbalizowanej myśli ucznia) zorientowanych na określone pojęcia i twierdzenia matematyczne.

Środki użyte dla wprowadzenia pojęcia mogą być propedeutyczną, prematematyczną wersją wybranej definicji tego pojęcia. Formalizacja tak wprowadzonego pojęcia na wyższym szczeblu nauczania polega wówczas na powtórzeniu jego opisu w konwencjonalnym języku matematyki. Sposób wprowadzenia pojęcia niekoniecznie musi jednak być skierowany na określoną teorię matematyczną. Nauczanie genetyczne, tak jak rozumie je wielu współczesnych dydaktyków matematyki[21], dopuszcza wprowadzenie pojęć naiwnych, tworzonych na

21 Zob. np. /W i t t m a n 1974/.

drodze naturalnej abstrakcji, a więc podobnie jak pojęcia te były tworzone po raz pierwszy w historii, mimo że ich aktualna geneza może się od historycznej znacznie nawet różnić. O poprawności tak wprowadzonego pojęcia decyduje więc nie zgodność jego propedeutycznej definicji z jakimś systemem formalnym, ale zgodność jego zakresu z tym, jaki posiada odpowiednie pojęcie w matematyce. Konieczna jest przy tym duża ostrożność i rozwaga, gdyż niewłaściwie wprowadzone i utrwalone pojęcie naiwne może stanowić znaczną przeszkodę na etapie formalizacji i systematyzacji wiedzy matematycznej ucznia.

Twierdzenia, a więc ogólne własności pojęć, ich relacje, związki między operacjami, powinny być przez czytelnika odkrywane w toku jego własnej aktywności, lub współodkrywane w toku lektury, nie zaś poznawane jako gotowe elementy wiedzy. Źródło, z którego wypływa przekonanie o ogólnej prawdziwości twierdzenia, nie musi mieć na tym poziomie charakteru zbliżonego do matematycznego dowodu. Daleko ważniejsze jest, by przekonanie to było głębokie i pełne. Wystarczy, aby czytelnik dostrzegł na dobrze dobranym przykładzie paradygmatycznym, że "tak musi być zawsze". Jednak najmniej pożądane jest przekonanie wywodzęce się z indukcji enumeracyjnej, (niezupełnej), a w każdym razie podręcznik nie powinien dostarczać tego rodzaju sugestii.

8.3. Wobec dylematu: podręcznik tradycyjny czy podręcznik o charakterze tekstu sterującego, opowiadam się jednoznacznie za tym drugim rozwiązaniem. Przemawiają za tym zarówno ogólne tendencje w nauczaniu matematyki, jak i sytuacja panująca we współczesnej szkole w Polsce.

Jeżeli nauczanie ma być organizowaniem uczenia się, zaś uczenie się - aktywnością typu matematycznego, to podręcznik powinien dostarczać materiału dla tej aktywności, nie zaś gotową wiedzę do opanowania i stosowania. Wynika stąd, że w podręczniku dominować powinny zadania i sytuacje problemowe, a nie informacje i instrukcje. Jednak tak pojęte nowoczesne nauczanie może być realizowane z pomocą podręcznika - zbioru zadań i problemów jedynie przy spełnieniu dwóch warunków: 1° Kierowania nim przez nauczyciela świadomego celów i dysponującego potrzebnymi umiejętnościami pedagogicznymi, 2° warunków organizacyjnych szkoły, umożliwiających sterowanie pracą zespołu uczniów z uwzględnieniem różnic indywidualnych między nimi. Warunki te na ogół nie są obecnie spełnione. Dlatego podręcznik powinien prócz dostarczenia materiału dla aktywności stanowić także dla ucznia przewodnik, pokazujący mu w tym materiale wiodące do celu ścieżki, i poradnik przestrzegający przed pułapkami, pomagający pokonać trudności, rozwiać wątpliwości, wyjaśnić rzeczy niezrozumiałe, itp. Wówczas nauczyciel będzie mógł, niezależnie od swych kompetencji i warunków nauczania, zorganizować efektywną samodzielną pracę uczniów, zawierzając sterowanie nią podręcznikowi-przewodnikowi. Wówczas nauczanie wzorowane dosłownie na podręcznikowym ujęciu może być nauczaniem nowoczesnym, aktywizującym. Tego typu podręcznik może więc skutecznie przyczynić się do zmiany stylu nauczania matematyki, tej najtrudniejszej z reform dydaktycznych.

8.4. Język podręcznika powinien być maksymalnie komunikatywny, jak najbliższy codziennego języka dziecka. Postulat ten nie może być zrealizowany bez pogodzenia się z pewną formalną niepoprawnością tego języka. Tradycyjne stanowisko, że podręcznik powinien być dla czytelnika-ucznia wzorcem poprawnego konwencjonalnego języka matematyki, w świetle wieloletnich obserwacji i wyników przeprowadzonych badań w różnych krajach, jest w podręczniku dla omawianego poziomu nie do przyjęcia. Język taki zawiera bowiem wiele nieznanych językowi potocznemu środków wyrazu (przede wszystkim zmienne) i zwrotów, co powoduje, że jest niekomunikatywny dla znacznej części uczniów. Zamiast pomocą w przyswajaniu abstrakcyjnych pojęć i ich własności staje się on przeszkodą, blokując często prawdziwe kształtowanie się pojęcia, zastępowane wyuczeniem się standardowego tekstu. Taki sposób korzystania z tego wzorca niewiele wpływa na spontaniczny język ucznia w kontekście matematycznym.

Formą tekstu, która znacznie ułatwia realizację powyższego postulatu, mającą przy tym szereg innych zalet, jest forma dialogowa. Wypowiadanie się w konwencji dialogu, którego osobami są dzieci - rówieśnicy czytelników, uwalnia autora od poważnego ograniczenia, jakim są formalne rygory tekstu. Umożliwia mu użycie skrótów i obrazowych wyrażeń potocznych zamiast "naukowych". Uwalnia też od innego rygoru - jednoznacznego przekazu rzetelnej wiedzy, wyłączającego ze środków dydaktycznych użytych w podręczniku kapitalnych i niezastąpionych sytuacji, jakimi są charakterystyczne bądź często powtarzające się u uczniów błędy. Forma dialogu umożliwia "włożenie w usta" osób dialogu także błędów, których wykrycie poleca się czytelnikowi. Błędna hipoteza może stanowić niekiedy nauturalną i przekonującą motywację dla stawianych następnie problemów teoretycznych, dla których trudno o motywację innego typu. Motywacja taka jest jednak w pełni skuteczna tylko wówczas, gdy odkrycie błędności hipotezy stanowi dla czytelnika zaskoczenie. Osiągnięcie tego w tekście konwencjonalnym jest trudne, w dialogowym - stosunkowo łatwe.

Jeżeli nauczanie ma z obowiązku wyuczania pod przymusem stać się popularyzacją aktywności intelektualnej, konieczne jest wykorzystanie w nim wszelkich wypróbowanych środków popularyzacji, wśród nich także lekkich i atrakcyjnych form tekstu naukowego.

Lektura konwencjonalnego tekstu matematycznego może być traktowana jako specyficzna forma aktywności matematycznej. Jest aktywnością, której, jako typowej dla matematyki, nie nabywa się wraz z umiejętnością czytania, której opanowanie wymaga nastawionego na nią procesu dydaktycznego. Umiejętność czytania tekstu matematycznego powinno się kształcić stopniowo, poczynając od wprowadzenia istotnych i nowych dla ucznia elementów języka matematyki w sposób równie staranny, jak wprowadzać należy pojęcia matematyczne, ucząc interpretacji takiego tekstu z wykorzystaniem różnych środków dydaktycznych, także typowych błędów, stosując właściwą dla wieku uczniów motywację. W procesie tym ważne zadanie ma do spełnienia podręcznik uczniowski, zarówno jako źródło tekstów, jak też dla planowego jego zorganizowania. Jeżeli nawet nauka lektury matematycznej ma się rozpocząć już w pierwszej klasie ponadpoczątkowej (wybór tego momentu wymaga badań), to w każdym razie język podręcznika matematyki dla tej klasy nie może zakładać posiadania przez czytelnika tej umiejętności.

8.5. Struktura podręcznika powinna odpowiadać spiralnemu tokowi nauczania. Mówiąc najogólniej, spiralny tok nauczania oznacza wprowadzanie wiedzy zawsze na takim poziomie ogólności i formalizacji, przy pomocy takich środków upoglądowienia i motywacji, by możliwe było jej operatywne i głębokie przyswojenie. Na odpowiednio wyższym szczeblu nauczania, a więc w nauczaniu uczniów bardziej zaawansowanych w rozwoju psychicznym, posiadających szerszą wiedzę i większe doświadczenie intelektualne, te same pojęcia i fakty zjawiają się ponownie i opracowywane są znowu na adekwatnym, a więc wyższym, poziomie ogólności i formalizacji, przy użyciu innych środków. Nawroty takie mogą powtarzać się w okresie kształcenia parokrotnie. Za spiralnym tokiem nauczania, a przeciwko tokowi liniowemu, gdzie nie wraca się nigdy do raz opracowanych zagadnień, wypowiada się obecnie bardzo wielu pedagogów i dydaktyków matematyki.

Okresy nawrotów "spirali" bywają różne dla różnych grup pojęć, na ogół jednak przekraczają jeden rok. Dlatego podręcznik dla jednej klasy nie może realizować spiralnego toku nauczania w sensie dosłownym. (Mogłaby to czynić natomiast seria podręczników dla kilku klas). Konieczne jednak i możliwe jest uwzględnienie go w podręczniku. Znaczy to między innymi, że spełnione powinny być dwie zasady:

1) Pojęcia i twierdzenia wprowadzone uprzednio już w klasie niższej nie mogą być tylko przypomniane, ale powinny być opracowane na wyższym poziomie ogólności i formalizacji, z zastosowaniem do nowego kręgu zagadnień.

2) Pojęcia i twierdzenia nowo wprowadzane nie powinny być opracowywane "do końca", a więc w ostatecznym uznanym za matematycznie poprawne sformułowaniu, z ukazaniem (a nawet wyćwiczeniem) wszystkich uznanych za najważniejsze zastosowań. Przeciwnie, opracowanie takie powinno być zawsze otwarte w kierunku dalszych formalizacji i uogólnień oraz nowych zastosowań.

8.6. Warstwa motywacyjna podręcznika, a więc to wszystko, co nie posiada znaczenia poznawczego (w każdym razie w zakresie poznania matematycznego) a tylko motywujące lekturę i sterowaną lub stymulowaną nią aktywność, odgrywa w podręczniku dla pierwszej klasy ponadpoczątkowej rolę bardzo istotną, często decydującą o efektywności stosowania tego podręcznika w pracy z uczniami. Dlatego dobór środków motywacji powinien być bardzo staranny i sprawdzony eksperymentalnie. Na podstawie dotychczasowych obserwacji przyjąć można, że środki te powinny:

1° wykorzystywać naturalne, aktualne zainteresowania dzieci, nie zaś zainteresowania pożądane ze względów ogólnowychowawczych lub innych,

2° uwzględniać obserwowane u niektórych dzieci zainteresowanie sytuacjami czysto abstrakcyjnymi (wbrew poglądowi, że dzieci interesują się tylko zagadnieniami praktycznymi),

3° obejmować gry, zabawy i łamigłówki, wykorzystując występującą często u dzieci predylekcję do tego typu aktywności umysłowej,

4° korzystać z występującego u wielu dzieci poczucia zadowolenia estetycznego wobec przejawów regularności w samej matematyce lub graficznych sposobach jej wyrażania.

Sformułowane tu zasady traktujemy jako teoretycznie umotywowane hipotezy, których ostateczna weryfikacja i - jak można sądzić - modyfikacja nie może się obejść bez szeroko zakrojonych badań eksperymentalnych. Sytuację tę bardzo przy tym komplikuje fakt, że pomiędzy hipotezami a ich weryfikacją eksperymentalną znaleźć się musi podręcznik; efekty nauczania zależą od dobrej realizacji w jego konstrukcji sformułowanych zasad nie mniej niż od słuszności samych zasad. Będący dopełnieniem tej pracy podręcznik dla klasy IV /T u r n a u 1978/ jest tu pierwszą próbą.

THE ROLE OF A TEXTBOOK IN DEVELOPING IDEAS AND REASONINGS IN STUDENTS OF THE FIRST POST-ELEMENTARY FORM (SUMMARY)

The book aims at isolating textbook-type means, i.e. presentable in print, which would motivate and activate mathematically the 10-12-years-old reader and result in developing proper mathematical ideas and reasonings in his mind. For this purpose school textbooks from various countries have been used and investigated in view of the most important mathematical activities.

In chapter I the teaching level called "first post-elementary form" is defined and its specificity discussed. Also it is explained why common criteria of evaluation of a textbook cannot be used for its scientific analysis.

Chapter II is devoted to a temptative description of typical mathematical activities occurring in the teaching process offered to 10-12-years-old students. Basing on facts established in genetic psychology, we explain the idea of cognitive activity relative to the learning of mathematics. We also discuss the investigative activity of students of this level, characteristic for mathematics as a learning subject. How to provide the student, by means of a textbook, with models for an activity that would develop his open attitude to problems, introduce him in the process of mathematisation, etc.; these are the questions which have been tried to be answerd here and in the next chapters.

Chapter III answers the following problems: in what consists and how proceeds the formation of mathematical ideas in lower forms, how they can be introduced in a textbook. In fact, a student is not able to use a general definition; how then, only using examples, can an idea be formed properly?

In chapter IV the nature of premathematical reasoning is explained, which is a substitute of the proof uniquely accessible for students of the discussed level. Then types of argument in various textbooks are presented. Premathematical reasoning of a child is unavoidably accompanied by concrete manipulation: is a textbook an adequate means for transmission of such a reasoning?

Chapter V concerns the problem, when and how we should teach children the mathematical language of adults and what the role of a textbook is here. Only one thing is sure: this language is unintelligible for most children and should be treated like a foreign language.

In chapter VI, penetrating deeply into the philosophy of education, the question of motivation means is discussed, which is essential for the efficacy of all other means applied in a textbook. Isn't it better to engage childrens' real interests and motivate them to mathematics, instead of introducing economic problems with a doubtful impact on their development?

Chapter VII discusses the question, essential in view of the contemporary knowledge on the teaching of mathematics, of the didactic structure of a textbook as well as of the language used in it. Much attention has been devoted to the functions of quite a new form of that language - the dialogue.

In the final chapter VIII the conclusions drawn from the investigation have been gathered and formulated as construction principles of a mathematical textbook for the first post-elementary form. (Annexes include selected passages of the analysed textbooks).

РОЛЬ УЧЕБНИКА В ФОРМИРОВАНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ И СУЖДЕНИЙ У УЧАЩИХСЯ ПЕРВОГО КЛАССА СЛЕДУЮЩЕГО ЗА НАЧАЛЬНЫМ ЭТАПОМ ОБУЧЕНИЯ

Резюме

Работа преследует цель выявить печатные учебные пособия, способные стимулировать мотивацию и повышать активность (имеется в виду математическая активность) читателей в возрасте 10 – 12 лет, способствовать правильному формированию в их сознании математических понятий и способности мыслить математическими категориями. С этой целью были исследованы школьные учебники, изданные в разных странах, с точки зрения важнейших форм математической активности.

Во вступительной главе I содержится характеристика обучения в первом классе непосредственно следующим за периодом начального обучения и выявляется его специфика. В той же главе автор доказывает, что обиходные критерии оценки учебника математики непригодны для его научного анализа.

В главе II сделана попытка описать типичные виды математической активности учащихся в возрасте 10 – 12 лет в процессе школьного обучения. На основании данных возрастной психологии уточняется понятие познавательной активности по отношению к усвоению математики и рассматривается вопрос о характерной для данной учебной дисциплины исследовательской активности ученика на изучаемом уровне. Каким образом посредством учебника лучше всего привить учащимся образцы активности, формирующие творческое отношение к проблемам, вовлекающим в процесс математизации и т.п., – вот вопрос, на который автор пытается ответить в последующих главах.

В главе III содержится ответ на вопрос, в чем заключается и как протекает процесс формирования математических понятий в младших классах и каким образом понятия эти должны вводиться в учебнике. На данном этапе учащиеся еще не способны оперировать общими дефинициями, и в связи с этим возникает вопрос, каким образом, оперируя одними лишь примерами, можно правильно формировать понятия.

В главе IУ автор определяет сущность прематематического рассуждения, являющегося суррогатом доказательства, единственно доступного на данном уровне, а затем демонстрирует, как в разных учебниках доказываются теоремы. Прематематические рассуждения ребенка неизбежно сопровождаются конкретной манипуляцией, и поэтому возникает сомнение, является ли учебник оптимальным средством передачи образцов таких рассуждений.

В главе У рассматривается вопрос, когда и как обучать детей пониманию математического языка взрослых и какую роль в этом деле может играть учебник. Несомненно лишь одно: язык этот большинству детей непонятен и обучение ему во многом сходно с обучением иностранным языкам.

В главе VI рассматривается чрезвычайно существенный с точки зрения эффективности всех других применяемых в учебнике средств вопрос о факторах психической мотивации, стимулирующих познавательный процесс. Не лучше ли использовать в учебнике для стимулирования мотивации изучения математики подлинные увлечения детей, чем вводить в учебник экономическую тематику, познавательное и воспитательное воздействие которой сомнительно?

В главе VII автор рассматривает важнейший с точки зрения современной методики преподавания математики вопрос о дидактической структуре учебника и о языке, каким он оперирует. В частности уделяется внимание совершенно новой форме этого языка - диалогу. Комиксы являются очень популярной среди молодежи формой приключенческой, авантюрной, фантастической, любовной и даже научно-популярной литературы. Интересно, в какой мере оправданной была бы замена текста традиционного учебника, отталкивающего мертвечиной научных формулировок, текстом, напоминающим по форме комиксы.

Заключение VIII содержит выводы и рекомендации, касающиеся конструкции учебника математики для обсуждаемого уровня обучения.

В приложении приводятся отрывки из учебников, послуживших материалом для анализа.

Перевод: Данута Гензель

ANEKSY

Aneks 1

E r d é s z E. et. a.: Munkalapok az ideiglenes matematika-tanterv 3. osztályos anyagának tanulásához. Tankönyvkiadó 1976.

1. Zmiany temperatury

a) Strzałki oznaczają zmianę temperatury .

$\boxed{\text{- 3 stopnie}} \xrightarrow{\text{wzrost o 5 stopni}} \boxed{\quad}$ $\boxed{\text{-4 st.}} \xrightarrow{\text{spadek o 2st.}} \boxed{\quad}$

$\boxed{\text{-1 st.}} \xrightarrow{\text{wzrost o 4 st.}} \boxed{\quad}$ $\boxed{\text{0 st.}} \xrightarrow{\text{o 6 stopni}} \boxed{\quad}$

$\boxed{\quad} \xrightarrow{\text{spadek o 7 stopni}} \boxed{\text{-11 st.}}$ $\boxed{\quad} \xrightarrow{\text{spadek o 5 st.}} \boxed{\text{-2 st.}}$

2. Dług i majątek

○ To jest 1 forint

□ To jest rachunek na 1 forint. Masz dług 1 forinta.

	Tu napisz, ile jest	Tak też można napisać
○ ○ ○	3 ft	$^{+}3$ ft
○ ○		
○		
□	1 ft długu	$^{-}1$ ft
□ □		
□ □ □		

b) Ułóż rozmaicie! Narysuj!

$^{-}2$ ft	●●□□□□		
$^{-}1$ ft		□ □ ○	
$^{-}3$ ft	●		
0 ft	●		
$^{+}1$ ft			
$^{+}2$ ft			
$^{+}3$ ft			

3. Porównywanie liczb

a) Kiedy jest cieplej? Pokaż to strzałką biegnącą tam, gdzie cieplej!

10° 9°

$^{-}10^{\circ}$ 25°

13°

$^{-}17^{\circ}$

$^{-}8^{\circ}$

4°

$^{-}9^{\circ}$

0°

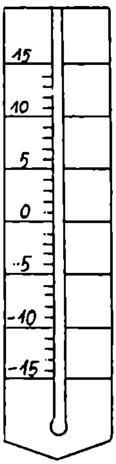
b) Największą liczbę obwiedź kółkiem, najmniejszą przekreśl!

123 $\quad ^{-}456$ $\quad 567$ $\quad 909$ $\quad 9909$ $\quad ^{-}1000$ $\quad 2000$ $\quad 345$

4. Dodawanie

Napisz regułę[22]! Odczytaj z termometru!

$^{-}1$	2	10	$^{-}10$	$^{-}5$	$^{-}4$	$^{-}6$						$^{-}3$	
4	7						2	5	$^{-}2$	$^{-}5$	$^{-}10$		$^{-}3$



2	5	10	1	$^{-}1$	$^{-}10$	$^{-}5$	$^{-}4$					$^{-}3$	
								2	$^{-}2$	$^{-}5$	5		$^{-}3$

---

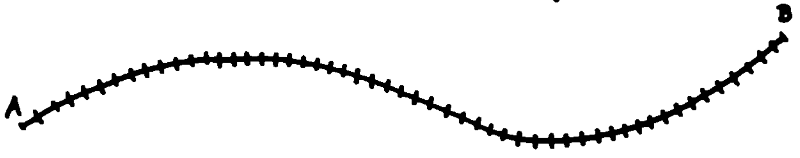
[22] Chodzi tu o zależność funkcyjną, której podlegają pierwsze dwie pary. Tego rodzaju zadanie występuje w "Munkalapok" wielokrotnie.

Aneks 2

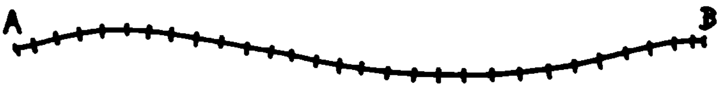
C z e r A. et a.: Munkalapok az ideiglenes matematika-tanterv 5 osztályos anyagának tanulásához. Tankönyvkiadó 1974.

Strona 45

1. Z A do B jadą dwa auta. Auto pierwsze robi 4 odcinki na godzinę, drugie 6 odcinków na godzinę. Zaznacz na rysunku, gdzie będą te auta po godzinie jazdy bez zatrzymywania. Ile czasu będzie trwała ich podróż?



2. Z A i B ruszyło jednocześnie dwu piechurów naprzeciw siebie. Piechur, który wyszedł z A, robi 9 odstępów na godzinę, drugi robi 7 odstępów na godzinę. Po ilu godzinach się spotkają?



3. /zadanie podobne do 2/

Strona 4

1. Wpisz w okienkach takie dzielenia, aby wszystkie nierówności były prawdziwe.

a) $\boxed{36:18} < \boxed{} < \boxed{} < \boxed{} < \boxed{} < \boxed{36:2}$

b) $\boxed{36:2} > \boxed{} > \boxed{} > \boxed{} > \boxed{} > \boxed{2:2}$

2. Wypełnij tabelkę według reguły, którą rozpoznałeś.

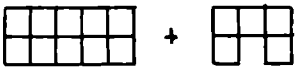
a)

□	4	2	5		10			3
△	6	8	5	10		0	7	

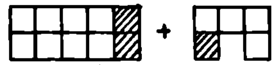
Reguła ....

/b) i c) podobne/

3. Wzór:



dzielimy na
5 części

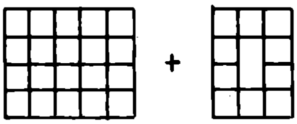


Liczbowo: 1 część =

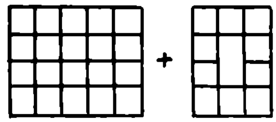
....

Na podstawie wzorów wykonaj dzielenia:

a)



dzielimy na
5 części

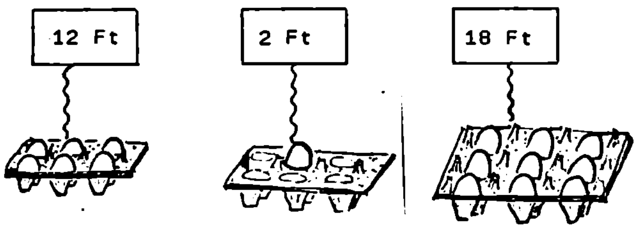


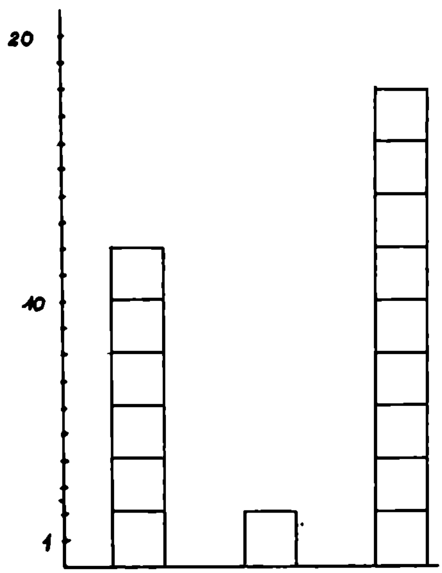
Liczbowo ....
/b) i c) podobne/

Strona 47

1.Poglądowe wnioskowanie z proporcjonalności

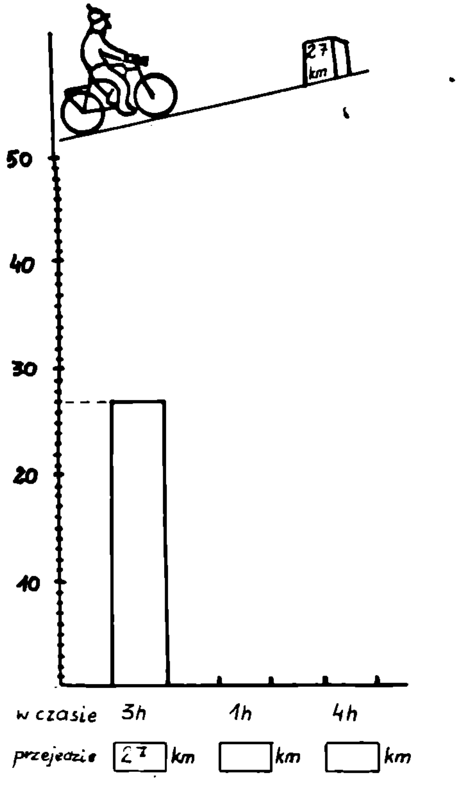
Wzór





6 szt jajek Kosztuje 12 Ft | 1 jajko 12:6 = 2 Ft | 9 jajek 9.2 = 18 Ft

2.

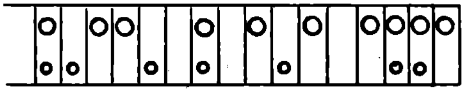


Aneks 3

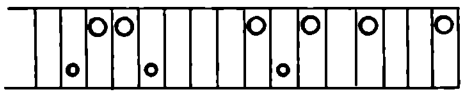
P a p y : Mathématique moderne. Didier 1964, s.316-319.

Na naszym abaku armia żetonów czerwonych i armia żetonów niebieskich chcą stoczyć walkę na śmierć i życie, aż do całkowitej eksterminacji jednej armii.

Umieśćmy walczących na abaku zgodnie z regułą: w każdej przegródce co najmniej jeden żeton danego koloru.

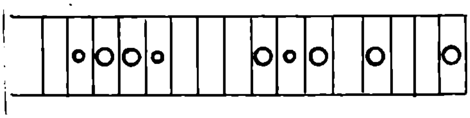


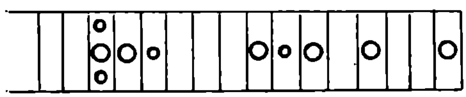
Jeżeli żeton czerwony i niebieski znajdą się w jednej przegródce, giną na miejscu od wzajemnie zadanych ciosów.

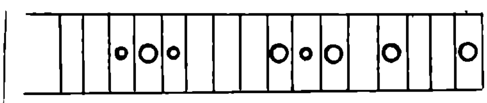


Wiemy, że żeton danego koloru może być zastąpiony d w o m a ż e t o n a m i t e g o s a m e g o k o l o r u, umieszczonymi w sąsiedniej na prawo przegródce.

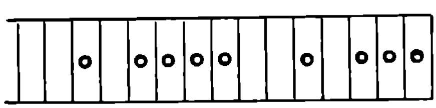
Te rysunki obrazują dalszy przebieg walki.







/itd. (w książce "film" jest kompletny)/



Armia niebieska zwyciężyła!

Gdyby dodać liczbę określoną przez pozostałych przy życiu niebieskich do liczby określonej przez początkowy stan armii czerwonej, otrzymalibyśmy początkową liczbę niebieskich.

Powiemy, że opisana powyżej bitwa jest d o d a w a n i e m l i c z b o p r z e c i w n y c h z n a k a c h

Wchodząc na pole walki żetony niebieskie określiły liczbę[23]

IIOO.IOIO.OIOO.OIIO

Dla dodania, że ta liczba jest przedstawiona w kolorze niebieskim, piszemy

- IIOO.IOIO.OIOO.OIIO

Taką liczbę nazywamy liczbą u j e m n ą .

Żetony czerwone określiły na początku liczbę[24]

IOII.OOIO.IOIO.IIII

Dla zaznaczenia, że ta liczba jest przedstawiona w kolorze czerwonym, piszemy

+ IOII.OOIO.IOIO.IIII

lub krócej

IOII.OOIO.IOIO.IIII

Takie liczby nazywamy dodatnimi.

Zero jest jedyną liczbą, dla której jest obojętne, czy będzie przedstawiona za pomocą pionków czerwonych czy niebieskich.

O = -O = +O

Z e r o j e s t j e d y n ą l i c z b ą, k t ó r a j e s t z a r a z e m d o d a t n i a i u j e m n a.

W y n i k opisanej powyżej bitwy jest liczbą (niebieską), którą zapiszemy

- I.OIII.IOOI.OIII

i jest to s u m a liczb

- IIOO.IOIO.OIOO.OIIO i + IOII.OOIO.IOIO.IIII

Napiszemy

(-IIOO.IOIO.OIOO.OIIO) + (+IOII.OOIO.IOIO.IIII) =
(+IOII.OOIO.IOIO.IIII) + (-IIOO.IOIO.OIOO.OIIO) =
-I.OIII.IOOI.OIII

Uprościmy symbolikę, pisząc

IOII.OOIO.IOIO.IIII - IIOO.IOIO.OIOO.OIIO

zamiast

(+ IOII.OOIO.IOIO.IIII) + (-IIOO.IOIO.OIOO.OIIO).

Połóżmy Z = {0,1,-1,2,-2,3,-3...}

Elementy Z nazywamy l i c z b a m i c a ł k o w i t y m i w y m i e r n y m i. Liczb dodatnich i ujemnych będziemy używać za każdym razem, gdy staniemy wobec działań antagonistycznych, a więc bardzo często.

---

[23] Cyfry w druku są niebieskie.

[24] Cyfry w druku są czerwone.

B e r n a r d J. et al.: Itineraire mathématique, classe de sixième. Nathan 1971, s.155-163.

Grupa tematów: RELACJE NUMERYCZNE.

Obejmuje ona trzy tematy: Funkcje numeryczne (1 kartka), Przykłady odwzorowań liniowych (2 kartki) i Analiza odwzorowania liniowego (2 kartki).

Kartka "Funkcje numeryczne" zawiera w formie ćwiczeń pięć przykładów takich funkcji, określonych formalnie bądź z pomocą zależności pozamatematycznych, ilustrujących następującą definicję (sformułowaną po ćwiczeniu pierwszym):

"Jeżeli relacja będąca funkcją ma jako zbiór wyjść - zbiór liczb, i jako zbiór dojść - zbiór liczb, to relacja ta jest funkcją numeryczną".

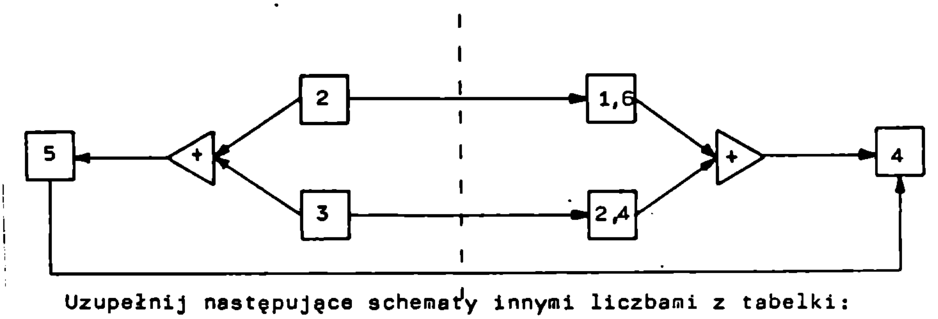
P r z y k ł a d y o d w z o r o w a ń l i n i o w y c h

Ć w i c z e n i e 1

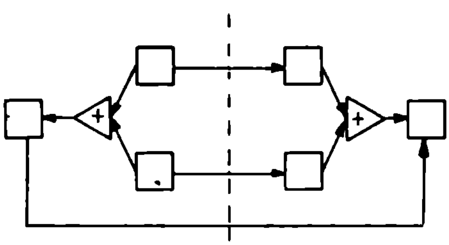
Kolarz zrobił sobie na treningu następującą tabelkę czasów przejazdu

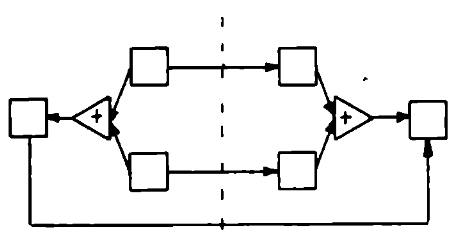
Czas w minutach	Odległość w kilometrach
2	1,6
3	2,4
5	4
10	8
15	12
20	16
30	24

Oznaczmy przez T zbiór liczb określających czas,
D zbiór liczb określających odległość.
Odwzorowanie T w D jest bijekcją.
Zbadaj następujący schemat:



Uzupełnij następujące schematy innymi liczbami z tabelki:





Ćwiczenie 2

Kawałek drogi prostoliniowej został na płaszczyźnie przedstawiony na poniższym rysunku:

Dysponujesz następującymi informacjami:
Uzupełnij tę tabelę.

Długość na płaszczyźnie		Długość w terenie
w cm		w m
AB	6	615
BC	2	205
AC		

Ćwiczenie 3

Jean i Martine złożyli swoje oszczędności w Kasie Oszczędności. Uzupełnij tabelę:

Wpłacający	Sumy wpłacone	Odsetki roczne
Jean	72 F	2,52 F
Martine	60 F	2,10 F
Razem	...	...

Urzędnik Kasy Oszczędności zrobił sobie tabelkę dla szybkiego obliczania odsetek. Wykończ ją:

Sumy złożone	12	60	72	48	36	24
Oprocentowanie w F	....	2,10	....	....	....	....

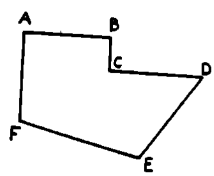
Posługując się tą tabelką oblicz odsetki od sumy 180 F.
Oznaczając przez S zbiór sum wpłaconych (w frankach)
I zbiór odsetek (w frankach)
napisz graf odwzorowania S w I.

G = ...

Ćwiczenie 4

Na planie katastralnym przedstawiono działkę o kształcie jak na poniższym rysunku. Miary odcinków na płaszczyźnie, przy jednostce cm, są następujące:

m [A,B] = 2,6 m [B,C] = 1
m [C,D] = 2,7 m [D,E] = 2,8
m [E,F] = 3,7 m [A,F] = 2,5



Urzędnik hipoteki ułożył następującą tabelę, dającą szybko rzeczywiste wymiary terenów narysowanych na płaszczyźnie.

Uzupełnij tę tabelkę:

Na płaszczyźnie (w cm)	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	1	2	3
w terenie (w m)	2,5	...	...	...	...	25	...	...

Posługując się tą tabelką oblicz obwód działki.

....

Ć w i c z e n i e   5

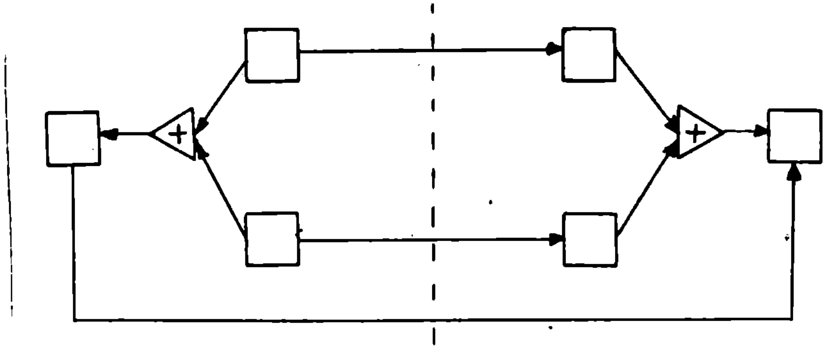
Młynarz ułożył następującą tabelkę, podającą ilość mąki należnej w zamian za pewną ilość dostarczonej pszenicy.

Ciężar pszenicy (w kg)	100	300	600	800	...	...	...	...
Ciężar mąki (w kg)	75	...	...	...	750	300	525	

Uzupełnij tę tabelkę.

Ć w i c z e n i e   6

We wszystkich poprzednich ćwiczeniach tabelki przedstawiały odwzorowania bijektywne pewnego zbioru liczb naturalnych lub dziesiętnych w inny zbiór liczb naturalnych lub dziesiętnych: odwzorowania te tworzą jedną rodzinę, którą nauczymy się rozpoznawać z pomocą następującego rysunku:



Przy pomocy par grafu każdej z relacji możesz sprawdzić własność zakodowaną tym rysunkiem.
Odwzorowania te nazywają się " odwzorowaniami liniowymi". Później zbadasz je szczegółowo, lecz trzeba umieć je rozpoznawać.
Oto jedno z nich, uzupełnij:

	6	7,5	13,5	21		
					36	72

Oto dwa inne odwzorowania. Uzupełnij tabelki.

Bok kwadratu (w m)	2	5	7	10	12	15
Obwód (w m)						

Bok kwadratu (w m)	2	5	7	10	12	15
Pole tego kwadratu (w m2)						

Czy odwzorowania są liniowe? Uzasadnij swoje odpowiedzi.

....

....

Ć w i c z e n i e   7   Pewna gra!

1. W każdym okienku tych kwadratów spróbuj umieścić 4 liczby naturalne lub dziesiętne, tak by iloczyny na krzyż były równe.

Przykład:

9	12
6	8

9 X 8 = 6 X 12 = 72

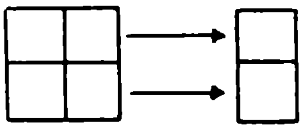
Stosując tę samą regułę, uzupełnij puste okienka poniższych kwadratów:

24	
96	16

35	15
91	

	27
12	18

2. Skomplikujmy grę!
Utwórz kwadrat liczbowy według pierwszej reguły.



Dodaj dwie liczby w pierwszym wierszu i dwie liczby w drugim. Spróbuj z tych 6 liczb utworzyć dwa inne kwadraty, spełniające regułę 1.

3. Posługując się tymi dwiema regułami, spróbuj utworzyć krzyżówkę kwadratów.

2	6
7	

6	8

8	14

A n a l i z a   o d w z o r o w a n i a   l i n i o w e g o

Ć w i c z e n i e 1

Oto diagram strzałkowy pewnej relacji ze zbioru E do zbioru F. Ten diagram jest kompletny, nie brakuje żadnej strzałki.
Czy jest to odwzorowanie liniowe?

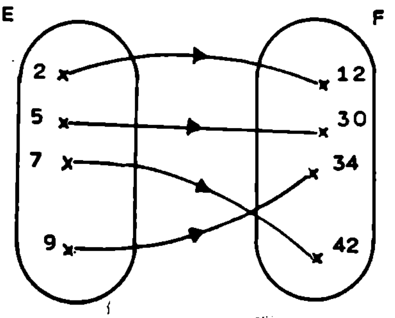
....

Dlaczego?

....

....

2 ma za obraz 12.
Napiszemy w skrócie
Im 2 = 12.
Uzupełnij równości:
Im 7 =   Im... = 54   Im... = 30



Uzupełnij następującą tabelkę:

Im (2 + 5) =   Im 2 + Im 5 =
Im (2 + 7) =   Im 2 + Im 7 =

Co zauważasz?

....
....

Ć w i c z e n i e 2

Oto odwzorowanie z E do N:

E = {0; 1; 2; 3; 4; 5; 7; 12; 17; 19};

określone słownie
"pomnożone przez 7 daje"

1. Uzupełnij
   Im 2 = ...   Im 5 = ...   Im 7 =...   Im 12 = ...   Im 17 = ...
2. Wypełnij okienka następującej tabelki

Elementy E	0	1	2	3	5	7	12	17	19
Obrazy									

Czy odwzorowanie jest liniowe?

....

Im (5 + 7) = (5 + 7) × 7 = ...
Im 5 = 5 × 7 = ...
Im 7 = 7 × 7 = ...   Im 5 + Im 7 = 5 × 7 + 7 × 7 = ...

Napisać: Im (5 + 7) = Im 5 + Im 7.
znaczy to samo, co napisać:
(5 + 7) × 7 = 5 × 7 + 7 × 7 (wróć do kartki 37)

Ć w i c z e n i e 3

Oto dwa zbiory liczb:

E = {3, 7, 9, 13, x}
F = {36, 4x, 12, 28, 52}

Znajdź odwzorowanie bijektywne z E do F takie, by każdy obraz był iloczynem swojego przeciwobrazu przez jedną i tę samą liczbę.
Jaki jest przeciwobraz 3? 7? 9? 13? x?

....

Jeżeli masz odwzorowanie bijektywne z E do F i jeżeli każdy obraz jest iloczynem swojego przeciwobrazu przez jedną i tę samą liczbę - jest to odwzorowanie liniowe. Liczba ta nazywa się współczynnikiem tego odwzorowania.

Ć w i c z e n i e 4

1. Masz dane odwzorowanie liniowe z E do F: $x \longrightarrow 0{,}4\ x$.
Uzupełnij tabelkę obok.

E	4	9	11	17	25
F					

2. Masz dane odwzorowanie liniowe z F do G: $x \longrightarrow 5\ x$
Uzupełnij tabelkę obok.

F					
G					

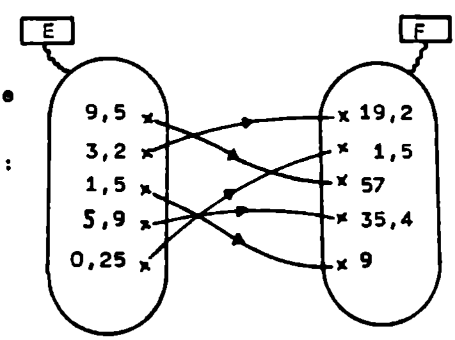
3. Masz dane odwzorowanie liniowe z E do H: $x \longrightarrow (0{,}4 \times 5)x$.
Uzupełnij tabelkę obok.
Porównaj zbiory G i H.

E	4	9	11	17	25
H					

Ć w i c z e n i e 5

Masz dany diagram strzałkowy pewnego odwzorowania ze zbioru E do zbioru F.

1. Sprawdź, że jest to odwzorowanie liniowe.
2. Znajdź wartość współczynnika tego odwzorowania liniowego i uzupełnij:



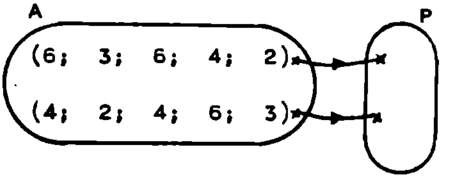
Ć w i c z e n i e 6

Pani Martin poszła na cotygodniowe zakupy do supermarketu.
Przyniosła:

6 pudełek sardynek	po 2,30 franków
3 litry oliwy	po 3,00 "
6 litrów wina	po 1,50 "
4 pudełka pasztetu	po 0,65 "
2 tabliczki czekolady	po 1,10 "

Przyniosła także zamówione przez sąsiadkę p. Dupont
4 pudełka sardynek,
2 litry oliwy,
4 litry wina,
6 pudełek pasztetu,
3 tabliczki czekolady.
Zanotowała na kawałku papieru:
Dla p. Martin: (6; 3; 6; 4; 2) ⟶ (13,80; 9; 9; 2,60; 2,20).
Dla p. Dupont: (4; 2; 4; 6; 3) ⟶ (9,20; 6; 6; 3,90; 3,30).
Sprawdź rachunki p. Martin. Uzupełnij diagram strzałkowy:

A jest zbiorem zakupów,
P jest zbiorem kwot do zapłacenia
przez każdą z tych osób.
Kasjerka dała p. Martin kwit
za cały zakup.

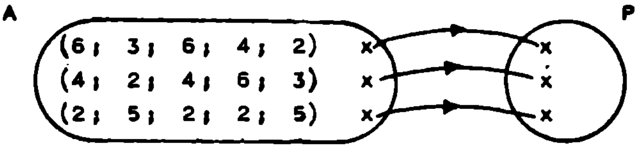


(10; 5; 10; 10; 5) ⟶ (23; 15; 15; 6,50; 5,50)

Sprawdź rachunki kasjerki.
Posługując się powyższymi informacjami, spróbuj zrobić rachunek dla p. Favier:

2 pudełka sardynek, ...
5 litrów oleju, ...
2 litry wina, ...
2 pudełka pasztetu, ...
5 tabliczek czekolady, ...
Wykończ kwit kasjerki: ....
(2; 5; 2; 5).........

Uzupełnij następujący diagram:



Jeżeli p. Martin przyniosłaby również zamówienie p. Favier, ile by zapłaciła?
....
....

Ćwiczenie 7

Jean i Sophie poszli razem ze swymi matkami na zakupy do supermarketu.
Oto ich zakupy:
Jean (7 jogurtów, 5 tabliczek czekolady)   7,81 franków,
Sophie (5 jogurtów, 5 tabliczek czekolady)   7,15 franków,
Ich przyjaciel René poszedł trochę przed nimi: wziął 2 jogurty.
Gdyby był poprosił Sophie, by mu je przyniosła, ile Sophie byłaby zapłaciła ogółem?
Znajdź cenę: 1 jogurtu, 1 tabliczki czekolady.

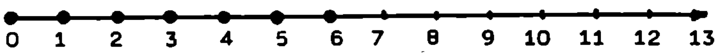
H a y e n J. et a.: Gamma 5, Mathematik Grundband fuer Orientierungsstufen, Gesamtschulen und Realschulen. Klett 1976.
Rozdział V Gleichungen und Ungleichungen,

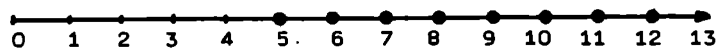
Rozdział składa się z 10 paragrafów: 1. "Platzhalter"[25], 2.Termy, 3. Termy i diagramy, 4.Wypowiedzi i formy zdaniowe, 5.Rozwiązania form zdaniowych, 6.Rozwiązywanie równań, 7.Związki między zbiorami rozwiązań, 8. Przekrój zbiorów rozwiązań, 9.Złączenie zbiorów rozwiązań, 10.Zadania różne.

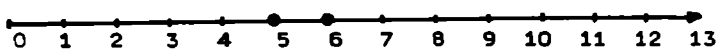
P r z e k r ó j   z b i o r ó w   r o z w i ą z a ń.

1. Na Kolei Federalnej dzieci od 4 do 12 lat płacą tylko połowę ceny biletu.
   a) Ile lat mogą więc mieć dzieci korzystające ze zniżki?
   b) Sformułuj warunek dla wieku x, w którym korzysta się ze zniżki.

2.a) Na rysunku 108.1 przedstawiono na osi liczbowej zbiór rozwiązań nierówności $x < 7$, na rysunku 108.2 zbiór rozwiązań nierówności $4 < x$. Jakie elementy przedstawiono na rysunku 108,3?

108.1


108.2


108.3


b) Narysuj trzy osie liczbowe ze zbiorami rozwiązań odpowiednich nierówności: $x < 10$, $5 < x$, $x < 10$ i $5 < x$.

3. Dla jakich liczb zachodzi $5+x < 27$, $x+19 > 39$, $5+x < 27$ i $x+19 > 39$?

4. P r z e k r ó j dwu zbiorów A i B składa się z wszystkich elementów, które należą do A i B. Określ przekrój zbiorów rozwiązań:

a) $x < 5$, $x < 11$ b) $12 + x < 31$, $x - 15 < 27$
c) $18 < 3.x$, $x < 12$ d) $2.x = 14$, $x + 3 < 18$

Jeżeli połączymy dwie formy zdaniowe słowem "i", otrzymujemy nową formę zdaniową. Jej rozwiązaniem jest p r z e k r ó j obydwu zbiorów rozwiązań.
Przykład: $2 < x$ ma zbiór rozwiązań $R_1 = \{3,4,5,...\}$ $x < 5$ ma zbiór rozwiązań $R_2 = \{0,1,2,3,4\}$ $2 < x$ i $x < 5$ ma zbiór rozwiązań $R = R_1 \cap R_2 = \{3,4\}$

5. Określ zbiór rozwiązań formy zdaniowej: a) $5.x > 35$ i $x+4=12$ /.../

W punktach 6-8 wprowadza się nierówność podwójną, po czym następują "Ćwiczenia" 9-17. Wśród nich ćwiczenia 9-15 mają treść abstrakcyjną, ćwiczenia 16 i 17 - konkretną. W ćwiczeniach dominuje rozwiązywanie układów nierówności, ale jest też kilka o treści czysto mnogościowej. Oto te dwa ostatnie ćwiczenia.

---

[25] Termin ten nie ma odpowiednika w języku polskim (poza - być może - technicznym językiem drukarzy). Znaczy on dosłownie "to co rezerwuje miejsce" i oznacza m.in. czcionkę użytą zastępczo w miejsce nieczytelnej litery, która w korekcie będzie zastąpiona właściwą. Tytuł paragrafu w oryginale jest bez cudzysłowu.

" 16. Cukierki mają być zapakowane do torebek. Każdy cukierek kosztuje 2 fenigi i waży 3 g. A więc x cukierków kosztuje 2.x fenigów i waży 3,x gramów. Torebka pdwinna kosztować więcej niż 60 fenigów ale mniej niż 90 fenigów, powinna ważyć więcej niż 60 g, ale mniej niż 120 g, zawierać więcej niż 10, ale mniej niż 35 cukierków.

a) Sformułuj te warunki jako nierówności. Określ zbiór rozwiązań jako przekrój poszczególnych zbiorów rozwiązań.

b) Ile co najmniej cukierków musi być w torebce? Ile kosztuje i jak ciężka jest w tym przypadku torebka?

17.Rzucamy trzema kostkami. Wolno zrobić ruch przy następujących wynikach. Za każdym razem podaj odpowiedni zbiór wyników.

a) Suma oczek jest większa od 15; b) Suma oczek jest mniejsza od 8; c) Suma oczek jest mniejsza od 17 i większa od 10; d) Suma oczek jest liczbą parzystą mniejszą od 15; e) Suma oczek jest większa od 15 i mniejsza od 19".

Przekrój zbiorów rozwiązań powraca jeszcze w kilku zadaniach paragrafu 10 "Zadania różne".

P a l i n g D. et a.: Making mathematics a secondary course. Oxford University Press 1971.
POLE (s. 86-88)

T e m a t d o r o z m o w y

Spójrz na wzory kafelek u góry tych dwu stron. Jakiego kształtu kafelek użyto w A? B? C? D?

Ilu kafelek użyto w A? B?

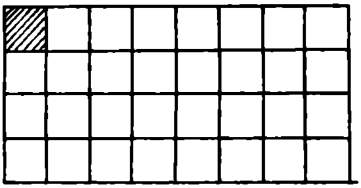
Spójrz na C. Użyto tu całych kafelek i ich części. Ilu użyto całych kafelek? Ilu części. Części kafelek są dokładnie wycięte z całych kafelek. Jaka jest najmniejsza liczba całych kafelek, potrzebnych dla wyłożenia C?

Spójrz na D. I tu użyto całych kafelek i części. Ile jest tu całych kafelek? Ile części? Części kafelek dokładnie wycięto z całych kafelek. Ile mniej więcej całych kafelek trzeba do pokrycia D?

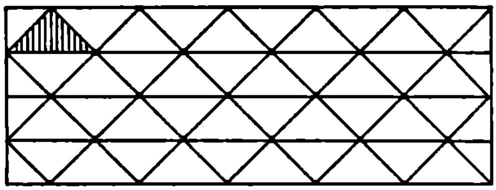
Czy koło jest, Twoim zdaniem, dobrym kształtem kafelki?

Jaki kształt jest, Twoim zdaniem, najlepszy dla kafelek? Dlaczego?

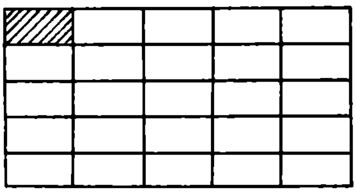
A



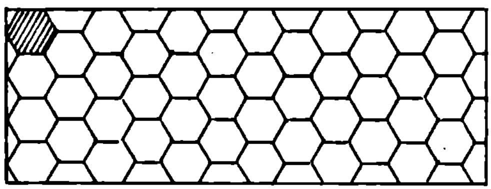
C



B



D



Ć w i c z e n i a

Wytnij figurę u góry kartki 46 z Zeszytu pracy.

1. Umieść tę figurę na kratce z trójkątów (kartka 44). Obrysuj ją. Ile trójkątów pokrywa ta figura?
(W przypadku części trójkątów, zaniedbaj każdą mniejszą od połowy, licz pozostałe jako całe trójkąty.)

2. Połóż tę figurę na kratce z sześciokątów (kartka 44). Obrysuj ją. Ile sześciokątów pokrywa ta figura?
(Licz części jak w ćwiczeniu 1.)

3. Połóż tę figurę na kratce z kwadratów i policz, ile ich pokrywa (kartka 43).

4. Policz, ile prostokątów pokrywa ta figura (kartka 43).

Ć w i c z e n i a

Zbierz trochę liści z drzew lub innych roślin.
Posłuż się kratką z kwadratów (kartka 43).

1. Połóż jeden z liści na kratce z kwadratów. Obrysuj go. Ile kwadratów pokrywa liść? (Przypomnij sobie, co się robi z częściami kwadratów).

2. Weź inny liść. Oceń, ile kwadratów on pokryje. Zanotuj swoją ocenę. Znajdź liczbę kwadratów, które pokrywa. Czy twoja ocena była za wysoka czy za niska?

3. Powtórz ćwiczenie 2. z innymi liśćmi ./Pomijamy już dalsze 7 ćwiczeń na temat mierzenia pola./

R e v i e w 9 (s.93)

1. Używając linijki, narysuj odcinek długości:

(a) 6 cm, (b) $8\frac{1}{2}$ cm, (c) 9 cm 7 mm, (d) 78 mm.

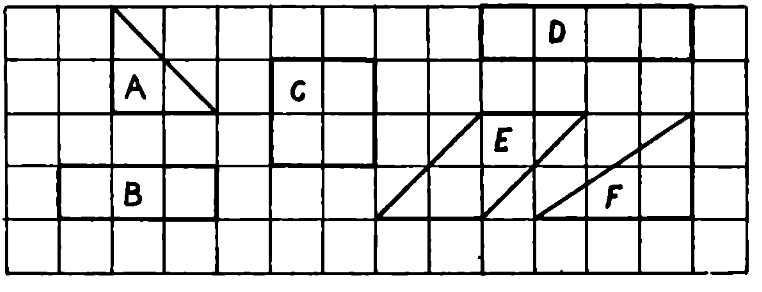
2. Używając kątomierza, narysuj kąty:

(a) 60° (b) 25° (c) 80° (d) 130° (e) 90° (f) 155°.

3. W następujących zdaniach opuszczono nawiasy. Przepisz każde zdanie i wprowadź nawiasy tak, by otrzymać zdanie prawdziwe.

(a) 3 + 2 . 2 = 10 (b) 6 . 3 + 2 = 20 (c) 12 - 3 . 2 = 18
(d) 7 . 3 + 5 = 26 (e) 24 - 7 . 2 = 10 (f) 4 + 2 . 3 + 3 = 36

4.



(a) Która figura ma najmniejsze pole?
(b) Czy figury B i F mają to samo pole?
(c) Czy figury E i F mają to samo pole?
(d) Które figury mają to samo pole co figura C?

5. Wykonaj odejmowanie sposobem, który uważasz za najłatwiejszy:

(a) 39 - 22 (b) 62 - 33
(c) 47 - 35 (d) 27 - 19
(e) 55 - 39 (f) 100 - 76

SOME ACTIVITIES (s.94-95)

A k t y w n o ś ć 1

Zbierz numery rejestracyjne 50 samochodów. Ile razy występuje w nich każda z cyfr 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

Narysuj wykres, przedstawiający uzyskane przez ciebie wyniki.

A k t y w n o ś ć 2
Znajdź liczbę cegieł w jakimś murze.

A k t y w n o ś ć 3
Jak długo pali się świeca?
Jak użyłbyś świecy dla mierzenia czasu?

A k t y w n o ś ć 4
Podziel kwadrat na połowę.
Na ile różnych sposobów możesz to zrobić?

A k t y w n o ś ć 5
Co jest dłuższe, szpulka drutu czy motek przędzy?

A k t y w n o ś ć 6
Zmierz tętno u kolegi:
(a) gdy siedzi,
(b) po dziesięciokrotnym podniesieniu się z krzesła,
(c) po innej aktywności.

A k t y w n o ś ć 7
Zmierz jakieś odległości z pomocą koła.

A k t y w n o ś ć 8
Jakie jest najpopularniejsze imię:
(a) chłopców z twojej szkoły?
(b) dziewcząt z twojej szkoły?

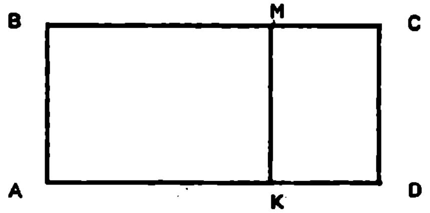
A k t y w n o ś ć 9
Ile jest włosów na twojej głowie?

A k t y w n o ś ć 10
Oceń a potem zmierz odległość do jakiegoś punktu w terenie.

N.A. W i l e n k i n et a.: Matematika, uczebnik 4 klasa, pod red. A.I. Markuszewicz, Moskwa 1970.

45. Prawo rozdzielności mnożenia (s. 109-112)

Długość prostokąta ABCD (rys.147) jest równa 4+2 centymetrów, a szerokość 3 centymetry. Pole tego prostokąta jest równe (4+2). 3 centymetrów kwadratowych. Pole prostokąta ABCD można znaleźć inaczej.



Najpierw wyliczyć pola prostokątów ABMK i KMCD, a potem dodać otrzymane wyniki: 4.3 + 3.2 centymetrów kwadratowych. Iloczyn (4+2).3 i suma 4.3 +2.3 są równe, gdyż wyrażają one pole jednego i tego samego prostokąta ABCD:

$$(4+2).3 = 4.3+2.3$$

Taką równość można napisać dla dowolnych długości odcinków AK, KD i AB.

Ogólnie przy dowolnych wartościach a, b i c prawdziwa jest równość

$$(a+b)c = ac + bc.$$

Wyraża ona prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania. Odczytujemy je tak: aby pomnożyć sumę przez liczbę, można pomnożyć przez tę liczbę każdy składnik i dodać otrzymane iloczyny.

Prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania daje możliwość zamiany iloczynu postaci (7+29).63 na sumę 7.63+29.63 albo sumy postaci 7.63 + 29.63 na iloczyn (7 + 29).63. Taka zamiana często upraszcza rachunki. Podamy przykłady.

P r z y k ł a d 1. Przypuśćmy, że trzeba znaleźć wartość iloczynu 42.50. Przedstawimy liczbę 42 w postaci sumy liczb 40 i 2; otrzymamy 42.50 = (40 + 2).50. Teraz zastosujemy prawo rozdzielności:

$$(40 + 2).50 = 40 \,.\, 50 + 2 \,.\, 50$$

Każdą z liczb 40 i 2 łatwo pomnożyć przez 50. Wartość wyrażenia 42.50 jest równa 2100.

P r z y k ł a d 2. Przypuśćmy, że trzeba znaleźć wartość wyrażenia 61 . 37 + 39 . 37. Na podstawie prawa rozdzielności mnożenia przedstawimy tę sumę w postaci iloczynu sumy 61 + 39 i liczby 37:

$$61 \,.\, 37 + 39 \,.\, 37 = (61 + 39) \,.\, 37$$

Suma 61 i 39 jest liczbą 100. A iloczyn 100 i 37 jest równy 3700. Więc wartość wyrażenia 61 . 37 + 39 . 37 jest równa 3700.

Zajmiemy się teraz prawem rozdzielności dla odejmowania.

Porównamy wyrażenia (429 - 29) . 30 i 429 . 30 - 29 . 30:

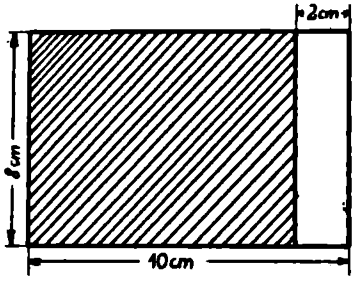
$$(429 - 29) \,.\, 30 = 400 \,.\, 30 = 12\,000;$$
$$429 \,.\, 30 - 29 \,.\, 30 = 12870 - 870 = 12\,000.$$

Wyrażenia okazały się równe: (429 - 29).30 = 429.30 - 29.30.

Ogólnie, dla dowolnych liczb a, b i c, jeżeli tylko a jest większe lub równe b, prawdziwa jest równość

$$(a - b)c = ac - bc.$$

Wyraża ona prawo rozdzielności mnożenia względem odejmowania. Odczytujemy je tak: aby pomnożyć różnicę przez liczbę, można pomnożyć przez tę liczbę odjemną i odjemnik oddzielnie i od pierwszego iloczynu odjąć drugi.



546. Sprawdź prawo rozdzielności mnożenia względem odejmowania, obliczając dwoma sposobami pole zakreskowanego prostokąta (rys.148).

547. Znajdź wartość wyrażenia: a) (40+1).8, /itp./.

548. Znajdź wartość wyrażenia, stosując prawo rozdzielności: a) 91.8, /itp./.

549. Znajdź wartość wyrażenia: a) 69.27 + 31.27, /itp./.

550. Zastosuj prawo rozdzielności mnożenia: a) (68 + x).2, /.../ 4a + 4.13. /itp/.

551. Dla jakich wartości zmiennej prawdziwa jest równość:

a) 3.(x+5) = 3x + 15,
b) (3+5).x = 3x + 5x,
c) (7+x).5 = 7.5 + 8.5 /itp/.

Zadania do wykonania w domu.

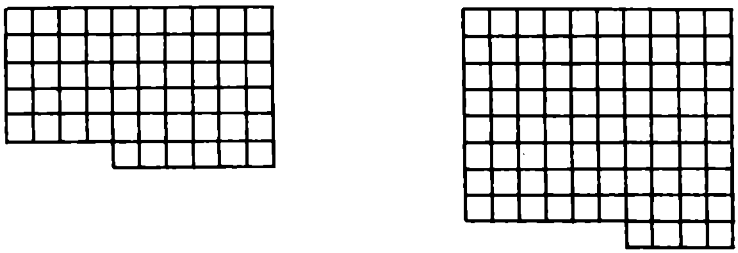
/552-554 zawierają przykłady na zastosowanie prawa rozdzielności, podobne do powyższych/.

555. Narysuj kąt rozwarty BOD, wewnątrz niego poprowadź półprostą OC tak, by powstał kąt prosty COD .

Aneks 8

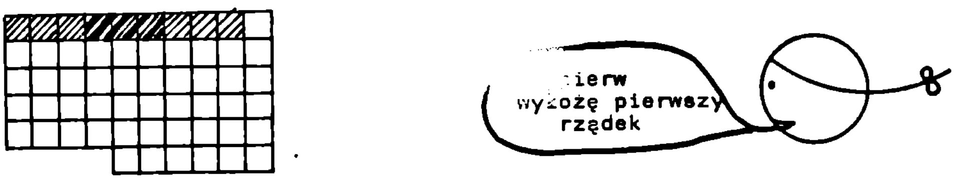
S. T u r n a u, M. C i o s e k, M. L e g u t k o: Matematyka dla klasy IV, Przewodnik ucznia. WSiP (oddane do druku).

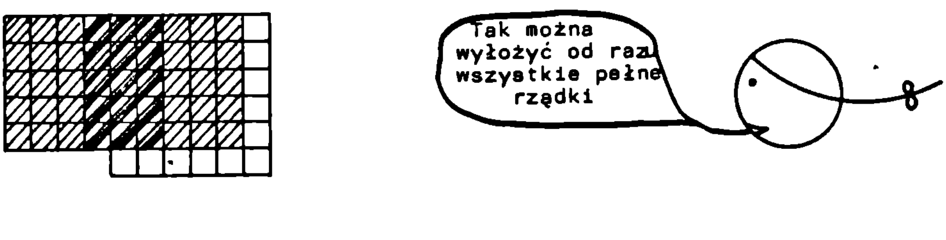
Policz, z ilu kwadracików składają się te figury, i napisz to pod nimi.

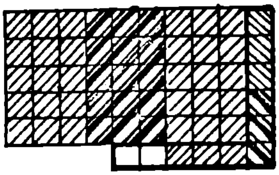


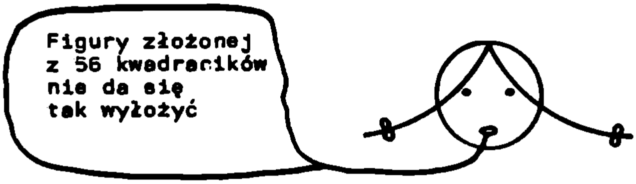
Które z tych figur można całkowicie wyłożyć prostokątami złożonymi z 3 kwadracików?

Popatrz na rysunki Agnieszki.

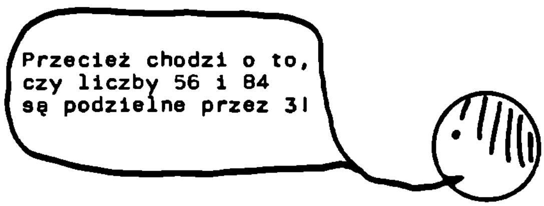








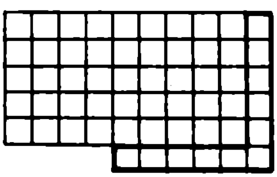
Przerysuj w zeszycie drugą figurę i znajdź odpowiedź, kolorując ją tak jak Agnieszka.

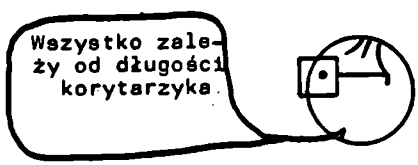


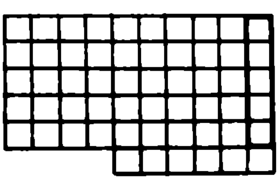
Tomek nie rysował, tylko wykonał dzielenie z resztą:

56 : 3 = 18 r 2

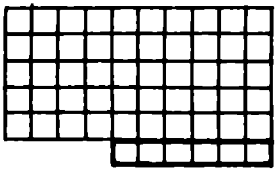
Sprawdź ten rachunek.
Jak z wyniku odczytasz odpowiedź na pytanie postawione w zadaniu?
Którą część wyniku Tomka można łatwo odczytać z rysunku Agnieszki?
Rozwiąż zadanie dla drugiej figury, wykonując dzielenie z resztą.
Dyzio słuchał uważnie, a potem powiedział:



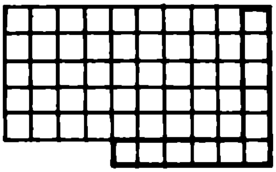




5

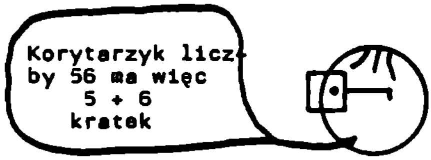


6

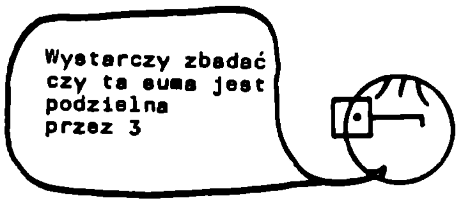


5

6

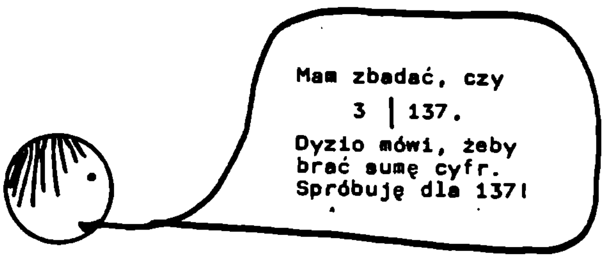


$3 \mid 5 + 6$?

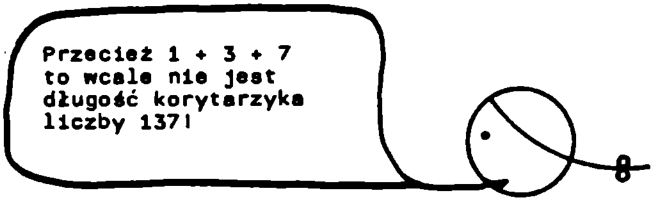


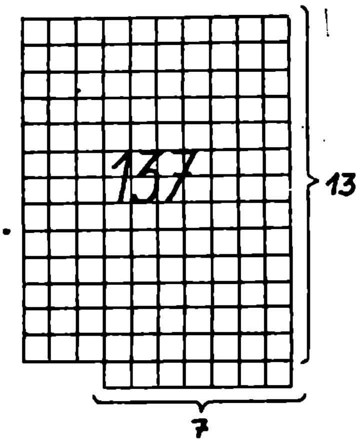
Z a d a n i e

Sprawdź najprostszym sposobem, które z następujących liczb są podzielne przez 3:
78, 89, 96, 97, 137.



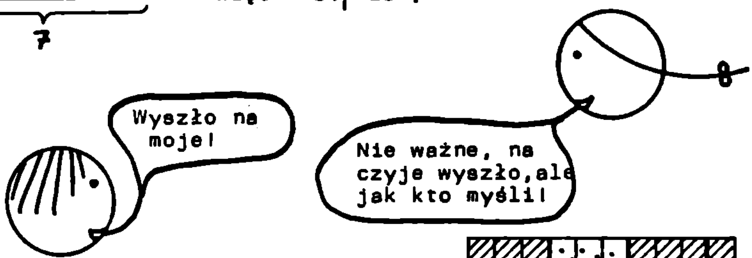
$$1 + 3 + 7 = 11$$
$$3 \nmid 1+3+7$$
więc $3 \nmid 137$

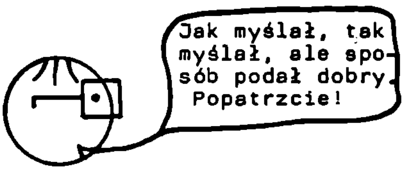


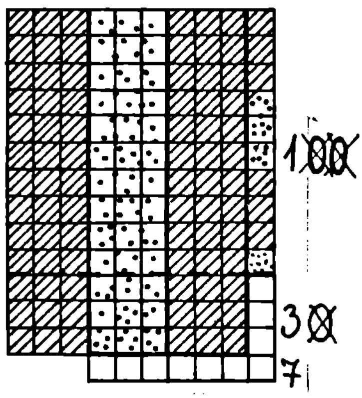


$3 \nmid 13+7,$

więc $3 \nmid 137,$







Zbadaj poznanymi sposobami, które z następujących liczb są podzielne przez 3:

159, 306, 2805.

Tomek znowu rozumował tak:

$3 \mid 2+8+0+5,$ więc $3 \mid 2805$

Czy rozumował poprawnie? Czy możesz odpowiedzieć, nie rysując korytarzyka liczby 2805 /byłby bardzo długi!/?

Literatura cytowana

B e r n a r d J. et. a.: Itineraire mathématique, classe de sixième. 1971.

B r e i d e n b a c h W.: Die Welt der Zahl. Neu, 2. Schuljahr. H. Schroedel Vlg., 1972.

B r u n e r J.: Proces kształcenia. PWN, Warszawa 1964.

D i b , C l a u d i o Z. et. a.: Actividades em Matemática 1. Gráfica Editore Primor S.A. 1973.

D u v a l R . et P l u v i n a g e F. Une grille d'analyse et son application a deux manuels scolaires. "Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public", 301, Decembre 1975.

F i l l o y E . et a.: Mathematicas, cuarto grado. Secretara de Educacion Publica, Mexico 1975.

F r e u d e n t h a l H. : Mathematics as an educational task. Dodrecht 1973.

G a l i o n E .: Mathématique 6^e. O.C.D.L.-Hatier 1973.

H a y e n J. et. a.: Gamma, Mathematik Grundband fuer Orientierungsstufen, Gesamtschulen und Realschulen. Klett 1976.

J ó ż w i c k i T.: Matematyka w klasie III. WSiP Warszawa 1976.

K r y g o w s k a Z.: Zarys dydaktyki matematyki, cz.I, wyd.II.WSiP, Warszawa 1977 a.

K r y g o w s k a Z.: Zarys dydaktyki matematyki, cz.II.WSiP Warszawa 1977 b.

K r y g o w s k a Z.: Druga fala reform - edukacja matematyczna dla wszystkich, "Matematyka"6, 1977.

K r y g o w s k a Z.: Zarys dydaktyki matematyki, cz.III. WSiP 1978.

M a r k u s z e w i c z A.I. , (red.) W i l e n k i n N.A. et a. (aut.) Matiematika 4. Proswieszczenie, Moskwa 1970.

Mathematik heute, Mathematisches Unterrichtswerk, 5. Schuljahr Orientierungsstufe. Schroedel-Schöningh 1972.

M o r o z H.: Nasza matematyka, dla klasy III, WSiP Warszawa 1975.

"M u n k a l a p o k" C z e r A. et.a.: Munkalapok az ideiglenes matematika-tanterv 5. osztályos anyagának tanulásához. Tankönyvkiadó 1974.

"M u n k a l a p o k" E r d e s z E. et a.: Munkalapok az ideiglenes matematika-tanterv 3. osztályos anyagának tanulásához. Tankönyvkiadó 1976.

M y s ł a k o w s k i Z.: Wychowanie człowieka w zmiennej społeczności, KiW Warszawa 1964.

N e u n z i g-S o r g e r : Wir lernen mathematik, III. Herder Vlg.1969.

O k o ń W.: Funkcja i treść podręcznika szkolnego. "Nowa Szkoła", 4, 1966, s. 9-16.

O k o ń W.: Zarys Dydaktyki Ogólnej. PZWS Warszawa 1968.

Országos Pedagógiai Intézet: Ideiglenes Tanterv, Az Altalános Iskolák 1-4, Osztalyai Számára, Tajekoztato Tanterv, Az Altalános Iskolák 5-8 Osztalyai Számára. Budapest 1975.

P a l i n g D. et a.: Making mathematics, a secondary course. Oxford Univ sity Press 1971.

P a p y G.: Mathématique moderne, vol. 1. Didier 1964.

P a p y G.: Le premier enseignement de l'anylyse. Press Universitaires de Bruxelles 1968.

P i a g e t J.: Studia z psychologii dziecka. PWN Warszawa 1966.

R o l l e r E. et a.: Mathematik B5. Klett Vlg. 1974.

S e m a d e n i Z.: The concept of premathematics as a theoretical background for primary mathematics teaching. IM PAN 1976.

S e r v a i s W. et a.: Mathématique 1, classe de sixième. Nathan-Labor 1969.

SMP - The School Mathematics Project, Books 1-5. Cambridge University Press 1969.

SMP - The School Mathematics Project, Books A-H. Cambridge University Press 1970.

S z n a j d e r M.: Teksty sterujące pracą ucznia w nauczaniu matematyki w szkole podstawowej, 1977. (Rozprawa doktorska nie opublikowana). Biblioteka Główna WSP w Krakowie.

T u r n a u S.: Matematyka dla klasy IV, WSiP. Warszawa (w druku).

W a l u s i n s k i G.: Manuélisation d'une réforme. "Cahiers Pédagogiques", 132, Mars 1975.

W i t t m a n E.: Grundfragen des Mathematikunterrichts, Vieweg-Braunschweig 1974.

SPIS TREŚCI

Cena zł 24.—