

**WYŻSZA SZKOŁA PEDAGOGICZNA
IM. KOMISJI EDUKACJI NARODOWEJ W KRAKOWIE**

PRACE MONOGRAFICZNE NR XXXII

ZBIGNIEW BORELOWSKI

**Tensorowe funkcje próbne
w teorii macierzy rozpraszania**

WYDAWNICTWO NAUKOWE WSP KRAKOW 1979

Zbigniew Borelowski

TENSOROWE FUNKCJE PRÓBNE
W TEORII MACIERZY ROZPRASZANIA

PRACE MONOGRAFICZNE
WYŻSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ
W KRAKOWIE

Tom XXXII

ÉTUDES MONOGRAPHIQUES
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
A CRACOVIE

Wydawnictwo Naukowe
Wyższej Szkoły Pedagogicznej

ZBIGNIEW BORELOWSKI

**Tensorowe funkcje próbne
w teorii macierzy rozpraszania**

**Kraków 1979
Wydawnictwo Naukowe
Wyższej Szkoły Pedagogicznej**

Recenzenci:

Prof. dr BRONISŁAW ŚREDNIAWA
Doc. dr hab. EDWARD KAPUŚCIK

KOMITET REDAKCYJNY

HENRYK LACH
(przewodniczący)

JANINA DŁUGOSZOWA, BOLESŁAW FARON, JERZY JAROWIECKI,
JULIUSZ JASIEŃSKI, ZOFIA KRYGOWSKA, JÓZEF MUSIELAK,
EWA SŁAWĘCKA, JAN SZMYD, TADEUSZ ZIĘTARA
(członkowie)

KAZIMIERZ AUGUSTYNEK
(sekretarz)

JAN BUDA
(sekretarz techniczny)

BARBARA KIEDRZYCKA-SZATKO
(redaktor Wydawnictwa)

Spis treści

	str.
W s t ę p	7
R o z d z i a ł I - Elementy metody Bogolubowa konstrukcji macierzy S	12
R o z d z i a ł II - Konstrukcja macierzy S przy uwzględnieniu wpływu zewnętrznego, klasycy- nego, słabego pola grawitacyjnego	20
R o z d z i a ł III - Dobór konkretnej postaci tensorowych funkcji próbnych i wyliczenie ich transformat Fouriera w układzie własnym kwazi- cząstek	34
R o z d z i a ł IV - Opis oddziaływania bezspi- nowych cząstek nienaładowanych, tkwiących w ten- sorowym polu funkcji próbnych $t_{\mu\nu}(x)$	49
R o z d z i a ł V - Opis oddziaływania nałado- wanych bezspinowych cząstek z polem elektromagne- tycznym przy uwzględnieniu wpływu pola opisanego tensorowymi funkcjami próbnymi $t_{\mu\nu}(x)$	72
R o z d z i a ł VI - Analiza ogólnego n-wierz- chołkowego diagramu Feynmana z uwzględnieniem obecności klasycznego, zewnętrznego, słabego po- la grawitacyjnego o stałej krzywiznie	86
U w a g i k o ń c o w e	113

	str.
A n e k s - Badanie typowych całek występują- cych przy wyznaczaniu postaci funkcji współczyn- nikowych	117
L i t e r a t u r a	127
S u m m a r y	129
С О Д Е Р Ж А Н И Е	130

Wstęp

Do chwili obecnej zaproponowano wiele sposobów usuwania nieskończoności pojawiających się w kwantowej teorii pola /KTP/. Ponieważ proces ten jest w dalszym ciągu kontynuowany, można wnioskować, że fizyka teoretyczna nie wypracowała dotąd jednolitego poglądu na te problemy. Ciągłe trwają poszukiwania różnych sformułowań podstaw kwantowej teorii pola, które pozwoliłyby uniknąć wielu spotykanych w tej teorii trudności. Nie wszystkie te próby kończą się sukcesem i w historii kwantowej teorii pola można wyróżnić jedynie kilka ujęć, które na trwałe weszły do fizyki. Do nich przede wszystkim zaliczyć należy podejście aksjomatyczne (np. W i g h t m a n [1], S t r e a t e r [2], J o s t [3], B o g o l u b o w [4]), funkcjonalne (S c h w i n g e r [5]), formalizm LSZ (L e h m a n n, S y m a n z i k, Z i m m e r m a n n [6]), metodę funkcji retardowanych (S t e i n m a n [7]), metodę funkcji chronologicznych (B o g o l u b o w [8]), algebraiczne sformułowanie zasad relatywistycznych teorii kwantowych (H a a g i K a s t l e r [9]), czy też podejście stochastyczne (N e l s o n).

W ostatnich latach pewną popularność zyskały prace usłu-

jące wykorzystać pole grawitacyjne do wygaszania rozbieżności wyrażen kwantowo-teoriopolowych (S a l a m i S t r a t h d e e [10], [11], [12]). W pracach tych wykorzystuje się specyficzne własności pola grawitacyjnego, które mogą być wykorzystane do modyfikacji całek, tradycyjnie występujących w kwantowej teorii pola, w ten sposób, aby uzyskać dobrze określone i skończone wyrażenia. Mankamentem tych prac jest ciągle jeszcze duży stopień niejednoznaczności i brak teorii traktującej w jednolity sposób wszystkie typy oddziaływań.

Dla skonstruowania wyrażen dla elementów macierzy S jedną z najwygodniejszych i najbardziej fizycznie jasnych metod jest metoda B o g o l u b o w a [8]. W metodzie tej (której podstawowe elementy omówimy w rozdziale I) znajduje się miejsce dla wprowadzenia wpływu zewnętrznych warunków na przebieg procesów opisywanych przez teorię.

Drugą taką metodą jest metoda zaproponowana niedawno przez S c h w i n g e r a [13]. Obie te metody mają część wspólną, polegającą na obecności w teorii elementów reprezentujących fizyczne mechanizmy, doprowadzające do wystąpienia interesującej nas sytuacji fizycznej. Bogolubow traktuje jednakże te elementy (i opisuje je skalarnymi funkcjami, które nazywa funkcjami włączeniowymi) jako pomocnicze, służące jedynie do konstrukcji teorii i w rezultacie wymagające usunięcia, Schwinger zaś traktuje je bardziej realistycznie i opisuje je funkcjami (zarówno skalar-

nymi jak i wektorowymi, spinorowymi czy też tensorowymi), którym nadaje rangę funkcji źródłowych, co oczywiście odbija się na strukturze teorii. Z podejścia Schwingera jasno wynika, że nie wszystkie sytuacje doświadczalne mogą być adekwatnie opisane za pomocą skalarnych źródeł, co wiąże się z fizyczną realnością funkcji opisujących te źródła w teorii. Jeśli więc w podejściu Bogolubowa również będziemy nadawali realną treść fizyczną funkcjom reprezentującym stopień włączenia oddziaływania wraz z wpływem na te oddziaływania zewnętrznych pól, to siłą rzeczy musimy tym funkcjom nadać także własności, jakie są dyktowane własnościami tych pól zewnętrznych. W przypadku badania wpływu pola grawitacyjnego na przebieg procesów mikroświata najbardziej adekwatne będzie wprowadzenie do teorii zespołu funkcji, które w realnym wyniku (w realistycznej granicy asymptotycznej) reprezentować będą realne pole grawitacyjne. Ponieważ zaś w trakcie wykonywanych manipulacji nie ma sposobu zmieniania własności transformacyjnych rozpatrywanych obiektów to wynika stąd, że dla uwzględnienia roli grawitacji w kwantowej teorii pola musimy dysponować taką wersją tej teorii, w której występują funkcje próbne tworzące symetryczny tensor drugiego rzędu, przy czym w ostatecznym wyniku tensor ten powinien być związany z tensorem metrycznym.

Praca niniejsza poświęcona jest badaniu roli tak właśnie dobranych tensorowych funkcji próbnych, jako czynnika ingerującego w strukturę macierzy S . Składa się ona z 6

rozdziałów i uwag końcowych. W p i e r w s z y m rozdziale omawiamy elementy metody Bogolubowa konstrukcji macierzy S . W d r u g i m rozdziale, opierając się częściowo na metodzie Bogolubowa a częściowo na pracy Epsteina i Glasera [2_7], podajemy konstrukcję macierzy S przy uwzględnieniu wpływu zewnętrznego, klasycznego, słabego pola grawitacyjnego. W rozdziale t r z e c i m podajemy jawną postać tensorowych funkcji próbnych zarówno w przestrzeni konfiguracyjnej (położeniowej) jak i pędowej. W rozdziale c z w a r t y m podajemy opis oddziaływania układu bezspinowych cząstek nie naładowanych z polem grawitacyjnym (czyli z polem funkcji próbnych). W rozdziale p i ą t y m opisujemy oddziaływania bezspinowych cząstek naładowanych z polem elektromagnetycznym przy uwzględnieniu wpływu pola grawitacyjnego (pola funkcji próbnych). W rozdziale s z ó e t y m podajemy analizie ogólny n -wierzchołkowy diagram Feynmana (uwzględniający wpływ obecności zewnętrznego klasycznego pola grawitacyjnego) i wykazujemy ograniczoność funkcji współczynnika, której diagram ten odpowiada.

Następnie, tytułem przykładu, obliczamy efektywnie element macierzy S w drugim rzędzie przybliżenia, odpowiadający emisji a następnie absorpcji fotonu przez elektron przy uwzględnieniu oddziaływania foton-elektron ze słabym, klasycznym, zewnętrznym polem grawitacyjnym. Odnośny element macierzy S (którego postać podajemy explicite w postaci dobrze zbieżnego szeregu) zależy od masy m elektronu, jego trój-

pędu \vec{k} oraz od jedyne go parametru naszej teorii - stałej l (która ma wymiar długości i jest związana z niezerowym i stałym skalar em krzywizny zew nętrznego pola grawitacyjnego). Element ten ma skończoną wartość.

W niniejszej pracy: 1/ posługujemy się konwencją sumowania Einsteina; 2/ za tło wszelkich oddziaływań traktujemy przestrzeń M^4 czyli czasoprzestrzeń Minkowskiego o metryce $/-, -, -, +/$; 3/ przez $\eta_{\kappa\nu}$ oznaczamy tensor metryczny tej czasoprzestrzeni; 4/ posługujemy się w pracy obrazem oddziaływania; 5/ używamy układu jednostek, w którym $\hbar = c = 1$.

Elementy metody Bogolubowa konstrukcji macierzy S

Bogolubow dla konstrukcji macierzy S wprowadza do teorii tzw. funkcję "włączeniową" $g(x)$. Jest ona polem skalarnym, ciągłym, określonym na czterowymiarowych obszarach $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ dających się porozdzielać powierzchniami przestrzennie podobnymi w ten sposób, że dla każdego naturalnego i mniejszego od "n" wskaźnika "l" istnieje powierzchnia o równaniu $x_4 = \zeta_l(\vec{x})$ rozdzielająca czteroobszary Ω_l i Ω_{l+1} . W szczególności równania tych powierzchni mogą mieć postać $x_4 = \zeta_l(\vec{x}) = \text{const}_l \stackrel{\text{df}}{=} t_l$, którą osiągnąć można przez odpowiednio dobraną transformację Lorentza. Wówczas pomiędzy obszarami $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ zachodzi następująca relacja chronologiczna:

$$\Omega_1 \lesssim \Omega_2 \lesssim \dots \lesssim \Omega_{n-1} \lesssim \Omega_n \quad (1.1)$$

Oznacza to, że każde dwie punktochwile, z których pierwsza pochodzi z obszaru Ω_l , a druga z Ω_{l+1} albo są połączone interwałem przestrzennie podobnym, albo pierwsza jest wcześniejsza od drugiej. Wprowadźmy oznaczenia:

$$\{x_1\} \stackrel{\text{df}}{=} \Omega_1, \quad g(x_1) \stackrel{\text{df}}{=} g(\Omega_1) \quad (1.2)$$

Wówczas:

$$\bigwedge_{0 < l \leq n} \text{supp } g(\Omega_l) = \text{supp } g(x_l) = \Omega_l \quad (1.3)$$

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n \subset M^{(4)} \quad (1.4)$$

Funkcję $g(x)$ Bogolubow nazywa funkcją "włączeniową" i traktuje ją jako sposób matematycznego opisu stopnia włączenia oddziaływania w czteroobszarach będących nośnikami tych funkcji. Posługując się językiem schwingerowskiej teorii źródeł (137) w tych czteroobszarach $\Omega_1 \dots \Omega_n$ źródła "dają znać" o sobie za pośrednictwem funkcji włączeniowej (w języku Schwingera "źródłowej") w ten sposób, że funkcja $g(x)$ opisuje fakt występowania w $\Omega_1 \dots \Omega_n$ oddziaływań przejawiających się w doświadczalnie dostrzegalnych zmianach stanu fizycznego układu cząstek, których rozproszenie opisywane jest w teorii macierzy S .

Posługując się funkcjami włączeniowymi Bogolubow wprowadza następnie do teorii następujący formalny szereg funkcjonalny $S(g)$, zbudowany względem iloczynów ("potęg") skalarnej funkcji $g(x_1) \dots g(x_n)$

$$S(g) \stackrel{\text{df}}{=} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\Omega_1} \dots \int_{\Omega_n} S_n(x_1, \dots, x_n) g(x_1) \dots g(x_n) dx_1^4 \dots dx_n^4 \quad (1.5)$$

Na ten szereg, który po przejściu asymptotycznym ($g(x) \rightarrow 1$) ma przejść w macierz S nakłada się następujące, ogólnie

zresztą w kwantowej teorii pola przyjmowane, warunki:

1) Warunek początkowy

$$S(0) = 1 \quad (1.6)$$

(przyjęcie iż $\sum_n g(x_n) = 0$ oznacza, że nie ma w ogóle oddziaływania)

2/ Warunek unitarności

$$S(g) S^+(g) = S^+(g) S(g) = 1 \quad (1.7)$$

3/ Warunek kowariantności Lorentza

$$U(a, \Lambda) S(g) U^{-1}(a, \Lambda) = S[g(\Lambda^{-1}(x-a))] \quad (1.8)$$

We wzorze tym a i Λ są to macierze niejednorodnego przekształcenia Lorentza $T_{\Lambda, a}$

$$T_{\Lambda, a} : x \rightarrow a + \Lambda x \quad (1.9)$$

$U(a, \Lambda)$ jest unitarnym operatorem, za pomocą którego zmienia się pod wpływem transformacji $T_{\Lambda, a}$ wektor stanu ϕ . Wektor ten jest elementem przestrzeni Hilberta, opisującym stan rozpatrywanego układu

$$\phi \xrightarrow{T_{\Lambda, a}} \phi \stackrel{df}{=} U(a, \Lambda) \phi \quad (1.10)$$

4/ Warunek przyczynowości. Bogolubow zapisuje go w postaci:

$$\bigwedge_{\substack{l \in \mathbb{N} \\ s \in \mathbb{N} \\ l < s}} \frac{\delta^{\mathcal{F}}}{\delta g(x_l)} \left[\frac{\delta^{\mathcal{F}} S(g)}{\delta g(x_s)} - S^+(g) \right] = 0 ; \Omega_1 \approx \Omega_s \quad (1.11)$$

gdzie symbol " $\frac{\delta^{\mathcal{F}}}{\delta g(x)}$ " oznacza pochodną funkcjonalną.

Nadto w oparciu o zasadę korespondencji Bogolubow kładzie

$$S_1(x_1) = 1 L_{int}(x_1) \quad (1.12)$$

gdzie $L_{int}(x)$ jest skalarnym lagrangianem oddziaływania, którego postać musi być dana jako specyfikacja modelu interakcji. Związki (1.5) ... (1.11) wystarczają, aby wyrazić wszystkie /tkwiące pod całkami w szeregu określonym przez (1.5) funkcje $S_2(x_1, x_2)$, $S_3(x_1, x_2, x_3)$... $S_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ za pomocą $S_1(x)$ czyli poprzez $L_{int}(x)$. Następnie Bogolubow wykonuje graniczne przejście asymptotyczne, w którego wyniku otrzymuje końcową postać macierzy S. Przejście to polega na dwóch krokach:

$$1) \quad \bigwedge_{n \in \{N\}} \Omega_n \rightarrow M^{(4)} \quad (1.13)$$

$\{N\}$ - zbiór liczb naturalnych

Oznacza to, że każdy z osobna czteroobszar Ω_n (czyli każdy czteroobszar, w którym rozprzestrzenia się oddziaływanie) rozszerza się na całą przestrzeń $M^{(4)}$ przy zachowaniu chronologicznego uporządkowania w sensie (1.3).

$$2) \quad \bigwedge_{n \in \{N\}} g(x_n) \rightarrow 1 \quad (1.14)$$

Oznacza, że w każdym z osobna obszarze Ω_n funkcja włączeniowa zmierza do jedności w sensie granicy adiabaticznej.

Po dokonaniu tych przejść uzyskujemy następujące wyrażenie na macierz S

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{x_1} \dots \int_{x_n} S_n(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (1.15)$$

gdzie:

$$S_n(x, \dots, x_n) = i^n T. [L_{int}(x_1) \dots L_{int}(x_n)] + \mathcal{L}_n \quad (1.15')$$

"T" jest symbolem iloczynu chronologicznego o \mathcal{L}_n - kwazilokalnym składnikiem postaci:

$$\mathcal{L}_n = \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}} C_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}} \delta^{(\alpha_1)}(x_1 - x_2) \dots \delta^{(\alpha_{n-1})}(x_{n-1} - x_n) \quad (1.16)$$

przy czym

$$\delta^{(\alpha_k)}(x_{k-1} - x_k) = \sum_{\lambda} \hat{C}_{\alpha_k}^{(\nu_{\lambda,k})} \frac{d^{\alpha_k}}{\prod_{\lambda=1}^4 d(x_{k-1}^{\lambda})} \nu_{\lambda,k} \prod_{\rho=1}^4 \delta(x_{k-1}^{\rho} - x_k^{\rho}) \quad (1.17)$$

gdzie:

$$\alpha_k \in \{N\} \quad (1.18)$$

$$\nu_{\lambda,k} \in \{N\} + \{0\} \quad (1.19)$$

x_{α} oznacza współrzędne punktowili x , $\alpha = 1, 2, 3, 4$.

$$\bigwedge_{k \in N} \sum_{\lambda=1}^4 \nu_{\lambda,k} = \alpha_k \quad (1.20)$$

Suma w (1.16) jest rozciągnięta na wszystkie możliwe wartości naturalnych wekaźników $\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}$, a współczynniki $C_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}}$ /występujące w (1.16)/ oraz $\hat{C}_{\alpha_k}^{(\nu_{\lambda,k})}$ /występujące w (1.17)/ są stałe i mogą być wybrane dowolnie. Składniki \mathcal{L}_n można zresztą po pewnych przekształceniach nie zmieniających ich kwazilokalnej struktury włączyć wprost do lagrangianu oddziaływania, korzystając z dowolności dookreślenia iloczynu chronologicznego. Wówczas jednak stanie się on oczywiście kwazilokalnym. Stałe $C_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}}$ oraz $\hat{C}_{\alpha_k}^{(\nu_{\lambda,k})}$ można tak dobrać, aby za ich pomocą usunąć nieskończoności,

które występują często przy wyliczeniach typowych dla kwantowej teorii pola całek, pojawiających się przy wyliczeniu funkcji współczynnikowych dla poszczególnych elementów macierzy S po uprzednim przejściu do reprezentacji pędowej. Tam, gdzie nieskończoności owe mają charakter wielomianowy (teorie renormalizowalne) da się to zrobić odpowiednim doбором skończonej ilości owych współczynników (ζ_{14} , $\zeta_{14'}$, ζ_{15}). W przypadku teorii nierenormalizowalnych nie da się już tego tak uczynić. K a d y s z e w s k i (ζ_{16}) pokazał, iż źródłem ultrafioletowych nieskończoności pojawiających się w teoriach renormalizowalnych są kwazicząstki, czyli obiekty o czteropędach reprezentowanych przez kowariantnie sparametryzowane fourierowskie transformaty funkcji Heaviside'a, za pomocą których rozpisujemy iloczyn chronologiczny lagrangianów oddziaływania. Regularyzacja w tym przypadku będzie polegała na takim doborze członów kwazilokalnych, by ich fourierowskie transformaty znosiły się z transformacjami reprezentującymi czteropędy kwazicząstek. Dla każdego więc modelu oddziaływania z osobna a nawet dla każdego z osobna typu diagramu Feynmana (zmodyfikowanego liniami kwazicząstek Kadyszewskiego) należy owe człony kwazilokalne dobierać oddzielnie.

K a d y s z e w s k i, M i r - K a s i m o w i S k a c z k o w (ζ_{18} i ζ_{17}) podali, zdaniem autora, dość interesującą wersję uogólnienia sformułowania Bogolubowa teorii macierzy S , posługując się zakrzywioną przestrzenią

pędów o stałej krzywiznie. Wówczas pojawia się m.in. ograniczenie na kwadrat czteropędu cząstki $/p^2 = 1/$ i modyfikacja w sformułowaniu warunku przyczynowości dla pędowej przestrzeni de Sittera.

W niniejszej pracy wybierzemy inną drogę postępowania. Zbadamy mianowicie konsekwencje wynikające z uwzględnienia faktu istnienia zewnętrznego, słabego, ale nie znikającego, klasycznego (tzn. nie podlegającego procedurze drugiego kwantowania) pola grawitacyjnego oddziałującego na układ cząstek, którego stan jest opisywany przez kwantową teorię pola. To właśnie oddziaływanie cząstek z zewnętrznym, klasycznym polem grawitacyjnym będziemy interpretować jako *sui generis* oddziaływanie z czasoprzestrzenią. Okaze się, że zaniedbanie wpływu tego oddziaływania można będzie traktować jako źródło pojawiania się ultrafioletowych nieskończoności przy obliczaniu elementów macierzy S. Dokładnie przeanalizujemy te zagadnienia dla modeli oddziaływań mezonowych typu $L_{int}(x) = \lambda \psi^4(x)$ i oddziaływań mezonowo-fotonowych typu $L_{int}(x) = e^2 \psi(x) \psi^x(x) A_\nu(x) A^\nu(x)$ ograniczając się do członu S_2 macierzy S. Można też do powyższego programu podejść z innej strony. Bogolubow podał sposób konstrukcji macierzy S posługując się skalarnymi próbnymi funkcjami włączeniowymi. Ostatnio S i a w n o w (197) zajął się przypadkiem wektorowych próbnymi funkcji włączeniowych i pokazał nietrywialność tego uogólnienia, wiążąc je w przejściu granicznym z czteropotencjałem pola elektromagnetycznego.

Wydaje się więc naturalne, że chcąc zająć się następnym pod względem złożoności rodzajem funkcji próbnych - funkcjami tensorowymi nasuwa się myśl o powiązaniu ich w przejściu granicznym z polem grawitacyjnym.

Konstrukcja macierzy S przy uwzględnieniu wpływu zewnętrznego, klasycznego, słabego pola grawitacyjnego

Oznaczmy przez $u_i(x)$ funkcje pola cząstek, które na siebie oddziałują. Geometryczny charakter tych funkcji zależy od rodzaju tych cząstek. Ponadto cząstki te tkwią w słabym zewnętrznym polu grawitacyjnym o potencjałach:

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + z_{\mu\nu}(x); \int_{x \in M(4)} |z_{\mu\nu}(x)| \ll 1 \quad (2.1)$$

Pole to jest klasyczne tzn. do opisu oddziaływania jego na cząstkę nie stosujemy procedury drugiego kwantowania. Zakładamy natomiast istnienie lagrangianu takiego oddziaływania i to, że jest on skalarem, a więc niezmiennikiem względem dowolnych byle odwracalnych transformacji współrzędnych x^α . Miara całkowania występująca w odnośnej całce działania będzie mieć postać

$$d^4_q x = \sqrt{-\text{Det } g_{\mu\nu}(x)} d^4 x = \text{inv} \quad (2.2)$$

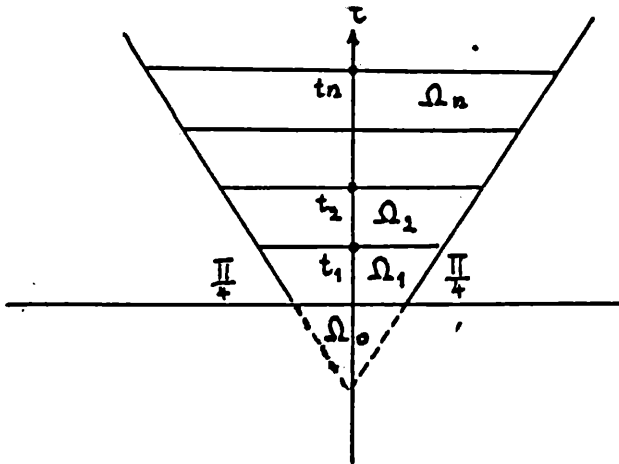
Pole grawitacyjne (2.1) jako pole oddziaływania klasycznego opisane funkcjami tensorowymi $Z_{\mu\nu}(x) = Z_{\nu\mu}(x)$ jest więc osadzone na tle przestrzeni Minkowskiego (1907).

Ze względu na nierówność występującą w (2.1) we wszystkich wyrażeniach wielomianowych (które później się nam ukaza) ze względu na potencjały $z_{\mu\nu}(x)$ i ich cząstkowe pochodne będziemy opuszczać te człony, które okażą się być rzędu większego niż 1.

Podobnie jak czyni to Bogolubow, wprowadzimy do teorii macierzy S jako funkcje próbne (używając języka formalizmu Bogolubowa - funkcje włączeniowe, mówiąc zaś językiem formalizmu Schwingera - funkcje źródłowe), ciąg symetrycznych, ciągłych, znikających w nieskończoności szybciej niż odwrotność dowolnej funkcji wielomianowej, pól tensorowych $t_{\mu\nu}^{(1)}(x) \dots t_{\mu\nu}^{(n)}(x)$ o nośnikach $\Omega_1 \dots \Omega_n$ tak rozmieszczonych w $M^{(4)}$ (rys.1), aby

\wedge
LEN
SEN

$$\Omega_1 \lesssim \Omega_s \text{ jeśli } 1 < s \quad (2.3)$$



Rys. 1

Jak widać, czteroobszar Ω_0 należy do wnętrza stożka przeszłości czynnej czteroobszaru Ω_1 , a zatem

$$\Omega_0 \lesssim \Omega_1 \quad (2.4)$$

Wychodzimy z uwzględnienia faktu, iż oddziaływanie pomiędzy cząstkami (pojmowane jako przyczyna zmiany ich stanu fizycznego) wchodzącymi w skład układu, będącego aktualnym obiektem naszych badań, jest rozprzestrzenione w pewnym czterowymiarowym obszarze Ω_n^{tot} przestrzeni Minkowskiego, który możemy porozdzielać przestrzennie podobnymi powierzchniami o równaniach $x^4 = t_k$, gdzie $k=0,1,2,\dots,n$ a $t_0=0$, tak jak to przedstawiono na rys.1. Chwila t_k ogranicza czasowo "od góry" wszystkie punktochwile obszaru Ω_k a "od dołu" wszystkie punktochwile obszaru Ω_{k+1} . Wskutek tego mamy:

$$\Omega_0 \lesssim \Omega_1 \lesssim \Omega_2 \lesssim \dots \lesssim \Omega_n \quad (2.5)$$

Definiujemy:

$$\Omega_n^{\text{tot}} \stackrel{\text{df}}{=} \Omega_n \cup \Omega_{n-1} \cup \dots \cup \Omega_1 \cup \Omega_0 = \Omega_n \cup \Omega_{n-1}^{\text{tot}} \quad (2.6)$$

Wprowadzamy do teorii ciąg symetrycznych dostatecznie regularnych pól tensorowych $t_{\mu\nu}^{(n)}(x) = t_{\nu\mu}^{(n)}(x)$, takich, że:

$$\text{suppt}_{\mu\nu}^{(n)}(x) \stackrel{\text{df}}{=} \Omega_n \quad (2.7)$$

Funkcje te będą grały rolę funkcji próbnych (używając nomenklatury Bogolubowa) będących odpowiednikiem omawianych wcześniej skalarnych funkcji $g(x)$ a jednocześnie funkcji źródłowych (wg nomenklatury Schwingera), gdyż zachowują one

po przejściu asymptotycznym rolę klasycznych pól zewnętrznych ingerujących w opisie dynamicznego zachowania się badanego przez nas układu.

Oznaczmy przez $\{x_n\}$ zbiór wszystkich punktochwil wchodzących w skład czteroobszaru Ω_n .

Definiujemy:

$$t_{\mu\nu}^{(n)\text{tot}}(x) \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{k=0}^n t_{\mu\nu}^{(k)}(x) \quad (2.8)$$

Zatem

$$\text{supp} t_{\mu\nu}^{(n)\text{tot}}(x) = \Omega_n^{\text{tot}} \quad (2.9)$$

Z (2.8) i (2.9) wynika, że

$$\bigwedge_{x_k \in \Omega_k} t_{\mu\nu}^{(n)\text{tot}}(x_k) = t_{\mu\nu}^{(k)}(x_k) \stackrel{\text{df}}{=} t_{\mu\nu}^{(k)}(x) \quad (2.10)$$

Macierz S jest związana z przejściem układu ze stanu początkowego (cząstki wejściowe "jeszcze" swobodne), opisanego wektorem stanu ϕ_{in} , do stanu końcowego (cząstki wyjściowe "już" swobodne) opisanego wektorem stanu ϕ_{out} następująco:

$$S_{in,out} = \langle \phi_{out}^+ | S \phi_{in} \rangle \quad (2.11)$$

$S_{in,out}$ jest elementem macierzowym odpowiadającym powyższemu przejściu. Uwzględnijmy teraz fakt, że oddziaływanie powodujące powyższe przejście jest zlokalizowane w pewnym czteroobszarze Ω_n^{tot} . Mając na względzie (2.5) i (2.6) możemy więc dalej przyjąć, że spowodowane jest ono następującymi kolejno po sobie w czasie oddziaływaniami rozprzestrzonymi w czteroobszarach: Ω_1 (w Ω_0 nie ma oddziaływania),

$\Omega_2 \dots \Omega_n$. Pod wpływem oddziaływania zlokalizowanego w Ω_1 wektor stanu $|\phi_{in}\rangle$ przechodzi w inny już wektor stanu $|\phi_2\rangle$ itd. aż wreszcie wektor stanu $|\phi_{n-1}\rangle$ przechodzi pod wpływem oddziaływania zlokalizowanego w obszarze Ω_n w wektor stanu $|\phi\rangle = |\phi_{out}\rangle$. Operatory, powodujące kolejno następujące po sobie powyższe zmiany wektorów stanu, traktujemy jako funkcjonały tensorowych funkcji próbnych (źródłowych) zlokalizowanych w odpowiednich czteroobszarach $\Omega_1 \dots \Omega_n$, zaznaczonych schematycznie na rysunku 1.

A więc

$$|\phi_k\rangle = S_k(t_{\mu\nu}^{(k)}(x_k))|\phi_{k-1}\rangle, \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad |\phi_0\rangle = |\phi_{in}\rangle \quad (2.12)$$

Oznaczmy dla skrótu

$$S_k(t_{\mu\nu}^{(k)}(x_k)) \stackrel{df}{=} S(\Omega_k) \quad (2.13)$$

Ponieważ w Ω_0 nie ma zlokalizowanego oddziaływania przeto

$$S(\Omega_0) \stackrel{df}{=} 1 \quad (2.14)$$

Z (2.10), (2.12), (2.13) i (2.14) wynika, że

$$S(\Omega_n^{tot}) = S(\Omega_n) S(\Omega_{n-1}) \dots S(\Omega_1) S(\Omega_0); \quad (2.15)$$

$$\Omega_0 \lesssim \Omega_1 \lesssim \dots \lesssim \Omega_n$$

gdzie

$$S(\Omega_n^{tot}) = S\left[t_{\mu\nu}^{(n)tot}(x)\right] \quad (2.16)$$

$S(\Omega_n^{tot})$ jest operatorem zmieniającym wektor stanu pod wpływem oddziaływania zlokalizowanego w obszarze Ω_n^{tot} traktowanym jako całość.

Uwzględniając tendencję do opisu nie tylko oddziaływań krótkozasięgowych lecz także elektromagnetycznych określimy macierz S jako granicę następującego przejścia asymptotycznego operatora $S(\Omega_n^{\text{tot}})$:

$$\begin{aligned}
 S &= \lim S(\Omega_n^{\text{tot}}) \\
 1) \quad \bigwedge_{n > 0} \Omega_n^{(3)} &\rightarrow M^{(3)} \\
 2) \quad \Omega_n^{\text{tot}} &\rightarrow M^{(4)} \\
 3) \quad n &\rightarrow \infty \\
 4) \quad t_{\mu\nu}^{(n)\text{tot}} &\rightarrow t_{\mu\nu}(x) \quad (2.17)
 \end{aligned}$$

gdzie funkcje tensorowe $t_{\mu\nu}(x)$ będą grały rolę klasycznych pól (funkcji źródłowych), które zwiążemy w pewien sposób (w następnym rozdziale) ze słabym zewnętrznym polem grawitacyjnym obejmującym obszar efektywnego oddziaływania ze sobą cząstek naszego układu. Symbol $M^{(3)}$ oznacza trójprzestrzeń euklidesową. Przyjmijmy (tak jak się powszechnie w standardowej teorii pola postępuje), że w przypadku, gdy oddziaływanie jest rozprzestrzenione tylko w pewnym czteroobszarze Ω_k i gdy jest ono (co zakładamy) lokalne, to nasz operator $S(\Omega_k)$ traktowany jako funkcjonał tensorowych funkcji próbnych określonych na Ω_k jest określony następującym wyrażeniem (np. [227]).

$$S(\Omega_k) \stackrel{\text{df}}{=} S(t_{\mu\nu}^{(k)}(x_k)) = 1 + \int_{\Omega_k} S_1[u_1(x_k), t_{\mu\nu}^{(k)}(x_k)] d^4_t x_k \quad (2.18)$$

gdzie

$$d_t^4 x_k \stackrel{\text{df}}{=} \sqrt{-\text{Det}(t_{\mu\nu}^{(k)}(x))} d^4 x_k \quad (2.19)$$

i gdzie, zgodnie z zasadą korespondencji, przyjmujemy, że

$$S_1 \left[u_1(x_k), t_{\mu\nu}^{(k)}(x_k) \right] = i \mathcal{L}_{\text{int}} \left[u_1(x^k), t_{\mu\nu}^{(k)}(x_k) \right] \stackrel{\text{df}}{=} S_1(x_k) \quad (2.20)$$

L_{int} jest lagrangianem oddziaływania a $u_1(x)$ są funkcjami pola cząstek wchodzących w skład rozpatrywanego przez nas układu, lagrangian oddziaływania $L_{\text{int}}(x) \stackrel{\text{df}}{=} L(x)$ ma być funkcją skalarną. Mając to na względzie, przyjmiemy, że będzie on postaci

$$L(x) = \phi^{\mu\nu} \left[u_1(x) \right] t_{\mu\nu}(x) \quad (2.21)$$

gdzie $\phi^{\mu\nu} \left[u_1(x) \right]$ jest tensorową funkcją, której argumentami są funkcje pola cząstek naszego układu. Oczywiście, że ich ilość oraz geometryczna struktura zależą od rodzaju tych cząstek. Mówiąc inaczej, ograniczamy się w niniejszej pracy do klasy lagrangianów, dających się zapisać w postaci (2.21).

Z (2.21) wynika, że

$$\text{supp. } L(x_k) = \text{supp. } S_1 \left[u_1(x_k), t_{\mu\nu}^{(k)}(x) \right] = \Omega_k \quad (2.22)$$

Rozpatrzmy teraz przypadek oddziaływania zlokalizowanego w obszarze Ω_2^{tot} . Z (2.15) i z (2.18) wynika wówczas, że:

$$s(\Omega_2^{\text{tot}}) = s(\Omega_2) s(\Omega_1) = \left[1 + \int_{\Omega_2} s_1(x_2) d_t^4 x_2 \right] \left[1 + \int_{\Omega_1} s_1(x_1) d_t^4 x_1 \right] \quad (2.23)$$

Z (2.23), (2.22), (2.9), (2.8) i (2.6) wynika^{x/}, że:

$$\begin{aligned}
 s(\Omega_2^{\text{tot}}) = & 1 + \int_{\Omega_2^{\text{tot}}(x)} s_1[u_1(x), t_{\mu\nu}^{(2)\text{tot}}(x)] d\Omega_2^{\text{tot}}(x) + \\
 & + \int_{\Omega_2^{\text{tot}}(x)} s_1[u_1(x), t_{\mu\nu}^{(2)}(x)] d\Omega_2^{\text{tot}}(x) \times \\
 & \times \int_{\Omega_2^{\text{tot}}(y)} s_1[u_1(y), t_{\mu\nu}^{(1)}(y)] d\Omega_2^{\text{tot}}(y); \quad x \sim y \quad (2.24)
 \end{aligned}$$

gdzie $d\Omega_2^{\text{tot}}(x)$ i $d\Omega_2^{\text{tot}}(y)$ są miarami całkowania (2.19) po czteroobszarach $\Omega_2^{\text{tot}}(x)$ i $\Omega_2^{\text{tot}}(y)$.

Dokonując teraz pierwszego przejścia asymptotycznego z (2.17) ($\Omega_1^{(3)} \rightarrow M^{(3)}$ i $\Omega_2^{(3)} \rightarrow M^{(3)}$) oraz mając na względzie, że $\Omega_2 \sim \Omega_1$, łatwo dostrzec, że (2.24) można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned}
 s(\Omega_2^{\text{tot}}) = & 1 + \int_{\Omega_2^{\text{tot}}(x)} s_1[u_1(\vec{x}, x_4), t_{\mu\nu}^{(2)\text{tot}}(\vec{x}, x_4)] d\Omega_2^{\text{tot}}(x) + \\
 & + \frac{1}{2} \left[\int_{\Omega_2^{\text{tot}}(y)} \int_{\Omega_2^{\text{tot}}(x)} s_1[u_1(\vec{y}, y_4), t_{\mu\nu}^{(2)\text{tot}}(\vec{y}, y_4)] \times \right. \\
 & \times s_1[u_1(\vec{x}, x_4), t_{\mu\nu}^{(2)\text{tot}}(\vec{x}, x_4)] \times d\Omega_2^{\text{tot}}(y) d\Omega_2^{\text{tot}}(x) \Big]_{y \sim x} + \\
 & + \frac{1}{2} \left[\int_{\Omega_2^{\text{tot}}(x)} \int_{\Omega_2^{\text{tot}}(y)} s_1[u_1(\vec{x}, x_4), t_{\mu\nu}^{(2)\text{tot}}(\vec{x}, x_4)] \times \right. \\
 & \times s_1[u_1(\vec{y}, y_4), t_{\mu\nu}^{(2)\text{tot}}(\vec{y}, y_4)] d\Omega_2^{\text{tot}}(x) d\Omega_2^{\text{tot}}(y) \Big]_{x \sim y}
 \end{aligned} \quad (2.25)$$

^{x/} z (2.10) i z (2.22) wynika bowiem, że:

$$\int_{\Omega_1^{\text{tot}}(x)} s_1(x_1) d_t^4 x_1 = \int_{\Omega_1^{\text{tot}}(x)} s_1[\mu_1(x), t_{\mu\nu}^{(1)}(x)] d\Omega_1^{\text{tot}}(x) \quad (2.23')$$

Stąd zaś dostajemy

$$\begin{aligned}
 s(\Omega_2^{\text{tot}}) = & 1 + \int_{\Omega_2^{\text{tot}}(x)} s_1 \left[u_1(\vec{x}, x_4), t_{\mu\nu}^{(2)\text{tot}}(\vec{x}, x_4) \right] d\Omega_2^{\text{tot}}(x) + \\
 & + \frac{1}{2} \int_{\Omega_2^{\text{tot}}(x)} \int_{\Omega_2^{\text{tot}}(y)} T \left\{ s_1 \left[u_1(\vec{x}, x_4), t_{\mu\nu}^{(2)\text{tot}}(\vec{x}, x_4) \right] \right. \\
 & \left. s_1 \left[u_1(\vec{y}, y_4), t_{\mu\nu}^{(2)\text{tot}}(\vec{y}, y_4) \right] \right\} \times \\
 & \times d\Omega_2^{\text{tot}}(x) d\Omega_2^{\text{tot}}(y) \quad (2.26)
 \end{aligned}$$

gdzie T jest symbolem iloczynu chronologicznego.

Rozpatrzmy teraz przypadek, gdy oddziaływanie jest zlokalizowane w obszarze Ω_3^{tot} . Wówczas z (2.6), (2.15) i z (2.18) wynika, że

$$\begin{aligned}
 s(\Omega_3^{\text{tot}}) = & (1 + \int_{\Omega_3} s_1(3) d\Omega_3) (1 + \int_{\Omega_2} s_1(2) d\Omega_2) (1 + \int_{\Omega_1} s_1(1) d\Omega_1), \quad (2.27) \\
 & \Omega_3 \supseteq \Omega_2 \supseteq \Omega_1
 \end{aligned}$$

gdzie:

$$s_1(k) \stackrel{\text{df}}{=} s_1 \left[u_1(x_k), t_{\mu\nu}^{(k)}(x) \right], \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.28)$$

oznaczymy dalej

$$s_1(k, n) \stackrel{\text{df}}{=} s_1 \left[u_1(x_k), t_{\mu\nu}^{(n)\text{tot}}(x) \right], \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2.28')$$

Z (2.27) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 s(\Omega_3^{\text{tot}}) = & 1 + \sum_{l=1}^3 \int_{\Omega_1} s_1(1) d\Omega_1 + \int_{\Omega_3} s_1(3) d\Omega_3 \left[\int_{\Omega_2} s_1(2) d\Omega_2 + \int_{\Omega_1} s_1(1) d\Omega_1 \right] + \\
 & + \int_{\Omega_2} s_1(2) d\Omega_2 \int_{\Omega_1} s_1(1) d\Omega_1 + \int_{\Omega_3} s_1(3) d\Omega_3 \int_{\Omega_2} s_1(2) d\Omega_2 \int_{\Omega_1} s_1(1) d\Omega_1 \quad (2.27')
 \end{aligned}$$

ale:

$$\sum_{l=1}^3 \int_{\Omega_1} s_1(1) d\Omega_1 = \int_{\Omega_3^{\text{tot}}(x_1)} s_1 \left[u_1(x_1), t_{\mu\nu}^{(3)\text{tot}}(x_1) \right] d\Omega_3^{\text{tot}}(x_1) \stackrel{\text{df}}{=} \int_{\Omega_3^{\text{tot}}(x_1)} s_1(1,3) d\Omega_3^{\text{tot}}(x_1) \quad (2.29)$$

i podobnie

$$\sum_{l=1}^2 \int_{\Omega_1} s_1(1) d\Omega_1 = \int_{\Omega_2^{\text{tot}}(x_2)} s_1 \left[u_1(x_2), t_{\mu\nu}^{(2)\text{tot}}(x_2) \right] d\Omega_2^{\text{tot}}(x_2) \stackrel{\text{df}}{=} \int_{\Omega_2^{\text{tot}}(x_2)} s_1(2,2) d\Omega_2^{\text{tot}}(x_2) \quad (2.30)$$

/ (2.29) i (2.30) wynika z (2.28), (2.8) i z (2.9)/

z (2.28) wynika dalej, że:

$$\int_{\Omega_2} s_1(2) d\Omega_2 \int_{\Omega_1} s_1(1) d\Omega_1 = \int_{\Omega_2^{\text{tot}}(x_2)} s_1(2) d\Omega_2^{\text{tot}}(x_2) \int_{\Omega_2^{\text{tot}}(x_1)} s_1(1) d\Omega_2^{\text{tot}}(x_1) \quad (2.31)$$

oraz że

$$\prod_{l=1}^3 \int_{\Omega_1} s_1(1) d\Omega_1 = \prod_{l=1}^3 \int_{\Omega_3^{\text{tot}}(x_1)} s_1(1) d\Omega_3^{\text{tot}}(x_1) \quad (2.32)$$

Podstawiając (2.29) - (2.32) do (2.27') otrzymujemy po prostym przekształceniu

$$s(\Omega_3^{\text{tot}}) = 1 + \int_{\Omega_3^{\text{tot}}(x_1)} s_1(1,3) d\Omega_3^{\text{tot}}(x_1) + \left[\int_{\Omega_3(x_3)} s_1(3) d\Omega_3 + \int_{\Omega_2^{\text{tot}}(x_2)} s_1(2) d\Omega_2^{\text{tot}}(x_2) \right] \times \\ \times \int_{\Omega_2^{\text{tot}}(x_1)} s_1(1) d\Omega_2^{\text{tot}}(x_1) + \prod_{l=1}^3 \int_{\Omega_3^{\text{tot}}(x_1)} s_1(1) d\Omega_3^{\text{tot}}(x_1) \quad (2.33)$$

ale:

$$\int_{\Omega_3(x_3)} s_1(3) d\Omega_3 + \int_{\Omega_2^{tot}(x_2)} s_1(2) d\Omega_2^{tot}(x_2) = \int_{\Omega_3^{tot}(x_1)} s_1(1,3) d\Omega_3^{tot}(x_1) \quad (2.34)$$

$$1 \int_{\Omega_2^{tot}(x_1)} s_1(1) d\Omega_2^{tot}(x_1) = \int_{\Omega_3^{tot}(x_2)} s_1(1) d\Omega_3^{tot}(x_2) \quad (2.35)$$

Podstawiając (2.34) i (2.35) do (2.33) i dokonując przejść w (1), z (2.17), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} s(\Omega_3^{tot}) = 1 + & \int_{\Omega_3^{tot}(x_1)} s_1 \left[u_1(x_1), t_{\mu\nu}^{(3)tot}(x_1) \right] d\Omega_3^{tot}(x_1) + \frac{1}{2!} \int_{\Omega_3^{tot}(x_1)} \int_{\Omega_3^{tot}(x_2)} T_{\cdot} \\ & \cdot \left\{ s_1 \left[u_1(x_1), t_{\mu\nu}^{(3)tot}(x_1) \right] \times s_1 \left[u_1(x_2), t_{\mu\nu}^{(3)tot}(x_2) \right] \right\} d\Omega_3^{tot}(x_1) d\Omega_3^{tot}(x_2) \times \\ & \times d\Omega_3^{tot}(x_3) + \frac{1}{3!} \int_{\Omega_3^{tot}(x_1)} \int_{\Omega_3^{tot}(x_2)} \int_{\Omega_3^{tot}(x_3)} T_{\cdot} \\ & \cdot \left\{ \prod_{l=1}^3 s_1 \left[u_1(x_l), t_{\mu\nu}^{(3)tot}(x_l) \right] \right\} \prod_{k=1}^3 d\Omega_3^{tot}(x_k) \quad (2.36) \end{aligned}$$

Uogólniając powyższą procedurę na przypadek rozprzestrzenia-
nia się oddziaływania w obszarze Ω_n^{tot} otrzymujemy drogą
identycznego postępowania:

$$s(\Omega_n^{tot}) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} T \prod_{l=1}^k \int_{\Omega_n^{tot}(x_1)} s_1 \left[u_1(\vec{x}_1, x_1^4), t_{\mu\nu}^{(n)tot}(x_1, x_1^4) \right] d\Omega_n^{tot}(x_1) \quad (2.37)$$

Dokonując teraz pełnego przejścia asymptotycznego (2.17)

i korzystając z (2.19) i (2.20) otrzymujemy:

$$s = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} T \cdot \prod_{l=1}^k \int_{x_2} L \left[u_1(x_1), t_{\mu\nu}(x_1) \right] d_t^4 x_1 \quad (2.38)$$

czyli po rozpisaniu otrzymujemy ostatecznie postać macierzy S w postaci nieskończonego szeregu funkcyjnego:

$$S = 1 + \int_{x_1} L[u_1(x_1), t_{\mu\nu}(x_1)] d_t^4 x_1 + \frac{1}{2!} \int_{x_1} \int_{x_2} T \left\{ L[u_1(x_1), t_{\mu\nu}(x_1)] \right. \\ \left. L[u_1(x_2), t_{\mu\nu}(x_2)] \right\} d_t^4 x_1 d_t^4 x_2 + \dots \quad (2.38^a)$$

czyli

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{x_1} \dots \int_{x_n} T \left[L(u_1(x_1), t_{\mu\nu}(x_1)) \dots L(u_1(x_n), \right. \\ \left. t_{\mu\nu}(x_n)) \right] d_t^4 x_1 \dots d_t^4 x_n \quad (2.38^b)$$

Zauważmy, że ową postać przedstawienia macierzy S w postaci powyższego szeregu otrzymaliśmy nie na drodze rozumowań perturbacyjnych lecz jako konsekwencję "chronologizacji" obszarów rozprzestrzeniania się oddziaływań.

Każde z całek występujących w (2.38^a) i (2.38^b) brana jest w granicach $[-\infty, +\infty]$, tym niemniej istotny wkład daje całkowanie tylko na obszarze Ω_{ef} , który nazwiemy obszarem efektywnego oddziaływania. Jest to czteroobszar, w którym cząstki wchodzące w skład opisywanego przez naszą teorię układu oddziałują ze sobą w sposób doświadczalnie zauważalny (por. rozdział III). Rozmiary (zarówno przestrzenne jak i rozmiar czasowy) Ω_{ef} są małe w porównaniu z rozmiarami obszaru wypełnionego źródłami zewnętrznego dla obszaru Ω_{ef} słabego pola grawitacyjnego. Te własności pola grawitacyjnego oznaczają, że (makroskopowe) jego źródła rozmieszczone są na zewnątrz obszaru Ω_{ef} i to daleko od "powierzchni", która

odgranicza obszar Ω_{of} od reszty przestrzeni $M^{(4)}$. Nie popełnimy zatem dużego błędu zaniedbując zmiany skalarą krzywizny $R(x)$ tego pola wewnątrz obszaru Ω_{of} . W obszarze tym potencjały grawitacyjne (2.1) muszą więc spełniać jednorodne równania Einsteina, a ponieważ skalar krzywizny $R(x) = \text{const} \neq 0$, przeto (vide np. [217]) równania te muszą zawierać stałą kosmologiczną Λ . Mają więc one postać:

$$\int_{x \in \Omega_{of}} R_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x) R + \Lambda g_{\mu\nu}(x) = 0, \quad R(x) = \text{const} \neq 0 \quad (2.39)$$

$R_{\mu\nu}(x)$ jest tensorem Ricciego. $R = R(x) \stackrel{\text{df}}{=} g_{\mu\nu}(x) R^{\mu\nu}(x)$. Mnożąc stronami (2.33) przez $g_{\mu\nu}(x)$ i sumując otrzymujemy, że $\Lambda = \frac{1}{4} R$, czyli że równania Einsteina przyjmują postać:

$$\int_{x \in \Omega_{of}} R_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{4} g_{\mu\nu}(x) R(x) = 0 \quad (2.40)$$

Warto w tym miejscu zwrócić uwagę na następujący aspekt dyktowanej teorii. Dotąd operowaliśmy wazędzie dowolnymi byle regularnymi dostatecznie szybko znikającymi w nieskończoności i symetrycznymi funkcjami próbnymi $t_{\mu\nu}(x)$. Przyjęcie równań (2.39) czy też, co na jedno wychodzi, (2.40) oznacza, że zawężamy w czteroobszarze Ω_{of} dopuszczalną klasę tensorowych funkcji próbnych na pewną podprzestrzeń przestrzeni $S_{10}(M^{(4)})$ rozpiętą przez rozwiązania tych równań. Z punktu widzenia teorii funkcji uogólnionych każde zwięzienie przestrzeni funkcji próbnych automatycznie zwiększa zapas elementów w przestrzeni dualnej, którą jest właśnie przestrzeń

funkcji uogólnionych. A zatem przyjęcie równań (2.40) dla $g_{\mu\nu}(x)$, czyli (w obszarze Ω_{ef}) dla próbnych funkcji $t_{\mu\nu}(x)$, oznacza rozszerzenie klasy możliwych lagrangianów oddziaływania o takie lagrangiany, które zawierają w sobie lokalne wyrazy znikające przy testowaniu ich funkcjami $t_{\mu\nu}(x)$. Nietrywialność takiej procedury wyraźnie przejawia się w tych przypadkach, w których tradycyjnymi metodami nie można skonstruować kwantowej teorii pola. Po raz pierwszy na ten punkt zwrócił uwagę S ł a w n o w (197) w pracy ukazującej sposób usunięcia trudności konstrukcji swobodnego pola elektromagnetycznego opisanego przy pomocy potencjału wektorowego.

Dobór konkretnej postaci tensorowych funkcji próbnych i wyliczenie ich transformat Fouriera w układzie własnym kwazicząstek

Jak już wspomnieliśmy, asymptotyczne przejście graniczne w naszej teorii macierzy S powinno być takie, aby nośnik pola tensorowych funkcji próbnych przez nas używanych Ω_n^{tot} rozszerzał się na całą czasoprzestrzeń Minkowskiego i by $t_{\mu\nu}^{(n)\text{tot}}(x)$ przechodziło w pole tensorowe $t_{\mu\nu}(x)$ o następujących (wymieńmy je jeszcze raz) własnościach:

- 1/ Pole $t_{\mu\nu}(x)$ jest ciągłym, symetrycznym, polem tensorowym;
- 2/ W obszarze Ω_{ef} (efektywnego oddziaływania cząstek ze sobą) pole to ma mieć związek z polem $g_{\mu\nu}(x)$ czyli ze słabym, klasycznym, o stałej niezerowej krzywiznie polem grawitacyjnym, wytworzonym przez ciała leżące "daleko" poza obszarem Ω_{ef} . Pole to jest osadzone na $M^{(4)}$ jako na tle.
- 3/ Pole $t_{\mu\nu}(x)$ rozpatrywane w pewnym, szczególnie dogodnym, o którym będzie mowa niżej, układzie odniesienia

ξ ma zmierzać w nieskończoności do zera szybciej niż odwrotność dowolnego wielomianu (od współrzędnych punktochwil) dowolnego byle skończonego stopnia.

Aby zadośćuczynić żądaniu (2) zajmiemy się teraz badaniem pola grawitacyjnego w obszarze Ω_{of} . Jak wiadomo, potencjały grawitacyjne tworzą symetryczne pole tensorowe $g_{\mu\nu}(x)$ określające z jednej strony metrykę czasoprzestrzeni, z drugiej zaś - związane ze swymi źródłami (czyli z masami wszystkich ciał wytwarzających to pole) równaniami Einsteina.

$$R_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} R(x) = 2G_0 T_{\mu\nu}(x) \quad (3.1)$$

gdzie

$$R_{\mu\nu}(x) \stackrel{df}{=} R_{\mu\nu}^{\alpha\lambda}(x), \quad R(x) \stackrel{df}{=} g^{\alpha\beta}(x) R_{\alpha\beta}(x) \stackrel{df}{=} R \quad (3.2)$$

$R_{\mu\nu}^{\alpha\lambda}(x)$ jest tensorem krzywizny Riemanna-Christoffela czasoprzestrzeni o metryce zadanej polem tensorowym $g_{\mu\nu}(x)$.

$R(x)$ jest skalarą krzywizny o wymiarze: $[R] = \frac{1}{\text{długość}^2}$.

$T_{\mu\nu}(x)$ jest to symetryczne pole tensorowe opisujące rozkład mas będących źródłem pola grawitacyjnego.

G_0 jest to stała grawitacyjna, czyli w języku teorii pola stała sprzężenia oddziaływań grawitacyjnych. Jej wartość liczbowa (mierzona np. w układzie jednostek S.I.) jest o wiele mniejsza od (mierzonych oczywiście w tym samym układzie jednostek S.I.) wartości stałych sprzężenia pozostałych trzech typów oddziaływań, co było i jest główną przyczyną nieuwzględniania oddziaływań grawitacyjnych przy ba-

daniu oddziaływań elektromagnetycznych, słabych a tym bardziej i silnych. Chcąc obecnie uwzględnić wpływ grawitacji i mając na względzie fakt, że pole grawitacyjne oddziałujące na cząstki jest słabe, będziemy się starali tak je opisać, aby wszystkie (tak skalarne jak i tensorowe) wyrażenia związane z tym polem były jednakowego i możliwie małego (ale niezerowego) rzędu wielkości względem G_0 . Oczywiście formalne przyjęcie, iż $G_0 = 0$ oznaczać będzie, że zaniedbujemy wszelkie efekty grawitacyjne. Wówczas z równań (3.1) po obu stronach przemnożeniu ich przez $g_{\mu\nu}(x)$ otrzymujemy, iż $R(x) = 0$. Okazuje się wygodne (G u p t a [20] poz.2), aby tensor $z_{\mu\nu}(x)$ /vide 2.1/ wyrazić poprzez inny symetryczny tensor $y_{\mu\nu}(x)$ opisujący klasyczne oddziaływanie grawitacyjne osadzone na $M^{(4)}$ jako na tle. Przyjmamy jako definicję tego pola tensorowego następujące wyrażenie:

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\eta_{uv} - ky_{\mu\nu}(x)}{\sqrt{-\text{Det } g_{\mu\nu}(x)}} \cdot k \stackrel{\text{df}}{=} \sqrt{2 G_0} \quad (3.3)$$

Przejścia do płaskiej czasoprzestrzeni można teraz dokonać na dwa równoważne sobie sposoby.

$$\bigwedge_{x \in M^{(4)}} R(x) \rightarrow 0 \Leftrightarrow \bigwedge_{x \in M^{(4)}} y_{\mu\nu}(x) \rightarrow 0 \quad (3.4)$$

Obecnie dzięki podstawieniu (3.3) wszystkie związane z polem grawitacyjnym wielkości będzie można przedstawić w postaci rozwinięć względem stałej "k". My zaś ograniczymy się w tych rozwinięciach tylko do członów stojących przy stałej

"k" w pierwszej potędze, gdyż tylko te człony będą zawierały w sobie pierwsze potęgi potencjałów grawitacyjnych i ich cząstkowych pochodnych, a takim właśnie przybliżeniem będziemy się zadowalać ze względu na to, że pole grawitacyjne jest słabe.

I tak obliczając w oparciu o (3.3) wyznacznik z pola tensorowego $g_{\mu\nu}(x)$ i odrzucając człony proporcjonalne do wyższych niż pierwsza potęg stałej "k" otrzymujemy po wykonaniu rachunku:

$$\sqrt{-\text{Det } g_{\mu\nu}(x)} \approx 1 - \frac{1}{2} ky(x) \quad (3.5)$$

gdzie

$$y(x) \stackrel{\text{df}}{=} \eta^{\mu\nu} y_{\mu\nu}(x) \quad (3.6)$$

Wielkość "ky(x)" jest bezwymiarowa. Fakt, iż pole grawitacyjne jest słabe, zapiszemy teraz w postaci:

$$\bigwedge_{x \in M(4)} k \left| y_{\mu\nu}(x) \right| \ll 1 \quad (3.7)$$

która jest oczywiście równoważną zapisowi (2.1).

Wstawiając do wyrażenia (3.3) wzór (3.5) i mając na względzie (3.6) i (3.7) otrzymujemy:

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + k \left[y_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} y(x) \right] \quad (3.8)$$

Porównując (3.8) z (2.1) widzimy, że:

$$Z_{\mu\nu}(x) = k \left[y_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} y(x) \right] \quad (3.8')$$

Wyliczmy teraz w tym przybliżeniu tensor Ricciego i skalar

krzywizny a następnie zapiszemy równania Einsteina (2.34), które nasze pole tensorowe $\gamma_{\mu\nu}(x)$ musi spełniać. W tym celu zauważmy, iż wszystkie podnożenia i opuszczania wskaźników tensorowych odbywają się tylko przy pomocy tensora $\eta^{\mu\nu}(\eta_{\mu\nu})$, gdyż tensor ten określa metrykę przestrzeni $M^{(4)}$ czyli tła, na którym osadzone jest oddziaływanie grawitacyjne opisane polem tensorowym $\gamma_{\mu\nu}(x)$.

Tak więc otrzymujemy po kolei:

$$R(x) \stackrel{\text{df}}{=} \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(x) \quad (3.9)$$

$$R_{\mu\nu}(x) \stackrel{\text{df}}{=} R^{\alpha}_{\mu\nu\alpha}(x) \quad (3.10)$$

$$R^{\alpha}_{\mu\nu}(x) \stackrel{\text{df}}{=} \partial_{\nu} \Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda} - \partial_{\lambda} \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\nu\beta} \Gamma^{\beta}_{\mu\lambda} - \Gamma^{\alpha}_{\lambda\beta} \Gamma^{\beta}_{\mu\nu}, \quad \partial_{\alpha} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \quad (3.11)$$

$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}(x)$ - jest symbolem Christoffela drugiego rodzaju

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}(x) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{2} g^{\alpha\rho}(x) \left[\partial_{\nu} g_{\mu\rho}(x) + \partial_{\mu} g_{\rho\nu}(x) - \partial_{\rho} g_{\mu\nu}(x) \right] \cdot g^{\lambda\beta}(x) =$$

$$= \eta^{\alpha\nu} \eta^{\beta\lambda} g_{\beta\lambda}(x) \quad (3.12)$$

Posługując się (3.8) otrzymujemy

$$g^{\alpha\rho}(x) = \eta^{\alpha\rho} + k \left[\frac{1}{2} \eta^{\alpha\rho} \gamma(x) - \gamma^{\alpha\rho}(x) \right] \quad (3.13)$$

gdzie z kolei

$$\gamma^{\alpha\rho}(x) = \eta^{\alpha\beta} \eta^{\rho\gamma} \gamma_{\beta\gamma}(x) \quad (3.14)$$

Wstawiając (3.14) i (3.8) do (3.12) otrzymujemy po przeliczeniu i odrzuceniu członów nieliniowych względem "k"

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}(x) \approx k \left[-\frac{1}{4} \delta_{\mu}^{\alpha} \partial_{\nu} \gamma(x) - \frac{1}{4} \delta_{\nu}^{\alpha} \partial_{\mu} \gamma(x) + \frac{1}{4} \eta^{\alpha\rho} \eta_{\mu\nu} \partial_{\rho} \gamma(x) + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \partial_{\nu} \gamma_{\mu}^{\alpha}(x) + \frac{1}{2} \partial_{\mu} \gamma_{\nu}^{\alpha}(x) - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\rho} \partial_{\rho} \gamma_{\mu\nu}(x) \right], \quad \gamma_{\nu}^{\alpha}(x) = \eta_{\nu\beta} \gamma^{\alpha\beta}(x) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Podstawiając zaś następnie (3.15) do (3.11) i dalej (3.10) i (3.9) oraz odrzucając człony nieliniowe względem "k" (w tym przypadku - kwadratowe względem "k") po dość długich lecz standardowych rachunkach dochodzimy do następujących wyników:

$$R_{\mu\nu}(x) = \frac{k}{2} \left[\square \gamma_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \square \gamma(x) - \partial_{\lambda} \partial_{\mu} \gamma_{\nu}^{\lambda}(x) - \partial_{\lambda} \partial_{\nu} \gamma_{\mu}^{\lambda}(x) \right] \quad (3.16)$$

$$R(x) = -\frac{k}{2} \left[\square \gamma(x) + 2 \partial_{\lambda} \partial_{\nu} \gamma^{\lambda\nu}(x) \right], \quad \square \stackrel{\text{def}}{=} \eta^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} \partial_{\beta} \quad (3.17)$$

Aby nadać równaniom Einsteina (2.34) możliwie najprostszą postać przejdźmy wykorzystując ich niezmienniczość względem transformacji cechowania potencjałów grawitacyjnych (generowanej przez infinitesimalną transformację (T_c) współrzędnych) do układu współrzędnych harmonicznyc. Transformację T_c współrzędnych zapiszemy w postaci:

$$x^{\alpha} \xrightarrow{T_c} x^{\alpha} + \mathcal{E}^{\alpha}(x) \quad (3.18)$$

gdzie

$$\bigwedge_{x \in M(4)} |\mathcal{E}^{\alpha}(x)| \ll 1, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4 \quad (3.19)$$

nadto $\mathcal{E}^{\alpha}(x)$ muszą być takie, aby $\bigwedge_{x \in M(4)}$ funkcje tensorowe $\partial_{\nu} \mathcal{E}^{\alpha}(x)$ były tego samego rzędu wielkości co funkcje $\gamma_{\nu}^{\alpha}(x)$. Poza tym funkcje $\mathcal{E}^{\alpha}(x)$ są już dowolne byle klasy C^2 .

Wskutek tej transformacji współrzędnych pole $z_{\mu\nu}(x)$ ulegnie następującej zmianie:

$$z_{\mu\nu}(x) \xrightarrow{T_c} z_{\mu\nu}(x) - \eta_{\mu\lambda} \partial_\nu \epsilon^\lambda(x) - \eta_{\nu\lambda} \partial_\mu \epsilon^\lambda(x) \quad (3.20)$$

a więc po tej transformacji nadal pozostanie słabo. Z (3.8') widać, że dokładnie tej samej transformacji (3.20) zwanej transformacją cechowania potencjałów grawitacyjnych ulegnie i pole $\gamma_{\mu\nu}(x)$. Można, jak wiadomo, (W e i n b e r g [21]) tak dobrać funkcje $\epsilon^\alpha(x)$ zachowując (3.19), aby po transformacji (3.20) potencjały $z_{\mu\nu}(x)$ spełniały warunek harmoniczności. Ma on ogólną postać:

$$g^{\mu\nu}(x) \square_{\mu\nu}^\alpha(x) = 0 \quad (3.21)$$

a w naszym przypadku prowadzi on do następującego związku:

$$\partial_\mu z_\nu^\mu(x) = \frac{1}{2} \partial_\nu z_\mu^\mu(x) \quad (3.22)$$

Warunek (3.21) jest równoważny żądaniu, aby $\square \epsilon^\nu(x) = 0$ /vide [21_7]/, co ze względu na dowolność funkcji $\epsilon^\nu(x)$ jest w naszym przybliżeniu zawsze możliwe.

Z (3.8') i z (3.21) wynika, że po transformacji T_c ma miejsce związek:

$$\partial_\nu \gamma_\mu^\nu(x) = 0 \quad (3.23)$$

Podstawiając teraz (3.22) do (3.16) i (3.17), a następnie do równań Einsteina (2.34), otrzymujemy następującą postać tych równań:

$$\square \gamma_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} \square \gamma(x) = 0 \quad (3.24)$$

Skalar krzywizny wyraża się teraz wzorem:

$$R(x) = -\frac{k}{2} \square y(x) \quad (3.25)$$

Jak widać z postaci równań (3.24) oraz z (3.6) rozwiązaniem równań (3.24) będzie każda tensorowa funkcja punktochwili postaci

$$y_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} f(x^2, (\lambda x)) \quad (3.26)$$

gdzie funkcja $f(x^2, (\lambda x))$ jest skalarną, dowolną byle regularną funkcją swych argumentów, a λ^V - dowolnym polem wektorowym.

Wstawiając (3.26) do (3.25) otrzymujemy po łatwym przeliczeniu

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2k} R(x) &= 8 \frac{\partial f(x^2, (\lambda x))}{\partial (x^2)} + 4x^2 \frac{\partial^2 f(x^2, (\lambda x))}{\partial (x^2)^2} + \\ &+ 4\lambda^2 \frac{\partial^2 f(x^2, (\lambda x))}{\partial (x^2) \partial (\lambda x)} + \lambda^2 \frac{\partial^2 f(x^2, (\lambda x))}{\partial (\lambda x)^2} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Aby określić bliżej postać funkcji $f(x^2, (\lambda x))$ spełniającej powyższe równanie wykorzystamy założenie, że skalar krzywizny $R(x)$ jest stały wewnątrz obszaru Ω_{ef} , lecz różny od zera, oraz przyjmiemy, że funkcja $f(x^2, (\lambda x))$ jest kształtu:

$$f(x^2, \lambda x) = \alpha (x^2)^m + \beta (\lambda x)^s + \gamma (x^2)^p (\lambda x)^t \quad (3.28)$$

gdzie wykładniki n, s, p, t i współczynniki α, β, γ pozostają do wyznaczenia.

Wstawiając (3.28) do (3.27) łatwo sprawdzamy, że przy założeniu, iż $R = \text{const}$ mamy jedną z dwóch możliwości

a) $n = 0, s = 2, p = 1, t = 0$

b) $n = 1, s = 0, p = 0, t = 2$

tak, że funkcja $\Psi(x^2, (\lambda x))$ jest postaci:

$$\Psi[x^2, (\lambda x)] = \frac{1}{k} [\alpha x^2 + \beta (\lambda x)^2] \quad (3.29)$$

gdzie współczynniki α i β są do wyznaczenia, przy czym $[\alpha] = [\beta] = \frac{1}{\text{długość}^2}$.

Wróćmy teraz do dokładniejszego omówienia pojęcia obszaru efektywnego oddziaływania. Rozpatrzmy typową dla badania rozprożeń sytuację doświadczalną, w której mamy generator (G) cząstek swobodnych, tarczę (T) oraz detektor (D), rozproszonych na tarczy cząstek, które padają tam z generatora. Cząstki opuszczające generator traktujemy jako "jeszcze swobodne", docierające zaś do detektora jako "już swobodne". Zwiążmy sztywno z tarczą czterowymiarowy układ współrzędnych Σ_0 . Oznaczmy odległość geometrycznego środka generatora od środka tarczy przez L_G , a odległość od środka tarczy (gdzie tkwi przestrzenny początek układu Σ_0) do środka detektora przez L_D . Oznaczmy przez \mathcal{T}_1 chwilę, w której generator zaczyna emitować cząstki a przez \mathcal{T}_2 chwilę, w której detektor kończy je rejestrować. Oczywiście L_G, L_D, \mathcal{T}_1 i \mathcal{T}_2 są mierzone przez obserwatora nieruchomego względem układu Σ_0 . Poprzez obszar efektywnego oddziaływania Ω_{ef}

będziemy rozumieli czteroobszar, który względem tego obserwatora ograniczony jest przestrzennie kulą o środku w przestrzennym początku układu Σ_0 o promieniu $r = \max(L_G, L_D)$, a czasowo chwilami \mathcal{T}_1 i \mathcal{T}_2 . Fakt, iż zewnętrzne pole grawitacyjne w obszarze Ω_{eff} jest słabe, zapieziemy tak:

$$\bigwedge_{x \in \Omega_{\text{eff}}} |x^2| \ll L^2 \quad (3.30)$$

lub nieco inaczej

$$\bigwedge_{x \in \Omega_{\text{eff}}} x^2 \leq |x^2| \ll L^2 \quad (3.31)$$

gdzie parametr L jest związany ze stałym w obszarze Ω_{eff} ekałarem krzywizny R następująco:

$$(R) \stackrel{\Omega_{\text{eff}}}{=} \frac{c_0}{L^2} \quad (3.32)$$

c_0 jest stałą bezwymiarową dodatnią.

Wstawiając (3.32) i (3.29) do (3.27) otrzymujemy, że szczególną postacią tensorowej funkcji $y_{\mu\nu}(x)$ (3.26) jest funkcja kształtu:

$$y_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{k} \eta_{\mu\nu} \left[\frac{x^2}{L^2} - \frac{2}{L^2} (\lambda x)^2 \right] \quad (3.33)$$

Wstawiając (3.33) do (3.14) oraz do (3.13) otrzymujemy:

$$z_{\mu\nu}(x) \stackrel{\Omega_{\text{eff}}}{=} \eta_{\mu\nu} \left[\frac{x^2}{L^2} - \frac{2}{L^2} (\lambda x)^2 \right] \quad (3.34)$$

Z (3.34) i z (3.30) wynika, że:

$$g_{\mu\nu}(x) \stackrel{\Omega_{\text{eff}}}{=} \eta_{\mu\nu} \left[\frac{x^2}{L^2} - \frac{2}{L^2} (\lambda x)^2 \right] + \eta_{\mu\nu} o \left[\left(\frac{x^2}{L^2} \right)^2 \right] \quad (3.35)$$

czyli z dokładnością do nieskończenie małych drugiego rzędu możemy napisać, że:

$$g_{\mu\nu}(x) \stackrel{\text{def}}{\approx} \eta_{\mu\nu} \left[e^{\frac{x^2}{L^2}} - \frac{2}{L^2} (\lambda x)^2 \right] \quad (3.35')$$

Określimy teraz pole wektorowe λ^α zadając konkretną postać tej funkcji wektorowej w układzie Σ_0 . Oznaczając $\lambda^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \lambda^{\alpha c}$ definiujemy:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \lambda_1^0 \stackrel{\text{def}}{=} 0 \quad i = 1, 2, 3 \\ \lambda_4 &\stackrel{\text{def}}{=} \lambda_4^0 \stackrel{\text{def}}{=} +1 \end{aligned} \quad (3.35'')$$

Postać pola wektorowego λ^ν w dowolnym innym układzie współrzędnych Σ znajdziemy stosując do (3.35) prawo transformacyjne. Oczywiście, że:

$$\sum_{\Sigma} \lambda^2 = 1 \quad (3.35''')$$

W układzie Σ_0 funkcję $g_{\mu\nu}(x)$ będzie można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(x) &\stackrel{\Sigma_0, \text{def}}{=} \eta_{\mu\nu} \left[1 + \frac{x^2}{L^2} - \frac{2}{L^2} (\lambda x)^2 \right] = \\ &= \eta_{\mu\nu} \exp \left[-\frac{1}{L^2} (\overset{+}{x^2} + x_4^2) \right] + \eta_{\mu\nu} 0 \left[\left(\frac{x^2}{L^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.36)$$

Możemy teraz wrócić do konstrukcji naszych tensorowych funkcji próbnych $t_{\mu\nu}(x)$. Zrobimy to podając je w następującej postaci w układzie Σ_0 , a mianowicie:

$$t_{\mu\nu}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \eta_{\mu\nu} \exp \left[-\frac{1}{L^2} (\overset{+}{x^2} + x_4^2) \right] \stackrel{\text{def}}{=} t_{\mu\nu}^0(x) \quad (3.37)$$

Postać tych funkcji w dowolnym innym układzie otrzymamy oczywiście stosując do (3.37) tensorowe wzory transformacyjne. Nie będzie nam to jednakże w dalszym ciągu potrzebne. Jeżeli oznaczymy przez Λ macierz przekształcenia Lorentza przeprowadzającego układ Σ_0 w dowolny inny układ Σ to składowe tensorowych funkcji próbnych w tym układzie $t_{\mu\nu}(x)$ wyrażą się oczywiście wzorem:

$$t_{\mu\nu}(x) = \Lambda_{\mu}^{\alpha} \Lambda_{\nu}^{\beta} t_{\alpha\beta}^0(x) \quad (3.37.1)$$

Jak widać więc tensorowe funkcje próbne określone wzorem (3.37) (i prawem transformacyjnym funkcji tensorowych) pokrywają się w obszarze Ω_{eff} z dokładnością do nieskończenie małych rzędu drugiego z rozwiązaniami równań Einsteina dla słabego pola grawitacyjnego rozprzestrzenionego w tymże obszarze Ω_{eff} , o stałej niezerowej krzywiznie i o źródłach tkwiących poza tym obszarem. Do dalszych rozważań będzie nam potrzebna skalarna funkcja $t(x)$ określona następująco:

$$t(x) \stackrel{\text{df}}{=} \eta^{\mu\nu} t_{\mu\nu}(x) = \eta^{\mu\nu} t_{\mu\nu}^0(x) \quad (3.38)$$

Wyliczmy teraz transformaty fourierowskie funkcji $t(x)$ i $t_{\mu\nu}^0(x)$. Transformaty te istnieją, gdyż (podkreślmy to wyraźnie jeszcze raz) posługujemy się jako tłem oddziaływań grawitacyjnych płaską czasoprzestrzenią $M^{(4)}$. Transformatę fourierowską funkcji $t(x)$ oznaczymy przez $\tilde{t}(q)$ a transformaty funkcji $t_{\mu\nu}^0(x)$ przez $\tilde{t}_{\mu\nu}^0(q)$ oraz dokonamy dla udogodnienia rachunków podstawienia:

$$i \frac{df}{dx} = \frac{1}{4} L \quad (3.39)$$

wówczas, co łatwo można pokazać, na podstawie (3.39), (3.33) i (3.25) pomiędzy R a l zachodzi związek

$$(R) = \frac{1}{1^2} \quad (3.40)$$

Symbol "q" jest skrótowym oznaczeniem czterowektora q^α (czterowektora pędu związanego z polem opisywanym przez funkcje $t(x)$, czyli przez tensorowe funkcje $t_{\mu\nu}(x)$).

Mamy więc:

$$\tilde{t}(q) = \frac{1}{(2\pi)^{5/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iqx} t(x) d^4x \quad (3.41)$$

gdzie

$$qx \stackrel{df}{=} \eta_{\alpha\beta} q^\alpha x^\beta = -\vec{q} \cdot \vec{x} + q_4 x_4 \quad (3.42)$$

Takich skrótowych oznaczeń typu (3.42) na iloczyny skalarne czterowektorów będziemy odąd stale używali. Podstawiając (3.41) i (3.43) do (3.42) i stosując do eksponenty wzór Eulera dostajemy:

$$\begin{aligned} \tilde{t}(q) = & \frac{4}{(2\pi)^{5/2}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\vec{q} \cdot \vec{x} - q_4 x_4) e^{-\frac{1}{16} \frac{1}{l^2} (\vec{x}^2 + x_4^2)} d^4x + \right. \\ & \left. + i \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\vec{q} \cdot \vec{x} - q_4 x_4) e^{-\frac{1}{16} \frac{1}{l^2} (\vec{x}^2 + x_4^2)} d^4x \right] \quad (3.43) \end{aligned}$$

I rozpisując dalej otrzymujemy

$$\begin{aligned} \tilde{t}(q) = & \frac{4}{(2\pi)^{5/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\cos(q_1 x_1) \cos \beta(x_2, x_3, x_4) \right. \right. \\ & \left. \left. - \sin(q_1 x_1) \sin \beta(x_2, x_3, x_4) \right] x \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. x e^{-\frac{x_1^2}{16 l^2}} dx_1 \right\} \exp \frac{x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}{16 l^2} dx_2 dx_3 dx_4 + \frac{4i}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} [\sin(q_1 x_1) \times \right. \\
 & \left. \times \cos \beta(x_2, x_3, x_4) + \cos(q_1 x_1) \sin \beta(x_2, x_3, x_4)] \exp \frac{-x_1^2}{16 l^2} \right\} \\
 & \exp \frac{x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}{16 l^2} dx_2 dx_3 dx_4 \quad (3.44)
 \end{aligned}$$

gdzie $\beta(x_2, x_3, x_4) \stackrel{\text{df}}{=} q_2 x_2 + x_3 q_3 - q_4 x_4$. Czwórka zmiennych x_1, x_2, x_3, x_4 oznacza tu współrzędne j e d n e j bieżęcej punktochwili. Całki występujące w (3.45) są elementarne (23_7). Po wycałkowaniu po współrzędnych przestrzennych (x_1, x_2, x_3) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 \tilde{t}(q) = \frac{16^2}{(2\pi)^3} l^3 e^{-4l^2 q^2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\cos(q_4 x_4) \exp \frac{-x_4^2}{16 l^2} d^4 x + \right. \right. \\
 \left. \left. + 1 \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(q_4 x_4) \exp \frac{-x_4^2}{16 l^2} dx_4 \right] \right] \quad (3.45)
 \end{aligned}$$

Druga całka w nawiasie równa się zeru. Tak więc otrzymujemy ostatecznie:

$$\tilde{t}^0(q) = \frac{16^2 l^4}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -4 l^2 [q^2 + q_4^2] \right\} \quad (3.46)$$

Powtarzając te same rachunki dla transformat fourierowskich funkcji $t_{\mu\nu}(x)$ otrzymujemy:

$$\tilde{t}_{\mu\nu}^c(q) = \frac{1}{(2\pi)^{5/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-iqx\} t_{\mu\nu}(x) d^4x = \eta_{\mu\nu} \frac{4^3 1^4}{\sqrt{2\pi}} \times \\ \times \exp\{-4l^2(\vec{q}^2 + q_4^2)\}. \quad (3.47)$$

Opis oddziaływania bezsponowych cząstek nienaładowanych, tkwiących w tensorowym polu funkcji próbnych $t_{\mu\nu}(x)$

Lagrangian oddziaływania układu bezsponowych cząstek nienaładowanych, tkwiących w tensorowym polu funkcji próbnych $t_{\mu\nu}(x)$ obierzemy tak, by był on ogólnie kowariantny i opisywał zarówno oddziaływania cząstek ze sobą, jak również i z polem $t_{\mu\nu}(x)$ (czyli ze słabym polem grawitacyjnym określonym w obszarze Ω_{ef} przez te właśnie funkcje). Oznaczmy przez $\varphi(x)$ skalarną funkcję pola neutralnych ($f = f^x$) bezsponowych cząstek a przez "m" - masę spoczynkową każdej z nich (zakładamy, że cząstki te są jednakowe). Przyjmiemy, dokonując w ten sposób specyfikacji modelu oddziaływania, że $L_{int}(x)$ będzie sumą trzech ogólnie kowariantnych członów $L_1(x)$, $L_2(x)$ i $L_3(x)$ takich, że:

- 1) $L_1(x)$ będzie opisywał oddziaływanie cząstek pomiędzy sobą wg modelu $\lambda_0 f^4(x)$;
- 2) $L_2(x)$ będzie opisywał oddziaływanie cząstek z polem $t_{\mu\nu}(x)$ (czyli z zewnętrznym, klasycznym polem grawitacyjnym istniejącym wewnątrz Ω_{ef}) poprzez pochodne $\partial_\nu \varphi(x)$.

A zatem:

$$L_2(x) \sim t^{\mu\nu}(x) \left[\frac{\delta L_2(x)}{\delta t^{\mu\nu}(x)} \right] \quad (4.0)$$

3) $L_3(x)$ będzie opisywał oddziaływanie cząstek z polem typu "newtonowskiego" (grawitacyjne pole własne cząstek zaniedbujemy), przeto:

$$L_3(x) \sim m t(x) \quad (4.1)$$

Lagrangiany $L_2(x)$ i $L_3(x)$ spełniają równania:

$$t_{\mu\nu}(x) \frac{\delta L_2(x)}{\delta t_{\mu\nu}(x)} = L_2(x) \quad \text{i} \quad t_{\mu\nu}(x) \frac{\delta L_3(x)}{\delta t_{\mu\nu}(x)} = L_3(x) \quad (4.2)$$

co oznacza, że są one niezmiennicze względem "dyslokacji" w polu funkcji $t_{\mu\nu}(x)$, czyli, że zależą liniowo i jednorodnie od $t_{\mu\nu}(x)$, co jest konsystentne z (2.21) /operator $D_{\mathcal{J}} \stackrel{\text{def}}{=} t_{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta t_{\mu\nu}(x)}$ nazwiemy "operatorem dyslokacji" w polu $t_{\mu\nu}(x)$ /. Aby i lagrangian $L_1(x)$ miał tę samą własność przyjmujemy, że:

$$L_1(x) \sim t(x) \mathcal{J}^4(x) \quad (4.3)$$

Całkowity lagrangian oddziaływania będzie więc miał postać:

$$L_{\text{int}}(x) = \alpha L_1(x) + \beta L_2(x) + \gamma L_3(x) \quad (4.4)$$

gdzie α, β i γ są stałymi. Należy tak je dobrać, by uzyskać zgodność wymiarów wszystkich składników sumy (4.4), przy czym należy zauważyć, że stałe β i γ winny z dokładnością do współczynnika równać się stałej "k" pełniącej rolę stałej sprzężenia oddziaływań grawitacyjnych (przypominamy, że

$k = \sqrt{2G_0}$, G_0 - stała grawitacyjna). Z tą samą dokładnością do współczynnika stała α winna się równać stałej sprzężenia oddziaływania wzajemnego cząstek opisanych funkcją $\varphi(x)$. Stałą tę oznaczymy przez λ_0 . Pamiętając, że $\langle \bar{m} \rangle = \langle \rho(x) \rangle = \frac{1}{\langle k \rangle} = \frac{1}{\text{długość}}$, oraz że $\langle \bar{\epsilon}_{\mu\nu}(x) \rangle = \langle \bar{1} \rangle = 1$ i mając na względzie (4.0), (4.1) i (4.3) położymy: $\alpha = \frac{\lambda_0}{4}$, $\beta = \frac{k}{I}$, $\gamma = \frac{k}{I}$. Stąd zaś dostajemy:

$$\begin{aligned}
 L_{\text{int}}(x) = \frac{k}{I} : \left\{ \frac{m}{1^3} t(x) + t^{\alpha\beta}(x) \left[\partial_\mu \varphi(x) \right] \left[\partial_\rho \varphi(x) \right] \right\} : + \\
 + \frac{\lambda_0}{4} : t(x) \varphi^4(x) : \quad (4.4')
 \end{aligned}$$

Zauważmy, iż kładąc (formalnie) $1 \rightarrow \infty$ ($R \rightarrow 0$) otrzymujemy, że $L_{\text{int}}(x) \rightarrow \lambda_0 \varphi^4(x)$, przy czym człon, w którym występuje masa cząstki zmierza do zera o wiele szybciej niż człon pozostały, co jest zrozumiałe, gdyż wyłączenie grawitacji w pierwszej kolejności doprowadza do znikania wpływu masy cząstek na ich stan fizyczny.

Ograniczmy się w dalszych rozważaniach do zbadania struktury operatora S_2^{int} , co mieści się w granicach standardu rachunkowego przyjętego w większości prac poświęconych kwantowej teorii pola.

Z (2.14) i z (2.27) wynika, że S_2^{int} będzie miało postać:

$$\begin{aligned}
 S_2^{\text{int}} = \frac{1}{2} \int_{x_1} \int_{x_2} \mathcal{O} \left[\lambda(x_2 - x_1) \right] : L_{\text{int}}(x_2) L_{\text{int}}(x_1) : d_t^4 x_2 d_t^4 x_1 + \\
 + \frac{1}{2} \int_{x_1} \int_{x_2} \mathcal{O} \left[\lambda(x_1 - x_2) \right] : L_{\text{int}}(x_1) L_{\text{int}}(x_2) : d_t^4 x_1 d_t^4 x_2 \quad (4.5)
 \end{aligned}$$

gdzie $L_{int}(x)$ jest określone wzorem (4.4). Czasopodobny wektor $\hat{\lambda}$ jest wprowadzony dla ukowariantnienia argumentów funkcji "G" Heaviside'a. Z (4.4) i (4.5) widać wyraźnie, że S_2^{int} jest skalarom. Dalsze rachunki będziemy przeprowadzać w u-stalonym układzie \sum_0 .

Tak jak się postępuje w kwantowej teorii pola należy przetransformować wszystkie stojące pod całkami w (4.5) funkcje bieżących czteropunktów x_1 i x_2 do przestrzeni pędów (wiemy, że da się to zrobić zwykłymi transformacjami Fouriera). Następnie musimy zastosować twierdzenie Wicka do iloczynów lagrangianów stojących w (4.5) pod symbolami iloczynu normalnego. Postępowanie nasze różni się od standardowej procedury stosowanej w kwantowej teorii pola tylko tym, że przechodzimy do przestrzeni pędów także i z ukowariantnionymi funkcjami Heaviside'a (vide [16_7]), dzięki czemu stosujemy twierdzenie Wicka tylko w odniesieniu do iloczynów funkcji Lagrange'a, z których każda z osobna jest już zapisana w postaci iloczynu normalnego odpowiednich funkcji pola $\mathcal{F}(x)$ i $\partial_\nu \mathcal{F}(x)$.

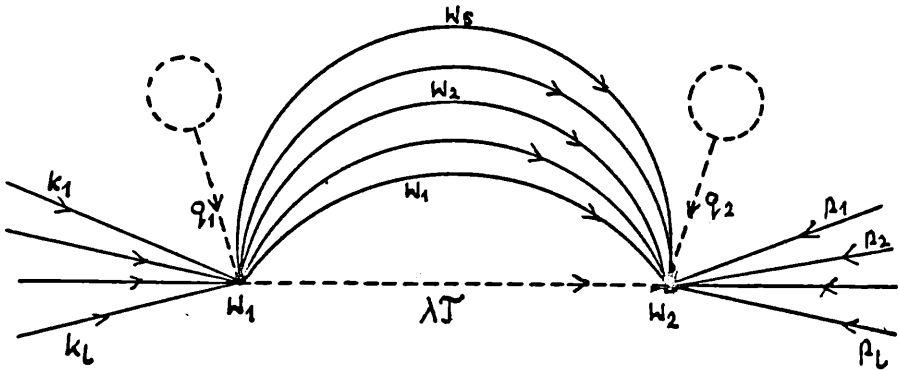
W wyniku przeprowadzenia omówionych powyżej operacji otrzymujemy, że S_2^{int} wyraża się w postaci sumy członów typu:

$$k_1 \int \dots k_1 \int_{p_1} \dots p_1 \int F(s; k_1 \dots k_1, p_1 \dots p_1) \tilde{\mathcal{F}}(k_1) \dots \tilde{\mathcal{F}}(p_1) \times \\ \times d^4 k_1 \dots d^4 p_1 \quad (4.6)$$

Każdy taki człon opisuje proces fizyczny reprezentowany przez odpowiedni diagram Feynmana. Diagram taki ma następującą o-

gólną konstrukcję (rys. 2): w skład jego wchodzi dwa wierzchołki (W_1 i W_2), które są połączone $s+1$ liniami wewnętrznymi. Spośród tych linii s linii odpowiada kontrakcjom (występującym w tej samej ilości, tzn. "s") 2s transformacji fourierowskich funkcji pola. Transformaty tych funkcji nie występują więc w funkcji podcałkowej całki (4.6). Ostatnia zaś linia wewnętrzna diagramu Feynmana odpowiada transformacji fourierowskiej funkcji Heaviside'a (czyli czteropędowi $\lambda^{\tilde{J}}$ kwazicząstki). Do każdego wierzchołka diagramu wchodzi "1" linii zewnętrznych wychodzących poza obszar diagramu odpowiadających cząstkom opisanym przez funkcje $\tilde{\mathcal{F}}(k_1) \dots \tilde{\mathcal{F}}(k_1)$ w odniesieniu do wierzchołka W_1 a przez funkcje $\tilde{\mathcal{F}}(p_1) \dots \tilde{\mathcal{F}}(p_1)$ w odniesieniu do wierzchołka W_2 . Nadto do każdego z wierzchołków diagramu dociera jeszcze jedna linia zewnętrzna (tzn. nie łącząca obu wierzchołków), ale nie wychodząca poza obszar diagramu a zakończona w tym obszarze małym zamkniętym obszarem. Linia ta odpowiada transformacji Fouriera funkcji $\tilde{\tau}_{\mu\nu}^{\sim}(q_1)$ w odniesieniu do wierzchołka W_1 i funkcji $\tilde{\tau}_{\mu\nu}^{\circ}(q_2)$ w odniesieniu do wierzchołka W_2 . Linie te reprezentują graficznie oddziaływanie pola grawitacyjnego z cząstkami w wierzchołkach W_1 i W_2 . Linie wewnętrzne skierujemy tak, by wychodziły z wierzchołka o numerze mniejszym a kończyły się na wierzchołku o numerze większym. Każdej funkcji wierzchołkowej występującej w rozwinięciu Wicka członu S_2^{int} odpowiada zawsze suma dwóch diagramów różniących się tylko przestawieniem wierzchołków.

Trudności kwantowej teorii pola wynikają z faktu, że funkcje współczynnikowe, czyli funkcje $F(s, k_1 \dots p_1)$ mogą przyjąć



Rys. 2

mować wartości nieskończone, co uniemożliwia posługiwanie się nimi dla wyliczenia prawdopodobieństwa zajęcia procesów reprezentowanych graficznie przez diagramy Feynmana odpowiadające odnośnym funkcjom współczynnikowym. W funkcjach tych pojawiają się bowiem całki z iloczynów propagatorów powstałych w wyniku kontrakcji transformacji fourierowskich funkcji pól opisujących oddziaływające ze sobą układy cząstek. Propagatory mają taką postać, że odnośne całki z ich iloczynów mogą stawać się rozbieżne bądź z tego powodu, że cząstki te mogą mieć pęd dowolnie bliski nieskończoności (rozbieżność "ultrafioletowa"), bądź dowolnie bliski zeru (rozbieżność "infraczerwona"). Pokażemy, że dla naszego modelu oddziaływań pole funkcji próbnych $t_{\mu\nu}(x)$ obrane zgodnie z (3.9) powoduje, iż jego transformaty Fouriera $\tilde{t}_{\mu\nu}(q)$

pojawiające się pod całkami występującymi w funkcjach współzennikowych $F_1(s; p_1 \dots k_1)$ czynią je zawsze skończonymi.

Aby przejść do przestrzeni pędów z S_2^{int} napiszemy postać transformacji Fouriera dla poszczególnych funkcji tkwiących w (4.5). A mianowicie:

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} \tilde{\varphi}(k) d^4k \quad (4.7)$$

Od tej pory iloczyn różniczek współrzędnych każdego cztero-wektora, np. e^{ac} będziemy zapisywać w postaci ds ,

$$ds \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\lambda=1}^4 ds^\lambda \stackrel{\text{def}}{=} d^4s; \text{ podobnie } \prod_{i=1}^3 ds^i \stackrel{\text{def}}{=} d\vec{s}$$

$$\sigma(\vec{\lambda}(x_2 - x_1), \vec{\gamma}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda\vec{\gamma}(x_2 - x_1)}}{\vec{\gamma} - i\varepsilon} d\vec{\gamma} \quad (4.8)$$

$\vec{\gamma}$ jest skalarnym parametrem całkowania, $|\vec{\gamma}| = \frac{1}{\text{długość}}$. Wstawiając (4.4) do (4.5), przechodząc do przestrzeni pędów, korzystając z (4.4), (4.8), (4.7), (3.47), (3.48), stosując twierdzenie Wicka dla iloczynu normalnego oraz odrzucając człony proporcjonalne do k^2 , otrzymujemy po dość uciążliwym lecz standardowym przerechowaniu:

$$S_2^{int} = \frac{1}{8\pi i} \int_{x_1} \int_{x_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda\vec{\gamma}(x_2 - x_1)}}{\vec{\gamma} - i\varepsilon} d\vec{\gamma} \left\{ \frac{\beta k}{i} [\bar{M}(x_2)N(x_1) + M(x_1)N(x_2)] \right. \\ \left. + \beta^2 N(x_2)N(x_1) + \frac{\beta^2 k}{i} [\bar{N}(x_2)N(x_1)L(x_1) + N(x_2)N(x_1)L(x_2)] \right\} \times \\ \times d^4x_2 d^4x_1 \quad (4.9)$$

Całki po x_2 i x_1 brane są w granicach $(-\infty, +\infty)$

$$\beta \stackrel{df}{=} \frac{\lambda}{(2\pi)^7 \sqrt{2\pi}} \quad (4.10)$$

$$M(x) \stackrel{df}{=} \frac{1}{(2\pi)^{7/2}} \left[\frac{m}{1^3} \int_q \int_k \int_p e^{ix(q+k+p)} \tilde{t}(q) \tilde{f}(k) \tilde{f}(p) x \right. \\ \left. x \, dqdkdp - \int_q \int_k \int_p e^{ix(q+k+p)} \tilde{t}^{\alpha\beta}(q) k_{\alpha} p_{\beta} \tilde{f}(k) \tilde{f}(p) \, dq \, dk \, dp \right] \quad (4.11)$$

$$N(x) \stackrel{df}{=} \int_q e^{ixq} \tilde{t}(q) \, dq \int_{k^{(v)}}^4 e^{ixk^{(v)}} \tilde{f}(k^{(v)}) \, dk^{(v)} \quad (4.12)$$

znaczek (v) numeruje czterowektory $k^{(v)}$.

$$L(x) \stackrel{df}{=} \frac{1}{(2\pi)^{7/2}} \int_q e^{ixq} \tilde{t}(q) \, dq \quad (4.13)$$

Całkowanie po współrzędnych czterowektorów przebiega w granicach $(-\infty, +\infty)$. Wstawiając (4.11), (4.12), (4.13) do (4.9) i całkując po x_1 i x_2 otrzymujemy:

$$S_2 = \frac{1}{8\pi^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mathcal{T}}{\mathcal{T}-1\epsilon} \left\{ \frac{\Lambda_0^k}{8(2\pi)^{7/2}} \left[: \left(\frac{m}{1^3 \sqrt{2\pi}} \int_q \int_k \int_p \delta(\lambda\mathcal{T}+q+k+p) (\tilde{t}(q) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \frac{1^3}{m} \tilde{t}^{\alpha\beta}(q) k_{\alpha} p_{\beta} \right) \tilde{f}(k) \tilde{f}(p) \, dqdkdp \int_{q^1} \int_{z_1^c} \delta(-\lambda\mathcal{T}+q^1 + \right. \right. \\ \left. \left. + z_1^c) \tilde{t}(q^1) \tilde{f}(z_1^c) \, dq^1 dz_1^c \right] : x : \left(\frac{m}{1^3 \sqrt{2\pi}} \int_q \int_k \int_p \delta(-\lambda\mathcal{T}+q+k+p) (\tilde{t}(q) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1^3}{m} \tilde{t}^{\alpha\beta}(q) k_{\alpha} p_{\beta} \right) \tilde{f}(k) \tilde{f}(p) \, dqdkdp \int_{q^1} \int_{z_2^c} \delta(\lambda\mathcal{T}+q^1+z_2^c) \tilde{t}(q^1) x \right. \right. \\ \left. \left. \right. \right. \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned}
& \times \tilde{\mathcal{F}}(\mathbf{z}_2^c) d\mathbf{q}_1^1 d\mathbf{z}_2^c \Big] + \frac{\lambda_0^2}{16(2\pi)^7} \Big\{ \int_{\mathbf{q}_2} \int_{\mathbf{z}_2^c} \delta(\lambda\mathcal{T} + \mathbf{q}_2 + \mathbf{z}_2^c) \tilde{\tau}(\mathbf{q}_2) \tilde{\mathcal{F}}(\mathbf{z}_2^c) d\mathbf{q}_2 d\mathbf{z}_2^c \times \\
& \times \int_{\mathbf{q}_1} \int_{\mathbf{z}_1^c} \delta(-\lambda\mathcal{T} + \mathbf{q}_1 + \mathbf{z}_1^c) \tilde{\tau}(\mathbf{q}_1) \tilde{\mathcal{F}}(\mathbf{z}_1^c) d\mathbf{q}_1 d\mathbf{z}_1^c \Big\} + \frac{\kappa\lambda_0^2}{36(2\pi)^{1/2}} \times \\
& \times \Big\{ \int_{\mathbf{q}_1} \int_{\mathbf{z}_2^c} \int_{\mathbf{q}_2^1} \delta(\lambda\mathcal{T} + \mathbf{q}_2 + \mathbf{z}_2^c) \times \int_{\mathbf{q}_1} \int_{\mathbf{z}_1^c} \delta(-\lambda\mathcal{T} + \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_1^1 + \mathbf{z}_1^c) \tilde{\tau}(\mathbf{q}_2) \tilde{\tau}(\mathbf{q}_1) \times \\
& \times \tilde{\tau}(\mathbf{q}_1^1) \tilde{\mathcal{F}}(\mathbf{z}_1^c) \tilde{\mathcal{F}}(\mathbf{z}_2^c) d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 d\mathbf{q}_1^1 d\mathbf{z}_1^c d\mathbf{z}_2^c + \int_{\mathbf{q}^1} \int_{\mathbf{q}_2^1} \int_{\mathbf{q}^2} \int_{\mathbf{z}_1^c} \int_{\mathbf{z}_2^c} \\
& \delta(\lambda\mathcal{T} + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_2^1 + \mathbf{z}_2^c) \delta(-\lambda\mathcal{T} + \mathbf{q}_1 + \mathbf{z}_1^c) \tilde{\tau}(\mathbf{q}_2) \tilde{\tau}(\mathbf{q}_1) \tilde{\tau}(\mathbf{q}_2^1) \times \\
& \times \tilde{\mathcal{F}}(\mathbf{z}_2^c) \tilde{\mathcal{F}}(\mathbf{z}_1^c) \times d\mathbf{q}_2 d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2^1 d\mathbf{z}_1^c d\mathbf{z}_2^c \Big\} \Big\}
\end{aligned}$$

We wzorze tym przyjęliśmy następujące oznaczenia, którymi będziemy się posługiwali także i dalej:

1) Jeśli mamy dwa ciągi wektorów $\mathbf{z}_1^{(1)} \dots \mathbf{z}_1^{(n)}$, oraz $\mathbf{z}_2^{(1)} \dots \mathbf{z}_2^{(n)}$
to $\mathbf{z}_{(1)}^c \stackrel{df}{=} \sum_{\nu=1}^n \mathbf{z}_1^{(\nu)}$, u nas $n = 4$; $i = 1, 2$. (4.15)

$$\begin{aligned}
2) \int_{\mathbf{z}_i^{(1)}} \dots \int_{\mathbf{z}_i^{(n)}} \Phi(\mathbf{z}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{z}_1^{(n)}) \tilde{\mathcal{F}}(\mathbf{z}_1^{(1)}) \dots \tilde{\mathcal{F}}(\mathbf{z}_1^{(n)}) d\mathbf{z}_1^{(1)} \dots d\mathbf{z}_1^{(n)} \stackrel{df}{=} \\
\int_{\mathbf{z}_i^c} \Phi(\mathbf{z}_1^c) \tilde{\mathcal{F}}(\mathbf{z}_1^c) d\mathbf{z}_1^c \quad (4.15')
\end{aligned}$$

gdzie ϕ jest dowolną funkcją czterowektorów $\lambda_1^{(1)} \dots \lambda_1^{(n)}$, natomiast $\tilde{f}(\lambda_1^{(v)})$ jest fourierowską transformatą funkcji $f(x)$.

Po przeliczowaniu po parametrze \mathcal{T} i uwzględnieniu tego, że $\vec{\lambda} = 0$ a $\lambda^4 = 1$ (przypominamy, że układ \sum_0 , którym się posługujemy, jest układem własnym czterowektora λ^v) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 S_2^{\text{int}} = & \frac{mk \lambda_0}{(2\pi)^{1/4}} : \left[\int_k \int_p \tilde{t}^0(-k-p) - \frac{1^3}{8} \tilde{t}^{0\alpha/\beta}(-k-p) \times \right. \\
 & \left. \times k_{\{\alpha \ p \ \beta\}} \tilde{f}(k) \tilde{f}(p) dk dp \times \int_{z^c} \tilde{t}(-z^c) dz^c \right] : + \frac{\lambda_0^2}{8(2\pi)^2} \times \\
 & \times : \left[\int_{z_1^c} \int_{z_2^c} \tilde{t}(-z_1^c) \tilde{t}(-z_2^c) \tilde{f}(z_1^c) \tilde{f}(z_2^c) dz_1^c dz_2^c \right] : + \\
 & + \frac{k \lambda_0^2}{2(2\pi)^{3/2}} : \left[\int_q \int_{z_1^c} \int_{z_2^c} \tilde{t}(-z_1^c) \tilde{t}(-q-z_2^c) \tilde{f}(z_1^c) \tilde{f}(z_2^c) \times \right. \\
 & \left. \times dq dz_1^c dz_2^c \right] : \quad (4.16)
 \end{aligned}$$

Stosując teraz twierdzenie Wicka do wszystkich wyrażeń ujętych w nawiasach kwadratowych otrzymujemy po dość żmudnych rachunkach:

$$S_2^{\text{int}} = \frac{\lambda_0^k}{21(2\pi)^{7/2}} A + \frac{\lambda_0^2}{4(2\pi)^7} \left(\frac{1}{4} + \frac{k}{1(2\pi)^{3/2}} \right) B \quad (4.17)$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 A \stackrel{\text{df}}{=} & 2 \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^{(1,2,3,4)} \sum_{v=1}^2 \int_{k(v)} \int_{z(3)^c} F_A(1; k(v), z(3)^c) \times \\
 & \times \tilde{f}(k(v)) \tilde{f}(z(3)^c) \times dk(v) dz(3)^c + 2 \sum_{(\alpha_1, \alpha_2)}^{(1,2,3,4)} \int_{z(2)^c} F_A(2; z(2)^c) \times \\
 & \times \tilde{f}(z(2)^c) dz(2)^c ; \tag{4.18}
 \end{aligned}$$

$z(3)^c \stackrel{\text{df}}{=} z(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^c$ - czteropęd o wskaźniku trójindeksowym

$z(2)^c \stackrel{\text{df}}{=} z(\alpha_1, \alpha_2)^c$ - czteropęd o wskaźniku dwuindeksowym

$$\begin{aligned}
 B \stackrel{\text{df}}{=} & \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^{(1,2,3,4)} \sum_{(\beta_1, \beta_2, \beta_3)}^{(1,2,3,4)} \int_{z(3)^c} \int_{P(3)^c} F_B(1; z(3)^c, P(3)^c) \times \\
 & \times \tilde{f}(z(3)^c) \tilde{f}(P(3)^c) dz(3)^c dP(3)^c + \\
 & + \sum_{(\alpha_1, \alpha_2)}^{(1,2,3,4)} \sum_{(\beta_1, \beta_2)}^{(1,2,3,4)} \int_{z(2)^c} \int_{P(2)^c} F_B(2; z(2)^c, P(2)^c) \times \\
 & \times \tilde{f}(z(2)^c) \tilde{f}(P(2)^c) dz(2)^c dP(2)^c + \\
 & + \sum_{(\alpha_1)}^{(1,2,3,4)} \sum_{(\beta_1)}^{(1,2,3,4)} \int_{z(\alpha_1)} \int_{P(\beta_1)} F_B(3; z(\alpha_1), P(\beta_1)) \tilde{f}(z(\alpha_1)) \times \\
 & \times \tilde{f}(P(\beta_1)) dz(\alpha_1) dP(\beta_1) + F_B(4) \tag{4.19}
 \end{aligned}$$

gdzie $z^c(n) \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{k=1}^n z(k)$, $P^c(3) \stackrel{\text{df}}{=} P^c(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $P^c(2) \stackrel{\text{df}}{=} P^c(\beta_1, \beta_2)$ (4.19')

Używamy tu oznaczeń (4.15) i (4.15'). Symbol $\sum_{(v_1 \dots v_p)}^{(\mathcal{L}_1 \dots \mathcal{L}_s)}$ oznacza sumę rozciągniętą na wszystkie możliwe sposoby wyboru z ciągu s liczb $\mathcal{L}_1 \dots \mathcal{L}_s$, jego podciągu złożonego z p liczb $v_1 \dots v_p$ ($1 \leq p \leq s$). Od tego miejsca począwszy wprowadzimy dla skrócenia zapisu dalszych wzorów następujące oznaczenie: $1_1^s \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{v=1}^s 1_1(v)$, gdzie wektory $1_1(v)$ są wektorami nie objętymi aktualnie kontrakcją. Tak więc mamy dla S_2^{int} następujące typy funkcji współczynnikowych $F_A(1; k, z^s(3))$, $F_A(2; z^s(2))$, $F_B(1; z^s(3)P^s(3))$, $F_B(2; z^s(2)P^s(2))$, $F_B(3; k, p)$, $F_B(4;)$. W oznaczeniach tych indeks stojący w nawiasie przed średnikiem oznacza ilość kontrakcji występujących w diagramie Feynmana, który odpowiada tej funkcji. Ponieważ pole grawitacyjne traktujemy jako klasyczne, przeto transformaty fourierowskie $\tilde{t}^{\mathcal{L}\beta}(q)$ kontrakcjom nie podlegają. Kontrakcje zaś (nie chronologiczne!) transformaty $\tilde{\mathcal{F}}(k)$ mają dobrze znaną postać:

$$\tilde{\mathcal{F}}(k) \tilde{\mathcal{F}}(p) = \delta(k+p) \sigma(p_4) \delta(p^2 - m^2) \quad (4.20)$$

gdzie przez p i k oznaczyliśmy czteropędy będące argumentami funkcji $\tilde{\mathcal{F}}$ podlegających kontrakcji. W oparciu o wzory (4.16), (4.17), (4.18), (3.41), (3.42) oraz (4.20) potrafimy explicite wypisać postać wszystkich funkcji współczynnikowych. Rachunek jest uciążliwy lecz standardowy. Prze-

nalizujemy konstrukcje poszczególnych tych funkcji i wykazemy, że wszystkie są ograniczone.

Po wykonaniu standardowych przekształceń otrzymujemy:

$$F_A(1; k^8(3), z^8(3)) = \frac{a^2}{2} \int_{\vec{p}} \frac{1}{\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} \times$$

$$\times \left[1 - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{p_\alpha k_\beta + p_\beta k_\alpha}{p^2}} \right] \times$$

$$\times \frac{p^4 \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}}{-4l^2 \left[(k - \vec{p})^2 + (k_4 - \sqrt{\vec{p}^2 + m^2})^2 \right]} \times$$

$$\times e^{-4l^2 \left[(\vec{z}^8(3) + \vec{p})^2 + \left((z^8(3))_4 + \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \right)^2 \right]} d^3 p \quad (4.21)$$

$$a \frac{df}{\sqrt{2\pi}} \frac{(4l)^2}{\sqrt{2\pi}} \quad , \quad k_{\beta} \frac{df}{\sqrt{2\pi}} (k^8(3))_{\beta} \quad (4.22)$$

a po dalszych przekształceniach:

$$F_A(1; K^8(3), z^8(3)) = \frac{a^2}{2} (I_1 + \frac{1}{2} K^8(3) \cdot I_2 - \frac{1}{2} (K^8(3))_4 I_3) \quad (4.23)$$

przy czym

$$I_1 \frac{df}{\vec{p}} \int \frac{e^{-8l^2 \mathcal{E}(\vec{p})}}{\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} d^3 \vec{p}, \quad I_2 \frac{df}{\vec{p}} \int \frac{\vec{p} e^{-8l^2 \mathcal{E}(\vec{p})}}{\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} d^3 \vec{p}, \quad (4.24)$$

$$I_3 \frac{df}{\vec{p}} \int e^{-8l^2 \mathcal{E}(\vec{p})} d^3 \vec{p}$$

gdzie

$$\mathcal{E}(\vec{p}) \frac{df}{\sqrt{2\pi}} 2p^2 + \vec{p} \cdot \vec{\Delta L} + \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \Delta L_4; \quad (4.25)$$

$$\Delta L \frac{df}{\sqrt{2\pi}} z^8(3) - K^8(3) \quad (4.26)$$

Przechodząc do współrzędnych sferycznych zgodnie z transformacją:

$$\begin{aligned}
 p_1 &= r \sin \theta \cos \varphi & r \in (0, +\infty) \\
 p_2 &= r \sin \theta \sin \varphi & \theta \in (0, \pi) \\
 p_3 &= r \cos \theta & \varphi \in (0, 2\pi)
 \end{aligned}
 \tag{4.27}$$

otrzymujemy

$$I_1 = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} dr \frac{r^2 \sin \theta e^{-81^2 f(r, \varphi, \theta)}}{\sqrt{r^2 + m^2}} \tag{4.28}$$

\vec{I}_2 jest wektorem o współrzędnych:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{r^3 \cos \varphi \sin^2 \theta e^{-81^2 f(r, \varphi, \theta)}}{\sqrt{r^2 + m^2}} d\theta d\varphi dr, \\
 & \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{r^3 \sin \theta \sin \varphi e^{-81^2 f(r, \theta, \varphi)}}{\sqrt{r^2 + m^2}} d\theta d\varphi dr, \\
 & \frac{i}{2} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{r^3 \sin 2\theta e^{-81^2 f(r, \varphi, \theta)}}{\sqrt{r^2 + m^2}} d\theta d\varphi dr
 \end{aligned}
 \tag{4.29}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 f(r, \varphi, \theta) &= \frac{df}{dm} 2r^2 + r(\sin \theta \cos \varphi (\Delta L)_1 + \sin \theta \sin \varphi (\Delta L)_2 + \\
 & + \cos \theta (\Delta L)_3) + \sqrt{r^2 + m^2} (\Delta L)_4
 \end{aligned}
 \tag{4.30}$$

$$I_3 = \frac{df}{dm} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} r^2 \sin \theta e^{-81^2 f(r, \varphi, \theta)} d\theta d\varphi dr \tag{4.31}$$

Nie chodzi nam teraz o efektywne wyliczenie tych całek /dokładniejsza analiza typowych całek występujących w (4.28) - (4.31) jest przeprowadzona w Aneksie, lecz o wykazanie, że są one wszystkie skończone. Tym samym zaś wykazałybyśmy ograniczoność funkcji współczynnikowej $F_A(1; K_{(3)}^s, z_{(3)}^s)$. Zauważmy w tym celu, że całkowanie po kątach θ i φ nie może dać nieskończonego przyczynku (Aneks). Wystarczy więc rozpatrzyć całkę I kształtu:

$$I \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} \frac{r^n e^{-\alpha r^2 + \beta r + \gamma \sqrt{r^2 + m^2}}}{(r^2 + m^2)^{\frac{s}{2}}} dr \quad (4.32)$$

gdzie

$$\alpha > 0, \infty > n \geq 2, \quad s = 0 \text{ lub } s = 1 \quad (4.33)$$

Współczynniki α, β, γ nie zależą od "r". β i γ mogą być dodatnie, jak i ujemne. Oznaczmy funkcję podcałkową z (4.32) przez $F(r)$. Z (4.32) i (4.33) wynika, że ma ona następujące własności:

- 1) $\bigwedge_{r \in \mathbb{R}^+} 0 < F(r) < \infty$, dziedziną funkcji $F(r)$ jest bowiem \mathbb{R}^+
 - 2) $\lim_{r \rightarrow 0} F(r) = 0$
 - 3) $\lim_{r \rightarrow \infty} F(r) = 0$ przy czym $F(r)$ maleje wówczas do zera eksponencjalnie
- (4.34)

a zatem $I < \infty$.

Ponieważ zaś zależność od "r" funkcji podcałkowych w całkach I_1, \vec{I}_2, I_3 jest typu (4.32), przeto wszystkie te całki są ograniczone a tym samym i funkcja współczynnika $F_A/1; K_{(3)}^{\otimes}, L_{(3)}^{\otimes}$ jest też ograniczona.

Przejdźmy teraz do wykazania ograniczoności funkcji $F_A/2; L_{(2)}^{\otimes}$. Z (4.16), (4.17), (4.18), (3.41), (3.42) i z (4.20) otrzymujemy po przeliczeniach:

$$\begin{aligned}
 F_A(2; L_{(2)}^{\otimes}) = & a^2 \int_p \int_k \left[e^{-4l^2 \left[(\vec{k} + \vec{p})^2 + (k_4 + p_4)^2 \right]} \left(1 + \frac{1}{4} \eta^{\alpha/\beta} \times \right. \right. \\
 & \times \left. \left. (k_{\alpha} p_{\beta} + k_{\beta} p_{\alpha}) \right) \int_{k' p'} \int_{k'' p''} e^{-4l^2 \left[\vec{k} + \vec{p} + \vec{L}_{(2)}^{\otimes}(2) \right]^2 + (k_4 + p_4 + (L_{(2)}^{\otimes})_4)^2} \right] \times \\
 & \times \delta(k + k') \delta(p + p') \Theta(k'_4) \Theta(p'_4) \delta(k'^2 - m^2) \delta(p'^2 - m^2) dk' dp' \times \\
 & \times dpdk \quad (4.35)
 \end{aligned}$$

Wykonując całkowanie po p', k', p_4 i k_4 otrzymujemy po typowych przekształceniach:

$$\begin{aligned}
 F_A(2; L_{(2)}^{\otimes}) = & \frac{a^2}{4} \int_{\vec{p}} \int_{\vec{s}} \frac{e^{-4l^2 \left[g(\vec{p}, \vec{s}) + f(\vec{p}, \vec{s}, L_{(2)}^{\otimes}) \right]}}{\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \sqrt{\vec{s}^2 + m^2}} \times \\
 & \times \left[1 - \frac{1}{2} \vec{p} \cdot \vec{s} + \frac{1}{2} \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \sqrt{\vec{s}^2 + m^2} \right] d^3 \vec{p} d^3 \vec{s} \quad (4.36)
 \end{aligned}$$

gdzie:

$$g(\vec{p}, \vec{s}) \stackrel{df}{=} -8l^2 m^2 - 8l^2 \left[\vec{p}^2 + \vec{s}^2 + \vec{p} \cdot \vec{s} + \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \sqrt{\vec{s}^2 + m^2} \right] \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned}
 f(\vec{p}, \vec{s}, \vec{t}^{\circ}(2)) \frac{df}{d\vec{s}} = & 4l^2 \left[(\vec{t}^{\circ}(2))_4^2 + (\vec{t}^{\circ}(2))_4^2 + 2m^2 + 2\vec{p}^2 + 2\vec{s}^2 + 2\vec{p} \cdot \vec{t}^{\circ}(2) \right] + \\
 & + 2\vec{s}^2 \cdot \vec{t}^{\circ}(2) + \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \cdot \sqrt{\vec{s}^2 + m^2} + (\vec{t}^{\circ}(2))_4 \left(\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} + \sqrt{\vec{s}^2 + m^2} \right)
 \end{aligned} \quad (4.38)$$

W celu wykazania ograniczoności funkcji $F_A(2; \vec{t}^{\circ}(2))$ wygodniej będzie zapisać ją nieco inaczej:

$$\begin{aligned}
 F_A(2; \vec{t}^{\circ}(2)) = & \frac{\vec{s}^2}{4} e^{-8l^2 \left[(\vec{t}^{\circ}(2))_4^2 + (\vec{t}^{\circ}(2))_4^2 + 4m^2 \right]} \times \\
 & \times \left[\bar{I}_1 - \frac{1}{4} \bar{I}_2 + \frac{1}{4} \bar{I}_3 \right]
 \end{aligned} \quad (4.39)$$

gdzie

$$\bar{I}_1 \frac{df}{d\vec{s}} \int_{\vec{s}} \left[\frac{e^{-8l^2 w(\vec{s}, \vec{t}^{\circ}(2))}}{\sqrt{\vec{s}^2 + m^2}} I(\vec{s}, \vec{t}^{\circ}(2)) \right] d^3 \vec{s} \quad (4.40)$$

$$\bar{I}_2 \frac{df}{d\vec{s}} \int_{\vec{s}} \frac{e^{-8l^2 w(\vec{s}, \vec{t}^{\circ}(2))}}{\sqrt{\vec{s}^2 + m^2}} \rightarrow \int_{\vec{p}} \left[\frac{\vec{p} \cdot \vec{s} e^{-8l^2 k(\vec{p}, \vec{s}, \vec{t}^{\circ}(2))}}{p^2 + m^2} d^3 \vec{p} \right] d^3 \vec{s} \quad (4.41)$$

$$\bar{I}_3 \frac{df}{d\vec{s}} \int_{\vec{s}} e^{-8l^2 w(\vec{s}, \vec{t}^{\circ}(2))} \left[\int_{\vec{p}} e^{-8l^2 k(\vec{p}, \vec{s}, \vec{t}^{\circ}(2))} d^3 \vec{p} \right] d^3 \vec{s} \quad (4.42)$$

$$I(\vec{s}, \vec{t}^{\circ}(2)) \frac{df}{d\vec{p}} \int_{\vec{p}} \frac{e^{-8l^2 k(\vec{p}, \vec{s}, \vec{t}^{\circ}(2))}}{\sqrt{p^2 + m^2}} d^3 \vec{p} \quad (4.43)$$

$$w(\vec{s}, \vec{t}^{\circ}(2)) \frac{df}{d\vec{s}} = 2\vec{s}^2 + \vec{s} \cdot \vec{t}^{\circ}(2) + (\vec{t}^{\circ}(2))_4 \sqrt{\vec{s}^2 + m^2} \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned}
 k(\vec{p}, \vec{s}, \vec{t}^{\circ}(2)) \frac{df}{d\vec{p}} = & 2\vec{p}^2 + \vec{p} \cdot (2\vec{s} + \vec{t}^{\circ}(2)) + \sqrt{p^2 + m^2} \times \\
 & \times \left(\sqrt{\vec{s}^2 + m^2} + (\vec{t}^{\circ}(2))_4 \right)
 \end{aligned} \quad (4.45)$$

Wstawmy (4.45) do (4.43). Po prostych przekształceniach funkcji podcałkowej i odpowiednim jej zmajoryzowaniu otrzymujemy następującą nierówność:

$$I(\vec{s}, t_{(2)}^s) < \frac{1}{m} e^{41^{2s+2}} \int_{\vec{p}} e^{-16l^2(\vec{p} + \frac{\vec{s}}{2})^2} \times \\ \times e^{-8l^2 \left[\vec{p} \cdot t_{(2)}^s + \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} (t_{(2)}^s)_4 \right]} d^3 \vec{p} \quad (4.46)$$

Ponieważ jedyny człon funkcji podcałkowej zależny od zmiennego wektora \vec{s} , tkwi jako argument stałe ujemnego wykładnika eksponenty, przeto supremum całki tkwiącej po prawej stronie nierówności (4.46), traktowanej jako funkcja wektora \vec{s} , jest ograniczone. Oznaczmy

$$f(\vec{s}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\vec{p}} e^{-16l^2 \left[\vec{p} + \frac{1}{2} \vec{s} \right]^2} e^{-8l^2 \left[\vec{p} \cdot t_{(2)}^s + \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} (t_{(2)}^s)_4 \right]} d^3 \vec{p} \quad (4.47)$$

Z (4.40), (4.43), (4.46), (4.47) wynika teraz, że:

$$\bar{I}_1 < \frac{1}{m} \int_{\vec{s}} \left[\frac{e^{-12l^{2s+2} - 8l^{2s} \vec{s} \cdot t_{(2)}^s - \sqrt{\vec{s}^2 + m^2} (t_{(2)}^s)_4}}{\sqrt{\vec{s}^2 + m^2}} \text{Sup. } f(\vec{s}) \right] d^3 \vec{s} \quad (4.48)$$

Sup. $f(\vec{s}) = \text{supremum } f(\vec{s})$. Całka majoryzująca \bar{I}_1 w (4.48) jest ograniczona, co widać ze struktury funkcji podcałkowej /Sup. $f(\vec{s}) < \infty$). A zatem i całka \bar{I}_1 jest ograniczona. Zupełnie podobnie dowodzimy ograniczoności całek \bar{I}_2 i \bar{I}_3 , a tym samym otrzymujemy /vide (4.39)/, że funkcja wierzchołkowa $F_A(2; t_{(2)}^s)$ jest też ograniczona.

Dla wykazania ograniczoności pozostałych funkcji wierzchołkowych postępujemy zupełnie podobnie jak dotychczas. I tak dla funkcji $F_B(1; t_{(3)}^{\otimes}, p_{(3)}^{\otimes})$ otrzymujemy po analogicznych przeliczeniach:

$$F_B(1; t_{(3)}^{\otimes}, p_{(3)}^{\otimes}) = \frac{\alpha^2}{2} e^{-4l^2 \left[t_{(3)}^{\otimes 2} + (t_{(3)}^{\otimes})_4^2 + \vec{p}_{(3)}^{\otimes 2} + (p_{(3)}^{\otimes})_4^2 + 2m^2 \right]} \times$$

$$\times \int_{\vec{p}} \frac{e^{-8l^2 \left[2\vec{p}^2 + \vec{p} \cdot \Delta L + \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \Delta l_4 \right]}}{\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} d^3 \vec{p}, \quad \alpha = \frac{(41)^4}{\sqrt{2\pi}} \quad (4.49)$$

gdzie $\Delta L = t_{(3)}^{\otimes} - p_{(3)}^{\otimes}$. Całka występująca w (4.49) sprowadza się do całki typu (4.32). Jest więc ona też ograniczona, co świadczy o ograniczoności funkcji $F_B(1; t_{(3)}^{\otimes}, p_{(3)}^{\otimes})$. Podobnie też otrzymujemy:

$$F_B(2; t_{(2)}^{\otimes}, p_{(2)}^{\otimes}) = \frac{\alpha^2}{4} e^{-4l^2 \left[t_{(2)}^{\otimes 2} + (t_{(2)}^{\otimes})_4^2 + \vec{p}_{(2)}^{\otimes 2} + (p_{(2)}^{\otimes})_4^2 + 4m^2 \right]} \times$$

$$\times \int_{\vec{s}} \left[\frac{e^{-8l^2 \left[2\vec{s}^2 + \sqrt{\vec{s}^2 + m^2} \Delta l_4 + \vec{s} \cdot \Delta l \right]}}{\sqrt{\vec{s}^2 + m^2}} \right] (s, t_{(2)}^{\otimes}, p_{(2)}^{\otimes}) d^3 \vec{s} \quad (4.50)$$

gdzie $\Delta L = t_{(2)}^{\otimes} - p_{(2)}^{\otimes}$

$$I(s, t_{(2)}^{\otimes}, p_{(2)}^{\otimes}) \stackrel{df}{=} \int_{\vec{p}} \frac{d^3 \vec{p}}{\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} e^{-8l^2 \left[2\vec{p}^2 + \vec{p} \cdot (2\vec{s} + \Delta L) \right]} \times$$

$$\times e^{-8l^2 \left[\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} (2\sqrt{\vec{s}^2 + m^2} + \Delta l_4) \right]} d^3 \vec{p} \quad (4.51)$$

Całki występujące w (4.50) i w (4.51) są identyczne z cał-

kami (4.40) i (4.43). Przekształcając je tak jak czyniliśmy to poprzednio i przeprowadzając analogiczne rozumowanie dowodzimy ograniczoności funkcji wierzchołkowych typu $F_B(2; \mathbf{z}^{\otimes}(2), P^{\otimes}(2))$. Dla funkcji $F_B(3; k, \mathbf{z})$ otrzymujemy po przeprowadzeniu standardowych rachunków:

$$F_B(3; k, \mathbf{z}) = \phi(k, \mathbf{z}) \int_{\vec{u}} \left[e^{-8l^2(2\vec{u}^2 + \vec{u} \cdot \Delta \vec{L} + \sqrt{\vec{u}^2 + m^2} \Delta L_4)} \times \right. \\ \left. \times \frac{I(\vec{u}, k, \mathbf{z})}{\sqrt{\vec{u}^2 + m^2}} \right] d^3 \vec{u} \quad (4.52)$$

gdzie $\Delta L \stackrel{df}{=} z - k$,

$$\phi(k, \mathbf{z}) \stackrel{df}{=} \frac{a^2}{8} e^{-4l^2 \left[k^2 + k_4^2 + \mathbf{z}^2 + \mathbf{z}_4^2 \right]} \cdot e^{-24l^2 m^2} \quad (4.53)$$

$$I(\vec{u}, k, \mathbf{z}) \stackrel{df}{=} \int_{\vec{s}} \left[e^{-8l^2 \left[2\vec{s} + \vec{s} \cdot (2\vec{u} + \Delta \vec{L}) + \sqrt{\vec{s}^2 + m^2} (2\sqrt{\vec{u}^2 + m^2} + \Delta L_4) \right]} \times \right. \\ \left. \times \frac{I_s(\vec{s}, k, \mathbf{z})}{\sqrt{\vec{s}^2 + m^2}} \right] d^3 \vec{s} \quad (4.54)$$

gdzie z kolei

$$I_s(\vec{s}, k, \mathbf{z}) \stackrel{df}{=} \int_{\vec{p}} \frac{1}{\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} e^{-8l^2 \left[2\vec{p}^2 + \vec{p} \cdot (2\vec{s} + \vec{u} + \Delta \vec{L}) \right]} \times \\ \times e^{-8l^2 \left[\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} (2\sqrt{\vec{s}^2 + m^2} + 2\sqrt{\vec{u}^2 + m^2} + L_4) \right]} \quad (4.55)$$

I znów rozumujemy tak samo jak poprzednio przy wykazywaniu ograniczoności funkcji $F_A(2; \mathbf{z}^{\otimes}(2))$.

Z (4.45) wynika, że:

$$I_{\mathfrak{s}}(\vec{s}, k, \lambda) < \frac{1}{m} e^{4l^2(\vec{s} + \vec{u})^2} N(\vec{s}) \quad (4.56)$$

gdzie

$$N(\vec{s}) = \int_{\vec{p}} e^{-16l^2(\vec{p} + \frac{\vec{s} + \vec{u}}{2})^2} \cdot e^{-8l \left[\vec{p} \cdot \Delta L + \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \Delta L_4 \right]} \quad (4.57)$$

$$Z (4.57) \text{ wynika, że } \left| \text{Sup}_{\vec{s}} N(\vec{s}) \right| < \infty \quad (4.58)$$

$$Z (4.54) \text{ wynika, że } I(\vec{u}, k, \lambda) < \frac{1}{m^2} e^{6l^2 \vec{u}^2} M(\vec{u}) \quad (4.59)$$

gdzie

$$M(\vec{u}) = \int_{\vec{s}} e^{-8l^2 \left[(\vec{s} + \frac{\vec{u}}{2})^2 + \vec{s} \cdot \Delta L + \sqrt{\vec{s}^2 + m^2} \Delta L_4 \right]} \times \\ \times N(\vec{s}) d^3 \vec{s} \cdot e^{-4l^2 m^2} \quad (4.60)$$

$$Z (4.58) \text{ i } (4.60) \text{ wynika, że } \left| \text{Sup}_{\vec{u}} M(\vec{u}) \right| < \infty \quad (4.61)$$

Z (4.59) i (4.52) otrzymujemy dalej, że:

$$F_B(3; \lambda, k) < \frac{1}{m^3} \phi(k, \lambda) \int_{\vec{u}} \left[e^{-10l^2 \vec{u}^2 - 8\vec{u} \cdot \Delta L l^2 - 8l^2 \sqrt{\vec{u}^2 + m^2} \Delta L_4} \right] \\ \times M(\vec{u}) d^3 \vec{u} \quad (4.62)$$

Z kształtu funkcji podcałkowej w (4.62) i z nierówności

$$(4.61) \text{ wynika, że: } F_B(3; k, p) < \infty$$

Na koniec dla funkcji wierzchołkowej $F_B(4)$; nie zawierającej wektorów nie podlegających kontrakcji otrzymujemy po przeliczeniu:

$$F_B(4) = \frac{a^2 e^{-32l^2 m^2}}{16} \int_{\vec{w}} \frac{e^{-16l^2 \vec{w}^2}}{\sqrt{\vec{w}^2 + m^2}} I_W(\vec{w}) d^3 \vec{w} \quad (4.63)$$

gdzie

$$I_w(\vec{w}) \frac{df}{d\vec{w}} \int_{\vec{u}} e^{-16l^2(\vec{u}^2 + \vec{u} \cdot \vec{w} + \sqrt{\vec{u}^2 + m^2} \sqrt{\vec{w}^2 + m^2})} \times \frac{I_u(\vec{u})}{\sqrt{\vec{u}^2 + m^2}} d^3\vec{u} \quad (4.64)$$

$$I_u(\vec{u}) \frac{df}{d\vec{u}} \int_{\vec{s}} e^{-16l^2 \left[\vec{s} + \vec{s} \cdot (\vec{u} + \vec{w}) + \sqrt{\vec{s}^2 + m^2} (\sqrt{\vec{u}^2 + m^2} + \sqrt{\vec{w}^2 + m^2}) \right]} \times \frac{I_s(\vec{s})}{\sqrt{\vec{s}^2 + m^2}} d^3\vec{s} \quad (4.65)$$

$$I_s(\vec{s}) \frac{df}{d\vec{s}} \int_{\vec{p}} e^{-16l^2 \left[\vec{p}^2 + \vec{p} \cdot (\vec{s} + \vec{u} + \vec{w}) + \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} (\sqrt{\vec{s}^2 + m^2} + \sqrt{\vec{u}^2 + m^2}) \right]} \times e^{-16l^2 \sqrt{\vec{w}^2 + m^2}} \frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} \quad (4.66)$$

Z (4.66) wynika, że

$$I_s(\vec{s}) < \frac{1}{m} e^{4l(\vec{s} + \vec{u} + \vec{w})^2} N(\vec{s}) \quad (4.67)$$

gdzie

$$N(\vec{s}) \frac{df}{d\vec{p}} \int_{\vec{p}} e^{-16l^2 \left(\vec{p} + \frac{\vec{s} + \vec{u} + \vec{w}}{2} \right)^2} d^3\vec{p} \quad (4.68)$$

a więc

$$\left| \text{Sup}_s N(\vec{s}) \right| < \infty \quad (4.69)$$

Z (4.65) i (4.67) wynika znów, że

$$I_u(\vec{u}) < \frac{1}{m^2} e^{6l^2(\vec{u} + \vec{w})^2} M(\vec{u}) \quad (4.70)$$

gdzie

$$M(\vec{u}) \frac{df}{d\vec{s}} \int_{\vec{s}} e^{-4l^2 \vec{s}^2 - 8l^2 \left(\vec{s} + \frac{\vec{u} + \vec{w}}{2} \right)^2} d^3\vec{s} \quad (4.71)$$

Z (4.71) wynika, że:

$$\left| \text{Sup. } M(\vec{u}) \right| < \infty \text{ c.b.d.u.} \quad (4.72)$$

Wstawiając z kolei (4.70) do związku (4.64) otrzymujemy, że:

$$I_w(\vec{w}) < \frac{1}{m^3} e^{-\frac{32}{5} l^2 \vec{w}^2} P(\vec{w}) \quad (4.73)$$

gdzie

$$P(\vec{w}) \stackrel{\text{df}}{=} \int_{\vec{u}} e^{-10 l^2 (\vec{u} + \frac{1}{5} \vec{w})^2} d^3 \vec{w} \quad (4.74)$$

Tak więc

$$\left| \text{Sup. } P(\vec{w}) \right| < \infty \quad (4.75)$$

Na koniec wróćmy do (4.63). Z (4.73) i (4.75) wynika, że:

$$F_B(4;) < \frac{a^2 e^{-32 l^2 m^2}}{(2m)^4} \int_{\vec{w}} e^{-\frac{48}{5} l^2 \vec{w}^2} P(\vec{w}) d^3 \vec{w} < \infty \quad (4.76)$$

Tym samym wykazaliśmy, że wszystkie funkcje współczynnikowe występujące w wickowskim rozwinięciu człoju S_2^{int} macierzy rozpraszania są ograniczone. Nie ma więc przeszkód w posługiwaniu się nimi w celu obliczania prawdopodobieństw zachodzenia procesów opisywanych przyjętym przez nas modelem oddziaływania. Zauważmy, że możemy przy tym zonglować jednym tylko parametrem, a mianowicie stałą l (związaną ze skalarem krzywizny przestrzeni wzorem $R = \frac{1}{l^2}$) pamiętając jedynie, że musi być ona "nałozycie duża", czyli taka, by była zawsze spełniona nierówność (3.32).

Opis oddziaływania naładowanych bezspinowych cząstek z polem elektromagnetycznym przy uwzględnieniu wpływu pola opisanego tensorowymi funkcjami próbnymi $t_{\mu\nu}(x)$

Lagrangian oddziaływania bezspinowych cząstek naładowanych z polem elektromagnetycznym przy uwzględnieniu wpływu pola tensorowych funkcji próbnych $t_{\mu\nu}(x)$ (czyli zewnętrznego, słabego, o stałej krzywiznie, klasycznego pola grawitacyjnego istniejącego w czteroobeszarze Ω_{ef}) obierzemy tak, aby:

1) był on ogólnie kowariantny;

2) był on niezmienniczy względem dyslokacji w polu $t_{\mu\nu}(x)$ /zależał liniowo i jednorodnie od $t_{\mu\nu}(x)$ - konsekwentnie z(2.21)/, czyli by spełniał równanie;

$$t_{\mu\nu}(x) \frac{\delta L_{int}(x)}{\delta t_{\mu\nu}(x)} = L_{int}(x) \quad (5.0)$$

3) by dla $l \rightarrow \infty$ /czyli dla $R(x) \rightarrow 0$ / przyjmował postać

$$L_{int}(x) = e_0^2 f^*(x) f(x) A_\nu(x) A^\nu(x);$$

gdzie e_0 jest (bezwymiarową) stałą sprzężenia oddziaływań elektromagnetycznych.

$A_\nu(x)$ jest czteropotencjałem pola elektromagnetycznego, $f(x)$ funkcją pola rozpatrywanych przez nas cząstek o równych liczbowo ładunkach elektrycznych i równych masach spoczynkowych "m";

4) aby opisywał oddziaływanie cząstek zarówno z polem $A_\nu(x)$, jak i z polem $t_{\mu\nu}(x)$ poprzez człon zawierający same funkcje $f(x)$, $f^*(x)$ i poprzez człon zawierający pochodne cząstkowe $\partial_\nu f(x)$, $\partial_\mu f^*(x)$. Przyjmijmy tu, że człon "masowy" naszego lagrangianu opisujący oddziaływanie (typu "newtonowskiego") cząstek z polem będzie proporcjonalny do iloczynu $f(x) f^*(x)$.

Posługując się rozumowaniem analogicznym do rozumowania, które doprowadziło nas do podania konkretnej konstrukcji lagrangianu oddziaływania samych nie naładowanych bezpiecznych cząstek z polem $t_{\mu\nu}(x)$, (rozdz. IV s. 50 i 51) otrzymujemy, że lagrangian spełniający warunki (1)...(4) będziemy mogli zapisać w postaci:

$$L_{int}(x) = \frac{k}{I} \left[\frac{m}{I} t(x) f(x) f^*(x) + t^{\nu\beta}(x) (\partial_\nu f(x) + ie A_\nu(x) f(x)) x^\beta (\partial_\beta f^*(x) - ie A_\beta(x) f^*(x)) \right] + \frac{e^2}{4} \left[f(x) f^*(x) A_\nu(x) A^\nu(x) t^{\nu\mu}(x) \right]; \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} [f(x)] &= [A_\nu(x)] = \left[\frac{1}{I} \right] = \left[\frac{1}{k} \right] = \frac{1}{\text{długość}} \cdot [t^{\nu\mu}(x)] = \\ &= [e] = 1 \end{aligned} \quad (5.2)$$

W wzorze (5.2) nawias kwadratowy oznacza wymiar wielkości, która w nawiasie tym tkwi/.

Podobnie jak w poprzednim rozdziale ograniczymy się do zbadania funkcji współczynnikowych tkwiących w członie S_2^{int} macierzy rozpraszania. Człon ten wyraża się wzorem:

$$S_2^{int} = \frac{1}{2} \int_{x_2} \int_{x_1} \Theta [\lambda (x_2 - x_1)] : [L_{int}(x_2) L_{int}(x_1)] d_t x_2 d_t x_1 + \\ + \frac{1}{2} \int_{x_1} \int_{x_2} \Theta [\lambda (x_1 - x_2)] : [L_{int}(x_1) L_{int}(x_2)] : d_t x_1 d_t x_2 \quad (5.3)$$

gdzie wszystkie oznaczenia są takie same jak i w poprzednim rozdziale. Podobnie jak poprzednio obieramy teraz układ Σ_0 , w którym przeprowadzamy dalsze rachunki. Podstawiając (5.1) do (5.3) i odrzucając człony proporcjonalne do k^2 otrzymujemy:

$$S_2^{int} = \delta_1 + \delta_2 \quad (5.4)$$

gdzie:

$$\delta_1 = \frac{1}{2} \int_{x_1} \int_{x_2} \Theta [\lambda (x_2 - x_1)] \left[: \alpha_2 \alpha_1 : - \frac{k}{I} (: \phi_2 \alpha_1 : + : \alpha_2 \phi_1 : + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} : t_2 \alpha_2 \alpha_1 : + \frac{1}{2} : \alpha_2 \alpha_1 t_1 :) \right] d^4 x_1 d^4 x_2$$

δ_2 jest równe wyrażeniu δ_1 , w którym dokonano zamiany x_2 na x_1 , (5.4')

gdzie $\alpha_2 \stackrel{df}{=} \alpha(x_2)$, $\alpha_1 \stackrel{df}{=} \alpha(x_1)$, $\phi_2 \stackrel{df}{=} \phi(x_2)$, $\phi_1 \stackrel{df}{=} \phi(x_1)$,
 $t_2 \stackrel{df}{=} t(x_2)$, $t_1 \stackrel{df}{=} t(x_1)$, (5.5)

przy czym

$$\mathcal{L}(x) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{I} \int t(x) \varphi(x) \varphi(x) + t^{\alpha\beta}(x) \left[\partial_\alpha \varphi^\beta(x) + i\theta A_\alpha(x) \varphi^\beta(x) \right] x \left[\partial_\beta \varphi(x) - i\theta A_\beta(x) \varphi(x) \right] \quad (5.6)$$

$$\phi(x) \stackrel{\text{df}}{=} \varphi(x) \varphi^*(x) A_\nu(x) A_\mu(x) t^{\nu\mu}(x). \quad (5.7)$$

Przypominamy, że $t(x)$ i $t_{\mu\nu}(x)$ określone są wzorami (3.41)

i (3.39) a ich fourierowskie transformaty $\tilde{t}(q)$ i $\tilde{t}_{\mu\nu}(q)$ -

wzorami (3.47) i (3.48). $t^{\nu\mu}(x) = \eta^{\nu\alpha} \eta^{\mu\beta} t_{\alpha\beta}(x)$.

Przechodząc z $\mathcal{L}(x)$ i $\phi(x)$ do reprezentacji pędowej, przejdźmy do niej z funkcjami $\varphi(x)$, $\varphi^*(x)$, $A_\nu(x)$.

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_k e^{ikx} \tilde{\varphi}(k) dk, \quad \varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_p e^{-ipx} \tilde{\varphi}(p) dp \quad (5.8)$$

$$A_\nu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_k e^{ikx} \tilde{A}_\nu(k) dk \quad (5.9)$$

przypomnijmy, że niechronologiczne kontrakcje transformat

fourierowskich funkcji $\varphi(x)$ i $A_\nu(x)$ mają postać:

$$\underbrace{\tilde{\varphi}(k) \tilde{\varphi}(p)} = \delta(k+p) \theta(p_4) \delta(p^2 - m^2) \quad (5.10)$$

$$\underbrace{\tilde{A}_\nu(k) \tilde{A}_\mu(p)} = -\eta_{\nu\mu} \delta(k+p) \theta(p_4) \delta(p^2) \quad (5.11)$$

Oznaczmy teraz:

1/ wektorowe argumenty transformat fourierowskich funkcji $\varphi(x_1)$ przez k_1 ;

2/ wektorowe argumenty transformat fourierowskich funkcji $f(x_1)$ przez l_1 ;

3/ wektorowe argumenty transformat fourierowskich funkcji $A_\nu(x_1)$ przez p_1 lub e_1 ;

4/ wektorowe argumenty transformat fourierowskich funkcji $t(x_1)$ i $t^{\mu\nu}(x_1)$ przez q_1 .

Przejdźmy teraz do reprezentacji pędowej z iloczynami:

$$\alpha_2 \alpha_1 : \dots : \alpha_2 \alpha_1 t_1 :$$

Na podstawie (5.6), (5.7), (5.8) i (5.9) otrzymamy kolejno po wykonaniu typowych rachunków:

$$1) \alpha_2 \alpha_1 : = \frac{e^4}{16(2\pi)^{15}} \int_{k_2} \int_{l_2} \int_{p_2} \int_{s_2} \int_{q_2} \int_{k_1} \int_{l_1} \int_{p_1} \int_{s_1} \int_{q_1} e^{ix_1 b_1} x \\ \times e^{(-l_1+p_1+s_1+q_1)x} \times e^{ix_2(k_2-l_2+p_2+s_2+q_2)} : x \\ \times \tilde{f}(k_2) \tilde{f}(-l_2) \tilde{A}_\nu(p_2) \tilde{A}_\mu(s_2) \tilde{t}^{\mu\nu}(q_2) x \\ \times \tilde{f}(k_1) \tilde{f}(-l_1) \tilde{A}_\nu(s_1) \tilde{A}_\mu(p_1) \tilde{t}^{\alpha\beta}(q_1) : dk_2 \dots dq_1 \quad (5.12)$$

$$2) : \phi_2 \alpha_1 : = \frac{+m^0 e_0^2}{41(2\pi)^{15/2}} : \left[\frac{m}{1(2\pi)^{3/2}} \int_{q_2} \int_{k_2} \int_{l_2} \tilde{t}(q_2) \tilde{f}(k_2) \tilde{f}(l_2) x \right. \\ \times e^{ix_2(q_2+k_2-l_2)} dq_2 dk_2 dl_2 + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{q_2} e^{iq_2 x_2} dq_2 x \\ \times \left[\frac{\epsilon(k)}{(2\pi)^{3/2}} \int_{l_2} (l_2)_\alpha e^{-il_2 x_2} \tilde{f}(-l_2) d^4 l_2 + \right. \\ \left. + \frac{e_0}{(2\pi)^3} \int_{p_2} \int_{q_2} e^{ix_2(p_2-l_2)} \tilde{f}(-l_2) x \right. \\ \left. \times \tilde{A}_\nu(p_2) dl_2 dp_2 \right] \tilde{t}^{\alpha\beta}(q_2) \left[\frac{e_0}{(2\pi)^3} \int_{s_2} \int_{k_2} e^{ix_2 s_2} x \right.$$

$$\begin{aligned}
 & \times e^{ix_2 k_2} \tilde{\varphi}(k_2) \tilde{A}_\rho(s_2) ds_2 dk_2 - \frac{\varepsilon(\beta)}{(2\pi)^{3/2}} \int_{k_2} (k_2)_\beta e^{ix_2 k_2} \tilde{\varphi}(k_2) dk_2 \} \times \\
 & \times \int_{k_1} \int_{l_1} \int_{s_1} \int_{p_1} \int_{q_1} e^{ix_1(-l_1+k_1+s_1+p_1+q_1)} \tilde{\varphi}(k_1) \tilde{\varphi}(-l_1) \tilde{A}_\nu(s_1) \tilde{A}_\mu(p_1) \times \\
 & \times \tilde{t}^{\mu\nu}(q_1) dk_1 \dots dq_1 : \quad (5.13)
 \end{aligned}$$

gdzie

$$\varepsilon_{(v)} \frac{df}{dx} \begin{cases} -1, & \text{gdy } v = 1, 2, 3 \\ +1, & \text{gdy } v = 4 \end{cases}$$

$$3) : \phi_1 \alpha_2 : = : \phi_2 \alpha_1 : \quad \left| \begin{array}{l} \text{ze zmianą wekaźników "1" na} \\ \text{"2" i odwrotnie} \end{array} \right.$$

$$4) : t_2 \alpha_2 \alpha_1 : = -4 e^4 \int_{q_1} \dots \int_{p_2} e^{ix_1(-l_1+k_1+q_1+p_1+s_1)} \times$$

$$\times e^{ix_2(-l_2+k_2+q_2+p_2+s_2+q_2')} : \tilde{\varphi}(k_1) \tilde{\varphi}(-l_1) \tilde{A}_\nu(s_1) \tilde{A}_\mu(p_1) \tilde{t}^{\nu\mu}(q_1) \times$$

$$\times \tilde{A}_\nu(s_2) \tilde{A}_\rho(p_2) \tilde{\varphi}(k_2) \tilde{\varphi}(-l_2) \tilde{t}^{\nu\rho}(q_2) \tilde{t}(q_2') : dq_2' dk_1 \dots dp_2 \quad (5.14)$$

5) : $t_1 \alpha_2 \alpha_1 : = : t_2 \alpha_2 \alpha_1 :$ z zamianą q_2' na q_1 , przy czym q_2 "zmienione" na q_1' pojawia się w wykładniku eksponenty przy " x_1 ".

Rozpisując wzór (5.4) otrzymujemy:

$$S_2^{int} = S_A + S_B + S_C + S_D + S_E \quad (5.15)$$

gdzie

$$S_A = \frac{1}{2\pi^2} \int \int_{x_1 x_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda \mathcal{T}(x_2-x_1)}}{\mathcal{T}-1\mathcal{E}} : \alpha_2 \alpha_1 : d\mathcal{T} d^4 x_1 d^4 x_2 \quad (5.16)$$

$$S_B = -\frac{k}{2\pi^2} \int \int_{x_1 x_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda \mathcal{T}(x_2-x_1)}}{\mathcal{T}-1\mathcal{E}} : \alpha_2 \phi_1 : d\mathcal{T} d^4 x_1 d^4 x_2 \quad (5.17)$$

$$S_C = -\frac{k}{2\pi^2} \int \int_{x_1 x_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\mathcal{T}\lambda(x_2-x_1)}}{\mathcal{T}-1\mathcal{E}} : \alpha_1 \phi_2 : d\mathcal{T} d^4 x_1 d^4 x_2 \quad (5.18)$$

$$S_D = -\frac{k}{4\pi^2} \int \int_{x_1 x_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\mathcal{T}\lambda(x_2-x_1)}}{\mathcal{T}-1\mathcal{E}} : t_2 \alpha_2 \alpha_1 : d\mathcal{T} d^4 x_1 d^4 x_2 \quad (5.19)$$

$$S_E = -\frac{k}{4\pi^2} \int \int_{x_1 x_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\mathcal{T}\lambda(x_2-x_1)}}{\mathcal{T}-1\mathcal{E}} : t_1 \alpha_2 \alpha_1 : d\mathcal{T} d^4 x_1 d^4 x_2 \quad (5.20)$$

Podstawiamy teraz (5.12) do (5.16). Po wykonaniu rachunków

i podstawieniu $\vec{\lambda} \stackrel{\approx}{\leq} 0$ otrzymujemy:

$$S_A \stackrel{\approx}{\leq} \frac{e^4 a^2}{4^3 (2\pi)^7} \int \int \int \int \int \int \int \int \eta^{\lambda\rho} \eta^{\mu\nu} : \tilde{\mathcal{F}}(k_2) \tilde{\mathcal{F}}(-l_2) \tilde{A}_\alpha(p_2) \tilde{A}_\beta(a_2) \times$$

$$k_2^1 l_2^2 p_2^3 a_2^4 k_1^1 l_1^2 p_1^3 a_1^4$$

$$\times \tilde{\mathcal{F}}(k_1) \tilde{\mathcal{F}}(-l_1) \tilde{A}_\mu(a_1) \tilde{A}_\nu(p_1) : e^{-4l^2 (-\vec{l}_1 + \vec{k}_1 + \vec{s}_1 + \vec{p}_1)^2} \times$$

$$\times e^{-4l^2 (-l_1^4 - k_1^4 + s_1^4 + p_1^4)^2} e^{-4l^2 [(-\vec{l}_2 + \vec{k}_2 + \vec{s}_2 + \vec{p}_2)^2 + (-l_2^4 + k_2^4 + s_2^4 + p_2^4)^2]}$$

$$\times dk_2 dl_2 \dots ds_1, \quad a = \frac{(4l)^4}{(2\pi)^{1/2}} \quad (5.21)$$

Wyliczymy teraz funkcje współczynnikowe odpowiadające wszystkim możliwym rodzajom kontrakcji. Standardowe rachunki prowadzą do następujących wyników^{x/}:

$$1) F_A \left[\underbrace{\tilde{\psi}/k_2 / \tilde{\psi}/k_1}_{\substack{\tilde{\psi}/k_2 \\ \tilde{\psi}/k_1}}; l_1, s_1, p_1, l_2, s_2, p_2 \right] = \frac{e^{-16m_1}}{2} \int \frac{d^3 \vec{k}}{k^2 + m^2} x e^{-8l^2} \left[2\vec{k}^2 + \vec{k} \cdot \Delta L_1 + \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \Delta L_1^4 \right] \vec{k} \quad (5.22)$$

gdzie

$$\Delta L_1 \stackrel{df}{=} l_2 - s_2 - p_2 - l_1 + s_1 + p_1 \quad (5.23)$$

$$2) F_A \left[\underbrace{\tilde{\psi}(k_2), \tilde{\psi}(-l_1)}_{\substack{\tilde{\psi}(k_2) \\ \tilde{\psi}(-l_1)}}; k_1, s_1, \dots, p_2 \right] = F_A \left[\underbrace{\tilde{\psi}(k_2), \tilde{\psi}(k_1)}_{\substack{\tilde{\psi}(k_2) \\ \tilde{\psi}(k_1)}}; l_1, \dots, p_2 \right] \quad (5.24)$$

$$\Delta L_1 \stackrel{df}{=} l_2 - s_2 - p_2 - k_1 - s_1 - p_1$$

$$3) F_A \left[\underbrace{\tilde{A}_\alpha(p_2), A_\mu(s_1)}_{\substack{\tilde{A}_\alpha(p_2) \\ A_\mu(s_1)}}; l_2, s_2, k_2, l_1, p_1, k_1 \right] = -\frac{1}{2} \mathcal{M}_{\mu\alpha} \int \frac{1}{|\vec{s}|} x e^{-8l^2/2s^2 + \vec{s} \cdot \Delta L_2 + (s) L_2^4} d^3 \vec{s} \quad (5.25)$$

gdzie

$$\Delta L_2 \stackrel{df}{=} l_2 - s_2 - k_2 - l_1 + p_1 + k_1 \quad (5.26)$$

^{x/} Dolną kłamerą $\left[\quad \right]$ w argumencie funkcji wierzchołkowych objęte są transformaty fourierowskie podlegające kontrakcji.

$$\begin{aligned}
 4) \quad F_A \left[\underbrace{\tilde{\psi}(k_2), \tilde{\psi}(-l_1)}_1, \tilde{A}_\alpha(p_2) \tilde{A}_\mu(s_1); k_1, p_1, l_2, s_2 \right] = \\
 = \eta_{\mu\beta} \phi(k_1, p_2, l_2, s_2) e^{-16m^2 l_2^2} \int_{\vec{s}} \left[\frac{1}{|\vec{s}|} e^{-16l_2^2 [s^2 - \vec{s} \cdot \vec{\Delta L}_3]} \right. \\
 \left. - 16 m^2 l_2^2 \Delta L_3^4 \sqrt{s^2 + m^2} \right]_{\vec{s}} (\vec{s}) d^3 \vec{s} \quad (5.27)
 \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 \phi(k_1, p_1, l_2, s_2) \stackrel{df}{=} \frac{1}{4} e^{-4l_2^2 / [(k_1 + p_1)^2 + (k_1 + p_1)^4 + (k_2 + p_2)^2]} \times \\
 \times e^{-4l_2^2 (k_2^4 + p_2^4)^2} \quad (5.28)
 \end{aligned}$$

$$\Delta L_3 \stackrel{df}{=} - |k_1 + p_1| \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned}
 I_s(\vec{s}) \stackrel{df}{=} \int_{\vec{p}} \exp \left\{ -16 l_2^2 \left[\vec{k}^2 + \vec{k} \cdot (\vec{\Delta L}_3 - \vec{s}) + \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \times (\Delta L_3^4 - \sqrt{s^2 + m^2}) \right] \right\} \times \\
 \times \exp \left[-16 l_2^2 (\vec{k}^2 + m^2)^{-\frac{1}{2}} \right] d^3 \vec{k} \quad (5.30)
 \end{aligned}$$

$$5) \quad F_A \left[\underbrace{\tilde{\psi}(l_2), \tilde{\psi}(-l_1)}_1, \underbrace{A_\alpha(p_2) A_\mu(s_1)}_2, \underbrace{A_\beta(s_2) A_\nu(p_1)}_3; k_1, k_2 \right] \stackrel{df}{=}$$

$$\begin{aligned}
 \stackrel{df}{=} F_A(3; k_1, k_2) = \phi_1(k_1, k_2) \eta_{\mu\lambda} \eta_{\nu\beta} \int_{\vec{l}_1} \left[\frac{e^{-8l_1^2 [2l_1^2 + L_1 \Delta k - \sqrt{l_1^2 + m^2} \Delta k^4]} }{\sqrt{l_1^2 + m^2}} \right] \times \\
 \times I_1(\vec{l}_1) d^3 \vec{l}_1 \quad (5.31)
 \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 I_1(\vec{l}_1) \stackrel{df}{=} \int_{\vec{s}} \left[\frac{1}{|\vec{s}|} e^{-8l_1^2 [2s^2 + \vec{s} \cdot (\vec{k} + \vec{l}_1)]} \right] \times \\
 \times e^{-8l_1^2 [k^4 + \sqrt{l_1^2 + m^2}] \sqrt{s^2 + m^2}} J_s(\vec{s}) d^3 \vec{s} \quad (5.32)
 \end{aligned}$$

$$I_{\mathbf{s}}(\vec{s}) \stackrel{\text{df}}{=} \int \frac{1}{|\vec{p}|} e^{-8 L^2 [2\vec{p}^2 + \vec{p} \cdot (2\vec{s} + \vec{k})]} \times$$

$$\times e^{-8 L^2 [k^4 + 2\sqrt{\vec{s}^2 + m^2} \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}]} d^3 \vec{p} \quad (5.33)$$

$$\Delta K \stackrel{\text{df}}{=} k_2 - k_1, K \stackrel{\text{df}}{=} k_2 + k_1, \Phi(k_1, k_2) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{\text{df}}{\text{df}}$$

$$\frac{\text{df}}{\text{df}} = \frac{1}{8} e^{-4 L^2 [k_1^2 (k_1^4)^2 + \vec{k}_2^2 + (k_2^4)^2 + 6 m^2]} \quad (5.34)$$

$$6) F_A \underbrace{\tilde{\varphi}(k_2)}_{\beta} \underbrace{\tilde{\varphi}(-l_1)}_{\alpha} \underbrace{\tilde{\varphi}(-l_2)}_{\gamma} \underbrace{\tilde{\varphi}(k_1)}_{\delta}, \underbrace{A_\alpha(p_2)}_{\beta} \underbrace{A_\mu(s_1)}_{\gamma},$$

$$\underbrace{A(s_2)}_{\beta} \underbrace{A_V(p_1)}_{\gamma} \underbrace{]}_{\delta} = F_A(4;)$$

Ta funkcja współczynnikowa nie zawiera "swobodnych" pędów tylko same (cztery) kontrakcje. Z wyliczeń otrzymujemy:

$$F_A(4;) = \eta^{\alpha\beta} \eta^{\gamma\mu} \eta^{\nu\lambda} \eta^{\rho\sigma} e^{-32 m^2 L^2} \int \frac{e^{-16 L^2 k^2}}{\sqrt{k^2 + m^2}} I_k(\vec{k}) d^3 \vec{k} \quad (5.35)$$

gdzie

$$I_k(k) \stackrel{\text{df}}{=} \int \frac{1}{\sqrt{l_1^2 + m^2}} e^{-8 L^2 [2l_1 - l_1 \cdot \vec{k} - \sqrt{l_1^2 + m^2} \cdot \sqrt{k^2 + m^2}]} \times$$

$$\times I_1(\vec{l}_1) d^3 \vec{l}_1 \quad (5.36)$$

$$I_1(\vec{l}_1) \stackrel{\text{df}}{=} \int \frac{1}{|\vec{s}|} e^{-8 L^2 [2\vec{s} + \vec{s} \cdot (\vec{k} - \vec{l}_1)]} \times$$

$$\times e^{-8 L^2 \sqrt{\vec{s}^2 + m^2} (\sqrt{k^2 + m^2} - \sqrt{l_1^2 + m^2})} I_{\mathbf{s}}(\vec{s}) d^3 \vec{s} \quad (5.37)$$

$$I_0(\vec{s}) \stackrel{\text{df}}{=} \int_{\vec{p}} \left[\frac{1}{|\vec{p}|} e^{-8l^2 [2\vec{p}^2 + \vec{p} \cdot (\vec{s} + \vec{k} - \vec{l}_1)]} \right. \\ \left. - 8l^2 [\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \sqrt{\vec{s}^2 + m^2} + \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} - \sqrt{\vec{l}_1^2 + m^2}] \right] d^3\vec{p} \quad (5.38)$$

x e

Zauważmy, iż w powyższych całkach (5.25) - (5.38) moduły wektorów $|\vec{s}|$ i $|\vec{p}|$ występujące w mianownikach funkcji podcałkowych nie spowodują podczerwonej rozbieżności tych całek. Po przejściu bowiem do pędowych współrzędnych sferycznych moduły $|\vec{s}|$ i $|\vec{p}|$ upraszczają się z pojawiającymi się w licznikach funkcji podcałkowych kwadratami modułów tych trójwektorów.

Przeprowadzając następnie takie samo rozumowanie jak w poprzednim rozdziale przy badaniu całek identycznego typu, dokonując podobnych jak poprzednio oszacowań, dowodzimy ograniczoności supremów funkcji $I_0(\vec{s})$, $I_1(\vec{l}_1)$, $I_k(\vec{k})$

$$\left| \text{Sup. } I_0(\vec{s}) \right| < \infty, \quad \left| \text{Sup. } I_1(\vec{l}_1) \right| < \infty, \quad \left| \text{Sup. } I_k(\vec{k}) \right| < \infty \quad (5.39)$$

Powtarzając teraz dokładnie rozumowanie przytoczone w poprzednim rozdziale wykazujemy zupełnie już tak samo jak poprzednio, że wszystkie funkcje współczynnikowe typu F_A / wzory (5.22)... (5.38) są ograniczone.

Jak widać z (5.17) - (5.20) człon S_B jest tego samego typu co S_C , a człon S_D - co S_E , wystarczy więc przebadać człony S_C i S_D . Wstawiając (5.13) do (5.18) otrzymujemy po przekształceniach:

$$S_C = \frac{ka^2 \theta^2 m}{64 l^2 (2\pi)^4} \int_{\vec{k}_2} \int_{\vec{l}_2} \int_{\vec{k}_1} \int_{\vec{l}_1} \int_{\vec{s}_1} \int_{\vec{p}_1} e^{-4l^2 [(\vec{l}_2 - \vec{k}_2)^2 + (l_2^4 - k_2^4)^2]} \eta^{\nu\mu} \times$$

$$\times e^{-4l^2 [(-\vec{l}_1 + \vec{s}_1 + \vec{p}_1 + \vec{k}_1)^2 + (-l_1^4 + s_1^4 + p_1^4 + k_1^4)^2]} : \tilde{\psi}(k_1) \tilde{\psi}(-l_1) A_V(p_1) \times$$

$$\times \tilde{A}_\mu(p_1) : d^3 \vec{k}_2 \dots d^3 \vec{p}_1 + \frac{ka^2 \theta^2}{2 \cdot 16^2 (2\pi)^4} \int_{\vec{k}_2} \int_{\vec{l}_2} \int_{\vec{k}_1} \int_{\vec{l}_1} \int_{\vec{s}_1} \int_{\vec{p}_1} (L_2)_\alpha \times$$

$$\times (k_2)_\beta \eta^{\alpha\beta} e^{-4l^2 [(\vec{l}_2 - \vec{k}_2)^2 + (l_2^4 - k_2^4)^2]} e^{-4l^2 [(-\vec{l}_1 + \vec{s}_1 + \vec{p}_1 + \vec{k}_1)^2} \times$$

$$e^{-4l^2 (-l_1^4 + s_1^4 + p_1^4 + k_1^4)^2} : \tilde{\psi}(-l_2) \tilde{\psi}(k_2) \tilde{\psi}(-l_1) \tilde{\psi}(k_1) \tilde{A}_V(s_1) \tilde{A}_\mu(p_1) : \times$$

$$\times \eta^{\nu\mu} d\vec{k}_2 \dots d\vec{p}_1 - \frac{ka^2 \theta^2}{(6)^2 l (2\pi)^{11/2}} \int_{\vec{s}_2} \int_{\vec{l}_2} \int_{\vec{k}_1} \int_{\vec{l}_1} \int_{\vec{s}_1} \int_{\vec{p}_1} \delta^{\alpha\beta} (l_2)_\alpha \times$$

$$\times e^{-4l^2 [(\vec{l}_2 - \vec{s}_2)^2 + (l_2^4 - s_2^4)^2]} \eta^{\nu\mu} e^{-4l^2 [(\vec{s}_1 + \vec{k}_1 + \vec{p}_1 - \vec{l}_1)^2 + (s_1^4 + k_1^4 + p_1^4 - l_1^4)^2]} \times$$

$$\times \tilde{\psi}(-l_2) \tilde{A}_\beta(s_2) \tilde{\psi}(k_1) \tilde{\psi}(-l_1) A_V(s_1) A_\mu(p_1) : + \frac{ka^3 \theta^2 \cdot (-1)}{16^2 (2\pi)^{11/2}} \times$$

$$\times \int_{\vec{l}_2} \int_{\vec{p}_2} \int_{\vec{k}_2} \int_{\vec{k}_1} \int_{\vec{s}_1} \int_{\vec{l}_1} \int_{\vec{p}_1} \delta^{\alpha\beta} (k_2)_\beta e^{-4l^2 [(\vec{l}_2 + \vec{p}_2 + \vec{k}_2)^2 + (-l_2^4 + p_2^4 + k_2^4)]} \eta^{\nu\mu} \times$$

$$\times e^{-4l^2 [(\vec{s}_1 + \vec{p}_1 + \vec{k}_1 - \vec{l}_1)^2 + (s_1^4 + p_1^4 + k_1^4 - l_1^4)^2]} : \tilde{\psi}(-l_2) \tilde{\psi}(k_2) \tilde{A}_\alpha(p_2) \tilde{\psi}(k_1) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \tilde{\varphi}(-1_1) \tilde{A}_V(s_1) \tilde{A}_\mu(p_1) : d\vec{l}_2 d\vec{p}_2 \dots d\vec{l}_1 d\vec{p}_1 : + \\
& + \frac{k e^4 a^2}{16^2 (2\tilde{h})^2} \int_{\vec{p}_2} \int_{\vec{s}_2} \int_{\vec{k}_2} \int_{\vec{l}_2} \int_{\vec{p}_1} \int_{\vec{s}_1} \int_{\vec{k}_1} \int_{\vec{l}_1} \eta^{\alpha\beta} \eta^{\nu\mu} \times \\
& \times e^{-4l^2 [(\vec{p}_2 + \vec{s}_2 + \vec{k}_2 - \vec{l}_2)^2 + (p_2^4 + s_2^4 + k_2^4 + l_2^4)^2]} e^{-4l^2 \times} \\
& \times [(\vec{p}_1 + \vec{s}_1 + \vec{k}_1 - \vec{l}_1)^2 + (p_1^4 + s_1^4 + k_1^4 + l_1^4)^2] : \tilde{A}_\alpha(p_2) \tilde{A}_\beta(s_2) \times \\
& \times \tilde{\varphi}(k_2) \tilde{\varphi}(-l_2) \tilde{A}_\mu(p_1) \tilde{A}_V(s_1) \tilde{\varphi}(k_1) \tilde{\varphi}(-l_1) : d\vec{p}_2 d\vec{s}_2 \dots d\vec{k}_1 d\vec{l}_1 \\
& \hspace{15em} (5.40)
\end{aligned}$$

Wstawiając zaś (5.14) do (5.19) otrzymujemy po przeliczeniach:

$$\begin{aligned}
S_D = & \frac{k e^4 a^3}{2 \cdot 16 l (2\tilde{h})^{11/2}} \int_{\vec{k}_1} \dots \int_{\vec{q}_2} e^{-4l^2 [(\vec{k}_1 + \vec{p}_1 + \vec{s}_1 - \vec{l}_1)^2 + (k_1^4 + p_1^4 + s_1^4 + l_1^4)^2]} \eta^{\nu\mu} \times \\
& \times e^{-4l^2 [\vec{q}_2^2 + (q_2^4)^2]} \eta^{\alpha\beta} \times \\
& \times e^{-4l^2 [(\vec{k}_2 + \vec{q}_2 + \vec{s}_2 + \vec{p}_2 - \vec{l}_2)^2 + (k_2^4 + q_2^4 + p_2^4 + s_2^4 + l_2^4)^2]} \times \\
& \times \tilde{A}_V(s_1) \tilde{A}_\mu(p_1) \tilde{\varphi}(k_1) \tilde{\varphi}(-l_1) \tilde{A}_\alpha(s_2) \tilde{A}_\beta(p_2) \tilde{\varphi}(k_2) \tilde{\varphi}(-l_2) : \times \\
& \times d\vec{k}_1 d\vec{l}_1 \dots d\vec{p}_2 d\vec{q}_2 \hspace{10em} (5.41)
\end{aligned}$$

Wyrażenia (5.40) i (5.41) są dość ekomplikowane, niemniej widać, że funkcje wierzchołkowe typu F_C i F_D powstaną wskutek co najwyżej czterokrotnej kontrakcji pomiędzy:

$\tilde{\mathcal{F}}(k_2)$ i $\tilde{\mathcal{F}}(k_1)$, $\tilde{\mathcal{F}}(k_2)$ i $\tilde{\mathcal{F}}(-1_1)$, $\tilde{\mathcal{F}}(-1_2)$ i $\tilde{\mathcal{F}}(-1_1)$, $\tilde{\mathcal{F}}(-1_2)$ i $\tilde{\mathcal{F}}(k_1)$, $\tilde{A}_V(s_2)$ i $\tilde{A}_V(p_1)$. Jednakże wszystkie te przypadki zostały już przez nas zbadane poprzednio przy szacowaniu funkcji współczynnikowych typu F_A . Wszystkie funkcje współczynnikowe typu F_A , F_B , F_C , F_D i F_E występujące w członie S_2^{int} macierzy rozpraszania są ograniczone, można się więc nimi posługiwać do wyliczania prawdopodobieństw przejść rozpatrywanego przez nas układu mezonowo-fotonowego z jednego stanu do drugiego.

Analiza ogólnego n -wierzchołkowego diagramu Feynmana przy uwzględnieniu obecności klasycznego, zewnętrznego, słabego pola grawitacyjnego o stałej krzywiznie

Postaramy się obecnie uogólnić rozważania dotyczące ograniczoności funkcji wierzchołkowych pojawiających się w procesie otrzymywania jawnej postaci macierzy S . Nie specyfikując modelu oddziaływania ze sobą dowolnych cząstek (stanowiących układ, którego stan fizyczny opisuje nasza teoria) założymy tylko, że istnieje lokalny lagrangian tego oddziaływania $L_{int}(x)$, który spełnia następujące trzy warunki:

- 1) $L_{int}(x)$ jest ogólnie kowariantny;
- 2) $L_{int}(x)$ opisuje zarówno kwantowe oddziaływanie cząstek^x pomiędzy sobą, jak i również oddziaływanie ich z zewnętrznym, klasycznym, słabym polem grawitacyjnym o stałej krzywiznie;

^x Cząstki te mogą być zarówno masowymi cząstkami bezspinowymi, jak i fotonami oraz cząstkami masowymi ze spinem $s \neq 0$. Funkcje pól opisujących te cząstki nazwiemy umownie: w pierwszym przypadku - skalarnymi i oznaczymy je przez $\varphi(x)$, w drugim - wektorowymi i oznaczymy je przez $A_\nu(x)$ /czteropotencjał pola elektromagnetycznego/, w trzecim zaś - funkcjami spinowymi - $\Psi(x)$.

3) $L_{int}(x)$ ma taką postać, by teoria macierzy S z tym lagrangianem była renormalizowalna. Znaczący to, że w zwykłej /tzn. bez uwzględniania wpływu pola grawitacyjnego/ teorii macierzy S ultrafioletowe rozbieżności mają charakter wielomianowy skończonego rzędu.

Rozpatrzmy diagram Feynmana odpowiadający ogólnemu członowi S_n^{int} w rozwinięciu macierzy S opisującej to oddziaływanie. Odpowiada on członowi S_n^{int} , który ma postać:

$$S_n^{int} = \frac{1}{n!} \int \dots \int_{x_1 \dots x_n} T. [\alpha_{int}(x_1) \dots \alpha_{int}(x_n)] d^4x_1 \dots d^4x_n \quad (6.0)$$

a przeto składa się z "n" wierzchołków, które oznaczymy przez $W_1 \dots W_n$.

Przyjmijmy, że do "1" - tego wierzchołka W_1 wchodzi z_1 zewnętrznych linii odpowiadających fourierowskim transformatom funkcji pola. Czworowektory pędów będących argumentami tych transformat oznaczymy przez $k_1^{(1)} \dots k_1^{(z_1)}$. Oprócz tego do każdego wierzchołka W_i wchodzi jedna linia odpowiadająca transformacie fourierowskiej funkcji próbnych $\tilde{t}_{\mu\nu}(q_i)$, czyli (w obszarze Ω_{gf}) transformacie potencjałów grawitacyjnych $\tilde{g}_{\mu\nu}(q_i)$.

Kolejne wierzchołki diagramu ($W_1, W_{i+1}, i=1 \dots n-1$) połączone są liniami wewnętrznymi kwaziczęstek Kadyszewskiego. Są to linie (zwrócone zawsze od W_i do W_k , gdy $i < k$) odpowiadające transformatom fourierowskim funkcji Heaviside'a, przy pomocy których rozpisujemy iloczyn chronologiczny la-

grangianów oddziaływania stojących w (6.0). Poza tym przyjmijmy, że wierzchołek W_1 połączony jest z pozostałymi wierzchołkami diagramu liniami wewnętrznymi (zwróconymi tak jak linie kwazicząstek, a więc od wierzchołka o numerze mniejszym do wierzchołka o numerze większym) odpowiadającymi niechronologicznym kontrakcjom transformacji fourierowskich funkcji pola. Ilość tych linii oznaczymy przez N_1 . Niech $N_1^{(k)}$ oznacza ilość linii wewnętrznych łączących wierzchołek W_1 z wierzchołkiem W_k . Wówczas:

$$N_1 = \sum_{k=1}^n N_1^{(k)}, \quad \bigwedge_1 N_1^{(1)} \stackrel{df}{=} 0 \quad (6.1)$$

Przyjmijmy dalej, że spośród tych $N_1^{(k)}$ linii wewnętrznych " $n_{1,k}$ " linii odpowiada cząstkom bezspinowym (czyli kontrakcjom transformacji skalarnych), " $a_{1,k}$ " linii odpowiada cząstkom bezmasowym (czyli kontrakcjom transformacji czteropotentcażu elektromagnetycznego) a " $b_{1,k}$ " linii odpowiada cząstkom spinowym (czyli kontrakcjom transformacji spinowych). Czteropędy tych cząstek (czyli czteropędy przyporządkowane liniom wewnętrznym) oznaczamy następująco:

- czteropędy $s/1,k/j_1$, $j_1 = 1,2, \dots, n_{1,k}$ - dla cząstek skalarnych (bezsłpinowych)
- $u(1,k) j_2$, $j_2 = 1,2, \dots, a_{1,k}$ - dla fotonów
- $p(1,k) j_3$, $j_3 = 1,2, \dots, b_{1,k}$ - dla cząstek masowych ze spinem s .

Ze względu na umowę odnośnie skierowania linii wewnętrznych diagramu mamy:

$$\begin{aligned}
 s(1,k)_{j_1} &= -s(k,1)_{j_1}, \quad u(k,1)_{j_2} = -u(1,k)_{j_2}, \quad p(1,k)_{j_3} = \\
 &= -p(k,1)_{j_3}, \quad p(1,1)_{j_1} = u(1,1)_{j_2} = s(1,1)_{j_3} \frac{df}{d\lambda} 0 \\
 n_{1,k} + a_{1,k} + b_{1,k} &= N_1(k)
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

Czteropędy odpowiadające kwazicząstkom oznaczymy przez $\lambda \tilde{J}_i$, $i = 1 \dots n-1$, gdzie λ jest tym samym dla wszystkich wartości wskaźnika "i", czasopodobnym jednostkowym czterowektorem, wprowadzanym dla ukowariantnienia argumentów funkcji Heaviside'a a $\tilde{J}_1 \dots \tilde{J}_{n-1}$ są to skalarne parametry (o wymiarze $\frac{1}{\text{długość}}$) zmieniające się w granicach od $-\infty$ do $+\infty$.

Kontrakcje (nie chronologiczne!) transformat fourierowskich funkcji pola mają postacie:

1) dla pola skalarnego opisanego funkcją $\varphi(x)$:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\varphi} [s(1,k)_{j_1}] \tilde{\varphi} [s(1,k)_{j_1}] &= \delta [s(1,k)_{j_1} + s(1,k)_{j_1}] \times \\
 &\times \theta [s^4(1,k)_{j_1}] \delta [(s(1,k)_{j_1})^2 - m^2]
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

2) dla pola elektromagnetycznego opisanego czteropotencjałem $A_\nu(x)$:

$$\begin{aligned}
 \tilde{A}_\nu [u(1,k)_{j_2}] \tilde{A}_\mu [u(1,k)_{j_2}] &= -\eta_{\nu\mu} \delta [u(1,k)_{j_2} + u(1,k)_{j_2}] \times \\
 &\times \theta [u^4(1,k)_{j_2}] \delta [u(1,k)_{j_2}]^2
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

3) dla pola spinowego opisanego funkcją $\Psi_\alpha(x)$:

$$\bar{\Psi}_\alpha [p(1,k)_{j_3}] \Psi_\beta [p(1,k)_{j_3}] = P_{\alpha\beta} [p(1,k)_{j_3}] \delta [p(1,k)_{j_3}] + \\ + [p(1,k)_{j_3}] \theta [p^4(1,k)_{j_3}] \delta [(p(1,k)_{j_3})^2 - M^2] \quad (6.5)$$

gdzie "m" jest masą spoczynkową cząstek bezspinowych, "M" - masą spoczynkową cząstek o spinie $s \neq 0$, $(P_{\alpha\beta})$ jest macierzą, której poszczególne elementy są wielomianami ze względu na współrzędne czterowektorów $p(1,k)_{j_3}$, rzędu co najwyżej $2s$. W przypadku spinu połówkowego $P_{\alpha\beta} [p(1,k)_{j_3}] = -i [\gamma^\nu / p(1,k)_{j_3} / \nu + IM]_{\alpha\beta}$, przy czym γ są to macierze Diraca, I - jest to macierz jednostkowa.

$p^4(1,k)_{j_3}$, $u^4(1,k)_{j_2}$, $s^4(1,k)_{j_1}$ są to czasowe składowe czterowektorów $p(1,k)_{j_3}$, $u(1,k)_{j_2}$ i $s(1,k)_{j_1}$.

Przypomnijmy jeszcze, że kontrakcje (6.3), (6.4) i (6.5) to nie kontrakcje chronologiczne lecz odniesione do zwykłych wickowskich iloczynów normalnych. Otrzymujemy je poprzez przejście do przestrzeni pędów z takimi kontrakcjami zapisanymi w przestrzeni konfiguracyjnej:

$$(-: [\psi(x), \varphi(y)] : + \underline{\varphi(x), \varphi(y)} = \varphi(x), \varphi(y); \quad -: [A_\alpha(x) A_\beta(y)] : + \\ + \underline{A_\alpha(x) A_\beta(y)} = A_\alpha(x) A_\beta(y); \quad -: [\Psi_\alpha(x), \Psi_\beta(y)] : + \bar{\Psi}_\alpha(x) \Psi_\beta(y) = \\ = \underline{\bar{\Psi}_\alpha(x) \Psi_\beta(y)}$$

Wpływ uporządkowania w czasie uwzględniamy poprzez wprowadzenie ukowariantnionej funkcji Heaviside'a

$$T \cdot [L_{int}(x_1) \dots L_{int}(x_n)] = O_s \cdot O[\lambda(x_n - x_{n-1})] \cdot x$$

$$\times O[\lambda(x_{n-1} - x_{n-2})] \dots O[\lambda(x_2 - x_1)] \cdot [L_{int}(x_n) \dots L_{int}(x_1)]$$
(6.6)

gdzie O_s jest symetryzatorem ze względu na numery punkto-
chwil.

Przejdźmy do przestrzeni pędów z funkcjami Heaviside'a:

$$O[\lambda(x_{1+1} - x_1)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i\lambda J_1(x_{1+1} - x_1)}{J_1 - i\varepsilon} , \quad 1 = 1, \dots, n-1 \quad (6.7)$$

Element $S^{int}(1, 2, \dots, n)$ macierzy S , któremu odpowiada nasz
 n -wierzchołkowy diagram Feynmana ma postać:

$$S^{int}(1, 2, \dots, n) = c \int_{k_1^{(1)}} \dots \int_{k_n^{(2n)}} \underline{F}(N; k_1^{(1)}, \dots, k_n^{(2n)}) \underline{T}(k_1^{(1)}, \dots, k_n^{(2n)}) dk_1^{(1)} \dots dk_n^{(2n)}$$
(6.8)

S_n^{int} otrzymujemy z $S^{int}(1, 2, \dots, n)$ działając na niego syme-
tryzatorem O_s , /podobnie jak ma to miejsce w (6.6)/. Całka
występująca w (6.8) jest $(4 \sum_{i=1}^n z_i)$ -krotna, gdyż wzięta jest
po wszystkich zewnętrznych czteropędach. Czynniki "c" jest
stałą zawierającą w sobie m.in. parametr naszej teorii czy-
li stałą $1(1 = \frac{1}{R})$ oraz iloczyn stałych sprzężenia oddziały-
wań (w tym i stałą sprzężenia oddziaływań grawitacyjnych -
"k"), którym cząstki wchodzące w skład naszego układu pod-
legają.

$\underline{F}/N; k_1^{(1)}, \dots, k_n^{(2n)}$ jest funkcją współczynnikową,

którą będziemy teraz badali. Funkcja $\underline{I}/k_1^{(1)} \dots k_n^{(z_n)}$ zawiera w sobie iloczyn transformat fourierowskich funkcji pola, które są reprezentowane zewnętrznymi, ale nie grawitacyjnymi, liniami diagramu. Nadto funkcja \underline{I} może zależeć jeszcze od zewnętrznych czteropędów $k_1^{(1)} \dots k_n^{(z_n)}$ dodatkowo i w inny sposób zależny od konkretnej konstrukcji lagrangianu oddziaływania. Struktura funkcji \underline{F} i \underline{I} nie musi być skalarna, natomiast musi być ona taka, aby iloczyn tych funkcji był skalarą. Ilość kontrakcji naszego diagramu wyraża się na mocy (6.1) wzorem:

$$N = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n N_i(k) \quad (6.9)$$

Funkcja współczynnikowa \underline{F} będzie miała postać:

$$F(N; k_1^{(1)} \dots k_n^{(z_n)}) \stackrel{df}{=} \underline{F} = \int_{x_1} dx_{n-1} \dots \int_{x_n} dx_n \int_{q_1} dq_1 \dots \int_{q_n} dq_n e^{i \sum_{j=1}^n [q_j + \sum_{l=1}^{z_j} k_j^{(l)}] x}$$

$$\times e^{-4 \Gamma^2 \sum_{i=1}^n [(\vec{q}_1^i)^2 + (q_1^i)^2]} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{\Gamma}_{n-1} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{\Gamma}_1 \frac{e^{i \lambda \sum_{j=1}^{n-1} \tilde{\Gamma}_j (x_{j+1} - x_j)}}{\prod_{j=1}^{n-1} (\tilde{\Gamma}_j - i\epsilon)} \times$$

$$\times \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \prod_{k=1}^n S_{i,k} \quad (6.10)$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 S_{1,k} \stackrel{\text{df}}{=} & \int_{s(1,k)_1} ds(1,k)_1 \dots \int_{p(1,k)_{b_{1,k}}} dp(1,k)_{b_{1,k}} \prod_{j_1=1}^{n_{1,k}} \Theta[s^4(1,k)_{j_1}] \times \\
 & \times \delta[(s(1,k)_{j_1})^2 - m^2] \prod_{j_2=1}^{a_{1,k}} \Theta[u^4(1,k)_{j_2}] \delta[u(1,k)_{j_2}]^2 \prod_{j=1}^{b_{1,k}} \\
 & \times \frac{p}{x} \left[\frac{p(1,k)_{j_3}}{j_3} \right] \Theta[p^4(1,k)_{j_3}] \delta[(p(1,k)_{j_3})^2 - M^2] \times \\
 & \times \exp \left\{ x_k \left[\sum_{j_1=1}^{n_{1,k}} s(1,k)_{j_1} + \sum_{j_2=1}^{a_{1,k}} u(1,k)_{j_2} + \sum_{j_3=1}^{b_{1,k}} p(1,k)_{j_3} \right] + \right. \\
 & \left. + x_1 \left[\sum_{j_1=1}^{n_{1,k}} s(k,1)_{j_1} + \sum_{j_2=1}^{b_{1,k}} u(k,1)_{j_2} + \sum_{j_3=1}^{b_{1,k}} p(k,1)_{j_3} \right] \right\} \quad (6.11)
 \end{aligned}$$

Podstawiając (6.11) do (6.10) i całkując po zmiennych $x_1 \dots x_n$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 E = & (2\pi)^{4n} \int_{q_1} dq_1 \dots \int_{q_n} dq_n \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathcal{T}_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathcal{T}_{n-1} \prod_{\substack{1,k=1 \\ 1 \neq k}}^n \int_{s(1,k)_1} ds(1,k)_1 \dots \int_{p(1,k)_{b_{1,k}}} dp(1,k)_{b_{1,k}} \times \\
 & \times e^{-4l^2 \sum_{i=1}^n [(q_i^3)^2 + (q_i^4)^2]} \prod_{j=1}^n \delta \left[q_j + \sum_{l=1}^{z_j} k_j^{(1)} + \lambda \mathcal{T}_{j-1} - \lambda \mathcal{T}_j + \right. \\
 & \left. + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n w_j^{(k)}(s,u,p) \right] \prod_{j_1=1}^{n_{1,k}} \Theta[s^4(1,k)_{j_1}] \delta[(s(1,k)_{j_1})^2 - m^2] \times
 \end{aligned}$$

$$\prod_{j_2=1}^{a_{1,k}} \Theta \left[u^4(1,k)_{j_2} \right] \delta \left[(u(1,k)_{j_2})^2 \right] \prod_{j_3=1}^{b_{1,k}} \frac{p}{\alpha_{j_3} \beta_{j_3}} \left[p(1,k)_{j_3} \right] \times$$

$$\times \delta \left[(p(1,k)_{j_3})^2 - M^2 \right] \quad (6.12)$$

gdzie

$$W_j^{(k)}(e, u, p) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{E}(j-k) \left[\sum_{j_1=1}^{n_{1,k}} s(1,k)_{j_1} + \sum_{j_2=1}^{a_{1,k}} u(1,k)_{j_2} + \sum_{j_3=1}^{b_{1,k}} p(1,k)_{j_3} \right] \quad (6.13)$$

$$\mathcal{E}(p) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \Theta(p) - \Theta(p), & \text{gdy } p \neq 0 \\ 0, & \text{gdy } p = 0 \end{cases} \quad (6.14)$$

Z (6.12), (6.13) i (6.14) wynika, że w każdym z osobna wierzchołku naszego diagramu Feynmana spełnione jest prawo zachowania pędu i energii z uwzględnieniem zarówno czteropędu i kwazicząstek ($\lambda \mathcal{J}'_1$) jak również i czteropędu pola grawitacyjnego (q_1). Podstawmy teraz (6.13) do (6.12) i dokonajmy całkowania po $q_1 \dots q_n$, $\mathcal{J}'_1 \dots \mathcal{J}'_{n-1}$ oraz skorzystajmy z własności funkcji δ -Diraca i Θ -Heaviside'a. Otrzymujemy:

$$\underline{F} = C_0 \prod_{\substack{1,k=1 \\ 1 \neq k}}^n \int \dots \int_{\vec{s}(1,k)_1 \vec{p}(1,k)_{b_{1,k}}} e^{-4l^2 \sum_{j=1}^n \left[\left(\sum_{l=1}^{z_j} \vec{k}_j^{(1)} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \vec{W}_1^{(k)}(e, u, p) \right)^2 \right]} \times$$

$$\times e^{-4l^2 \sum_{j=1}^n \left| \sum_{l=1}^{z_j} (k_j^{(1)})_4 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n W_j^{(k)}(3) \right|^2} \prod_{j_1=1}^{n_{1,k}} \frac{d^3 \vec{s}(1,k)_{j_1}}{\sqrt{(\vec{s}(1,k)_{j_1})^2 + m^2}} \times$$

$$\times \prod_{j_2=1}^{a_{1,k}} \frac{d^3 \vec{u}(1,k)_{j_2}}{|\vec{u}(1,k)_{j_2}|} \times$$

$$\times \prod_{j_3=1}^{b_{1,k}} \frac{p(3)_{j_3} \beta_{j_3} \left[p(1,k)_{j_3} \right]}{\sqrt{(\vec{p}(1,k)_{j_3})^2 + M^2}} \quad (6.15)$$

gdzie c_0 jest stałą liczbową o wartości skończonej.

$$P(3) \left[p(1,k)_{j_3} \right] \frac{df}{dz} P \left[p(1,k)_{j_3} \right] \left| p^4(1,k)_{j_3} = \sqrt{p(1,k)_{j_2}^2 + M^2} \right. \quad (6.16)$$

$$W_j^{(k)}(3) = (W_j^{(k)}(s,u,p))^4 \left| s^4(1,k)_{j_1} = \sqrt{s(1,k)_{j_1}^2 + m^2} ; \right.$$

$$u^4(1,k)_{j_2} = \left| u^4(1,k)_{j_2} \right|, \quad p^4(1,k)_{j_3} = \sqrt{p(1,k)_{j_3}^2 + M^2}$$

Oznaczmy teraz całkowitą ilość wewnętrznych linii naszego diagramu odpowiadających kontrakcjom funkcji skalarnych - przez n_0 , odpowiadających kontrakcjom funkcji wektorowych - przez n_p , a odpowiadających kontrakcjom funkcji spinowych przez n_s .

$$n_0 + n_p + n_s = N = \sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^n N_1^{(k)} \quad (6.17)$$

Trójkędy cząstek odpowiadających kontrakcjom funkcji skalarnych oznaczmy przez $\vec{s}_1, i = 1 \dots n_0$;

trójkędy cząstek odpowiadających kontrakcjom funkcji wektorowych oznaczmy przez $\vec{u}_j, j=1 \dots n_p$;

trójkędy cząstek odpowiadających kontrakcjom funkcji spinowych oznaczmy przez $\vec{p}_k, k=1 \dots n_s$

i oznaczmy dalej

$$\left| \vec{s}_1 \right| \frac{df}{dz} r_1, \quad \left| \vec{u}_j \right| \frac{df}{dz} z_j, \quad \left| \vec{p}_k \right| \frac{df}{dz} w_k \quad (6.18)$$

Przejdźmy teraz do pędowych współrzędnych sferycznych, podstawmy (6.16) do (6.13) i dalej do (6.15). Całkowanie po kątach nie może dać nieskończonych przyczynków /otrzymujemy bowiem całki po kątach typu całek (4.28) - (4.31) przeanalizowanych już w Aneksie/. Wykonując więc je i wprowadzając oznaczenia (6.18) otrzymujemy, że funkcja wierzchołkowa \underline{F} , określona wzorem (6.15) przyjmuje postać:

$$\underline{F} = c_2 \int_0^\infty \dots \int_0^\infty dr_1 \dots dw_{n_s} P_{n_w} (w_1 \dots w_{n_s}) \prod_{i=1}^{n_o} \prod_{j=1}^{n_f} \prod_{k=1}^{n_s} \times$$

$$\times \frac{r_1^2 z_1 w_k^2}{\sqrt{r_1^2 + m^2} \sqrt{w_k^2 + M^2}} \cdot e^{-4l^2 \left[\Psi(k) + 2 \sum_{i=1}^{n_o} r_1^2 + 2 \sum_{j=1}^{n_f} z_j^2 + 2 \sum_{k=1}^{n_s} w_k^2 \right]} \times$$

$$\times e^{-l^2 \theta \phi(r_1, z_j, w_k, k)} \quad (6.19)$$

gdzie: c_2 jest stałą liczbową o skończonej wartości

$$\Psi(k) \stackrel{\text{def}}{=} \left[\sum_{\substack{1, j=1 \\ l \neq j}}^n \vec{k}_j^{(1)} \right]^2 + \left[\sum_{\substack{1, j=1 \\ l \neq j}}^n (k_j^{(1)})_4 \right]^2 \quad (6.20)$$

$P_{n_w}(w_1 \dots w_{n_s})$ jest macierzą, której elementy są wielomianami stopnia co najwyżej n_w ze względu na $w_1 \dots w_{n_s}$ oraz ze względu na

$$\sqrt{w_1^2 + M^2}, \dots, \sqrt{w_{n_s}^2 + M^2}, \quad n_w \leq 2sn_s.$$

$$\begin{aligned}
\Phi(r_1, z_j, w_k) &\stackrel{\text{df}}{=} \sum_{i=1}^{n_0} \sum_{j=1}^{n_f} \alpha_{ij}^{(2)} r_1 z_j + \sum_{i=1}^{n_0} \sum_{k=1}^{n_g} \beta_{ik}^{(2)} r_1 w_k + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{n_g} \gamma_{jk}^{(2)} r_1 w_k + \\
&\sum_{i=1}^{n_0} \sum_{j=1}^{n_f} \alpha_{ij}^{-(2)} \sqrt{r_1^2 + m^2} z_j + \sum_{i=1}^{n_0} \sum_{k=1}^{n_g} \beta_{ik}^{-(2)} \sqrt{r_1^2 + m^2} \sqrt{w_k^2 + M^2} + \\
&+ \sum_{j=1}^{n_f} \sum_{k=1}^{n_g} \gamma_{jk}^{-(2)} z_j \sqrt{w_k^2 + M^2} + \sum_{i=1}^{n_0} \alpha_i^{(1)} r_1 + \sum_{j=1}^n \beta_j^{(1)} z_j + \\
&+ \sum_{k=1}^{n_g} \gamma_k^{(1)} w_k + \sum_{i=1}^{n_0} \bar{\alpha}_i^{(1)} \sqrt{r_1^2 + m^2} + \sum_{k=1}^{n_g} \bar{\gamma}_k^{(1)} \sqrt{w_k^2 + M^2}
\end{aligned} \tag{6.21}$$

gdzie współczynniki $\alpha_{ij}^{(2)} \dots \bar{\beta}_k^{(1)}$ zależą tylko od czterowektorów pędów zewnętrznych $k_1^{(1)} \dots k_n^{(n)}$. Wstawiając teraz (6.21) i (6.20) do (6.19) widzimy, że całkowanie po modułach trójpędów $r_1 \dots w_{n_g}$ nie może dać przyczynków nie-skończonych, gdyż ujemny wykładnik potęgowy niweluje każdą rozbieżność wielomianową a tylko taka tu występuje. Dla oszacowania występujących w (6.19) całek postępujemy teraz krok po kroku tak jak było to dokładnie przez nas już demonstrowane w rozdziale IV i V.

Pojawiające się kolejno przy tym postępowaniu całki przybiorą znane nam już (z poprzednich dwóch rozdziałów pracy) postacie:

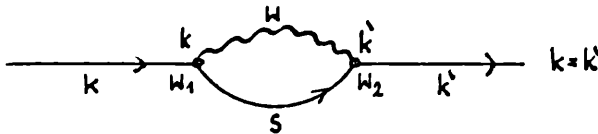
$$I = \int_0^{\infty} \frac{W_p(r, \sqrt{r^2 + m^2}) e^{-n_0 l^2 r^2 + \beta r + \gamma \sqrt{r^2 + m^2}}}{(r^2 + m^2)^s} I_r(r) dr, n_0 \in \mathbb{N},$$

$$s = 0 \text{ lub } s = \frac{1}{2}$$

$$\left| \sup_r I_r(n) \right| < \infty, p < \infty \quad (6.22)$$

$W_p(r, \sqrt{r^2 + m^2})$ jest wielomianem skończonego stopnia "p" ze względu na r i na $\sqrt{r^2 + m^2}$, supremum funkcji $I_r(r)$ jest ograniczone. Współczynniki β i γ nie zależą od r . Całka typu (6.22) ma więc skończoną wartość /da się ją sprowadzić do sumy całek typu całki (A,8) analizowanej w Aneksie/. Tak więc wykazaliśmy ograniczoność funkcji wierzchołkowej \underline{F} dla dowolnego "n"- wierzchołkowego diagramu Feynmana.

Na zakończenie, tytułem ilustracji sposobu praktycznego stosowania tensorowych funkcji próbnych do wyliczania elementów macierzowych, obliczymy element macierzowy drugiego rzędu odpowiadający procesowi emitowania przez elektron (o czteropędzie k) fotonu a następnie procesowi pochłonięcia przezeń tegoż fotonu. W standardowej teorii macierzy $S[L = e \bar{\Psi}(x) \gamma_\nu \Psi(x) A^\nu(x)]$ diagram Feynmana odpowiadający temu procesowi ma postać:



Rys. 3

a odpowiedni element macierzowy jest rozbieżny /proces usu-
nięcia nieskończoności dla tego przypadku został dokładnie
omówiony w [8] rozdz. IV, s.198/.

Zacznijmy od specyfikacji modelu oddziaływania. Lagran-
gian oddziaływania obierzemy postaci:

$$L_{int}(x) = L(x) = e_0 \bar{\Psi}(x) \gamma_\nu \Psi(x) A_\mu(x) t^{\nu\mu}(x) \quad (6.23)$$

gdzie e_0 - standardowa stała sprzężenia / $[e_0] = 1$, $\Psi(x)$ -
czterekomponentowa funkcja spinowa, γ_ν - macierze Diraca,
 $\bar{\Psi} = \Psi + \gamma_0$, $A_\mu(x)$ - czteropotencjał elektromagnetyczny, $t^{\nu\mu}(x)$
- pole tensorowe określone wzorami (3.37) i (3.37.1). Po-
trzebny nam do tego celu drugi człon (S_2) szeregu (2.38) (w
postaci którego przedstawiamy macierz S) będzie z uwagi na
(6.23) miał postać:

$$S_2 = S_2^i + S_2^{i'} \quad (6.24)$$

gdzie

$$S_2 = - \frac{1}{2} e^2 \int_{x_1} \int_{x_2} \theta[\lambda(x_2 - x_1)] : [\bar{\Psi}(x_1) \gamma_\nu \Psi(x_1) A_\mu(x_1) t^{\nu\mu}(x_1) ; x$$

$$x : \bar{\Psi}(x_2) \gamma_\nu \Psi(x_2) A_\beta(x_2) t^{\alpha\beta}(x_2)] : dx_1 dx_2 \quad (6.24')$$

$S_2^i = S_2^{i'}$ z zamianą " x_2 " na " x_1 " i odwrotnie. Symbol " : ;" oznacza iloczyn normalny. Przechodząc z wszystkimi funkcjami od " x_1 " i " x_2 " tkwiącymi pod całkami w (6.24) do reprezentacji pędowej i wykonując całkowanie po " x_1 " i " x_2 " otrzymujemy:

$$S_2^1 = \frac{e^2}{2i(2\pi)^5} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{k_1} \int_{k_1'} \int_{q_1} \int_{p_1} \int_{k_2} \int_{k_2'} \int_{q_2} \int_{p_2} \int \delta[\lambda T + k_2 + k_2' + p_2 + q_2] \times$$

$$\times \delta[\lambda T + k_1 + k_1' + p_1 + q_1] \frac{1}{T-1\epsilon} \tilde{\epsilon}^{\nu\mu}(q_1) \tilde{\epsilon}^{\alpha\beta}(q_2) : [\tilde{\Psi}(k_1) \delta_\nu \tilde{\Psi}(k_1') A_\mu(p_1) : \times$$

$$\times : \tilde{\Psi}(k_2) \delta'_\alpha \tilde{\Psi}(k_2') A_\beta(p_2) :] : dT dk_1 \dots dp_2 \quad (6.24'')$$

$k_1 \dots p_2$ - czteropędy, które się pojawiły w wyniku zastosowania transformacji Fouriera, $\tilde{\Psi}(k_1) \dots \tilde{A}_\beta(p_2)$ - transformaty fourierowskie funkcji pola $\tilde{\Psi}(x_1) \dots A_\beta(x_2)$. Stosując twierdzenie Wicka do iloczynu normalnego w (6.24'') otrzymujemy rozwinięcie S_2^1 na odpowiednią ilość składników. Proces, który nas interesuje, będzie opisany składnikiem $S_2^{(p)}$ otrzymanej sumy. Składnik ten będzie miał postać:

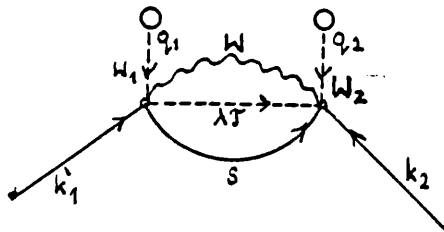
$$S_2^{(p)} = + \frac{ie^2}{2(2\pi)^5} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{k_1} \int_{p_2} \int \delta[\lambda T + k_2 + k_2' + p_2 + q_2] \delta[-\lambda T + k_1 + k_1' + p_1 + q_1] \times$$

$$\times \frac{1}{T-1\epsilon} \tilde{\epsilon}^{\nu\mu}(q_1) \tilde{\epsilon}^{\alpha\beta}(q_2) : \underbrace{[\tilde{\Psi}(k_1) \delta_\nu \tilde{\Psi}(k_1') A_\mu(p_1) \tilde{\Psi}(k_2) \delta'_\alpha \tilde{\Psi}(k_2') \tilde{A}_\beta(p_2)]}_{\text{}} : \times$$

$$x : dT dk_1 \dots dp_2 \quad (6.25)$$

W powyższym wzorze klamry "spinają" funkcje, które ulegają kontrakcjom. Są to kontrakcje zwykłe (nie chronologiczne). Człon $S_2^{(p)}$ możemy przedstawić graficznie (rys. 4).

Występujące w kontrakcjach $\underbrace{\tilde{\Psi}(k_1)\Psi(k_2)}_1$ i $\underbrace{A_\mu(p_1)\tilde{A}_\beta(p_2)}_{\mu\beta}$ we wzorze (6.25) funkcje "delta Diraca" gwarantują prawidł-



Rys. 4

$$k_1' + q_1 = w + \lambda J + s = -q_2 - k_2$$

łowy bilans energii i pędu w wierzchołkach W_1 i W_2 diagramu przedstawionego na rys. 4. Powyższy diagram jest szczególnym przypadkiem diagramu z rys. 2. Różni się on od standardowego diagramu Feynmana przedstawionego na rys. 3 występowaniem linii, na których rozstawione są czteropędy $q_1, q_2, \lambda J$ oraz tym, że wszystkie linie zewnętrzne zwrócone są zawsze ku wierzchołkom, a wewnętrzne - zwrócone od W_1 do W_2 . Przypomnijmy, że q_1 i q_2 są to czteropędy "grawitacyjne" a λJ - jest czteropędem kwazicząstki Kadyszewskiego. Z (6.4) i (6.5) (por. też tekst po wzorze (6.5)) wynika, że występujące w (6.25) kontrakcje funkcji spinowych oraz czteropotencjałów elektromagnetycznych mają postać:

$$\underbrace{\tilde{\Psi}(k_1)\Psi(k_2)}_1 = i \left[\gamma_\nu s + EM \right] \delta(k_1 + s) \theta(s_4) \delta(s^2 - M^2) \quad (6.26)$$

$$\underbrace{\tilde{A}_\mu(p_1)\tilde{A}_\beta(p_2)}_{\mu\beta} = -\eta_{\mu\beta} \delta(p_1 + w) \theta(w_4) \delta(w^2) \quad (6.27)$$

gdzie /ze względu na oznaczenia rys. 4/ dokonaliśmy zmiany oznaczeń czteropędu "k₂" na "s" i "p₂" na "w". M jest masą elektronu, E - macierzą jednostkową, $\eta_{\mu\beta}$ - tensorem metrycznym przestrzeni Minkowskiego. $\gamma_\nu / \nu = 1...4$ są to macierze Diraca, które w używanej przez nas reprezentacji są postaci:

$$\gamma_0 \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_4 = \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & -E_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & \delta_1 \\ \delta_1 & 0 \end{pmatrix} \quad i = 1, 2, 3 \quad (6.28)$$

E_2 jest macierzą jednostkową o dwóch wierszach i dwóch kolumnach, δ_1 - są to dwuwymiarowe macierze Pauliego. Zauważmy, że występujące w (6.25) dwie funkcje delta Diraca "zdejmą" całkowanie po czteropędach q_1 i q_2 . Obierzmy teraz za ustalony układ $\Sigma_0 / \vec{\lambda} = 0, \lambda_4 = +1$, którym będziemy się nadal posługiwali. Tensorowe funkcje $\tilde{t}^{\nu\mu}(q_1)$ i $\tilde{t}^{d/s}(q_2)$ wyrażą się więc obecnie wzorami (3.48). Podstawiając (6.27), (6.26)/po uprzednim uwzględnieniu (6.28)/ do (6.25), całkując po parametrze \mathcal{T} i korzystając z (3.48) otrzymujemy po wykonaniu standardowych rachunków:

$$S_2(p) = 4a \int_{k_1^1} \int_{k_2^2} \tilde{\Psi}(k_2) \left[\int_{\vec{w}} \int_{\vec{s}} \frac{h(\vec{w}, \vec{s}, k_1^1, k_2^2)}{w \sqrt{s^2 + M^2}} S(\vec{s}) d^3\vec{w} d^3\vec{s} \right] \times \\ \times \tilde{\Psi}(k_1^1) dk_1^1 dk_2^2 \quad (6.29)$$

gdzie

$$a \stackrel{\text{def}}{=} \frac{4^6 e^2 \beta^8}{(2\pi)^{1/2}} \quad i, \quad (6.30)$$

$$h(\vec{w}, \vec{s}, k_1^0, k_2) = \exp \left\{ -4l^2 \left[(\vec{s} + \vec{w} + \vec{k}_2)^2 + (s^4 + w^4 + k_2^4)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + (\vec{s} - \vec{w} + \vec{k}_1^0)^2 + (s^4 - w^4 + k_1^4)^2 \right] \right\} \quad (6.31)$$

$$S(\vec{s}) \stackrel{\text{df}}{=} \begin{pmatrix} \sqrt{s^2 + M^2} + M, & 0, & s_3, & s_1 - is_2 \\ 0, & \sqrt{s^2 + M^2} + M, & s_1 + is_2, & -s_3 \\ -s_3, & -s_1 + is_2, & M - \sqrt{s^2 + M^2}, & 0 \\ -s_1 - is_2, & s_3, & 0, & M - \sqrt{s^2 + M^2} \end{pmatrix} \quad (6.32)$$

$\tilde{\Psi}(k)$ jest spinorem, amplitudą pędową, która spełnia równanie Diraca zapisać w reprezentacji pędowej

$$(\gamma_\nu k^\nu + EM) \tilde{\Psi}(k) \Big|_{k^2 = M^2} = 0 \quad (6.33)$$

E - macierz jednostkowa, "4 x 4", γ_ν - macierze Diraca postaci (6.28)/

$$\tilde{\Psi}(k) = \Psi^\dagger(k) \gamma^0, \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} I, 0 \\ 0, I \end{pmatrix} \quad (6.34)$$

I - macierz jednostkowa "2 x 2"/.

Amplitudę pędową $\tilde{\Psi}(k)$ wyrazimy poprzez amplitudy "trójpędowe" $\Psi^+(\vec{k})$ i $\Psi^-(\vec{k})$ jak następuje: (8.7, § 7)

$$\tilde{\Psi}(k) = 2k_4 \delta(k^2 - m^2) [\Psi^+(\vec{k}) - \Psi^-(\vec{k})] \quad (6.35)$$

Amplitudy $\Psi^+(\vec{k})$ i $\Psi^-(\vec{k})$ są rozwiązaniami równania Diraca o postaci:

$$\begin{aligned}
 (\gamma_4 k_4 + \vec{\gamma} \cdot \vec{k} + EM)\Psi^+(\vec{k}) &= 0, \\
 (-\gamma_4 k_4 + \vec{\gamma} \cdot \vec{k} + EM)\Psi^-(\vec{k}) &= 0 \quad (6.35.1) \\
 k_4 &= +\sqrt{\vec{k}^2 + M^2}
 \end{aligned}$$

Oznaczmy przez $a_v^+(\vec{k})$, $\tilde{a}_v^+(\vec{k})$, $a_v^-(\vec{k})$, $\tilde{a}_v^-(\vec{k})$, ($v = 1, 2$) operatory kreacji i anihilacji elektronu i pozytonu. Relacje komutacji pomiędzy nimi są postaci:

$$\begin{aligned}
 [\tilde{a}_v^-(\vec{k}), a_\mu^+(\vec{k}')]_{\pm} &= \delta_{v\mu} \delta(\vec{k} - \vec{k}') \\
 [a_v^-(\vec{k}), \tilde{a}_\mu^+(\vec{k}')]_{\pm} &= \delta_{v\mu} \delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad (6.35.2)
 \end{aligned}$$

Czterospinowe amplitudy $\Psi^+(\vec{k})$ i $\Psi^-(\vec{k})$ można jak wiadomo ([8], § 7) wyrazić poprzez te operatory następująco:

$$\begin{aligned}
 \Psi_{\pm}^{\pm}(\vec{k}) &= \sum_{v=1}^2 a_v^{\pm}(\vec{k}) \mathcal{U}_{\pm}^{v,\pm}(\vec{k}) \\
 \bar{\Psi}_{\pm}^{\pm}(\vec{k}) &= \sum_{v=1}^2 \tilde{a}_v^{\pm}(\vec{k}) \bar{\mathcal{U}}^{v,\pm}(\vec{k}), \quad \alpha = 1, 2, 3, 4 \quad (6.35.3)
 \end{aligned}$$

gdzie $\bar{\mathcal{U}}^{v,\pm}(\vec{k}) = \mathcal{U}^{v,\pm}(\vec{k}) \gamma^0$,

$$v = 1, 2 \quad (6.35.4)$$

$\mathcal{U}^{v,\pm}(\vec{k})$ są to unormowane, liniowo niezależne rozwiązania równań (6.35.1).

Podstawmy teraz do wzoru (6.29) w miejsce pędowych amplitud $\tilde{\Psi}(k_2)$ i $\tilde{\Psi}(k_1')$ wyrażenia (6.35), (6.34) i potem dokonajmy dalszego podstawienia (6.35.3). Po przeliczeniach otrzymamy:

$$\begin{aligned}
S_2^{(P)} = & 4s \int_{\vec{k}_2} \int_{\vec{k}_1} \sum_{\nu=1}^2 \left[a_{\nu}^{+}(\vec{k}) v_{\nu,+}^{+}(\vec{k}_2) - a_{\nu}^{-}(-\vec{k}_2) v_{\nu,-}^{+}(-\vec{k}_2) \right] \times \\
& \times \left[\gamma_0 \int_{\vec{w}} \int_{\vec{s}} \frac{h(\vec{w}, \vec{s}, \vec{k}_1, \vec{k}_2)}{w \sqrt{s^2 + m^2}} S(\vec{s}) d^3 \vec{w} d^3 \vec{s} \right] \sum_{\mu=1}^2 \left[a_{\mu}^{+}(\vec{k}_1) v_{\mu,+}^{+}(\vec{k}_1) - \right. \\
& \left. - a_{\mu}^{-}(-\vec{k}_1) v_{\mu,-}^{+}(-\vec{k}_1) \right] d^3 \vec{k}_2 d^3 \vec{k}_1 \quad (6.35.5)
\end{aligned}$$

Oznaczmy szukany element macierzowy przez \underline{P} . Odpowiada on (przypominamy) przejściu elektronu ze stanu początkowego, acharakteryzowanego spinem $s = \frac{1}{2}$ i trójpędem \vec{k} , do takiego samego stanu końcowego poprzez emisję i następnie absorpcję emitowanego uprzednio fotonu.

Zatem

$$\underline{P} = \langle \phi_0^+ \tilde{a}_2^-(\vec{k}) \mid S_2^{(P)} a_2^+(\vec{k}) \phi_0 \rangle \quad (6.36)$$

gdzie

ϕ_0 - wektor stanu próżni,

$a_2^+(\vec{k})$ - operator kreacji elektronu o spinie $s = \frac{1}{2}$ i trójpędzie \vec{k} ,

$\tilde{a}_2^-(\vec{k})$ - operator anihilacji elektronu o spinie $s = \frac{1}{2}$ i trójpędzie \vec{k} .

Podstawiając teraz do (6.36) wyrażenie za $S_2^{(P)}$ dane wzorem (6.35.5) i posługując się relacjami komutacji (6.35.2) otrzymujemy po standardowych przekształceniach:

$$\underline{P} = \sqrt{2} v_{2,-}^{+}(\vec{k}) L(\vec{k}) v_{2,+}^{+}(\vec{k}) \quad (6.36')$$

gdzie

$$L(\vec{k}) \stackrel{\text{df}}{=} 4a \int_{\vec{w}} \int_{\vec{s}} \frac{h(\vec{w}, \vec{s}, \vec{k})}{w|\vec{s}^2 + M^2} S(\vec{s}) d^3\vec{w} d^3\vec{s} \quad (6.37)$$

stała "a" określona jest wzorem (6.30)

$$h(\vec{w}, \vec{s}, \vec{k}) \stackrel{\text{df}}{=} h(\vec{w}, \vec{s}, k_1^0, k_2^0) \left| \begin{array}{l} (k_1^0)^4 = \sqrt{k_1^2 + M^2} \\ (k_2^0)^4 = \sqrt{k_2^2 + M^2} \end{array} \right| \vec{k}_1^0 = -\vec{k}_2^0 = \vec{k} \quad (6.37)$$

funkcja $h(\vec{w}, \vec{s}, k_1^0, k_2^0)$ określona jest wzorem (6.31).

Macierz $S(\vec{s})$ dana jest wzorem (6.32).

Dokonyjmy teraz czysto przestrzennego obrotu układu Σ_0 ,
tak aby po jego dokonaniu wektor \vec{k} leżał na osi "z".

$$k_1 \stackrel{\Sigma_0}{=} k_2 \stackrel{\Sigma_0}{=} 0 \quad (6.38)$$

Wówczas spinory $\sqrt{2}/+(k)$ i $\sqrt{2}/-(k)$ tkwiące w wyrażeniu
(6.36) na szukany element macierzowy \underline{P} można będzie przed-
stawić w postaci: ([B], § 7, s.64 oraz § 12, s.89).

$$\sqrt{2}/+(k) \stackrel{\Sigma_0}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{k_3}{k_4 + M} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} K_0 \quad (6.39)$$

oraz

$$\sqrt{2}/-(k) = K_0 \left(0, 1, 0, \frac{k_3}{k_4 + M} \right) \quad (6.40)$$

gdzie

$$K_0 \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{M + \sqrt{\vec{k}^2 + M^2}}}{\sqrt{\vec{k}^2 + M^2}} \quad K_4 = +\sqrt{\vec{k}^2 + M^2} \quad (6.41)$$

Podstawmy do (6.36') związki (6.37) ... (6.41) oraz skorzystajmy z (6.31) i z (6.32). Otrzymamy po wykonaniu rachunków:

$$\underline{P} = 2a e^{-16l^2(\vec{k}^2 + M^2)} \frac{M + \sqrt{M^2 + \vec{k}^2}}{\sqrt{M^2 + \vec{k}^2}} \phi_0(k) \quad (6.42)$$

gdzie

$$\phi_0(k) \stackrel{\text{df}}{=} - \int_{\vec{w}} \int_{\vec{s}} \Psi(\vec{w}, \vec{s}) \left[2\bar{\lambda} \sqrt{\vec{s}^2 + M^2} + \varepsilon_3(1 + \bar{\lambda}^2) \right] \times \\ \times \frac{1}{w \sqrt{\vec{s}^2 + M^2}} d^3\vec{w} d^3\vec{s} \quad (6.43)$$

$$\bar{\lambda} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{k_3}{M + \sqrt{\vec{k}^2 + M^2}}, \quad w \stackrel{\text{df}}{=} \sqrt{\vec{w}^2} \quad (6.44)$$

$$\Psi_{\vec{w}, \vec{s}} \stackrel{\text{df}}{=} e^{-16l^2 \left(\vec{s}^2 + \vec{w}^2 - w_3 k_3 - w \sqrt{\vec{k}^2 + M^2} \right)} \quad (6.45)$$

Wstawiając (6.43), (6.44) i (6.45) do (6.42) i przechodząc po współrzędnych sferycznych $\varepsilon, \varphi_\varepsilon, \theta_\varepsilon$ oraz w, φ_w, θ_w z trójkami \vec{s} i \vec{w} / teraz $\varepsilon \stackrel{\text{df}}{=} |\vec{s}|$ i $w \stackrel{\text{df}}{=} |\vec{w}|$ / otrzymujemy po przekształceniach i wycałkowaniu po $\varphi_w, \varphi_\varepsilon$:

$$\underline{P} = -2a e^{-16l^2(\vec{k}^2 + M^2)} \times \left[2\bar{\lambda} I_{w\varepsilon} I_{\theta} + 1 + \bar{\lambda}^2 / I_{w\varepsilon} I_{\theta} \right] \times \\ \times \frac{M + \sqrt{\vec{k}^2 + M^2}}{\sqrt{\vec{k}^2 + M^2}} \quad (6.46)$$

gdzie z kolei

$$I_w \stackrel{df}{=} 2\tilde{\pi} \int_0^{\infty} w e^{-16l^2[w^2 - w\sqrt{k^2 + M^2}]} I(w) dw \quad (6.47)$$

$$I/w \stackrel{df}{=} \int_0^{\tilde{\pi}} \sin \vartheta_w e^{+16l^2 w \cos \vartheta_w k_3} d\vartheta_w \quad (6.48)$$

$$I_s \stackrel{df}{=} 4\tilde{\pi} \int_0^{\infty} s^2 e^{-16l^2 s^2} ds \quad (6.49)$$

$$I_s \stackrel{df}{=} 2\tilde{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\tilde{\pi}} \frac{s^3 \cos \vartheta_s \sin \vartheta_s}{\sqrt{s^2 + M^2}} e^{-16l^2 s^2} ds d\vartheta_s \quad (6.50)$$

Całkując w (6.50) po ϑ_s otrzymujemy

$$I'_s = 0 \quad (6.50')$$

Z (6.49) otrzymujemy

$$I_s = \frac{\sqrt{\tilde{\pi}}}{16^2 l^3} \quad (6.49')$$

Przejdźmy teraz do wyliczenia całki danej wzorem (6.49). Podstawiając $\cos \vartheta_w = u$ i całkując po tym parametrze "u" w granicach od "1" do "-1" otrzymujemy:

$$I(w) = \frac{1}{16l^2 w k_3} [e^{16l^2 w k_3} - e^{-16l^2 w k_3}] \quad (6.48')$$

Wstawiając teraz (6.48') do (6.47) otrzymamy:

$$I_w = \frac{\tilde{\Pi}}{8l^2 k_3} \left[\int_0^{\infty} e^{-16l^2 \left[w^2 - w \sqrt{\vec{k}^2 + M^2} - wk_3 \right]} dw - \int_0^{\infty} e^{-16l^2 \left[w^2 - w \sqrt{\vec{k}^2 + M^2} + wk_3 \right]} dw \right] \quad (6.47')$$

Całki występujące w (6.47') są skończone i stabilizowane (ζ^{-23}).

Posługując się ogólnym wzorem:

$$\int_0^{\infty} x^{\nu-1} e^{-\beta x^2 - \gamma x} dx = (2\beta)^{-\frac{\nu}{2}} \Gamma(\nu) e^{\frac{\gamma^2}{4\beta}} D_{-\nu} \left(\frac{\gamma}{\sqrt{2\beta}} \right) \quad (6.51)$$

$\nu > 0$, $\beta > 0$, Γ/ν - funkcja "gamma Eulera"; $D_{\nu}(z)$ - funkcja cylindryczna typu parabolicznego /vide (A.14)/

otrzymujemy

$$\int_0^{\infty} e^{-16l^2 \left[w^2 - w \left(\pm k_3 + \sqrt{\vec{k}^2 + M^2} \right) \right]} dw = \frac{1}{4\sqrt{2}l} e^{2l^2 \left(\pm k_3 + \sqrt{\vec{k}^2 + M^2} \right)^2} \times D_{-1} \left[-2\sqrt{2} l \left(\sqrt{\vec{k}^2 + M^2} \pm k_3 \right) \right] \quad (6.52)$$

Funkcja $D_{-1}(z)$ związana jest z funkcją prawdopodobieństwa $\phi(z)$ następująco:

$$D_{-1}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{z^2}{4}} \left[1 - \phi \left(\frac{z}{\sqrt{2}} \right) \right] \quad (6.53)$$

gdzie funkcję $\phi(z)$ można przedstawić w postaci dobrze zbieżnego szeregu:

$$\phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n z^{2n+1}}{(2n+1)!!} \quad (6.54)$$

Wstawiając (6.53) i (6.52) do (6.47') otrzymujemy po prostych już przekształceniach:

$$I_w = \frac{\pi^{3/2}}{8\sqrt{2} \cdot 1^2 k_3} \left\{ e^{2l^2(\sqrt{k^2+M^2}-k_3)^2} \left[1 + \phi\left(2l(\sqrt{k^2+M^2}-k_3)\right) \right] - e^{2l^2(\sqrt{k^2+M^2}+k_3)^2} \left[1 + \phi\left(2l(\sqrt{k^2+M^2}+k_3)\right) \right] \right\} \quad (6.55)$$

Wstawiając na koniec (6.30), (6.44), (6.50'), (6.49') i (6.55) do (6.46) otrzymujemy po jeszcze paru przekształceniach następujące wyrażenie na kwadrat szukanego elementu macierzywego P .

$$P^2 = \frac{32}{\pi^5} \cdot \frac{e^4 l^6}{k^2+M^2} e^{-32l^2(\sqrt{k^2+M^2})^2} \left\{ e^{2l^2(\sqrt{k^2+M^2}-k_3)^2} \times \left[1 + \phi\left(2l(\sqrt{k^2+M^2}-k_3)\right) \right] - e^{2l^2(\sqrt{k^2+M^2}+k_3)^2} \times \left[1 + \phi\left(2l(\sqrt{k^2+M^2}+k_3)\right) \right] \right\}^2 \quad (6.56)$$

gdzie ϕ jest funkcją prawdopodobieństwa określona szeregiem (6.54).

Przypomnijmy, że \underline{P} jest elementem macierzowym (drugiego rzędu) odpowiadającym procesowi emisji przez elektron o trójwymiarze \vec{k} , ($k_1 = k_2 = 0$), masie M , spinie $s = +\frac{1}{2}$, fotonu i następnie absorpcji tegoż fotonu przez ten sam elektron.

Używany przez nas do opisu tego procesu lagrangian oddziaływania różni się od "standardowego" lagrangianu tym, że w miejsce tensora metrycznego $\eta_{\mu\nu}$ czasoprzestrzeni Minkowskiego, będącej tłem wszystkich oddziaływań, wstawiamy tensorowe klasyczne funkcje źródłowe $t_{\mu\nu}(x)$, reprezentujące /z dokładnością do nieskończonego małych rzędu drugiego/ potencjały zewnętrznego, słabego pola grawitacyjnego rozprzestrzenionego w obszarze efektywnego oddziaływania.

W standardowej teorii macierzy S taki element \underline{P} jest nieskończony i trzeba stosować procedurę renormalizacyjną, by móc się nim posłużyć do wyliczenia prawdopodobieństwa przejścia opisanego tym elementem \underline{P} , czyli do obliczenia odpowiedniego przekroju czynnego.

Dzięki uwzględnieniu wpływu pola grawitacyjnego poprzez tensorowe funkcje źródłowe wprowadzone przez nas do teorii macierzy S , w wyrażeniu na element macierzowy \underline{P} pojawia się czynnik typu "formfaktora źródłowego" (grawitacyjnego) powodujący, iż element macierzowy \underline{P} jest skończony, aczkolwiek jego postać (ściślej postać \underline{P}^2) jest nieefektywna /vide (6.56)/. Jak wynika z (6.56) jedynym parametrem teorii jest stała l o wymiarze długości. Przypomnijmy, że jest ona związana ze stałym, w obszarze efektywnego oddziaływa-

nia, skalarom krzywizny R pola grawitacyjnego następująco:

$$1 = \frac{1}{\sqrt{|R|}} \quad (6.57)$$

przypominając wzór (6.56) zauważamy, że:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \underline{P} = \lim_{R \rightarrow 0} \underline{P} = 0 \quad (6.58)$$

Oznacza to, że nie da się przejść z wynikiem końcowym do sytuacji, która miałaby miejsce dla standardowej wersji teorii macierzy S . Nie uwzględniając bowiem wpływu tensorowych funkcji źródłowych (czyli roli pola grawitacyjnego w konstrukcji macierzy S i w strukturze lagrangianu oddziaływania) a więc przyjmując od początku $t_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}$ /czyli kładąc $R(x) = 0$ / otrzymalibyśmy wynik $\underline{P} = \infty$.

Zdaniem autora świadczy to o tym, że konstrukcja lagrangianów oddziaływania (a więc uwzględnienie wpływu tensorowych funkcji źródłowych na stan układu) zademonstrowana w niniejszej pracy, nie sprowadza się do zwykłej procedury regularizacyjnej, co można interpretować jako skonstatowanie "nieprzeziębłości" procesów kwantowych i grawitacyjnych.

Uwagi końcowe

W pracy niniejszej wprowadziliśmy do teorii macierzy S tensorowe, symetryczne funkcje próbne w ten sposób, że w obszarze efektywnego oddziaływania prawie że dokładnie (tzn. z dokładnością do nieskończonego małego rzędu drugiego) pokrywają się one z istniejącym w tym obszarze słabym, zewnętrznym (czyli wytworzonym przez jego otoczenie), klasycznym polem grawitacyjnym o stałej krzywiznie. Poza tym obszarem funkcje próbne szybko znikają, gdyż są one funkcjami klasy Schwartza.

Funkcje te, traktowane jako funkcje źródłowe, opisują w obszarze efektywnego oddziaływania wpływ istniejącego w nim zewnętrznego pola grawitacyjnego na stan układu U . Ten zaś układ U składa się z cząstek elementarnych (masowych bezspinowych, masowych spinowych i fotonów), których wzajemne oddziaływanie opisujemy standardowymi metodami kwantowej teorii pola. Wpływ zewnętrznego, klasycznego (tzn. nie podlegającego procedurze drugiego kwantowania) pola grawitacyjnego na stan fizyczny naszego układu U możemy traktować jako wynik oddziaływania cząstek z tym polem, czyli (zdaniem autora) jako wynik "sui generis" oddziaływania cząstek z cza-

soprzestrzenię. Zamiar uwzględnienia tego oddziaływania od samego już początku konstruowania naszej teorii przejawia się:

1. w doborze symetrycznych funkcji tensorowych jako funkcji próbnych;

2. w specyfikacji modelu oddziaływania /tzn. w konstrukcji lagrangianu interakcji, gdzie żądamy, by każdy z osobna jego człon był ogólnie kowariantny oraz niezmienniczy względem dyslokacji w polu funkcji $t_{\mu\nu}(x)$;

3. w zmianie miary całkowania, która występuje w całce działania S_n^{int} .

Okazuje się, że przy takim doborze funkcji próbnych, wszystkie funkcje współczynnikowe (czyli funkcje odpowiadające n-wierzchołkowym diagramom Feynmana zmodyfikowanym poprzez wprowadzenie do nich dodatkowo linii odpowiadających kwazi-cząstkom oraz pędom grawitacyjnym) są skończone. Znika więc typowa dla standardowej kwantowej teorii pola trudność w posługiwaniu się tymi funkcjami w celu wyliczenia prawdopodobieństwa odnośnych przejść kwantowych lub, co praktycznie na jedno wychodzi, w celu obliczania przekrojów czynnych na procesy fizyczne opisywane odnośnymi diagramami Feynmana.

Pole grawitacyjne, reprezentowane w czteroobszarze efektywnego oddziaływania przez tensorowe funkcje próbne $t_{\mu\nu}(x)$, pełni więc funkcję "regulatora" zabezpieczającego istnienie warunków (prawidłowy bilans pędu i energii w wierzchołkach diagramów Feynmana) gwarantujących możliwości przebiegu

obserwowanych doświadczalnie procesów powodujących realną ewolucję czasową układu fizycznego. Widzimy zatem, że próbne funkcje $t_{\mu\nu}(x)$, którymi w pracy posługiwaliśmy się pełnią rolę funkcji źródłowych Schwingera. Owa "regulująca" rola tensorowych funkcji źródłowych nie sprowadza się do zwykłej regularyzacji. Zaniedbanie bowiem wpływu źródeł w wyniku końcowym obliczania funkcji współczynnikowych w elementach macierzy S , poprzez formalne położenie $1 \rightarrow \infty$ ($R \rightarrow 0$) nie da - przynajmniej ogólnie - tego samego wyniku jaki otrzymalibyśmy kładąc od samego początku (przy konstruowaniu macierzy S oraz przy specyfikacji lagrangianu oddziaływania), że $t_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}$.

Zdaniem autora oznacza to, że rola tensorowych funkcji źródłowych reprezentujących w pewnym przybliżeniu /takim np. jak w niniejszej pracy) realne zewnętrzne pole grawitacyjne, przy konstruowaniu teorii macierzy rozpraszania nie jest tylko formalna, nie sprowadza się do czysto matematycznej procedury. Autor uważa, że można funkcjom tym przypisywać bardziej realistyczną interpretację w duchu schwingerowskich funkcji źródłowych. W naszym przypadku "źródłem", opisanym takimi funkcjami, usuwającym nieskończoności teorii renormalizowanych w dowolnym byle skończonym rzędzie przybliżeń, zabezpieczającym prawidłowy bilans energii i pędu w każdym z osobna wierzchołku diagramu Feynmana jest zewnętrzne słabe i klasyczne pole grawitacyjne.

To zaś, że kwantowy (w sensie drugiego kwantowania) opis pola grawitacyjnego, jako rzeczywistości fizycznej usuwającej nieskończoności z kwantowej teorii pola jest niepotrzebny, nie jest, zdaniem autora, przykre. Problem konsyistentnego kwantowania pola grawitacyjnego jest przecież nadal jeszcze problemem otwartym.

Aneks

Badanie typowych całek występujących przy wyznaczaniu postaci funkcji współczynnikowych

Przebieżmy całkę (4.28) w postaci:

$$I_1 = \int_0^{\infty} \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + m^2}} \cdot \Psi(r) \left[\int_0^{\pi} \sin \theta \cdot e^{-8l^2 r \Delta L_3 \cos \theta} I(\theta, r) d\theta \right] dr \quad (\text{A.1})$$

gdzie

$$\Psi(r) \stackrel{\text{df}}{=} -8l^2 (2r^2 + \sqrt{r^2 + m^2} \Delta L_4) \quad (\text{A.2})$$

$$I(\theta, r) \stackrel{\text{df}}{=} \int_0^{2\pi} e^{a \cos \gamma + b \sin \gamma} d\gamma \quad (\text{A.3})$$

$$a \stackrel{\text{df}}{=} -8l^2 r \Delta L_1 \sin \theta; \quad b \stackrel{\text{df}}{=} -8l^2 r \Delta L_2 \sin \theta \quad (\text{A.4})$$

Całka (A.3) jest stabilaryzowana ([23]). Otrzymujemy w wyniku całkowania następujący zbieżny szereg:

$$I(\theta, r) = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16^{n1} 4^n (\Delta L_1^2 + \Delta L_2^2)^n}{(n!)^2} r^{2n} \sin^{2n} \theta \quad (\text{A.2}')$$

Podstawiając (A.2') do (A.1) otrzymujemy:

$$I_1 = 2\tilde{\eta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{4n} 1^{4n} (\Delta L_1^2 + \Delta L_2^2)^n}{(n!)^2} \int_0^{\infty} \frac{r^{2(n+1)}}{\sqrt{r^2 + m^2}} e^{\Psi(r)} I_n(r) \quad (\text{A.2}'')$$

gdzie

$$I_n(r) = \int_0^{\tilde{\eta}} \sin^{2n+1} \Theta e^{-8l^2 r \Delta L_3 \cos \Theta} d\Theta \quad (\text{A.5})$$

Dokonując podstawienia $\sin \Theta = z$ otrzymujemy po łatwym przekształceniu:

$$I_n(r) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \int_{-1}^{+1} z^{2k} e^{-8l^2 r \Delta L_3 z} dz \quad (\text{A.5}')$$

Podstawiając (A.5') do (A.2'') otrzymujemy po paru przekształceniach:

$$I_1 = \frac{\tilde{\eta}}{4\Delta L_3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{4n} 1^{4n-2} (\Delta L_1^2 + \Delta L_2^2)^n}{(n!)^2} \left[\int_0^{\infty} \frac{r^{2n+1}}{\sqrt{r^2 + m^2}} (\mathcal{I}_+(r) - \mathcal{I}_-(r)) - \right. \\ \left. - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k (2k!)^2 \sum_{s=1}^{2k} \frac{1}{(2k-s)!(8l^2 \Delta L_3)^s} \int_0^{\infty} \frac{r^{2n-s+1}}{\sqrt{r^2 + m^2}} \times \right. \\ \left. \times (\mathcal{I}_+(r) - \mathcal{I}_-(r) dr) \right] \quad (\text{A.6})$$

gdzie

$$\mathcal{I}_{\pm}(r) \stackrel{\text{df}}{=} \exp \left[-8l^2 (2r^2 + \Delta L_4 \sqrt{r^2 + m^2}) \left(\pm \right) \Delta L_3 r \right] \quad (\text{A.7})$$

Dokonujemy teraz podstawienia $r = mx$. Jak widać z (A.6) i

z (A.7) w wyrażeniu na I_1 występują już tylko całki typu $I_p(\alpha, \beta, \gamma) \stackrel{\text{df}}{=} I_p^c$:

$$I_p^c = \int_0^{\infty} \frac{x^p \exp[-\alpha^2 x^2 + \beta x + \gamma \sqrt{x^2 + 1}]}{\sqrt{x^2 + 1}} dx \quad (\text{A.8})$$

gdzie

$$p \in \mathbb{N} + \{0\} \quad (\text{A.9})$$

oraz

$$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

Całka I_p^c jest skończona. Zobaczmy, jak można ją przedstawić w postaci zbieżnych szeregów. Rozwińmy w szeregi potęgowe czynniki funkcji podcałkowej postaci $\exp(\beta x)$ i $\exp(\gamma \sqrt{x^2 + 1})$.

Po rozwinięciu, całkę (A.8) można przedstawić w postaci następującego szeregu podwójnego.

$$I_p^c = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\beta^n \gamma^{2l}}{n! (2l)!} \left[I_p(n, l) + \frac{\gamma}{2l+1} \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} I^0(k, p, n, \gamma) \right] \quad (\text{A.10})$$

gdzie

$$I^0(k, p, n) = \int_0^{\infty} x^{p+n+2k} e^{-\alpha^2 x^2} dx \quad (\text{A.11})$$

$$I_p(n, l) = \int_0^{\infty} \frac{x^{p+n} (x^2+1)^l}{\sqrt{x^2+1}} e^{-\alpha^2 x^2} dx \quad (\text{A.12})$$

Całkując przez części (A.12) otrzymujemy po prostych przekształceniach:

$$I_p(n,1) = \int_0^0 \int_0^{1-(p+n+1)} \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} I_1(n,p,k) -$$

$$- 2! \sum_{k=0}^{1-1} \binom{1-1}{k} I_2(n,p,1) + 2\alpha^2 \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} I_2(n,p,k) \quad (A.13)$$

gdzie

$$I_n(n,p,k) \stackrel{\text{df}}{=} \int_0^\infty x^{p+n+2k+\xi} (1+x^2)^{\frac{1}{2}} e^{-\alpha^2 x^2} dx \quad \eta=1,2 \quad (A.14)$$

przy czym

$$\xi = 0 \quad \text{dla } n = 2$$

$$\xi = -2 \quad \text{dla } \eta = 1$$

Całka (A.11) jest stabularyzowana. Wyróżniamy tu trzy przypadki:

$$a/ \quad n = p = k = 0, \quad I^0(0,0,0) = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (A.15)$$

$$b/ \quad n + p = 2s, \quad s \in \mathbb{N} + \{0\},$$

$$I^0(n,p,k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\Gamma(2(s+k) - 1/2)}{2^{s+k+1} \alpha^{2(s+k)+1}} \quad (A.15')$$

$$c/ \quad n + p = 2s+1, \quad s \in \mathbb{N} + \{0\}$$

$$I^0(n,p,k) = \frac{(s+k)!}{2^{s+k+2} \alpha^{2(s+k)+1}} \quad (A.15'')$$

Przejdźmy teraz do badania całki (A.14). Dla szczególnego przypadku $p = n = 0$ jest ona stabularyzowana. Otrzymujemy wówczas:

$$I_1(0,1) = \int_0^\infty \frac{x(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x^2+1}} e^{-\alpha^2 x^2} dx = \frac{1}{\alpha \sqrt{2}} \sum_{s=0}^{2!} \binom{2!}{s} x \frac{s!}{2^s} e^{\frac{\alpha^2}{2}} D_{-(s+1)}(\alpha \sqrt{2}) \quad (A.16)$$

gdzie funkcja $D_\nu(z)$ jest (stabilaryzowaną) funkcją cylindryczną typu parabolicznego. Stosuje się do niej wzór rekurencyjny:

$$D_{-\nu+1}(z) - z D_{-\nu}(z) - \nu D_{-\nu-1}(z) = 0 \quad (\text{A.17})$$

Funkcja $D_{-1}^{(z)}$ określona została wcześniej wzorami (6.53) i (6.54).

Przyjmijmy teraz, że $p + n > 0$. Sposób obliczania całki (A.14) zależy w istotny sposób od tego, czy liczba "p+n" jest nieparzysta czy też parzysta. Rozpatrzmy więc osobno te dwa przypadki:

1) Przyjmujemy, że $s = 2r + 1$, $r \in \mathbb{N} + \{0\}$. Wówczas stosując w (A.14) podstawienie:

$$t = \sqrt{1 + x^2} - 1 \quad (\text{A.18})$$

otrzymujemy:

$$I_n(n, p, k) = \int_0^\infty t^r (t+2)^r e^{-\alpha^2(t^2+2t)} dt = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} 2^{r-k} x \times$$

$$x \left[\int_0^\infty t^{k+r+2} e^{-\alpha^2 t} dt + 2 \int_0^\infty t^{k+r-1} e^{-\alpha^2 t} dt + \int_0^\infty t^{k+r} e^{-\alpha^2 t} dt \right] \quad (\text{A.19})$$

gdzie

$$f(t) \stackrel{df}{=} -\alpha^2 t^2 - 2\alpha^2 t \quad (\text{A.20})$$

Całki występujące w (A.19) przy podstawieniu (A.20) są sta-

bularyzowane. Po wykonaniu paru przekształceń otrzymujemy:

$$I_{\eta}(n, p, k) = \frac{e^{\sum \alpha^2}}{\alpha \sqrt{2}} \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} 2^{r-k} \frac{(k+r)!}{k+r} \left[\frac{(k+r+1)(k+r+2)}{\alpha^2} x D_c(\alpha \sqrt{2}) + \right. \\ \left. + \frac{2(k+r+1)}{\alpha} D_a(\alpha \sqrt{2}) + D_b(\alpha \sqrt{2}) \right] \quad (\text{A.21})$$

gdzie $a = -(k+r+2)$, $b = -(k+r+1)$, $c = -(k+r+3)$.

2) Rozpatrzmy drugi przypadek, gdy $s = 2m$, $m \in \mathbb{N} + \{0\}$.

Wówczas całkę (A.14) rozbijamy następująco na sumę dwóch

całek:

$$I_{\eta}(n, p, k) = \int_0^{\infty} x^{2m} (1+x^2)^{\frac{1}{2}} e^{-\alpha^2 x^2} dx = I' + I'' \quad (\text{A.22})$$

gdzie

$$I'' = \frac{df}{d\alpha} \int_0^1 x^{2m} (1+x^2)^{\frac{1}{2}} e^{-\alpha^2 x^2} dx = \sum_{j=0}^1 \int_0^1 x^{2(m-j)} e^{-\alpha^2 x^2} dx \quad (\text{A.23})$$

$$I' = \frac{df}{d\alpha} \int_1^{\infty} x^{2m+1} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\alpha^2 x^2} dx = \sum_{u=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{u} \int_1^{\infty} x^{2(m-u)+1} e^{-\alpha^2 x^2} dx \quad (\text{A.24})$$

/W (A.23) i w (A.24) stosujemy rozwinięcie w zbieżny szereg wyrażenia $(1 + \lambda)^{\frac{1}{2}}$, dla $\lambda \leq 1/$

W celu wyliczenia całki (A.24) podstawiamy: $z = x^2 \alpha^2$.

Otrzymujemy wówczas:

$$I' = \sum_{u=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{u} \frac{1}{2\alpha^{2(m-u+1)}} \int_{\alpha^2}^{\infty} z^{m-u} e^{-z} dz \quad (\text{A.24}')$$

Dla $m=u=0$ otrzymujemy:

$$I' = \int_{\alpha^2}^{\infty} e^{-z} dz \frac{1}{2\alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2} e^{-\alpha^2} \quad (\text{A.25})$$

Dla $m=j=0$ otrzymujemy:

$$I'' = \int_0^1 e^{-\alpha^2 x^2} x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} \Phi(\alpha) \quad (\text{A.26})$$

gdzie $\Phi(\alpha)$ jest funkcją prawdopodobieństwa, którą można przedstawić za pomocą zbieżnego szeregu (6.54). Całki występujące w (A.23) i (A.24') są już stabilaryzowane.

Dla $m > u$, ($m - u \in \mathbb{N}$) otrzymujemy:

$$I' = \frac{1}{2^{m-u+1}} e^{-\alpha^2} \sum_{j=0}^{m-u} \frac{(m-u)!}{j!} \alpha^{2j} \quad (\text{A.27})$$

Dla $m < u$, ($u - m \in \mathbb{N}$) dostajemy po przekształceniach:

$$I' = \frac{1}{\alpha^{2(u-m+1)}} e^{-\alpha^2} \sum_{j=1}^{u-m-1} \frac{(j-1)! (-1)^{u-m-j-1}}{(u-m-1)! \alpha^{2j}} + \frac{(-1)^{u-m}}{(u-m-1)!} \left[C + 2 \ln |\alpha| + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j \alpha^{2j}}{j!} \right] \quad (\text{A.28})$$

gdzie C jest to stała Eulera.

Całkę I'' wyliczamy drogą całkowania przez części. Korzystamy z tego, że możemy w (A.23) przyjąć, iż $m+j \in \mathbb{N}$ /przypa-

dok $m = j = 0$ rozpatrzyliśmy już wcześniej; vide (A.26)/. Otrzymujemy po odpowiednio wielokrotnym przecałkowaniu przez części następujący wynik:

$$I'' = -\frac{1}{2\alpha^2} e^{-\alpha^2} \left[1 + \sum_{j=1}^{m+u-1} \frac{1}{(2\alpha^2)^j} \prod_{i=1}^j (2m+2u - 2i + 1) \right] +$$

$$+ \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha(2\alpha^2)^{m+u}} \prod_{i=1}^{m+u} (2m + 2u - 2i + 1) \phi(\alpha) \quad (\text{A.29})$$

Funkcja $\phi(\alpha)$ określona jest szeregiem (6.54).

W ten sposób wszystkie całki występujące w (4.28) bądź wyliczyliśmy efektywnie, bądź przedstawiliśmy explicite w postaci dobrze zbieżnych szeregów.

Rozpatrzmy teraz wyrażenie (4.29). Współrzędne wektora \vec{I}_2 oznaczmy odpowiednio przez $(I_2)_1, (I_2)_2, (I_2)_3$. Oznaczmy:

$$R(r) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{r^3}{\sqrt{r^2+m^2}} e^{-8l^2} \left[2r^2 + \Delta L_4 \sqrt{r^2 + m^2} \right] \quad (\text{A.30})$$

Z (4.29) i z (4.30) otrzymujemy, że:

$$(I_2)_1 = \int_0^\infty R(r) \left[\int_0^\pi \sin^2 \theta e^{-8l^2 r \Delta L_3 \cos \theta} I_8(\theta, r) \right] \quad (\text{A.31})$$

gdzie

$$I_8(\theta, r) = \int_0^{2\pi} \cos \varphi \exp(a \cos \varphi + b \sin \varphi) d\varphi \quad (\text{A.32})$$

przy czym "a" i "b" określone są w (A.4).

Całka (A.32) jest stabilaryzowana, otrzymujemy:

$$I_8(\theta, r) = 2\pi \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}} I_1(\sqrt{a^2 + b^2}) \quad (\text{A.33})$$

gdzie $I_1(p)$ jest funkcją Bessela pierwszego rzędu. Można ją przedstawić w postaci zbieżnego szeregu:

$$I_1(p) = \frac{p}{2^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^{2k}}{2^{2k} k! (k+1)!}, \quad p = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad (\text{A.34})$$

Wstawiając (A.34) do (A.33) i następnie do (A.32) otrzymujemy:

$$I_8(\theta, r) = \pi \sqrt{\frac{|\Delta L_1^2 - \Delta L_2^2|}{\Delta L_1^2 + \Delta L_2^2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{4k+3} 1^{4k+2} (\Delta L_1^2 + \Delta L_2^2)^{\frac{2k+1}{2}}}{k! (k+1)!} r^{2k+1} \sin^{2k+1} \theta \quad (\text{A.35})$$

Wstawiając zaś (A.35) do (A.31) otrzymujemy po paru przekształceniach:

$$(I_2)_1 = 8\pi^2 \sqrt{|\Delta L_1^2 - \Delta L_2^2|} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{4k} (\Delta L_1^2 + \Delta L_2^2)^{k+1/2}}{k! (k+1)!} \times \\ \times \int_0^{\infty} R(r) r^{2k+1} I(r) dr \quad (\text{A.36})$$

gdzie

$$I(r) = \int_{-1}^{+1} (1-z^2)^{k+1} e^{-8l^2 r \Delta L_1 z} dz \quad (\text{A.37})$$

Z (A.36) i z (A.37) widać, że w wyrażeniu na $(I_2)_1$ pojawia-

ją się takie tylko całki, które już zbadaliśmy przy obliczaniu wyrażenia I_1 .

Podobnie w wyrażeniach na $(I_2)_2$, $(I_2)_3$ oraz I_3 pojawiają się całki, które dadzą się sprowadzić do zbadanych już całek postaci (A.3), (A.5'), (A.6) i (A.32). Wszystkie one są skończone i dadzą się przedstawić w postaci dobrze zbieżnych szeregów.

Literatura

- [1] A. W i g h t m a n - Phys. Rev. 101, 860 /1956/
- [2] R. S t r e a t e r - P.C.T. Spin and Statistics and All That, Benjamin N.Y. /1964/
- [3] R. J o s t - The General Theory of Quantized Fields, Ann. Mat.Soc. Providence R.I. /1965/
- [4] N. B o g o l u b o w, A. L o g u n o v, Y. T o d o r o v - Osnovy aksjomatycznego podchoda w kwantowej teorii pola. Moskwa, izd. Nauka /1969/
- [5] J. S c h w i n g e r - Proc.Natl.Acad.Sci. 37,452 /1951 A/, 37, 455 /1951 B/
- [6] H. L e h m a n n, K. S y m a n z i k, W. Z i m m e r m a n - Nuovo Cimento 1, 205 /1955/; 2, 425 /1955/; 6, 319 /1957/
- [7] O. S t e i n m a n - Lecture Notes in Physics Nr 11 /1971/, Springer Verlag
- [8] N. B o g o l u b o w, D. S h i r k o v - Wwiedienije w teoriyu kwantowanych poliej, Moskwa /1957/
- [9] R. H e a g, D. K a s t l e r - J.Math.Phys. 5, 84 /1946/
- [10] A. S a l a m, J. S t r a t h d e e - Infinity expres- sion in gravity modified electrodynamics, I.C.T.F. - 71/14
- [11] A. S a l a m - Computation of renormalization con- stans - I.C.T.P. - 71/3
- [12] A. S a l a m - Finite field theories - I.C.T.P. - 71/108

- [13] J. S c h w i n g e r - Particles, Sources, Fields - Addison Wesley Publ.Camp. /1970/
- [14] Z. B o r e l o w s k i - Acta Physica Polonica B.1, 155 /1970/
- [14'] Z. B o r e l o w s k i, S. B r z e z o w e k i - Acta Physica Polonica B.3, 363 /1972/
- [15] S. B r z e z o w e k i - Acta Physica Polonica B.2, 363 /1972/
- [16] V. K a d y s h e v s k y - Zh.Eksp. Theor. Phys./USSR/ 46, 654, 875 /1964/
- [17] V. K a d y s h e v s k y, R. M i r - K a s i m o v, N. S k a c h k o v - Nuovo Cimento 55A, 233 /1967/
- [18] R. M i r - K a s i m o v - preprint Nr 1.2 - 7642 J.I.N.R. Dubna, USSR /1975/
- [19] A. S l a v n o v - Mat.Theor. Phys. 29, 291 /1976/
- [20] S. G u p t a - Proc. Roy. Soc. A.63, 681 /1950/
S. G u p t a - Phys. Rev. 96, 1683 /1954/
S. G u p t a - Rev. Modern. Phys. 29, 334 /1957/
- [21] S. W e i n b e r g - Gravitation and Cosmology, Wiley and Sons. Inc. N.Y. - London /1972/
- [22] H. E p s t e i n, V. G l a s e r - Ann.Inst.H.Poincare 19, 211 /1973/; Ref. TH. 1400 - Cern /1971/
- [23] J. G r a d s z t e i n, I. R y ż i k - Tablice całek sum i szeregów, wyd.Moskwa /1962/ (przekład polski).

Summary

The theory of S-matrix is formulated with the use of tensor test functions which are chosen in such a way that in the domain of effective interaction they describe a weak, external, classical gravitational field with constant curvature. It is shown that for renormalizable theories in an arbitrary but finite order of approximation the infinities disappear. The test functions provide the correct energy-momentum balance in each vertex of an arbitrary Feynman diagram and play the role of the Schwinger source terms. The cases with the interaction Lagrangians of the type $\lambda \varphi^4(x)$ and $e^2 \varphi(x) \varphi^*(x) A_\nu(x) A^\nu(x)$ are analyzed in detail up to second order of approximation.

СОДЕРЖАНИЕ

В работе обсуждается теория S -матрицы в случае тензорных функции интенсивности, которые определяются так чтобы в области эффективного взаимодействия описывали они слабое, внешнее классическое гравитационное поле с постоянной кривизной. Показано, что в ренормируемых теориях в любом конечном порядке приближения все бесконечности исчезают. Тензорные функции обеспечивают правильный баланс энергии и момента в каждой вершине любой диаграммы Фейнмана и играют роль функции источников Швингера. Детально рассматривались случаи взаимодействия типа

$$\lambda \varphi^4 /x/ \text{ и } e^2 \varphi /x/ \varphi^* /x/ A_\nu /x/ A^\nu /x/$$

во втором порядке приближения.

