Piotr Majewicz

Aktywizacja myślenia matematycznego uczniów o specjalnych potrzebach edukacyjnych

Wprowadzenie

Terminy „aktywność" oraz „aktywizacja" mają tę samą etymologię, gdyż wywodzą się z łaciny, od słowa *activus*, co oznacza *czynny*. Dokładniej rzecz ujmując „aktywność" to przede wszystkim *zdolność do działania, działalność, czynny udział w czymś*, natomiast „aktywizacja" oznacza *wzmożenie, ożywienie działalności* (*Słownik wyrazów obcych*, PWN, 1980).

Człowiek we współczesnej psychologii ujmowany jest jako istota aktywna, działająca, przy czym aktywność przebiega zarówno na poziomie biologicznym, jak i psychicznym oraz społecznym (Tomaszewski 1975). Człowiek ma możliwość swobodnego wyboru celu a jego aktywność może być krótkotrwała i zmienna lub długotrwała i ukierunkowana na przyszłość. Wyższą formą zachowania się jest zachowanie celowe, występujące w sytuacjach niestereotypowych, zmiennych, a nawet jednorazowych. Osiąga ono najwyższy poziom rozwoju u człowieka i jest dla niego najbardziej charakterystyczne, dlatego stanowi główny obiekt zainteresowania tak psychologii jak i pedagogiki. Zachowanie celowe zmierza do przekształcenia sytuacji początkowej w końcową, jest więc ukierunkowane. Tak ujęte zachowanie T. Tomaszewski nazywa czynnością. „Ukierunkowany przebieg czynności wiąże się z faktem antycypacji zarówno sytuacji końcowej, jak i samej czynności, która ma doprowadzić do tej sytuacji. Antycypowana sytuacja końcowa nazywana jest celem czynności, antycypowana czynność, która ma do tego celu prowadzić, nazywana jest programem (Tomaszewski 1975, s. 504). Czynność jest zatem reakcją na sytuację zadaniową, ukierunkowaną na cel (wynik) oraz zorganizowaną. Czynności w toku rozwoju ulegają przekształceniom i osiągają coraz wyż-

szy poziom, lepiej dostosowany do warunków i celu, są w coraz większym stopniu logicznie spójne. Tym prawom podlega także rozwój czynności w zakresie umiejętności matematycznych.

Dla kształtowania wspomnianych umiejętności zasadnicze znaczenie ma myślenie matematyczne, które oznacza sposób rozumowania i postrzegania problemów, a także poszukiwania charakterystycznych sposobów rozwiązań (u podstaw metod aktywizowania myślenia matematycznego, a szerzej: edukacji matematycznej, leżą przede wszystkim trzy koncepcje psychologiczne, opracowane przez J. Piageta, L. Wygotskiego oraz J. Brunera.

Pierwsza z nich autorstwa J. Piageta (1966, 1981, 1993) zwraca uwagę na stadialność rozwoju inteligencji dziecka oraz jego mechanizmy. Według Piageta inteligencja dziecka, czyli czynna adaptacja, na którą składają się procesy asymilacji oraz akomodacji, rozwija się w czterech zasadniczych etapach. Pierwszym jest okres sensoryczno-motoryczny trwający do drugiego roku życia. Drugim okres przedoperacyjny kończący się około siódmego roku życia, którego zasadniczą cechą jest szybki rozwój funkcji symbolicznej, czego przejawem jest rozwój mowy. Trzeci to okres operacji konkretnych lub konkretno-wyobrażeniowy, obejmujący okres szkolny do około jedenastego, początku dwunastego roku życia. Wówczas pojawiają się po raz pierwszy w rozwoju operacje umysłowe w pełnym tego słowa znaczeniu. Według Piageta operacje umysłowe to zinterioryzowane czynności odwracalne. Zasadnicze znaczenie ma tutaj odwracalność operacji, która może dokonywać się przez inwersję lub wzajemną zwrotność. Według E. Gruszczyk-Kolczyńskiej (1994) dzieci, które nie rozumują jeszcze operacyjnie, nie są w stanie przyswoić sobie pojęcia liczby naturalnej (we wszystkich jej aspektach), opanować czterech podstawowych działań arytmetycznych, jak również nie umieją rozwiązywać zadań matematycznych na danym poziomie. Wskaźnikami tego niezwykle istotnego dla edukacji matematycznej okresu są:

1. Operacyjne rozumowanie w obrębie ustalania stałości ilości nieciągłych (np. rozumienie, że liczba elementów nie zmienia się, mimo obserwowanych przemieszczeń tych elementów).
2. Operacyjne porządkowanie elementów w zbiorze przy wyznaczaniu konsekwentnych serii.
3. Operacyjne rozumowanie w zakresie ustalania stałości masy (tworzywa).

4. Operacyjne rozumowanie w zakresie ustalania stałości długości przy obserwowanych przekształceniach.
5. Operacyjne rozumowanie w zakresie ustalania stałej objętości cieczy, przy transformacjach zmieniających jej wygląd.

Powyższe wskaźniki według E. Gruszczyk-Kolczyńskiej nie wyczerpują całej złożoności operacyjnego rozumowania, ale są niezbędne do opanowania treści kształcenia przewidzianych w klasie zerowej, pierwszej i drugiej.

Ostatnim etapem rozwoju inteligencji w koncepcji Piageta jest okres operacji formalnych rozwijających się do około czternastego, piętnastego roku życia. Istota tych operacji polega na uniezależnieniu czynności myślowych od treści. Pierwszym rezultatem odłączenia myśli od przedmiotów jest uwolnienie relacji i klasyfikacji od ich powiązań konkretnych lub intuicyjnych. Z chwilą uwolnienia formy od treści staje się możliwe budowanie dowolnych relacji i dowolnych klas przez łączenie. Doprowadza to do tego, co nazywamy kombinatoryką – są to kombinacje, permutacje itd., zaś najprostszą formę stanowią operacje na kombinacjach w ścisłym znaczeniu lub klasyfikacja wszystkich klasyfikacji. Poszczególne zadania traktowane są tu jako przypadki jakiejś klasy zadań, które można rozwiązać na zasadzie wykorzystania określonej reguły ogólnej. Jest to rozumowanie hipotetyczno-dedukcyjne, a podstawowe znaczenie ma tutaj operacja kombinowania.

Według Piageta inteligencja nie rozwija się poza poziom operacji formalnych. W późniejszym czasie można oczywiście poszerzać wiedzę, zdobywać biegłość, a nawet mistrzostwo w jakiejś dziedzinie, ale nie stanowi to już o poziomie inteligencji. Raz ukształtowany „przyrząd do myślenia" (jak można obrazowo określić inteligencję) jest już uformowany i przez długi czas w życiu dorosłym nie ulega zwykle większym zmianom.

Z kolei konkurencyjna teoria opracowana przez L.S. Wygotskiego (1971) kładzie nacisk na inne aspekty rozwoju, a niektóre wręcz redefiniuje. Według L.S. Wygotskiego szczególną rolę w rozwoju pełnią „sfera najbliższego rozwoju" oraz mowa dziecka. Pierwszy wymieniony element, czyli „sferę najbliższego rozwoju", wyznacza różnica pomiędzy poziomem rozwiązywania zadań dostępnych pod kierunkiem i przy pomocy dorosłego, a poziomem rozwiązywania zadań w samodzielnym działaniu. Główny postulat pedagogiczny wynikający z teorii Wygotskiego można sprowadzić do zasady formułowania na zajęciach szkolnych zadań na mia-

rę strefy najbliższego rozwoju danego ucznia. Rola nauczyciela polega na przybliżonym określeniu strefy najbliższego rozwoju, a następnie na udzieleniu niezbędnych wskazówek i wyjaśnień podczas rozwiązywania przez dziecko zadań. Działania tego rodzaju są formą stymulacji rozwoju dziecka poprzez przekraczanie aktualnego rozwoju (por. Majewicz 1999). Z kolei drugi istotny element omawianej koncepcji, czyli mowa, został tu określony jako czynnik wpływający na rozwój intelektualny dziecka. L.S. Wygotski wyprowadził to założenie z obserwacji dzieci podczas zabawy. Zauważył, że dzieci bardzo często (pomimo tego, że przebywają same) dużo mówią. Mowa nasila się wraz ze wzrostem trudności podczas samodzielnej zabawy, np. podczas zabaw konstrukcyjnych. Stąd wyprowadził wniosek dotyczący istotnej roli mowy w rozwiązywaniu problemów logicznych u małych dzieci. Głośne mówienie ułatwia rozwiązywanie trudności. Dzięki głośnemu mówieniu (myśleniu) możliwe jest rozwiązywanie coraz trudniejszych problemów. Zatem mowa stanowi czynnik rozwoju, a nie jedynie jego przejaw, jak zakładała koncepcja Piageta. Dlatego dzieci podczas rozwiązywania problemów logicznych, głównie zadań z matematyki, powinny głośno, lub przynajmniej półgłosem mówić w celu ułatwienia sobie rozwiązywania zadań. Postulat ten przetrwał we współczesnej pedagogice, ale często jest mylnie interpretowany jako forma „sprawdzenia" ucznia, który rozwiązuje zadanie na tablicy.

Trzecia z wymienionych teorii, a więc koncepcja kształtowania się reprezentacji umysłowych opracowana przez J.S. Brunera (1978) zakłada tworzenie się w umyśle człowieka trzech rodzajów reprezentacji:

1. Reprezentacji enaktywnej – związanej z wykonywaniem działania na materiale konkretnym;
2. Reprezentacji ikonicznej – powstałej na skutek zastosowania obrazów, uproszczonych ilustracji konkretnego działania oraz schematów;
3. Reprezentacji symbolicznej – kształtującej się, kiedy sens zdarzeń jest przedstawiany za pomocą słów lub innych symboli (liter, cyfr, znaków działań itd.).

Warto zaznaczyć, że zdolność posługiwania się reprezentacjami ikonicznymi i symbolicznymi stanowi podstawę uczenia się matematyki w warunkach szkolnych. Powyższe poziomy reprezentacji stanowią dobrą podstawę działań metodycznych, a zwłaszcza ich organizacji w zakresie kolejności działań, co zresztą znalazło odbicie w modelu czynnościowe-

go nauczania–uczenia się matematyki opracowanym przez Z. Krygowską (1977).

Uczenie się matematyki jest nierozłącznie związane z występowaniem trudności. Nie jest więc niczym zaskakującym, że dziecko podczas uczenia się napotyka na trudności, ważne jest, aby umiało je w miarę samodzielnie pokonać. W takiej sytuacji mówimy o trudnościach zwykłych, na jakie natrafia prawie każdy uczeń (może z wyjątkiem osób genialnych). Należy odróżnić je od trudności specyficznych, z którymi dziecko nie potrafi sobie poradzić, pomimo inteligencji mieszczącej się w normie. U ich podłoża leży zazwyczaj niska odporność emocjonalna, która dezorganizuje działanie procesów poznawczych, bądź obniżona sprawność manualna, która z kolei utrudnia narysowanie grafu, tabelki, a nawet czytelne zapisanie działania (por. Gruszczyk-Kolczyńska 1994). Jednak poza uczniami ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki we współczesnej szkole, także ogólnodostępnej, znajdują się dzieci z różnymi rodzajami niepełnosprawności, w tym również, na życzenie rodziców, z lekkim upośledzeniem umysłowym. Trend ten wykazuje nasilenie i należy oczekiwać w niedalekiej przyszłości zwiększenia w szkołach ogólnodostępnych liczby dzieci nie tylko o obniżonej sprawności intelektualnej, ale również z różnymi innymi specjalnymi potrzebami edukacyjnymi. Stąd wynika konieczność zainteresowania się problemami aktywizacji wspomnianych uczniów, jej formami i metodami, także w obszarze edukacji matematycznej. Nauczyciele szkół ogólnodostępnych powinni poszerzać wiedzę na temat pracy z uczniami o specjalnych potrzebach edukacyjnych, także w zakresie edukacji matematycznej, a zwłaszcza myślenia matematycznego, gdyż ono w zasadzie decyduje tu o sukcesie. Poniżej zostaną zaprezentowane wybrane metody aktywizowania logicznego myślenia oraz wspomagania rozwoju umiejętności matematycznych.

„Kombinatoryka" – metoda aktywizowania logicznego myślenia w opracowaniu J. Magnuskiej

„Kombinatoryka" (Danielewicz, Magnuska 1973) jest metodą diagnozy i terapii przy pomocy zestawów figur liczbowych, przeznaczoną dla dzieci w wieku od 7 do 14 lat. Można ją wykorzystywać jako metodę pracy z uczniami dyslektycznymi, o obniżonej koordynacji wzrokowo-rucho-

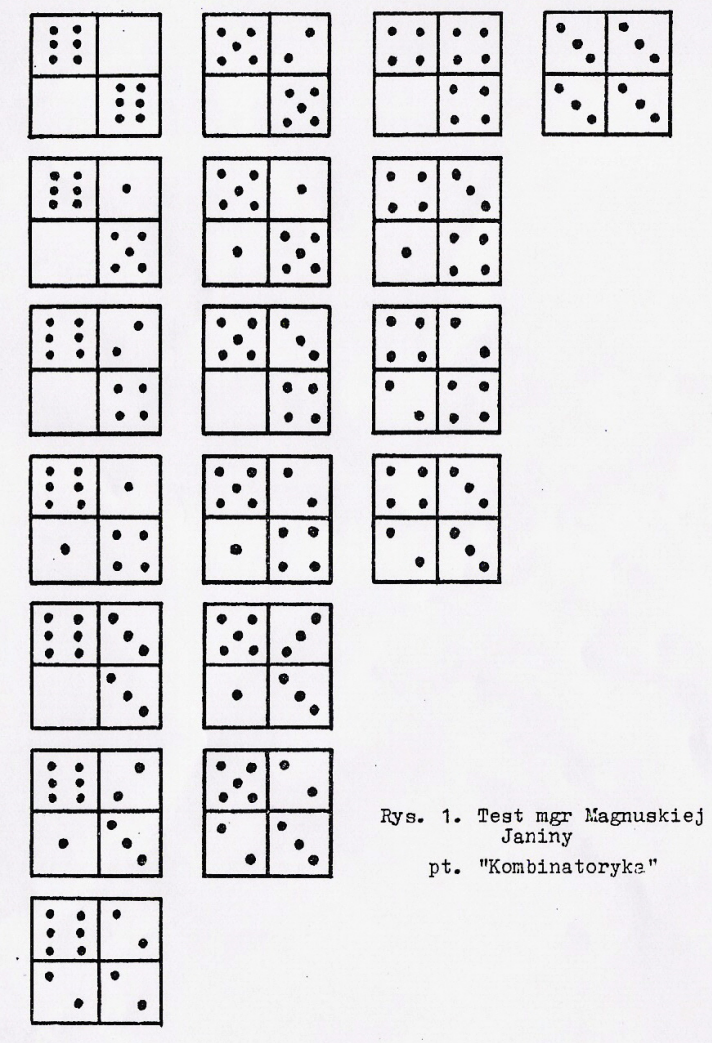
wej, z trudnościami w koncentrowaniu uwagi oraz logicznym myśleniu. W przypadku wszystkich wymienionych trudności ma ona zapewne jakieś korzystne aspekty, jednak podstawowe jej zastosowanie, wynikające z podstaw teoretycznych (koncepcja Piageta), wskazuje na rozwijanie logicznego myślenia, opartego o chyba najważniejszą operację – operację kombinowania, która stanowi o istocie inteligencji.

W tym miejscu warto zaznaczyć, że dla uczniów młodszych, znajdujących się na poziomie operacji konkretnych, kombinacje pozostają zwykle niekompletne, gdyż dziecko przyjmuje metodę konkretnych kroków bez uogólnienia. Dlatego wydaje się, że zastosowanie omawianej metody dla dzieci w wieku 7–11 lat ma przede wszystkim na celu wdrażanie do długotrwałego wysiłku intelektualnego, koncentracji uwagi, dokładności i precyzji wykonania zadania oraz maksymalizacji aktywności umysłowej, jednak odkrycie zasady zestawiania ze sobą figur liczbowych wymaga znacznego udzielania wskazówek przez nauczyciela i w związku z tym określonego toku pracy, z powolnym stopniowaniem trudności. Natomiast w okresie następnym, czyli kształtowania się operacji formalnych (od mniej więcej dwunastego roku życia) uczniowie znacznie łatwiej dochodzą do odkrycia wyczerpującej metody nie wyprowadzając naturalnie formuły, czego zresztą nie oczekujemy. Tak więc na poziomie operacji formalnych należy oczekiwać znacznie szybszego i bardziej samodzielnego działania zmierzającego do odkrycia systemu, który uwzględnia wszystkie możliwości zestawień i to bez powtórzeń (por. Piaget, Inhelder 1993).

Do przeprowadzenia zajęć potrzebne są środki dydaktyczne w postaci czterech klasycznych kostek do gier, z oczkami od 1 do 6 oraz trzech kostek pustych, bez oczek. Zalecane wymiary krawędzi kostek to 2–3 cm. Siedem kostek stanowi bazę realizacji ćwiczeń.

Główne zadanie polega na samodzielnym odkryciu przez ucznia zasady zestawiania kostek. Mają one być zestawiane w taki sposób, aby suma oczek na czterech kostkach dawała np. zawsze 12, przy czym muszą zostać wyczerpane wszystkie kombinacje i nie mogą występować powtórzenia. Za układ powtarzający się uznaje się taki, gdzie użyto tych samych kostek, ale w innej kolejności. Cały cykl zajęć ma na celu naprowadzenie ucznia na samodzielne odkrycie zasady systematycznego zestawiania kostek. Jedynie samodzielne odkrycie może spowodować przejście na wyższy poziom logicznego myślenia. Stąd należy zwrócić szczególną uwagę

na samodzielność działań ucznia. Osoby dorosłe (nauczyciel, rodzice, dziadkowie) mogą jedynie udzielać wskazówek, ale pod żadnym pozorem nie powinny zdradzać reguły rządzącej zestawianiem liczb. Takie działanie niweczy efekty całej metody. Jedynie samodzielne dojście do odkrycia zasady pozwala na przejście na wyższy poziom logicznego myślenia. Poniżej zaprezentowane są wszystkie możliwe kombinacje czterech kostek, dające w sumie 12.



Rys. 1. Test mgr Magnuskiej Janiny pt. "Kombinatoryka"

Praca z uczniem przebiega w kilku etapach.

Etap I – praca w szkole lub poradni

Dajemy dziecku czystą kartkę papieru i mówimy: „trudno jest ułożyć wszystkie zestawienia bez błędu i powtórzeń, dlatego musimy szukać sposobu, jak to zrobić najlepiej. Szukaj więc teraz sam i spróbuj znaleźć najlepszy sposób". Stanowi to zachętę do samodzielnego poszukiwania metody. Gdy mniej więcej po 5 minutach dziecko nie potrafi jej znaleźć, pomagamy mu w tym rysując na kartce powtórnie zestaw 6, 0, 0, 6 (od góry z lewej strony), a pod nim zestaw 6, 0, 1, 5, a jeszcze niżej 6, 0, 2, 4. Mają one ułatwić zrozumienie wyczerpywania wszystkich możliwości, stosując przechodzenie od większych składników do mniejszych. Jeżeli uczeń nadal nie może odkryć zasady rysujemy zestawienie 6, 4, 1, 1, co pomaga w zrozumieniu, że pewne elementy pozostają stałe (6 i 4), a najmniejszy (2) rozkładamy na 1 i 1. Następnie pozostawia się czas na pracę samodzielną w celu dokończenia zadania i tym samym ułożenia wszystkich zestawień. Mniej więcej po 30 minutach, o ile uczeń wcześniej nie odda kartki, nauczyciel wspólnie z uczniem, w pogodnej atmosferze rozpoczynają korektę zadania. Sprawdzanie poprawności wykonania odbywa się w oparciu o kolorową wzorcową tablicę, na której umieszczone są systematycznie ułożone wszystkie możliwe kombinacje czterech kostek, oczywiście bez powtórzeń. Tablica dodatkowo zawiera kolory tzn. każda liczba kropek na kostce zaznaczona jest innym kolorem. Kolor jest przypisany na stałe do danej liczby. W ten sposób uzyskuje się dodatkowy efekt w postaci obrazowej. Jest to zatem próba przedstawienia reguły zestawiania na poziomie ikonicznym, używając języka koncepcji reprezentacji umysłowych J. Brunera. Oglądając wspólnie z dzieckiem poprawione zadanie nauczyciel powinien zachęcić ucznia do samodzielnego wykonania z pamięci, już w domu, lepiej uporządkowanej tablicy informując, że będzie ona potrzebna do wykonania ciekawej loteryjki.

Etap II – praca w domu

Rodzice powinni zostać poinformowani, że ich pomoc w realizacji zadania może ograniczyć się jedynie do strony technicznej, jak np. rozmieszczenie kwadratów na stronie tak, aby się wszystkie zmieściły. Niedopuszczalne jest, aby rodzice, czy też inne osoby podsuwały uczniowi gotowe rozwiązanie. W ten sposób dalsza realizacja ćwiczeń zmierzających do samodzielnego odkrycia systemu zestawiania figur stanie się bezsensowna, a logika dziecka nie będzie już aktywizowana.

Etap III – praca w szkole lub poradni

Uczeń przynosi samodzielnie narysowane w domu kombinacje figur liczbowych i porównuje je z kolorową wzorcową tablicą. Nauczyciel chwali jego wytrwałość i włożony wysiłek. Stara się pobudzić jego aktywność odpowiednią motywacją, np. „Spróbujmy zrobić własną, kolorową, wzorcową tablicę jako prezent dla innych dzieci. Będą posługiwać się nią do sprawdzania swych prac, a ty się będziesz cieszyć". Dziecko zwykle angażuje się w pracę, gdyż widzi pożytek i zastosowanie jej efektów. Najważniejszym punktem trzeciego etapu jest wykonanie własnej, kolorowej, wzorcowej tablicy. Uczeń otrzymuje tekturowy szablon kwadratu do obrysowania, z czterema nacięciami w środku każdego boku, co ułatwia narysowanie przecinających się kresek wewnątrz kwadratu. Każdą figurę liczbową oznacza się innym, ciemnym kolorem, aby zwiększyć przejrzystość i tym samym naprowadzić ucznia na odkrycie reguły zestawiania kostek. Dlatego też kolorem granatowym można oznaczyć wszystkie szóstki, piątki czerwonym, czwórki zielonym itd. W ten sposób uczeń ma szansę dostrzec pewną systematyczność w umiejscawianiu poszczególnych barw na tablicy. Jest to kolejny wyższy poziom tworzenia reprezentacji umysłowej po działaniu na konkretach (poziom enaktywny), czyli zestawianiu ze sobą kostek.

Etap IV – praca w domu ewentualnie w szkole lub poradni

Uczeń mając przed sobą kolorową tablicę wykonuje na ruchomych kartonikach formuły działań, inaczej mówiąc: przedstawia w postaci zapisu symbolicznego za pomocą cyfr i znaków działań to, co przedstawia dany układ kostek. Warto tu jednak dodać, że poszczególne kostki (pola) w kolejnych układach powinny mieć tę samą kolejność odczytu, na przykład taką, jak poniżej (oczywiście kolejność odczytu może być inna, ale ważne jest, aby zawsze była taka sama).

1	3
2	4

Na przykład przedstawiając w postaci działania początkowe układy ze strony 105, zapiszemy $6+0+6+0 = 12$, $6+0+1+5 = 12$, $6+0+2+4 = 12$ itd.

Oczywiście z matematycznego punktu widzenia kolejność nie ma żadnego znaczenia, gdyż dodawanie jest przemienne, ale w celu uchwycenia reguły sekwencyjności pojawiania się danych cyfr w zapisie ma to zasadnicze znaczenie. Tym samym zapisując formuły działań w odpowiedniej kolejności przechodzimy na najwyższy poziom reprezentacji, czyli poziom symboliczny.

W rezultacie poprawnego wykonania formuł działań i umieszczenia ich w odpowiednich miejscach na kolorowej tablicy, otrzymujemy w jednym miejscu reprezentacje kombinacji przedstawione na trzech poziomach: enaktywnym (kostki z kropkami), ikonicznym (kolory), symbolicznym (zapis działań). Jest to w zasadzie punkt docelowy całej metody. Kolejne etapy z punktu widzenia aktywizowania logicznego myślenia są jedynie ćwiczeniem w przechodzeniu od jednej postaci reprezentacji do innej, lub po prostu urozmaiceniem zajęć.

Etap V i VI – praca w domu i w szkole/poradni

Uczeń wykonuje loteryjkę, która będzie wykorzystana do dalszych ćwiczeń. Na ćwiartkach bloku rysunkowego u góry obrysowuje kolorową kredką kwadratowy szablon, a potem dzieli go na cztery części i wypełnia w kolejności zestawieniami figur liczbowych. Następnie na ruchomych prostokątach zapisuje formuły działań. Układa je potem pod odpowiednimi zestawami.

Etap VII – praca w szkole lub poradni

Wprowadzane są elementy gry, np. na sygnał wzrokowy – gdy nauczyciel pokazuje określone zestawienie figur i uczeń wypowiada formułę działań, oczywiście nie widząc zapisu. I odwrotnie, na bodziec słuchowy – gdy nauczyciel wypowiada głośno formułę działań, dziecko wskazuje określony zestaw lub rysuje go.

Etap VIII – praca w szkole lub poradni

Jest to ostatni etap zajęć. Uczniowie uczestniczą w grze zespołowej w grupach 2–3 osobowych. Proponowane są dwa sposoby gry. Pierwszy rozpoczyna się od rozdania uczestnikom kartoników z figurami liczbowymi oraz kartek z formułami działań. Każdy uczeń rozkłada je przed sobą, a następnie sprawdza, czy odpowiadają one posiadanym zestawieniom figur liczbowych i kładą formuły działań pod odpowiednimi rysunkami.

Dzieci trzymają w ręku kartki, które nie pasują do rozłożonych rysunków z figurami liczbowymi i podają je sobie kolejno do wyciągnięcia. Wygrywa ten, kto pierwszy dobierze pary.

Drugi sposób gry różni się od pierwszego tym, że osoba prowadząca trzyma w ręku wszystkie małe kartki z formułami działań i kolejno je odczytuje. Dziecko, które ma na swoim kartoniku odpowiednie figury liczbowe, zgłasza się podając wynik działania. Dostaje wtedy odpowiedni kartonik i kładzie go pod rysunkiem. Czas do namysłu jest krótki. Jeżeli nikt się nie zgłasza – osoba prowadząca grę odkłada kartoniki na bok, a na zakończenie powtórnie je odczytuje. Wygrywa to dziecko, które dobierze formuły działań do wszystkich figur liczbowych. Podczas gry możemy uwzględniać jeszcze dodatkowe punkty oceny, np. za uwagę, za cierpliwość, szybkość orientacji, postawę podczas gry itp.

Na zakończenie realizacji cyklu zajęć w celu sprawdzenia stopnia zrozumienia i umiejętności zastosowania odkrytej zasady zestawiania ze sobą figur liczbowych zalecane jest samodzielne wykonanie przez ucznia wzorcowej tablicy dla liczb 11 albo 13, a następnie dla liczb 10 i 14.

Przedstawiona powyżej metoda ma według T. Danielewicz i J. Magnuskiej szersze zastosowanie w terapii pedagogicznej, jednak tu została zaprezentowana jako sposób aktywizowania logicznego myślenia, stąd też dokonane zostały niewielkie modyfikacje. Ponadto warto jeszcze raz przypomnieć, że operacja „kombinowania" jest w pełnym zakresie dostępna dopiero na poziomie operacji formalnych, wcześniej jej wykorzystanie wymaga znacznej pomocy ze strony nauczyciela. Za pomocą „kombinatoryki" można aktywizować myślenie uczniów z różnymi rodzajami niepełnosprawności fizycznej, ale będących w normie intelektualnej, dzieci ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki, a także uczniów o obniżonej sprawności intelektualnej (o inteligencji niższej niż przeciętna, upośledzonych umysłowo w stopniu lekkim) ale z pewnym przesunięciem w czasie rozpoczęcia zajęć, zwiększeniem zaangażowania nauczyciela, a przede wszystkim zmniejszeniem liczby, która ma stanowić sumę zestawianych figur. Powinna to być suma nie przekraczająca progu dziesiątkowego, co automatycznie ułatwia dokonywanie obliczeń i zmniejsza liczbę możliwych kombinacji. Nawet jeżeli uczeń nie odkryje zasady rządzącej zestawianiem figur, to ważne jest tu podjęcie wysiłku, zaangażowanie intelektualne i ogólna aktywizacja logicznego myślenia.

Czynnościowe nauczanie–uczenie się matematyki w oparciu o model Z. Krygowskiej

Na podstawie wspomnianych już teorii J. Piageta, L.S. Wygotskiego, J. Brunera oraz innych teorii psychologicznych, Z. Krygowska (1977) opracowała model czynnościowego nauczania–uczenia się matematyki, który polega na organizowaniu działań o charakterze operacyjnym na drodze od czynności ruchowo-manipulacyjnych na materiale konkretnym (np. kasztany, jabłka itp.) poprzez działania na schematach (grafy, drzewka, ilustracje itp.) do działań na symbolach (litery, cyfry, zapis nutowy, mapy). Taki model postępowania jest charakterystyczny przede wszystkim dla zajęć podczas których wprowadza się nowy materiał.

Podstawowe założenia nauczania czynnościowego (za: Janeczko 1991, s. 23–24) brzmią następująco:

1. Nośnikiem treści psychicznych dziecka jest jego mowa. Wobec tego istotny nacisk w nauczaniu czynnościowym został położony na różnorodne ćwiczenia, które zmierzają do rozwoju czynnego języka ucznia. Rozwój ten umożliwia bowiem zarówno wzrost wiedzy o świecie, jak też przyspiesza proces interioryzacji standardów życiowych. Werbalizacja czynności ułatwia przechodzenie od mowy zewnętrznej do mowy wewnętrznej. Troska o właściwy rozwój języka dziecka jest więc podstawowym zadaniem nauczycieli wszystkich przedmiotów.
2. Działania praktyczne, tkwiące u podstaw rozwoju procesów psychicznych dziecka, muszą być oparte na doświadczeniach życiowych dziecka i doświadczenia te odpowiednio kształtować. Dzięki działaniom na materiale konkretnym oraz na jego zastępnikach, takich jak: obrazy, modele, schematy, znaki umowne itp., dziecko coraz efektywniej uczy się określonych operacji myślowych, a jego rozwój intelektualny staje się coraz bardziej wartościowy. Założenie to ukierunkowuje pracę nauczyciela na wspomaganie aktualnej sfery rozwoju, zainteresowań i potrzeb dziecka, lecz nie tylko.
3. Nauczanie według Wygotskiego, jak podaje M. Cackowska, nie tylko może, ale wręcz powinno antycypować rozwój. Powinno być nastawione na najbliższą sferę rozwoju dziecka. Co prawda sfera ta może się jeszcze nie ujawniać, ale jest kolejnym i najbliższym ogniwem dynamiki rozwojowej. Jest to niesłychanie ważna funkcja stymulująca nauczania czynnościowego, funkcja wywołująca akceleracje rozwoju

dziecka i jego pogłębienie. Indywidualne tempo rozwoju dziecka zależy bowiem nie tylko od właściwości biologicznych, lecz także od uwarunkowań społecznych i celowej działalności nauczyciela.

4. Rozwój dziecka jest, pomimo wspólnych praw, rozwojem zindywidualizowanym i zróżnicowanym. Uwzględnienie już wymienionych założeń wychodzi temu naprzeciw. Należy ponadto zawsze przestrzegać zasady wielostronnego aktywizowania dziecka oraz stosować inne zasady dydaktyki ogólnej w sposób elastyczny i spójny. Zapewniamy wówczas uczniowi konieczność harmonijnego rozwoju. Szczególnie ważnym zagadnieniem jest więc tutaj wyrównywanie zaistniałych dysfunkcji. Troska o harmonijny rozwój musi być synchronizowana z potrzebami każdego dziecka, w tym również dziecka niepełnosprawnego.
5. W wielu dotychczasowych opracowaniach koncepcji czynnościowego nauczania kładzie się nacisk, i słusznie, na proces interioryzacji jako na proces uwewnętrzniania czynności konkretnych. Interioryzacja sprzyja bowiem rozwojowi czynności wyobrażeniowych, co z kolei prowadzi do myślenia za pomocą operacji abstrakcyjnych. Operacje te są już czynnościami umysłowymi, wykonywanymi niezależnie od konkretnych działań. Wówczas w procesie myślenia dziecka wystarczają odpowiednie reprezentacje, wyobrażenia itp. (np. pojęcia i znajomość danych praw), aby operacje intelektualne przebiegały w oderwaniu od czynności konkretnych, na wysokim poziomie abstrakcyjności i ogólności. Należy jednak dodać, że także inne mechanizmy kształtowania czynności psychicznych powinny być wykorzystywane podczas kształcenia czynnościowego.

Kształtowanie czynności dziecka powinno przebiegać od czynności prostych i niezróżnicowanych do czynności coraz bardziej złożonych i wyspecjalizowanych, czynności wzajemnie zintegrowanych i uhierarchizowanych. Od wykorzystywania mechanizmu eksterioryzacji, a więc od działań umysłowych, do przedmiotowych, pozwalających na kształtowanie rzeczywistości. Stwarzając odpowiednie warunki dla kontroli i autokontroli wykonywanych operacji, zwiększamy ich poprawność i poniekąd automatyzację. Ta ostatnia pozwala odciążyć świadomość w procesie kontroli, umożliwiając przechodzenie do form czynności bardziej złożonych i o wyższym poziomie strukturalizacji. Wreszcie wykorzystanie socjalizacji w procesie kształcenia czynnościowego zapobiega jednostronnej instrumentalizacji czynności i zapewnia pełniejszy rozwój sfery ustosunkowawczej.

Jednak ograniczając metodę czynnościową jedynie do nauczania–uczenia się matematyki należy jeszcze raz podkreślić kolejność działań kształtujących kolejne poziomy reprezentacji umysłowych, począwszy od enaktywnej, która tworzy się w efekcie działania na materiale konkretnym, poprzez ikoniczną w postaci ilustracji sytuacji konkretnych oraz schematów (np. grafy, drzewka, oś liczbowa itp.) do ujęcia symbolicznego za pomocą cyfr, liter i znaków działań. Uczeń powinien mieć przy tym możliwość mówienia głośnego lub przynajmniej półgłosem, gdyż to, zgodnie z teorią L.S. Wygotskiego, ułatwia dzieciom rozwiązywanie problemów logicznych.

Ogólny schemat rozwiązywania zadań prezentuje poniższy przykład:

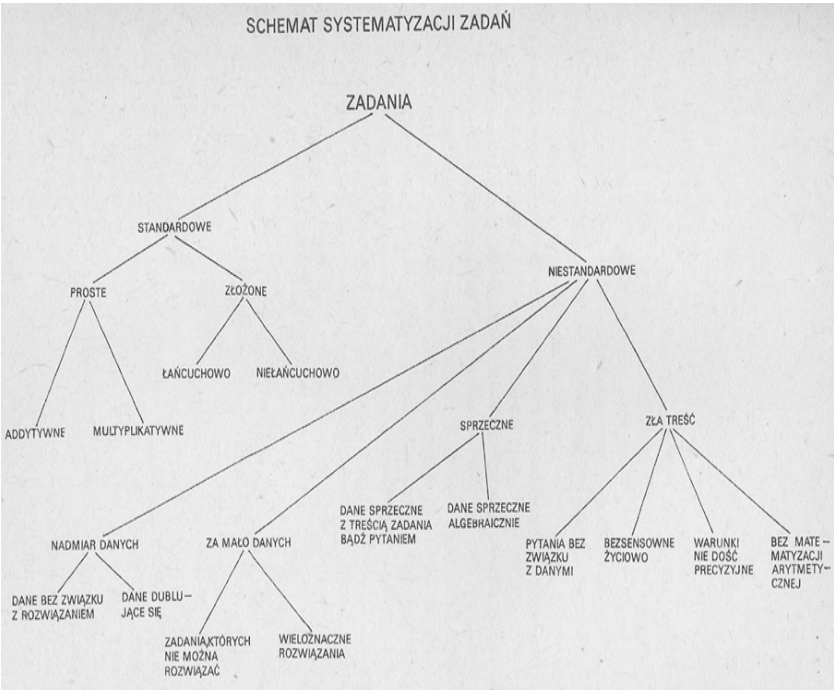
Zadanie: „Tomek razem z dziadkiem zbierał jabłka w sadzie. Włożył do koszyka sześć jabłek, a dziadek dołożył mu jeszcze trzy jabłka. Ile jabłek miał Tomek w koszyku?"

1. Poziom enaktywny. Działanie na konkretach. Uczeń używa konkretnych przedmiotów (lub ich zastępników) w celu przedstawienia sytuacji zadaniowej – do koszyka wkłada sześć jabłek, a następnie trzy i przelicza ile jest razem.
2. Poziom ikoniczny.
   a) ilustracja zadania – uczeń rysuje koszyk z jabłkami, które zebrał samodzielnie, a następnie, obok, jabłka otrzymane od dziadka. W dalszej kolejności przelicza ile jest razem.
   b) schemat – przedstawienie sytuacji np. na osi liczbowej lub za pomocą zbiorów i ich złączenia.
3. Poziom symboliczny – polega na zapisie sytuacji zadaniowej za pomocą cyfr i działań, czyli $6 + 3 = 9$.

Po rozwiązaniu szeregu zadań danego typu, w zbliżonym modelu matematycznym należy odwrócić kolejność reprezentacji, np. przejść od reprezentacji symbolicznej do enaktywnej w postaci ułożenia treści zadania tekstowego do symbolicznego zapisu działania, np.: „do poniższego działania ułóż treść zadania tekstowego: $8+7+6 = 21$" lub od poziomu ikonicznego w postaci ilustracji do manipulowania konkretami. Dopiero umiejętność odwracania czynności świadczy o zrozumieniu danego problemu logicznego. Jeżeli uczeń umie rozwiązać zadanie jedynie postępując zgodnie z algorytmem, ale nie potrafi czynności wykonać na odwrót, oznacza to, że rozumienie jest powierzchowne i w rzeczywistości nie rozumie w pełni danego problemu.

Metoda naprzemiennego układania i rozwiązywania zadań tekstowych w opracowaniu E. Gruszczyk-Kolczyńskiej

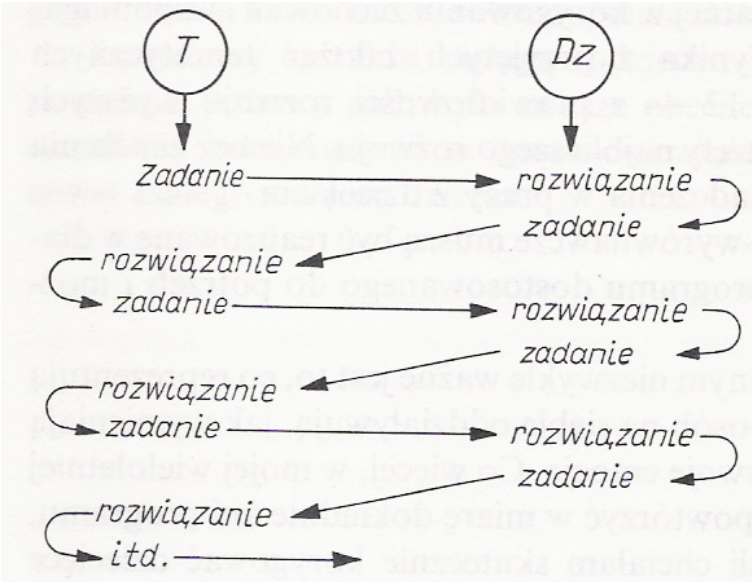
Podstawowym sposobem uczenia się matematyki jest rozwiązywanie zadań. Jest to źródło doświadczeń zarówno logicznych, jak i matematycznych. W zasadzie bez rozwiązywania zadań nie można nauczyć się matematyki (Gruszczyk-Kolczyńska 1994). Poniżej zamieszczony jest schemat systematyzacji zadań (Gleichgewicht 1988, s. 41).



W aktywizacji myślenia matematycznego przydatne są zarówno zadania o treści standardowej, jak i niestandardowej, przy czym ten drugi typ niewątpliwie aktywizuje myślenie matematyczne większości uczniów, gdyż zapobiega mechanicznemu stosowaniu algorytmu w rozwiązywaniu danego typu zadań, ale ma ograniczone zastosowanie w pracy z uczniami o obniżonej sprawności intelektualnej i specyficznych trudnościach

w uczeniu się matematyki. Dla tych dzieci istotne są przede wszystkim zadania standardowe, a więc przede wszystkim te, które mają prawidłową treść, a ponadto dadzą się rozwiązać.

Metodę ich rozwiązywania w pracy z uczniami o specyficznych trudnościach w uczeniu się matematyki przedstawiła E. Gruszczyk-Kolczyńska (1994). Metoda ta polega na naprzemiennym układaniu i rozwiązywaniu zadań w diadzie nauczyciel – uczeń. Najpierw nauczyciel daje uczniowi do rozwiązania zadanie. Uczeń próbuje je rozwiązać w miarę swoich możliwości. Nauczyciel udziela mu wskazówek i wspólnie krok po kroku, stosując omówioną wcześniej metodę czynnościową, rozwiązują zadanie. Następnie nauczyciel prosi ucznia, aby teraz on ułożył podobne zadanie dla nauczyciela, zmieniając np. tylko imię dziecka w treści zadania. Zatem model matematyczny jest zachowany, a struktura i treść zadania są niemal identyczne jak poprzednio. Teraz nauczyciel rozwiązuje zadanie z całą powagą, powoli przechodząc przez kolejne etapy metody czynnościowej. Cały tok wykonywania powinien być głośno komentowany tak, aby przybliżyć sposób rozwiązania zadania na różnych poziomach, od manipulowania konkretami, poprzez ilustracje (w tym schematy) aż do symbolicznego zapisu za pomocą cyfr i znaków działań. Następnie nauczyciel zadaje nieco zmodyfikowane zadanie uczniowi. Zmienia np. jedną z liczb w zadaniu lub więcej (zamiast 7 jabłek będzie 9 itd.). Nadal model matematyczny zadania pozostaje utrzymany, a treść niewiele odbiega od pierwowzoru. Uczeń podejmuje kolejną próbę rozwiązania zadania o tym samym modelu, oczywiście przy pomocy nauczyciela. I ponownie uczeń układa zadanie dla nauczyciela, zmieniając wartości liczbowe, analogicznie jak uczynił to wcześniej nauczyciel. Teraz prowadzący rozwiązuje zadanie ze zmienionymi wartościami liczbowymi, a następnie dokonuje zasadniczej modyfikacji zadania zmieniając model matematyczny, np. zamiast mnożenia pojawia się np. odejmowanie itd. Jest to zasadnicza zmiana wymagająca kontynuacji w tej samej postaci, a więc powolnego modyfikowania zadania, z kolejnymi naprzemiennymi rozwiązaniami i formułowaniem zadań w diadzie uczeń – nauczyciel. Ogólny schemat pracy nauczyciela/terapeuty z dzieckiem przedstawia rysunek na stronie 115 (Gruszczyk-Kolczyńska 1994, s. 202).



W celu zapewnienia w miarę płynnego przebiegu zajęć należy przygotować miejsce pracy, w tym różne środki dydaktyczne, gdyż trudno jest przewidzieć, co będzie potrzebne. W zasięgu ręki na stoliku obok powinny być przygotowane: patyczki, klocki, żetony, liczydło, linijki, taśma krawiecka, liczby w kolorach, materiał logiczny, czysty i kolorowy papier, mozaiki, nożyczki, podręczniki i zeszyty ćwiczeń, a także inne pomoce. Tak zorganizowane stanowisko pracy znacznie ułatwia realizację ćwiczeń prowadzonych metodą naprzemiennego układania i rozwiązywania zadań. Pierwsze dwa, trzy zadania z każdej serii pełnią rolę diagnostyczną i umożliwiają określenie poziomu aktualnych możliwości dziecka. Jeżeli uczeń nie podejmuje próby rozwiązania pierwszego zadania, nauczyciel przejmuje inicjatywę i sam je rozwiązuje na zasadzie „głośnego myślenia", po czym prosi, aby dziecko ułożyło podobne zadanie. Jeżeli uczeń zrozumiał sens poprzedniego zadania, to potrafi ułożyć analogiczne, w przeciwnym razie nauczyciel przejmuje inicjatywę i mówi: „chciałeś mi ułożyć takie zadanie". Układa i rozwiązuje zadanie „głośno myśląc". Jeżeli teraz uczeń nie umie rozwiązać kolejnego zadania, oznacza to, że wykracza ono poza aktualny jego poziom i należy ułożyć kilka łatwiejszych zadań, o charakterze wprowadzającym.

Najczęściej uczniowie zaczynają współpracować już przy pierwszym zadaniu. Bywa jednak, że błędnie rozwiązują zadanie i układają również niepoprawne zadanie. W takiej sytuacji należy powstrzymać się od natychmiastowej korekty zadania, gdyż może to zniechęcić dziecko. Autorka metody zaleca natomiast, aby nauczyciel wysłuchał zadania do końca, a następnie powiedział: „ułożyłeś takie zadanie…" i powtórzył to zadanie, ale już w poprawionej wersji. Następnie nauczyciel rozwiązuje to dyskretnie poprawione zadanie, głośno komentując kolejne kroki. Powtarza zatem głośno treść zadania i zastanawia się głośno co wiadomo i czego nie wiadomo. Powtarza pytanie i zastanawia się, czego trzeba się dowiedzieć i co obliczyć. Potem głośno liczy i odpowiada na pytanie zawarte w zadaniu. Przy takim „głośnym myśleniu" stara się symulować zadanie za pomocą np. patyczków czy uproszczonego rysunku i wyrazistymi gestami akcentować zależności, a w razie potrzeby zapisać działanie. Inaczej mówiąc – przedstawia za pomocą „głośnego myślenia" czynności intelektualne wykonywane w trakcie rozwiązywania zadania, co stanowi dla ucznia wzór rozwiązania.

W toku realizacji zajęć za pomocą metody naprzemiennego układania i rozwiązywania zadań zalecane jest stosowanie gier i zabaw, co sprzyja zwiększeniu motywacji do pracy. Zajęcia powinny być prowadzone indywidualnie, ewentualnie z dwójką uczniów. Ich częstotliwość powinna być tym większa, im dziecko jest młodsze, jednak nie rzadziej niż dwa razy w tygodniu. Trudno jest określić ramy czasowe jednostki metodycznej. Sygnałem do zakończenia zajęć jest zawsze zmęczenie dziecka. W pierwszych tygodniach zajęcia mogą trwać około 20–30 minut, a w miarę wspólnej pracy wydłużać się nawet do 90 minut.

W jednostce metodycznej można wyróżnić trzy części. Pierwsza to rozgrzewka i czas potrzebny na wspólne – dziecka i nauczyciela – dopasowanie się. Dorosły powinien dostosować się do poziomu funkcjonowania ucznia, a on z kolei musi oswoić się z sytuacją, oderwać się od tego co było wcześniej. Druga część zajęć stanowi zasadniczą część spotkania podczas której realizowane są kolejne punkty programu opracowanego stosownie do potrzeb i możliwości ucznia z wykorzystaniem metody naprzemiennego rozwiązywania i układania zadań tekstowych. Natomiast trzecia część zajęć ma charakter nagradzający, np. w postaci rozegrania ulubionej gry, zakończonej zwycięstwem ucznia.

Omawiana metoda jest próbą połączenia elementów postępowania niedyrektywnego z dyrektywnym kształtowaniem zachowań. Uczeń jest tu bowiem jednocześnie w sytuacji podporządkowania, jak i w sytuacji kiedy jemu podporządkowuje się druga osoba. Zdaniem autorki metody sytuacja ta stwarza szereg możliwości korygowania zachowań i wspomagania rozwoju:

1. Dorosły ma okazję przedstawić jednocześnie sposób układania i rozwiązywania zadań.
2. Proponowana metoda wymusza rozumne zachowanie. Sprzyjają temu doświadczenia: „być słuchanym", „być docenianym", „być partnerem". W wyniku rozwiązywania i układania zadań uczeń zauważa, że należy uważnie słuchać, bo nauczyciel również ze skupieniem słucha jego zadań.
3. Naprzemienne układanie i rozwiązywanie zadań jest doskonałym treningiem zdolności do kierowania swym zachowaniem. Taki sposób układania i rozwiązywania zadań silnie motywuje do pracy, gdyż jest szczególnie atrakcyjny dla dzieci. Uczeń nie tylko rozwiązuje zadania, ale może je również zadawać nauczycielowi.
4. Naprzemienne układanie i rozwiązywanie zadań pozwala kształtować u dzieci odporność emocjonalną na trudne sytuacje. Można pokazać dziecku wzór zachowania w sytuacji pełnej napięć i sprzecznych dążeń. Pojawia się możliwość hartowania dziecięcej odporności.
5. Charakteryzowana metoda umożliwia zorganizowanie intensywnego uczenia się z maksymalnym wykorzystaniem wcześniej omówionych mechanizmów.
6. Metoda naprzemiennego układania i rozwiązywania zadań daje także szansę na ciągłe diagnozowanie zachowań dziecięcych i stosowanie kolejnych, już trudniejszych zadań do strefy najbliższego rozwoju.

Bibliografia

Bruner J.S. (1978), *Poza dostarczone informacje. Studia z psychologii poznawania*, PWN, Warszawa

Danielewicz T., Magnuska J. (1973), *Terapia przy pomocy zestawień figur liczbowych „Kombinatoryka"*, [w:] M. Grzywak-Kaczyńska (red.), *Problemy psychoterapii dzieci i młodzieży*, PTHP, Warszawa

Glichgewicht B. (1988), *Arytmetyczne zadania tekstowe dla nauczycieli klas 1–4,* WSiP, Warszawa

Gruszczyk-Kolczyńska E. (1994), *Dzieci ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki,* WSiP, Warszawa

Janeczko R. (1991), *Nauczanie czynnościowe i kształcenie wielostronne podstawą organizacji czynności dydaktyczno-wychowawczych w szkole terapeutycznej,* [w:] R. Janeczko, *Kształcenie dzieci w zakładach leczniczych,* WSiP, Warszawa

Krygowska Z. (1977), *Zarys dydaktyki matematyki*, cz. I, WSiP, Warszawa

Majewicz P. (1999), *Poziom wydolności wysiłkowej jako centralne zagadnienie nauczania dzieci w szkołach szpitalnych,* [w:] A. Rakowska (red.), *Rocznik Naukowo-Dydaktyczny*, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków

Mason J., Burton L., Stacey K. (2005), *Matematyczne myślenie,* WSiP, Warszawa

Piaget J. (1966), *Studia z psychologii dziecka,* PWN, Warszawa

Piaget J. (1981), *Równoważenie struktur poznawczych*, PWN, Warszawa

Piaget J., Inhelder B. (1993), *Psychologia dziecka,* Wydawnictwo Siedmioróg, Wrocław

Słownik wyrazów obcych PWN (1980), PWN, Warszawa

Tomaszewski T. (1975), *Psychologia,* PWN, Warszawa

Wygotski L.S. (1971), *Wybrane prace psychologiczne*, PWN, Warszawa