Stanisław Gołąb

PRZYCZYNEK DO ALGEBRY DZIAŁAŃ W CIELE LICZB RZECZYWISTYCH

Celem niniejszej noty jest dowód pewnego twierdzenia, które głosi, że jeśli pewne dwa działania $\oplus$ i $\odot$ w obrębie zbioru E liczb rzeczywistych spełniają pewne (dość słabe) założenia, wówczas tworzą już ze zbioru E ciało K i ponadto istnieje automorfizm tego ciała z ciałem z działaniami dodawania i mnożenia zwykłego.

O działaniach $\oplus$ i $\odot$ nie zakładamy ani prawa asocjacji ani prawa komutacji. Zakładamy tylko istnienie modułów dla obu działań, zakładamy (jednostronne jedynie) prawo rozdzielności działania $\odot$ względem działania $\oplus$, zakładamy istnienie działania odwrotnego do $\oplus$ i zakładamy własność (3), która mówi, że jeśli jednym z "czynników" działania $\odot$ jest moduł działania $\oplus$, wówczas wartość "iloczynu" równa się temu modułowi. Zakładamy wreszcie pewną minimalną "regularność" obu działań. W tym kierunku prawdopodobnie dałoby się założenia nieco obniżyć.

Dla wygody będziemy pisali $f(x,y)$ zamiast $x \oplus y$ oraz $g(x,y)$ zamiast $x \odot y$.

O funkcjach $f(x,y)$ i $g(x,y)$ czynimy następujące założenia.

I. funkcje $f(x,y)$, $g(x,y)$ są określone i rzeczywiste dla wszekich par (x,y) liczb rzeczywistych.

II. funkcja $f(x,y)$ jest klasy C_1 (ciągłe pierwsze pochodne) na całej płaszczyźnie, funkcja $g(x,y)$ jest również klasy C_1 na całej płaszczyźnie a ponadto istnieje pochodna $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}$ (w istocie - jak z dowodu wypływa - wystarczy założyć istnienie mieszanej pochodnej drugiego rzędu na pewnej prostej)

III. Działanie $\oplus$ ma moduł a, to znaczy mamy

$$f(x,a) \equiv f(a,x) \equiv x \quad \text{dla każdego } x \tag{1}$$

IV. Działanie $\odot$ ma lewostronny moduł e, to znaczy mamy

$$g(e,x) \equiv x \quad \text{dla każdego } x \tag{2}$$

V. Zachodzą związki

$$g(a,x) \equiv g(x,a) \equiv a \quad \text{dla każdego } x \tag{3}$$

VI. Równanie

$$f(b,x) = c \tag{4}$$

jest przy wszelkich c, b rozwiązalne ze względu na x.
VII. Zachodzi identyczność

$$g[f(x,y),\ z] \equiv f[g(x,z),\ g(y,z)] \tag{5}$$

dla wszelkich x, y, z.

Przy założeniach powyższych twierdzimy, że istnieje funkcja $\omega(x)$ określona dla wszystkich x i silnie monotoniczna taka, że jeżeli przez Ω oznaczymy funkcję odwrotną do ω, wówczas mamy:

$$\begin{cases} f(x,y) = \Omega\,[\omega(x) + \omega(y)] & \text{dla wszelkich} \\ g(x,y) = \Omega\,[\omega(x) \cdot \omega(y)] & x,y. \end{cases} \tag{6}$$

Dowód. Ze względu na założenie II z równości (1), (2) i (3) wypływają następujące równości (oznaczamy krótko $f_1 = \frac{\partial f}{\partial x}$, $f_2 = \frac{\partial f}{\partial y}$, $g_1 = \frac{\partial g}{\partial x}$, $g_2 = \frac{\partial g}{\partial y}$)

$$f_1\,(x,a) \equiv f_2(a,x) \equiv 1, \tag{7}$$

$$g_2(e,x) \equiv 1, \tag{8}$$

$$g_2(a,x) \equiv g_1(x,a) \equiv 0. \tag{9}$$

Zauważmy, że moduł e działania g jest różny od modułu a działania f, bo gdyby było $a = e$, to związek (2) dałby $g(a,x) \equiv x$, co razem z (3) prowadziłoby do sprzeczności $x \equiv a$. Mamy więc

$$e \neq a. \tag{10}$$

Z równości (7) mamy nadto (przy podstawieniu $x = a$):

$$f_1(a, a) = f_2(a,a) = 1. \tag{11}$$

Zróżniczkujmy związek (5) obustronnie względem z, co przy naszych założeniach jest dozwolone. Otrzymamy:

$$g_2\left[f(x,y),z\right] = f_1\left[g(x,z),g(y,z)\right] \cdot g_2(x,z) + f_2\left[g(x,z),g(y,z)\right] \cdot g_2(y,z) \tag{12}$$

i podstawmy w identyczności (12) $z = a$. Uwzględniając (3) oraz (11) otrzymujemy:

$$g_2\left[f(x,y),a\right] \equiv g_2(x,a) + g_2(y,a) \tag{13}$$

Wprowadzając krótkie oznaczenie

$$\omega(x) \overset{\partial f}{=} g_2(x,a) \tag{14}$$

zapiszemy związek (13) w postaci

$$\omega\left[f(x,y)\right] \equiv \omega(x) + \omega(y). \tag{15}$$

Zauważmy, że na skutek założenia (2) funkcja $\omega(x)$ ma dla wszelkich x pochodną $\omega'(x)$. Twierdzimy, że pochodna ta jest stałego znaku. Dla dowodu niewprost przypuśćmy na chwilę, że istnieje takie x_0, że

$$\omega'(x_0) = 0. \tag{16}$$

Różniczkując związek (15) obustronnie względem x - co wolno - otrzymujemy:

$$\omega'\left|f(x,y)\right| \cdot f_1(x,y) \equiv \omega'(x). \tag{17}$$

Na mocy założenia VI równanie

$$f(x,y) = x_0$$

jest przy każdym x rozwiązalne względem y. Oznaczmy jedno z rozwiązań przez $\varrho(x)$. Mamy więc identycznie

$$f\left[x, \varrho(x)\right] \equiv x_0. \tag{18}$$

Wstawiając do (17) $y = \varrho(x)$ i uwzględniając (18) i (16) otrzymamy

$$\omega'(x_0)\ f_1\left[x, \varrho(x)\right] \equiv \omega'(x) \equiv 0, \tag{19}$$

a więc zerowanie się funkcji ω' w jednym punkcie pociągałoby zerowanie się wszędzie czyli funkcja ω byłaby stała. Z równości (15) wynikałoby, że ta stała równa się zero czyli mielibyśmy

$$g_2(x, a) \equiv 0$$

i w szczególności $g_2(e,a)=0$, co przeczy równości (8). Tak więc dowiedliśmy, że pochodna $\omega'(x)$ jest stałego znaku (pochodna posiada własności Darboux), a więc funkcja $\omega(x)$ jest silnie monotoniczna a jako taka jest odwracalna. Oznaczając przez Ω funkcję odwrotną możemy równość (15) przepisać w formie

$$f(x,y) = \Omega\left[\omega(x) + \omega(y)\right]. \tag{20}$$

Tym samym kształt funkcji f został wyznaczony za pomocą funkcji ω. Kładąc w (20) $y=a$ i uwzględniając (1) otrzymujemy

$$x \equiv \Omega\left[\omega(x) + \omega(a)\right],$$

skąd mamy

$$\omega(x) + \omega(a) \equiv \omega(x),$$

a zatem jest

$$\omega(a) = 0. \tag{21}$$

Wprowadźmy w dalszym ciągu oznaczenie

$$\psi(x,y) \overset{\mathrm{df}}{=} \omega\left[g(x,y)\right] \tag{22}$$

i wstawmy wartość (20) do wzoru (5). Otrzymamy:

$$g\left\{\Omega\left[\omega(x)+\omega(y)\right],z\right\}\equiv\Omega\left\{\omega\left[g(x,y)\right],\ \omega\left[g(y,z)\right]\right\}.$$

Biorąc z obu stron operator ω, uwzględniając oznaczenie (22) oraz identyczność

$$\omega\left[\Omega(u)\right]\equiv u \tag{23}$$

otrzymujemy:

$$\psi\left\{\Omega\left[\omega(x)+\omega(y)\right],z\right\}\equiv\psi(x,z)+\psi(y,z). \tag{24}$$

Ustalmy wartość $z=z_0$ i połóżmy krótko

$$\varphi(z)\overset{\partial f}{=}\psi(x,z_0). \tag{25}$$

W takim razie związek (25) przepisze się w postaci

$$\varphi\left\{\Omega\left[\omega(x)+\omega(y)\right]\right\}\equiv\varphi(x)+\varphi(y). \tag{26}$$

Z założeń naszych wypływa, że funkcja φ jest różniczkowalna. Zróżniczkujmy obustronnie związek (26) względem y. Otrzymamy:

$$\varphi'\left\{\Omega\left[\omega(x)+\omega(y)\right]\right\}.\Omega'\left[\omega(x)+\omega(y)\right].\omega'(y)\equiv\varphi'(y).$$

Podstawmy tu teraz $y=a$. Uwzględnijmy (21) oraz (23) oraz to, że jest

$$\Omega'\left[\omega(x)\right]=\frac{1}{\omega'(x)}. \tag{27}$$

Otrzymamy natenczas:

$$\varphi'(x).\frac{1}{\omega'(x)}.\omega'(a)\equiv\varphi'(a)$$

lub

$$\frac{\varphi'(x)}{\omega'(x)}\equiv\frac{\varphi'(a)}{\omega'(a)}. \tag{28}$$

Identyczność (28) pokazuje, że funkcja $\frac{\varphi'(x)}{\omega'(x)}$ jest <u>stała</u>. Oznaczając tę stałą wartość przez C i całkujący identyczność

$$\varphi'(x)\equiv C\ \omega'(x)$$

otrzymujemy:

$$\varphi(x) = C \ \omega(x) + D, \tag{29}$$

gdzie D jest pewną stałą. Ale mamy:

$$\varphi(a) = \psi(a,z_0) = \omega\left[g(a,z_0)\right] = \omega(a) = 0.$$

Z drugiej strony

$$\varphi(a) = C\,\omega(a) + D = D,$$

a więc z porównania obu wyników wypada

$$D = 0\ , \tag{30}$$

co redukuje związek (29) do prostszej formy:

$$\varphi(x) = C\ .\ \omega(x)\ . \tag{31}$$

Pisząc na podstawie (25) związek (31) w wyraźniejszej postaci otrzymamy:

$$\psi(x,z_0) = C\ \omega(x).$$

Stała C może oczywiście zależeć od ustalonej wartości $z = z_0$ tak, że ostatecznie możemy napisać:

$$\psi(x,z) = C(z)\ .\ \omega(x)$$

lub

$$\omega\left[g(x,z)\right] \equiv C(z)\ .\ \omega(x), \tag{32}$$

skąd wypada

$$g(x,z) = \Omega\left[\omega(x).\ C(z)\right]. \tag{33}$$

Zwróćmy jednak uwagę na to, że z (8) wynika

$$g_2(e,a) = 1$$

czyli ze względu na (14)

$$\omega(e) = 1. \tag{34}$$

Kładąc w (32) $x = e$ i uwzględniając (2) oraz (34) mamy

$$C(z) \equiv \omega(z), \tag{35}$$

co po wstawieniu do (35) prowadzi ostatecznie do wzoru

$$g(x,z) = \Omega[\dot{\varphi}(x) \cdot \omega(z)]. \tag{36}$$

Tym samym wzory (6) zostały dowiedzione i dowód twierdzenia zakończony.

Na odwrót jest rzeczą łatwą do wykazania (przez sprawdzenie drogą zwykłego podstawienia), że jeżeli zadamy sobie dowolną funkcję ($\omega(x)$, wszędzie określoną, silnie monotoniczną i mającą jako zbiór wartości wszystkie liczby rzeczywiste (a niekoniecznie różniczkowalną); jeśli przez Ω oznaczymy funkcję odwrotną do ω , wówczas funkcje $f(x,y)$ i $g(x,y)$, określone za pomocą wzorów (6) będą spełniały równanie funkcyjne (5). Równanie (4) będzie przy każdych b, c rozwiązalne i to jednoznacznie $(x = \Omega\,[\omega(c) - \omega(b)]$. Modułem dla działania f będzie jedyny pierwiastek równania $\omega(x) = 0$. Modułem dla działania g będzie jedyny pierwiastek równania $\omega(x) = 1$. Związki (3) będą identycznie spełnione. Ponadto oba działania f i g będą zarówno asocjatywne jak i komutatywne. Stąd w szczególności wynika dalej, że będzie również spełnione i drugostronne prawo rozdzielności g względem f. Działanie g wreszcie nie ma zerowych dzielników i równanie

$$g(b,x) = c$$

jest przy każdym c i każdym $b \neq a$ jednoznacznie rozwiązaln

Zbiór liczb rzeczywistych E jest więc ze względu na działania f i g pewnym ciałem liczbowym K^*.

Co więcej, ciało K^* przedstawia automorfizm ze względu na zwykłe dodawanie i mnożenie. Automorfizm ten jest zrealizowany przez funkcję $x = \Omega\,(\xi)$, jeżeli przez ξ oznaczymy zmienną liczbową w ciele liczb rzeczywistych ze zwykłym dodawaniem i mnożeniem, a x zmienną ciała K^* liczb rzeczywistych z działaniami f i g.

Istotnie dla istnienia takiego automorfizmu trzeba i wystarcza, ażeby istniała odpowiedniość jednoznaczna

$$x = \Omega\,(\xi),$$

któraby spełniała równocześnie dwa związki

$$\begin{cases} f[\Omega(\xi), \Omega(\eta)] \equiv \Omega[\varphi(\xi, \eta)] \\ g[\Omega(\xi), \Omega(\eta)] \equiv \Omega[\psi(\xi, \eta)] \end{cases} \tag{37}$$

gdzie φ i ψ są działaniami zwykłego dodawania i mnożenia, a więc

$$\begin{cases} \varphi(\xi, \eta) = \xi + \eta \\ \psi(\xi, \eta) = \xi \cdot \eta \end{cases}$$

Otóż łatwo stwierdzić, że funkcje f i g określone wzorami (6) istotnie czynią zadość związkom

$$\begin{cases} f[\Omega(\xi), \Omega(\eta)] \equiv \Omega(\xi + \eta) \\ g[\Omega(\xi), \Omega(\eta)] \equiv \Omega(\xi \cdot \eta) \end{cases}$$