Zenon Moszner

UWAGI DOTYCZĄCE MIARY JORDANA

Artykuł niniejszy jest wynikiem poszukiwania możliwie pełnego i prostego dowodu niezależności miary wewnętrznej i zewnętrznej Jordana zbioru płaskiego, określonej w znany sposób przy pomocy siatki, od kierunku tej siatki. Zdecydowałem się jednak na przyjęcie innej, znanej zresztą, ogólniejszej definicji miary wewnętrznej i zewnętrznej zbioru, a rozwiązanie wspomnianego problemu sprowadziłem do dowodu równoważności tak przyjętych definicji z definicjami odnośnych miar poprzez siatkę[1].

Przeprowadzone tu dowody wymagają tylko znajomości pewnych prostych pojęć i twierdzeń z topologii, są więc w zupełności dostępne dla studentów wyższych lat studiów. Dowody przeprowadzam dla zbiorów płaskich. Podana metoda daje się z łatwością uogólnić na przestrzeń więcej wymiarową.

1.

Wartością kwadratu Q[2] o boku a nazywam liczbę a^2. Wartością układu kwadratów $Q_1, \ldots, Q_n$ nazywam sumę wartości poszczególnych kwadratów, wchodzących w skład tego układu. Wartość tę będę oznaczał $\mathrm{war}(Q_1, \ldots, Q_n)$.

Udowodnię następujące twierdzenie, mające zasadnicze znaczenie dla dalszego rozumowania[3].

Twierdzenie I.

Jeżeli układ kwadratów $Q_1, \ldots, Q_n$ o bokach $a_1, \ldots, a_n$

---

1) Patrz tw. II i III niniejszego artykułu.

2) Przez kwadrat będę rozumiał kwadrat domknięty.

3) Twierdzenie to jak i lemmat wraz z dowodami podaję na podstawie pracy Erharda Schmidta, "Über die Darstellung der Lehre Von Inhalt in der Integralrechnung", "Mathematische Zeitschrift" (1921), str. 298 - 316.

pokrywa układ nie zachodzących na siebie (nie mających wspólnych punktów wewnętrznych) kwadratów $P_1, \ldots, P_m$ to

$$\text{war } (Q_1,\ldots,Q_n) \geqslant \text{war } (P_1,\ldots,P_m)$$

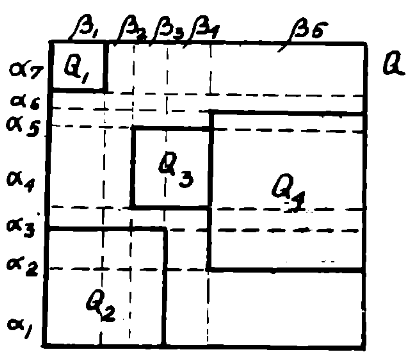
Udowodnię najpierw lemmat następujący:

Jeżeli układ kwadratów $Q_1,\ldots,Q_n$ nie zachodzących na siebie o bokach $a_1,\ldots, a_n$ jest zawarty w kwadracie Q o boku a to

$$\text{war}(Q) \geqslant \text{war } (Q_1,\ldots, Q_n)$$

Dowód:

1) Przypuśćmy najpierw, że kwadraty Q_i dla $i = 1,\ldots,n$ mają boki równoległe do boków kwadratu Q. Boki wszystkich kwadratów Q_i przedłużmy aż do przecięcia z bokami kwadratu Q (rys.1). Punkty przecięcia podzielą boki przyległe kwadratu Q na pewną ilość odcinków nie zachodzących na siebie. Oznaczmy długość tych odcinków na jednym boku przez $\alpha_1,\ldots, \alpha_p$, a na przyległym do niego przez $\beta_1,\ldots,\beta_q$. Otrzymamy stąd



rys. 1

$$a = \alpha_1 + \ldots + \alpha_p \quad \text{i} \quad a = \beta_1 + \ldots + \beta_q,$$

czyli

$$\text{war}(Q)=a^2=(\alpha_1+\ldots+\alpha_p)(\beta_1+\ldots\beta_q)= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \alpha_i \beta_j \qquad (1)$$

Boki przyległe każdego z kwadratów Q_i rozpadają się na pewną ilość odcinków[1], o długościach równych $\alpha_l\ \alpha_{l+1} \ldots \alpha_t$ lub $\beta_r, \beta_{r+1} \ldots \beta_s$

Stąd

$$a_i = \alpha_l+\ldots+\alpha_t \quad \text{i} \quad a_i=\beta_r + \ldots + \beta_s$$

---

1) Ilość tych odcinków może redukować się do jednego (zobacz kwadrat Q_1 na rys.1).

czyli

$$a_i^2 = \sum_{k=l}^{t} \sum_{j=r}^{s} \alpha_k \beta_j$$

Łączę w sumie (1) składniki w odpowiednie sumy częściowe tak, by otrzymać:

$$\mathrm{war}(Q) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \alpha_i \beta_j = a_1^2 + \dots + a_n^2 + R$$

gdzie

$$R \geqslant 0.$$

Wtedy

$$\mathrm{war}(Q) \geqslant a_1^2 + \dots + a_n^2 = \mathrm{war}\ (Q_1 \dots Q_n)$$

2) Weźmy teraz pod uwagę dowolny układ nie zachodzących na siebie kwadratów $Q_1, \dots, Q_n$ o bokach $a_1, \dots, a_n$ zawartych w kwadracie Q o boku a. Dla każdego kwadratu Q_i zbudujmy kwadrat Q_i' koncentryczny z nim o bokach długości $a_i' = \frac{a_i}{\sqrt{2}}$, równoległych do boków kwadratu Q. Widoczne jest, że $Q_i' \subset Q_i$. Układ kwadratów Q_i' stanowi układ kwadratów nie zachodzących na siebie i zawartych w Q; każdy z kwadratów Q_i' ma boki równoległe do boków kwadratu Q, stąd na podstawie pierwszej części dowodu

$$\mathrm{war}(Q) \geqslant \mathrm{war}\ (Q_1', \dots, Q_n')$$

Ale

$$\mathrm{war}(Q_1', \dots, Q_n') = a_1'^2 + \dots + a_n'^2 = \frac{a_1^2}{2} + \dots + \frac{a_n^2}{2} = \frac{\mathrm{war}(Q_1 \dots Q_n)}{2}$$

Stąd

$$\frac{\mathrm{war}(Q_1 \dots Q_n)}{\mathrm{war}(Q)} \leqslant 2$$

Mamy więc wniosek następujący (W 1):

Dla każdego układu nie zachodzących na siebie kwadratów, zawartych w pewnym kwadracie, stosunek wartości układu do wartości tego kwadratu jest nie większy od 2.

Oznaczmy

$$q \overset{df}{=} \frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{a^2}$$

w każdy z kwadratów Q_i mogę wpisać tak n kwadratów nie zachodzących na siebie $Q_{i1}, \dots, Q_{in}$ o bokach $a_{i1}, \dots, a_{in}$, by

$$\frac{a_{i1}^2 + \dots + a_{in}^2}{a_i^2} = q$$

W tym celu przekształćmy np. figurę złożoną z kwadratu Q i kwadratów Q_j $(j = 1, \dots, n)$ przez podobieństwo tak, by kwadrat Q przeszedł w kwadrat Q_i. Kwadraty $Q_1, \dots, Q_n$ przejdą przy tym przekształceniu w kwadraty $Q_{i1}, \dots, Q_{in}$ nie zachodzące na siebie i zawarte w Q_i. Ponieważ stosunek podobieństwa wynosi $\frac{a_i}{a}$, więc boki kwadratów $Q_{i1}, \dots, Q_{in}$ wynoszą $\frac{a_i}{a} a_1, \dots, \frac{a_i}{a} a_n$, a wtedy

$$\frac{\operatorname{war}(Q_{i1}, \dots, Q_{in})}{\operatorname{war}(Q_i)} = \frac{\frac{a_i^2}{a^2}(a_1^2 + \dots + a_n^2)}{a_i^2} = \frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{a^2} = q$$

Mamy stąd

$$\sum_{v=1}^{n} a_{iv}^2 = q \cdot a_i^2,$$

a dalej

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{v=1}^{n} a_{iv}^2 = q \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = a^2 q^2$$

czyli

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{v=1}^{n} a_{iv}^2}{a^2} = q^2$$

Mamy zatem wniosek następujący T 2):

Do każdego układu kwadratów $Q_1, \dots, Q_n$ nie zachodzących na siebie i zawartych w kwadracie Q możemy znaleźć taki układ kwadratów nie zachodzących na siebie i zawartych w kwadracie Q że stosunek wartości tego układu do wartości kwadratu Q jest równy kwadratowi stosunku wartości układu $Q_1,\ldots,Q_n$ do wartości kwadratu Q.

Stosując metodę wpisywania k-krotnie (k dowolna liczba naturalna) i powołując się na wniosek (W 2) otrzymamy wniosek następujący: jeżeli przez q oznaczymy

$$\frac{\mathrm{war}(Q_1,\ldots,Q_n)}{\mathrm{war}(Q)}$$

to istnieje taki układ kwadratów nie zachodzących na siebie i zawartych w Q, że stosunek wartości tego układu do wartości Q wynosi q^{2^k}.

Ale na podstawie wniosku (W 1) wiemy, że dla każdego k naturalnego $q^{2^k} \leqslant 2$. Ponieważ dla $q > 1$ byłoby $q^{2^k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} +\infty$, co jest niemożliwe wobec tego, że $q^{2^k} \leqslant 2$, a więc $q \leqslant 1$, czyli $\mathrm{war}(Q_1,\ldots,Q_n) \leqslant \mathrm{war}(Q)$ c.b.d.o.

Dowód twierdzenia I.

Do każdego z kwadratów Q_i zbudujmy kwadrat Q_i' z nim koncentryczny, o bokach równoległych do jego boków i o boku $a_i' = a_i + 2\delta$, gdzie δ jest dowolną liczbą dodatnią. Każdy kwadrat P_i podzielmy na taką ilość kwadracików nie zachodzących na siebie, by długość przekątnej największego kwadracika nie przekraczała δ. Udowodnię, że każdy z tak otrzymanych kwadracików jest zawarty w jakimś kwadracie Q_i'. Weźmy pod uwagę dowolny kwadracik K powstały z tego podziału. Kwadracik ten jako zawarty w jakimś kwadracie P_i ma wspólny punkt P z jakimś kwadratem Q_j. Koło o środku w P i promieniu δ zawiera się w Q_j', a w kole tym zawiera się nasz kwadracik K, bo ma przekątną mniejszą niż δ. A więc $K \subset Q_j'$ [1].

Podzielmy wszystkie kwadraciki powstałe z podziału kwadratów układu $P_1,\ldots, P_m$ na grupy, zaliczając do pierwszej kwadraciki, które zawierają się w Q_1', do drugiej te z pozostałych kwadracików, które zawierają się w Q_2', itd. Na podstawie lemmatu otrzymam, że $\mathrm{war}(Q_1')$ jest nie mniejsza od wartości układu tych kwadracików, które zawierają się w Q_1', i analogicznie

---

1) Oczywiście ten sam kwadracik K może zawierać się w dwu różnych kwadratach Q_j' i Q_k' ($j \neq k$).

la pozostałych. Stąd otrzymuję że war$(Q_1',\dots,Q_n')$ jest nie mniejsza od war. układu wszystkich kwadracików powstałych z podziału kwadratów $P_1,\dots,P_m$, która to wartość równa się war$(P_1,\dots,P_m)$. Mamy więc nierówność

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + 2\delta)^2 \geqslant \mathrm{war}(P_1,\dots,P_m)$$

z której z uwagi na to, że δ jest dowolną liczbą dodatnią, wynika:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \mathrm{war}(Q_1,\dots,Q_n) \geqslant \mathrm{war}\ (P_1,\dots,P_m\ )$$

c.b.d.o.

2.

Definicja miary wewnętrznej Jordana zbioru płaskiego.

Niech będzie dany dowolny ograniczony zbiór płaski Z. Miarą wewnętrzną zbioru Z nazywam górny kres wartości wszystkich układów złożonych ze skończonej ilości kwadratów zawartych w zbiorze Z i nie zachodzących na siebie. Kres ten oznaczam m_wZ. Jeżeli w zbiorze Z nie zawiera się żaden kwadrat, czyli zbiór Z nie ma punktów wewnętrznych, kładę $m_wZ=0$. Ponieważ w dalszych rozważaniach musiałbym stale rozróżniać przypadki $m_wZ=0$ i $m_wZ > 0$, a przypadek pierwszy jest dla tych rozważań banalny, w rozdziale tym w dalszym ciągu zajmuję się tylko zbiorami, mającymi punkty wewnętrzne. Zbiór Z, jako ograniczony, jest zawarty w jakimś kwadracie Q, każdy układ kwadratów nie zachodzących na siebie zawartych w Z jest więc także zawarty w Q. Na podstawie lemmatu z poprzedniego rozdziału wartość tego układu jest nie większa od wartości kwadratu Q, a stąd dla każdego zbioru organicznego Z istnieje m_wZ.

Niechaj na płaszczyźnie będzie dana siatka kwadratowa o dowolnie ustalonym kierunku, początku i dowolnej szerokości a oczka[1].

1) Nie precyzuję dokładnie pojęcia siatki o danym początku, kierunku i danej szerokości oczka z uwagi na to, że są to rzeczy ogólnie znane, a przy dokładnym omawianiu zajęłyby dużo miejsca.

Przez α_a oznaczam sumę wartości wszystkich tych oczek tej siatki, które zawierają się w zbiorze Z. Przy zmienianym dowolnie a[1] liczby α_a utworzą pewien zbiór T.

Twierdzenie II

Miara wewnętrzna zbioru Z równa się kresowi górnemu zbioru T.

Udowodnię najpierw dwa lemmaty.

Określenie:

Układ kwadratów $Q_1,\dots,Q_n$ nazywam całkowicie zawartym w Z, jeżeli $Q_1 + \dots + Q_n \subset W(Z)$[2].

Lemmat 1

$m_w Z$ równa się kresowi i górnemu wartości układów złożonych ze skończonej ilości kwadratów, nie zachodzących na siebie, całkowicie zawartych w Z.

Dowód:

Oznaczmy przez K kres górny wartości układów złożonych ze skończonej ilości kwadratów, nie zachodzących na siebie i całkowicie zawartych w Z. Oczywiście $K \leqslant m_w Z$ (*)

Wykażę teraz własność następującą (W):

Do dowolnego układu kwadratów $Q_1,\dots,Q_l$ nie zachodzących na siebie i zawartych w Z i do dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taki układ kwadratów $P_1,\dots,P_m$ nie zachodzących na siebie i całkowicie zawartych w Z, że

$$\mathrm{war}(P_1,\dots,P_m) \geqslant \mathrm{war}(Q_1,\dots,Q_l) - \varepsilon$$

Weźmy pod uwagę te kwadraty Q_i, które mają wspólne punkty z brzegiem zbioru Z. Jest ich skończona ilość, powiedzmy $Q_1,\dots,Q_p$. Kwadraty te mogą mieć tylko brzegowe punkty wspólne z brzegiem zbioru Z, bo gdyby punkt brzegowy zbioru Z był punktem wewnętrznym któregoś z kwadratów Q_i $(i=1\dots p)$, to musiałby także do wnętrza Q_i należeć punkt zbioru $-Z$[3], co jest niemożliwe, bo $Q_i \subset Z$.

Oznaczmy boki kwadratów $Q_1,\dots,Q_p$ przez $b_1,\dots,b_p$. Każdy kwadrat Q_i $(i=1,\dots,p)$ podzielmy na n^2 kwadracików dzieląc jego bok na n równych części (n jest zupełnie dowolną liczbą naturalną $n \neq 1$). Każdy z kwadratów Q_i rozpada się więc

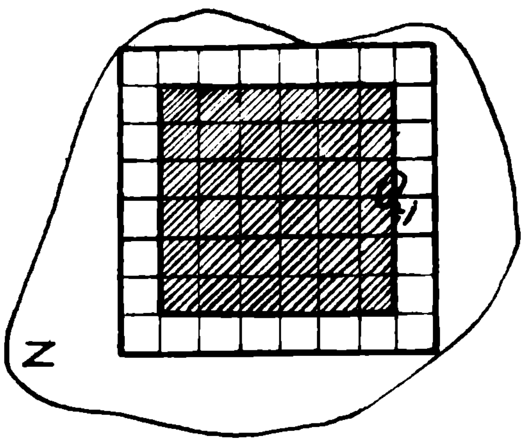
---

1) Sposób zmieniania a nie ma wpływu na przebieg dowodu, możnaby więc wychodząc z siatki o danym boku zagęszczać ją np. przez dwupodział.

2) Przez $W(Z)$ oznaczam wnętrze zbioru Z.

3) Przez $-Z$ oznaczam dopełnienie zbioru Z do całej płaszczyzny

na 4n−4 kwadratów o boku $\frac{b_1}{n}$, mających wspólne punkty z brzegiem Q_1 i n^2-4n+4 kwadratów leżących wewnątrz Q_1 (rys.2)



rys.2

Ostatnie kwadraty nie mają zatem punktów wspólnych z brzegiem Q_1, a więc tym bardziej z brzegiem zbioru Z, wobec tego leżą wewnątrz Z.

Niechaj układ kwadratów $P_1,\dots,P_m$ składa się z tych wszystkich kwadratów powstałych z podziału kwadratów $Q_1,\dots,Q_p$, które są ich wewnętrznymi kwadratami i ewentualnie (jeżeli $l \neq p$) z kwadratów $Q_{p+1},\dots,Q_l$. Oczywiście układ ten jest całkowicie zawarty w Z. Obliczmy:

$$\mathrm{war}(P_1,\dots,P_m)=b_{p+1}^2+\dots+b_l^2+\frac{b_1^2}{n^2}(n^2-4n+4)+\dots+\frac{b_p^2}{n^2}(n^2-4n+4) =$$

$$= b_1^2+\dots+b_l^2 - \frac{4n-4}{n^2}(b_1^2+\dots+b_p^2)$$

Ale $\frac{4n-4}{n^2}(b_1^2+\dots+b_p^2)\to 0$ gdy $n\to+\infty$, więc dla dowolnego $\varepsilon>0$ istnieje takie n, że $\frac{4n-4}{n^2}(b_1^2+\dots+b_p^2)<\varepsilon$. Istnieje zatem taki układ kwadratów $P_1,\dots,P_m$ nie zachodzących na siebie i całkowicie zawartych w Z, dla którego

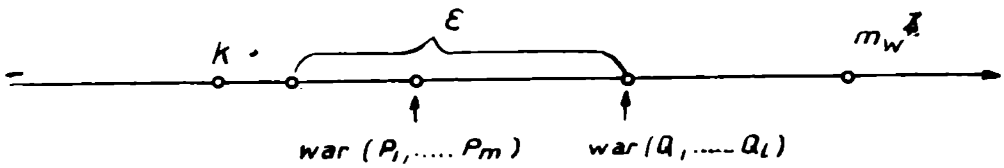
$$\mathrm{war}(P_1,\dots,P_m)\geqslant \mathrm{war}(Q_1,\dots,Q_l)-\varepsilon$$

a tym samym własność (W) została wykazana.

Przypuśćmy teraz, że $K < m_w Z$ i weźmy taki układ kwadratów $Q_1,\dots,Q_l$ zawartych w Z i nie zachodzących na siebie, by była spełniona nierówność

$$K < \mathrm{war}(Q_1,\dots,\cancel{Q_q}\,Q_l)\leqslant m_w Z$$

oraz takie $\varepsilon>0$, by ponadto $K<\mathrm{war}(Q_1,\dots,Q_l)-\varepsilon$ (rys.3).



rys. 3.

Na podstawie własności (W) istnieje taki układ kwadratów $P_1, \ldots, P_m$, które są całkowicie zawarte w Z, nie zachodzą na siebie i dla których

$$\mathrm{war}(P_1, \ldots, P_m) \geqslant \mathrm{war}(Q_1, \ldots, Q_l) - \varepsilon > K$$

a to jest sprzeczne z określeniem liczby K. Stąd $K \geqslant m_W Z$, co w połączeniu z nierównością (*) daje

$$K = m_W Z$$

c.b.d.o.

Lemmat 2.

Do każdego układu kwadratów $P_1, \ldots, P_m$ całkowicie zawartych w Z można tak dobrać szerokość siatki o zadanym dowolnie początku i kierunku, by zbiór wszystkich oczek tej siatki zawartych w Z zawierał $P_1 + \ldots + P_m$.

Dowód:

Ze spójności kwadratu wynika, że jeżeli w kwadracie są punkty wnętrza i zewnętrza jakiegoś zbioru, to muszą tu być także punkty brzegowe tego zbioru. Stąd jeżeli w jakimś kwadracie są punkty jakiegoś zbioru, a nie ma punktów jego brzegu, to nie może być punktów dopełnienia zbioru, a więc kwadrat ten zawiera się w tym zbiorze.

Oznaczmy przez $U = P_1 + \ldots + P_m$. Ponieważ $P_1 + \ldots + P_m \subset W(Z)$ więc

$$\rho(B(U), B(Z)) = d > 0 \text{ 1)}$$

Weźmy siatkę o dowolnym początku i kierunku i o szerokości oczka mniejszej od $\frac{d}{\sqrt{2}}$. Oznaczmy przez S sumę mnogościową

---

1) Przez B(Z) oznaczam brzeg zbioru Z, a przez $\rho(B)(U)$, B(odległość zbiorów B(U) i B(Z) od siebie.

wszystkich oczek tej siatki, które zawierają się w Z, Udowodnię, że $U \subset S$. Oczywiście $U \subset Z$ i $S \subset Z$.

Weźmy dowolny punkt $P_0 \in U$. Punkt ten musi należeć do jakiegoś oczka naszej siatki, np. do oczka Q. Twierdzę, że $Q \subset Z$. Jeżeli bowiem w Q są punkty brzegowe Z, to wtedy nie ma punktów brzegowych U[1], jednakże są punkty U (np. P_0) mamy więc na podstawie uwagi na początku dowodu $Q \subset U \subset Z$. Jeżeli w Q nie ma punktów brzegowych Z, to ponieważ są punkty Z (np. $P_0 \in U \subset Z$), mamy $Q \subset Z$. Stąd $P_0 \in Q \subset S$ czyli $P_0 \in S$.

c.b.d.o.

Dowód twierdzenia II

Oznaczmy przez K kres górny zbioru T. Z definicji miary wewnętrznej wynika, że $K \leqslant m_w Z$. Przypuśćmy, że $K < m_w Z$. Na podstawie lemmatu 1 znajdę taki układ kwadratów $P_1, \ldots, P_m$ nie zachodzących na siebie i całkowicie zawartych w Z, by zachodziła następująca nierówność:

$$K < \mathrm{war}(P_1, \ldots, P_m) \leqslant m_w Z$$

Na podstawie lemmatu 2 mogę tak zagęścić siatkę o dowolnie zadanym początku i kierunku, by suma mnogościowa S wszystkich oczek tej siatki zawartych w Z zawierała układ $P_1, \ldots, P_m$. Opierając się na twierdzeniu I mamy $\mathrm{war}(S) \geqslant \mathrm{war}(P_1, \ldots, P_m) > K$ co jest sprzeczne z określeniem liczby K.

Stąd

$$K = m_w Z$$

3.

Definicja miary zewnętrznej Jordana zbioru płaskiego.

Niechaj będzie dany dowolny zbiór płaski ograniczony Z. Miarą zewnętrzną zbioru Z nazywamy kres dolny wartości wszystkich tych układów kwadratów, które pokrywają zbiór Z i oznaczam ją $m_z Z$[2].

---

1) Przekątna kwadratu Q jest bowiem mniejsza od d.

2) Niechaj Q, oznacza kwadrat o boku a, w którym zawiera się zbiór Z, mamy wtedy $m_z Z = a^2 - m_w(Q - Z)$. Związek ten możnaby przyjąć za definicję miary zewnętrznej, co z uwagi na wynik rozdziału 2 dawałoby natychmiast niezależność $m_z Z$ od kierunku i początku siatki. Przyjęcie takiej definicji zmuszałoby jednak do dowodu niezależności $m_z Z$ od wyboru kwadratu Q, ponadto definicję przyjętą w tekście uważam za lepszą pod względem dydaktycznym.

Z określenia wynika, że dla każdego zbioru organicznego istnieje miara zewnętrzna.

Ponieważ dalszy ciąg rozumowania jest analogiczny do rozumowania z rozdziału 2 ograniczę się do podania twierdzeń i lemmatów, dowodząc tylko tych, których dowód odbiega od dowodów analogicznych twierdzeń poprzedniego rozdziału.

Określenie:

Układ kwadratów $Q_1,\dots,Q_n$ pokrywa całkowicie zbiór Z, jeżeli

$$\bar{Z} \subset W(Q_1 + \dots + Q_n)^{1)}$$

Lemmat 1

$m_z Z$ równa się kresowi dolnemu wartości układów kwadratów, pokrywających całkowicie zbiór Z.

Dowód:

Wykażę najpierw następującą własność (W'):

Do każdego układu kwadratów $Q_1,\dots,Q_n$ pokrywających zbiór Z i do dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taki układ kwadratów $P_1,\dots,P_m$ całkowicie pokrywający zbiór Z, że

$$\mathrm{war}(P_1,\dots,P_m) \leqslant \mathrm{war}(Q_1,\dots,Q_n) + \varepsilon$$

U w a g a: Dowolny odcinek mogę tak całkowicie pokryć układem kwadratów $K_1,\dots,K_p$ by wartość tego układu była dowolnie mała. Stąd dowolny skończony układ odcinków mogę pokryć całkowicie układem kwadratów o dowolnej małej wartości.

Weźmy pod uwagę $B(Q_1+\dots+Q_n)$. Składa się on ze skończonej ilości odcinków. Pokryjmy całkowicie ten brzeg takim układem kwadratów $R_1,\dots R_s$, by $\mathrm{war}(R_1,\dots,R_s) < \varepsilon$. Pokażę, że

$$\bar{Z} \subset W(Q_1+\dots+Q_n + R_1+\dots+R_s)$$

Mamy $Z \subset Q_1 + \dots + Q_n$

stąd

---

1) Przez $\bar{Z}$ oznaczam domknięcie zbioru Z.

$$\bar{Z} \subset \overline{Q_1+\ldots+Q_n} = W(Q_1+\ldots+Q_n)+B(Q_1+\ldots+Q_n) \subset W(Q_1+\ldots+Q_n) +$$

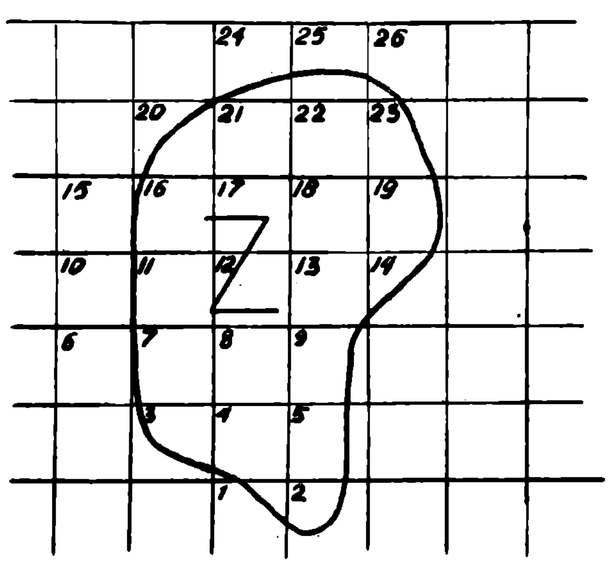
$$+ W(R_1+\ldots R_s) \subset W(Q_1+\ldots Q_n+R_1+\ldots+R_s)$$

Zatem układ $Q_1,\ldots,Q_n$, $R_1,\ldots,R_s$ pokrywa całkowicie zbiór Z i ponadto $\mathrm{war}(Q_1,\ldots,Q_n, R_1,\ldots,R_s) = \mathrm{war}(Q_1,\ldots,Q_n) + \mathrm{war}(R_1,\ldots,R_s) \leq \mathrm{war}(Q_1,\ldots,Q_n) + \varepsilon$. Tym samym własność ($W'$) została wykazana. Dalszy ciąg dowodu przebiega analogicznie jak dowód lemmatu 1 rozdziału 2.

Określenie:

Układ oczek siatki pokrywa zbiór Z, jeżeli Z zawiera się w sumie mnogościowej oczek tego układu i jeżeli każde oczko tego układu ma ze zbiorem przynajmniej jeden punkt wspólny.

U w a g a: Układ oczek danej siatki pokrywający zbiór Z nie musi być określony jednoznacznie np. na rys. 4 układ oczek od 1 do 26 pokrywa zbiór domknięty Z, ale o ile wezmę oczka od 1 do 26 za wyjątkiem np. oczka 6, 10 czy 15 otrzymam też układ pokrywający zbiór Z.



rys.4.

Lemmat 2.

Do każdego układu kwadratów $P_1,\ldots,P_m$, pokrywającego całkowicie zbiór Z mogę tak dobrać szerokość siatki o zadanym dowolnie początku i kierunku, by każdy układ oczek siatki pokrywający zbiór Z zawierał się w $P_1+\ldots+P_m$.

Dowód tego lemmatu jest analogiczny do dowodu lemmatu 2 z rozdziału 2.

Oznaczmy przez β_a wartość jednego układu[1] oczek siatki o dowolnie ustalonym kierunki i początku i o szerokości oczka a, pokrywającego zbiór Z, a przez R zbiór wszystkich takich liczb β_a, gdy a zmieniam dowolnie[2].

1) Wybór układu nie odgrywa roli, o czym świadczy twierdz.III.
2) Zobacz przypis 1) na str.105.

Twierdzenie III

Miara zewnętrzna zbioru Z równa się kresowi dolnemu zbioru R.

Dowód przebiega zupełnie analogicznie do dowodu twierdzenia II z rozdziału 2.

U w a g a: Na zakończenie zaznaczę, że przeprowadzony tu dowód możliwości wyznaczenia $m_w Z$ i $m_z Z$ (a więc i miary zbioru, gdy zbiór jest mierzalny, czyli gdy $m_w Z = m_z Z$) przy pomocy siatki o dowolnym początku i kierunku jest zarazem dowodem niezależności tych miar od przekształcenia izometrycznego.