Z DOŚWIADCZEŃ PROWĄDZACEGO ĆWICZENIA

1. Uwaga dotycząca nierówności Bernoulli'ego

W czasie ćwiczeń z analizy matematycznej, poświęconych powtórce nierówności Bernoulli'ego, może nam się zdarzyć, że student wywołany od odpowiedzi napisze wprawdzie poprawnie samą nierówność:

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx,$$

ale nie podaje założeń, jakie czynimy o liczbach n i x.

Przy pomocy pozostałych słuchaczy uzupełniamy założenia: $x \geqslant -1$ i n jest liczbą naturalną.

Dla utrwalenia studentowi w pamięci tego, że założenia są istotną częścią składową każdego twierdzenia matematycznego, polecamy mu, by wybrał dowolną liczbę naturalną. Student wybiera 4. Następnie poddajemy mu, by sprawdził nierówność Bernoulli'ego dla $n = 4$ i $x = -2$. Student sprawdza:

$$(-1)^4 \geqslant 1 + 4(-2)$$

$$1 \geqslant -7 \quad (!)$$

Nierówność okazuje się prawdziwa (!). Każemy mu więc sprawdzić dla $x = -3$:

$$(-2)^4 \geqslant 1 + 4(-3)$$

$$16 \geqslant -11 \quad (!)$$

Próbujemy jeszcze $x = -4$:

$$(-3)^4 \geqslant 1 + 4(-4)$$

$$81 \geqslant -15 \quad (!)$$

Zdenerwowani nieoczekiwanym uporczywym zachodzeniem nierówności polecamy mu przyjąć $n = 3$ i $x = -2$.

$$(-1)^3 \geqslant 1 + 3(-2)$$

$$-1 \geqslant -5 \quad (!)$$

Sprawdzamy jeszcze: dla $x = -3$:

$$(-2)^3 \geqslant 1 + 3(-3)$$

$$-8 \geqslant -8$$

Trochę denerwujące, nieprawdaż?!
Mimo tego sprawdzamy dla $x = -4$:

$$(-3)^3 \geqslant 1 + 3(-4)$$

$$-27 \geqslant -11$$

– no i nareszcie nierówność nieprawdziwa.

Wyjaśniamy więc studentom, że nierówność Bernoulli'ego bez żadnych ograniczeń nałożonych na liczbę x nie byłaby prawdziwa i że założenie $x \geqslant -1$ nie jest wprawdzie konieczne dla zachodzenia nierówności, ale jest dostateczne dla przeprowadzenia dowodu przy pomocy indukcji matematycznej.

Sami jednak oburzeni na złośliwą nierówność podchodzimy do niej z innej strony.

Niech $f_n(x) = (1+x)^n - 1 - nx$, gdzie n jest dowolną liczbą naturalną, a x dowolną liczbą rzeczywistą.

Dla $n = 1$ mamy $f_1(x) \equiv 0$, a więc $f_1(x) \geqslant 0$ stale.

Niech $n \geqslant 2$.

Obliczmy $f_n'(x) = n(1+x)^{n-1} - n = n\left[(1+x)^{n-1} - 1\right]$

i zbadajmy, dla jakich x jest $f_n'(x) = 0$.

$$(1 + x)^{n-1} - 1 \overset{?}{=} 0$$

W tym celu rozróżniamy przypadki:

I. n parzyste, stąd $n - 1$ nieparzyste, a więc $f_n'(x) = 0$ tylko dla $1 + x = 1$, czyli dla $x = 0$.

Dla $x > 0$ mamy $1 + x > 1$, a więc i $(1+x)^{n-1} > 1$ czyli $f_n'(x) > 0$; więc funkcja $f_n(x)$ jest dla $x > 0$ rosnąca.

Dla $-1 < x < 0$ mamy $0 < 1 + x < 1$, stąd $(1+x)^{n-1} < 1$, a więc $f_n'(x) < 0$; zatem $f_n(x)$ maleje w przedziale $(-1,0)$.

Dla $x \leqslant -1$ mamy $1+x \leqslant 0$, a więc i $(1+x)^{n-1} \leqslant 0 < 1$, bo $n - 1$

jest liczbą nieparzystą, stąd i tu $f_n'(x) < 0$; zatem $f_n(x)$ maleje dla $x \leq -1$. Wobec tego $f_n(x)$ rośnie dla $x > 0$ i maleje dla $x < 0$, a ponieważ $f_n(0) = 0$ mamy $f_n(x) \geq 0$ dla każdego x.

II. n nieparzyste i $n > 1$; wtedy $n - 1$ parzyste i $n - 1 > 0$.

Pochodna $f_n'(x)$ zeruje się, gdy: $1 + x = 1$ lub $1 + x = -1$, czyli gdy $x = 0$ lub $x = -2$.

Dla $x > 0$ mamy $1 + x > 1$, a więc $f_n'(x) > 0$; stąd wniosek, że $f_n(x)$ rośnie.

Dla $-2 < x < 0$ mamy $-1 < 1 + x < 1$ czyli $|1 + x| < 1$, a więc $|1+x|^{n-1} < 1$. Ale $|1 + x|^{n-1} = (1 + x)^{n-1}$, bo $n - 1$ jest liczbą parzystą, mamy zatem $(1 + x)^{n-1} < 1$, czyli $f_n'(x) < 0$; więc $f_n(x)$ maleje.

Dla $x < -2$ mamy $1 + x < -1$, stąd $(1 + x)^{n-1} > 1$ ($n-1$ parzyste) czyli $f_n'(x) > 0$; a więc $f_n(x)$ rośnie.

Obliczmy $f_n(-2) = (-1)^n - 1 - n(-2) = -2 + 2n = 2(n-1) > 0$

Ponieważ ponadto dla $x \neq 0$ $f_n(x) = (1 + x)^n - 1 - nx =$
$= x\left[(1 + \frac{1}{x})(1 + x)^{n-1} - \frac{1}{x} - n\right]$ zmierza do $-\infty$ przy $x \to \infty$ ($n - 1$ jest liczbą parzystą); funkcja $f_n(x)$ ma więc w przedziale $(-\infty, -2)$, jedyny ze względu na monotoniczność pierwiastek, który oznaczmy przez $\alpha(n)$. Oczywiście $\alpha(n) < -2$.

Zatem otrzymujemy $f_n(x) \geq 0$ dla $x \geq \alpha(n)$ i $f_n(x) < 0$ dla $x < \alpha(n)$.

Reasumując nasze rozważania nad funkcją $f_n(x)$ otrzymujemy: nierówność Bernoulli'ego.

1) dla $n = 1$ lub n parzystego jest spełniona przez wszystkie liczby;

2) dla n nieparzystego i różnego od 1 jest spełniona tylko dla x nie mniejszych od jedynego ujemnego pierwiastka $\alpha(n)$ równania

$$(1 + x)^n - 1 - nx = 0$$

Pierwiastek ten jest mniejszy od -2.

Teraz wyjaśnił nam się powód złośliwości naszej nierówności.

W przypadku 2) można udowodnić, że gdy n zmierza do $+\infty$ po wartościach nieparzystych, to $\alpha(n)$ dąży do -2.

Niech bowiem β będzie dowolną liczbą mniejszą od -2. Mamy więc $1 + \beta < -1$, i niech $n = 2k + 1$, wtedy

$$f_{2k+1}(\beta)=(1+\beta)^{2k+1}-1-(2k+1)\beta =$$

$$=(1+\beta)^{2k+1}\left[1-\frac{1}{(1+\beta)^{2k+1}}-\frac{(2k+1)\beta}{(1+\beta)^{2k+1}}\right]$$

Ponieważ $(1+\beta)^{2k+1} \to -\infty$, gdy $k \to +\infty$, a $\frac{2k+1}{(1+\beta)^{2k+1}} \to 0$

gdy $k \to +\infty$, wnosimy, że $f_{2k+1}(\beta) \to -\infty$ dla $k \to +\infty$.

Stąd istnieje takie N, że gdy $n \geqslant N$ i n nieparzyste, to $f_n(\beta) < 0$. Ale wykazaliśmy poprzednio, że $f_n(-2) > 0$. Wobec tego $\alpha(n)$ jako jedyny ujemny pierwiastek funkcji $f_n(x)$, o którym wykazaliśmy, że jest liczbą mniejszą od -2, musi leżeć w przedziale $(\beta, -2)$, co z uwagi na dowolność β (byle $\beta < -2$) wskazuje na to, że $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha(n) = -2$.

Zenon Moszner