Jan Leśniak - Włodzimierz Szewczuk

O UZDOLNIENIACH MATEMATYCZNYCH

1. Fatalna tradycja[1)]

Rzadko zdarza się spotkać człowieka bez urazu na punkcie matematyki, szczególnie wśród osób dziś już dorosłych. Większość ludzi uważała i dziś jeszcze uważa ją za najtrudniejszy przedmiot. Już samo słowo "matematyka" wywołuje na ich obliczu taki wyraz, jaki mają ludzie przeświadczeni, że ich "zmora" męczy. Pomimo kilkunastu czy kilkudziesięciu lat od chwili, gdy drżącą ręką próbowali uporać się przy tablicy z najprostszym zadaniem, prześladują ich jeszcze dzisiaj przykre sny matematyczne.

Czy można się im dziwić? Większość z nich wyniosła ze szkoły przeświadczenie, że głównym zadaniem matematyki są numeryczne obliczenia; inni uważają matematykę za zbiór wzorów i twierdzeń bez jakiegoś widocznego praktycznego znaczenia, **istniejących chyba tylko po to,** aby napędzać strachu i grozić niedostatecznym stopniem.

Jeszcze dzisiaj, choć na szczęście w coraz mniejszym stopniu, wyniki ankiet szkolnych na temat trudności poszczególnych przedmiotów nauczania potwierdzają to przekonanie, gdyż matematyka zajmuje z reguły pierwsze miejsce przed wszystkimi innymi przedmiotami, uważanymi za łatwiejsze.

Tradycja tego przekonania jest tak dawna, że wrosła w umysł człowieka jako coś oczywistego. Przekonanie to nie wisiało zresztą w próżni. Opierało się i opiera się jeszcze

---

1) Referat wygłoszony na zebraniu Koła Matematycznego studentów WSP.

ciągle na obszernym materiale praktyki szkolnej, która dowodziła w sposób nie nasuwający żadnej wątpliwości, że uczniowie najtrudniej radzą sobie właśnie z matematyką - **albo** uczeń stosunkowo szybko przyswaja sobie wiadomości matematyczne, albo tylko z największym trudem udaje się nauczycielowi doprowadzić go do ich opanowania. "Uzasadnienie" i "wytłumaczenie" tego stanu faktycznego uważanego za coś stałego i naturalnego dawała idealistyczna teoria uzdolnień. Teoria ta głosiła i głosi, że do matematyki, jak też do każdego innego przedmiotu, potrzebne są specjalne uzdolnienia. Jeżeli one są, wszystko idzie dobrze, jeżeli ich nie ma, piętrzą się trudności.

Fatalistyczny ten pogląd był do niedawna rozpowszechniony nawet wśród samych wychowawców, demobilizując ich pracę dydaktyczną. Uwadze tych pedagogów wymykały się jakoś fakty opanowywania matematyki przez tych uczniów, którzy uprzednio zostali zaszeregowani do kategorii nieuzdolnionych do matematyki. Wymykały się między innymi dlatego, że takie wypadki zachodziły z reguły w sytuacji zmiany nauczającego. Dotychczasowy nauczyciel przestaje się interesować (niesłusznie) swym dotychczasowym wychowankiem, nowy nauczyciel nie ma pełnego obrazu jego uprzednich niedociągnięć.

Gdyby zainteresowano się bliżej tymi wypadkami, może zrodziłaby się wątpliwość w sprawie przyczyn trudności matematyki, może dojrzałaby samokrytyczna myśl, że jedna z ważnych, jeżeli nie najważniejsza przyczyna trudności w opanowywaniu matematyki tkwi w sposobie jej podawania, w metodyce.

A przecież nie ma chyba takiego matematyka-praktyka, który nie zetknąłby się z faktem, że uczeń należący w matematyce do bardzo słabych, nagle wystartował, nagle zaczął sobie dawać radę, nagle zdystansował wielu kolegów, osiągając stopień zrozumienia, pozwalający na realizowanie kształcących i wychowawczych wartości nauczania matematyki.

Takie fakty potrafią niestety doprowadzić pedagoga często jedynie do wniosku, że w uczniu poprostu obudziło się istniejące w nim uzdolnienie, które z jakichś tam przyczyn nie doszło dotąd do głosu. Wniosek taki zamyka nauczyciela w błędnym kole, odcina drogę do poznania prawdy, skazuje go na fatalistyczne przekonanie o daremności większych i głębszych wysiłków dydaktycznych.

Matematykom-praktykom uszedł i uchodzi jeszcze często uwagi inny bardzo znamienny fakt. W tym samym mieście w jednej szkole procent uczniów "matematyków" jest bardzo duży, w innej szkole bardzo mały. Czyżby uczniowie ze zdolnościami do matematyki i ci bez zdolności do matematyki zmówili się i zapisywali do dwu różnych szkół? Prawdopodobieństwo tego jest równe zeru. Przypadek? Trudny do przyjęcia. A zatem? Nad tym matematycy-praktycy zbyt rzadko zastanawiają się samokrytycznie. Nic dziwnego, że jeszcze wciąż trwa fatalna tradycja, że matematyka jest najtrudniejszym przedmiotem i wymaga specjalnych uzdolnień.

Wyjaśnienie przyczyn trudności matematyki oraz rozpatrzenie tych tzw. specjalnych uzdolnień matematycznych jest - naszym zdaniem - i interesujące i szczególnie ważne dla przyszłych nauczycieli tego przedmiotu.

2. Kilka słów o uzdolnieniach

Zanim zajmiemy się analizą rzeczywistych przyczyn trudności, jakie sprawia uczniom matematyka, zatrzymamy się na chwilę przy przyczynie pozornej, a uważanej często za zasadniczą, przy uzdolnieniach.

Jeżeli matka czy ojciec dziecka mającego trudności w matematyce stwierdza wobec nauczyciela, że nie bardzo liczy się z możliwościami poprawienia tego stanu rzeczy, ponieważ "u nas w rodzinie nikt nie ma zdolności do matematyki", jeżeli w podobnym wypadku matka ma częściowo pretensje do nauczyciela, a ten oświadcza "trudno, on nie ma absolutnie żadnych zdolności do matematyki", to i tamta matka i ten nauczyciel opierają się (najczęściej nieświadomie) na tym samym idealistycznym poglądzie, według którego uzdolnienia dziedziczy się i wobec tego kto ich nie ma, nie nabędzie ich, choćby pedagog i uczeń dawał z siebie wszystko.

Pogląd ten jest jednym z najbardziej jaskrawych i najbardziej przejrzystych przykładów klasowego charakteru idealistycznej, burżuazyjnej nauki. Chcąc zapewnić sobie władzę, klasa panująca zniekształcała naukę dla swoich celów, ażeby wykazać właśnie przy pomocy teorii wrodzonych uzdolnień, że tylko dzieci klasy panującej są jednostkami pełnowartościowymi, mają wrodzone uzdolnienia do tego wszystkiego, co daje pozycja społeczna godna członków klasy panującej.

Najogólniejszą postacią tej teorii jest ta, która mówi o wrodzonej inteligencji. Naturalnie w myśl tej teorii wrodzona inteligencja dzieci klasy panującej jest zawsze wyższa od inteligencji dzieci robotniczych i chłopskich, a wychowanie nie może zmienić tego faktu w sposób zasadniczy.

W naszych warunkach, w Polsce Ludowej nie trzeba chyba udowadniać fałszywości tej teorii. Każdy, kto ma oczy otwarte i nie zakłada na nie filtru wrogiej propagandy, widzi codziennie jak w armii budowniczych socjalistycznej ojczyzny rozkwitają tysiące talentów, w armii rekrutującej się przede wszystkim z młodzieży robotniczej i chłopskiej. Nie są to cudowni i wyjątkowi Jankowie-muzykanci rodzący się "za zrządzeniem opatrzności", lecz całe szeregi młodych prostych ludzi, którzy sami, albo o których ich rodzice, nie mogli nawet myśleć w kategoriach: lekarz, inżynier, naukowiec, artysta.

Wszystko, co jest w człowieku istotnego, jest zdeterminowane przez jego geny - mówi idealistyczna biologia. Wszystko, do czego człowiek jest zdolny i stopień, w jakim jest zdolny wyznaczone jest przez jego wrodzone zdolności - mówi idealistyczna psychologia. Powoływano się i powołuje się jeszcze dzisiaj tam, gdzie panuje nauka idealistyczna, na dane z badań nad rodzinami jednostek genialnych, na dane z badań nad rodzinami przestępców, na dane z badań nad bliźniętami jednozarodkowymi. "Udowodniono", "wykazywano na wszelkie możliwe sposoby", że dziedziczenie uzdolnień nie może być podane w najmniejszą wątpliwość. Unikano równocześnie jak najstaranniej kłopotliwych pytań w rodzaju: dlaczego w jakiejś rodzinie zjawiały się, i raz wcześniej, raz później (zwykle dość szybko) znikały wybitne uzdolnienia, dlaczego dzieci rodziców-przestępców, które wychowywano w nieprzestępczym środowisku, nie wykazywały najmniejszych skłonności (poza wypadkami obciążeń alkoholicznych, schorzeń zasadniczych), przestępczych, dlaczego rodzeństwo wykazuje różnokierunkowe, nieraz całkiem odmienne zainteresowania i uzdolnienia. Zamykano oczy na badania wykazujące, że bliźnięta jednozarodkowe wychowywane w zupełnie różnych środowiskach wykazują nieraz bardzo odmienne uzdolnienia, albo u jednych występują uzdolnienia, u innych nie. -

Nasza materialistyczna, marksistowska teoria odrzuca zdecydowanie teorię wrodzoności uzdolnień.

Ludze nie rodzą się identyczni. Zarówno ogólna budowa anatomiczna, jak szczególnie system nerwowy, zwłaszcza półkule mózgowe, wykazują różnice indywidualne. Nie każdy rodzi się z jednakowo dobrym słuchem czy wzrokiem, z jednakową szybkością reakcji nerwowych. To wszystko jednak nie oznacza wrodzoności uzdolnień. Człowiek rodzi się z mniejszymi lub większymi zadatkami w postaci anatomiczno-fizjologicznych warunków różnych sprawności. Czy i w jakim stopniu te sprawności rozwiną się, w jakie zespoły działaniowe połączą się, to już zależy od całokształtu warunków treściowych i formalnych procesu wychowawczego. A *uzdolnieniami są właśnie te skomplikowane, powstające i rozwijające się w toku działania zespoły sprawnościowe, które umożliwiają swoistą, złożoną działalność w jakiejś dziedzinie.*

Teoria ta kładzie raz na zawsze kres podbudowanemu klasowo fatalizmowi wychowawczemu, daje pedagogowi do ręki mocny oręż w walce o nowego człowieka, oręż, który powinien skonkretyzować się w pogłębionej pracy nad dydaktyką, nad metodyką swojego przedmiotu. Nie rodzą się ludzie uzdolnieni do historii czy matematyki, malarstwa czy filologii, techniki czy medycyny, agrobiologii czy dziennikarstwa, filozofii czy sztuki teatralnej. Uzdolnienia te rozwijają się w nich lub nie rozwijają się, zależnie od całokształtu oddziaływań wychowawczych oraz od dalszej pracy nad sobą.

Nie ma ani "urodzonych matematyków", ani urodzonych antytalentów do matematyki. I uzdolnienia matematyczne i ich brak zależą od przebiegu procesu wychowawczego. Można już tutaj od razu dodać, że matematyka jest tą nauką, tą postacią działalności naukowej, której uzdolnienia mogą być rozwinięte bardzo wcześnie. H. Fehr na podstawie ankiety przeprowadzonej w r. 1905 stwierdził, że na 93 wybitnych matematyków u 78, tj. u 83 %, talent matematyczny, a więc wysoki stopień uzdolnienia rozwinął się przed 16 rokiem życia, a tylko u jednego po 20 roku życia. Skoro tak jest, to dlaczego matematyka jest wciąż jeszcze uważana w szkole za najtrudniejszy przedmiot? Postaramy się dać zarysową odpowiedź w poniższych wywodach.

3. U źródeł trudności

Źródeł trudności matematyki jest wiele. Jedne są łatwo widoczne, innych trzeba się długo doszukiwać. Jedne z nich mają zasadnicze znaczenie, inne raczej nasilają znaczenie tamtych. Omówimy je kolejno, uwzględniając najbardziej istotne.

a) Brak zainteresowania

W zainteresowaniach wyraża się kierunkowe nastawienie osobowości człowieka. Interesując się jakimś przedmiotem, staramy się tak ustosunkować do niego, ażeby on działał na nas możliwie najdłużej i najbardziej wszechstronnie, ażeby w jak największym stopniu stanowił treść naszego działania.

Młodzieniec interesujący się muzyką uczęszcza na wszystkie koncerty, wyławia skrzętnie z programów radiowych odcinki muzyczne, czyta literaturę naukową i piękną poświęconą muzyce, jak najwięcej czasu poświęca na muzykowanie.

Uczeń interesujący się matematyką cieszy się lekcją matematyki, cieszy się rozwiązywaniem zagadnień, wyszukuje nowe, śledzi konkursy, bierze w nich niejednokrotnie żywy udział, nie przepuści w żadnym piśmie kącika matematycznego.

Zainteresowania są potężną siłą pobudzającą człowieka do bogacenia treści życia psychicznego, dającego mu szersze i głębsze poznanie rzeczywistości, dającego mu większe możliwości działania nie tylko przystosowawczego, ale także i to głównie, kształtującego tę rzeczywistość.

A co się dzieje, gdy na osobnika działają bodźce nie interesujące go, gdy brak mu zainteresowania dla danego przedmiotu? Skutki takiej sytuacji są wielorakie:

1) występuje tendencja do uchylenia się od działania tych bodźców;

2) tam, gdzie to jest niemożliwe (na lekcji), powstaje stan silnego napięcia nerwowego wyrażającego się w tzw. "denerwowaniu się";

3) opanowywanie sposobów poznawania bodźców i posługiwania się tym poznaniem przychodzi niezwykle opornie.

W kategoriach dydaktycznych oznacza to: niechęć do danego przedmiotu i wynikająca stąd trudność jego przyswajania.

Zatrzymamy się dłużej na tym związku braku zainteresowania z trudnością przyswajania sobie materiału nieinteresującego. Zejdziemy nawet na chwilę poniżej ludzkiego szczebla rozwoju, do zwierząt. Choć pokazywalibyśmy psu tysiące razy kapelusz, będzie on i pozostanie dla psa czymś zupełnie obojętnym. Jeżeli jednak będziemy psu pokazywali kapelusz tuż przed jedzeniem, czy przed spacerem, po pewnym czasie samo pokazanie kapelusza wywoła u psa szereg reakcji wskazujących, że kapelusz nie jest mu obojętny. Co się tutaj zmieniło? Obojętny dotychczas kapelusz został związany z pokarmem, czy też spacerem, które są dla psa czymś bardzo "interesującym", zaspakajającym jego potrzeby. W wyniku tego czasowego związania (stanowiącego połączenie w korze mózgowej dwóch ośrodków pobudzenia odpowiadających dwom przedmiotom) kapelusz stał się dla psa sygnałem pokarmu, czy spaceru, a tym samym czymś nieobojętnym.

U człowieka sprawa przedstawia się w sposób daleko bardziej skomplikowany, ale w zasadzie podobny. Człowiek łatwiej opanowuje sposoby działania, łatwiej coś poznaje, zapamiętuje, jeżeli to "coś" wiąże się z jego zainteresowaniami, jeżeli nastawia się wyczekująco i pozytywnie na dany rodzaj bodźców.

Tymczasem matematyka, jako złożony zespół bodźców, jest odbierana z reguły jako przedmiot "nudny", "nieinteresujący", "nudny jak flaki z olejem", "nic nie dający" (określenia uczniowskie). Czy w takiej sytuacji można spodziewać się pozytywnych skutków nauczania? Czy można liczyć na opanowanie przedmiotu przez uczniów, którzy uważają go za nudny, przymusowy, nie wiadomo po co włączony do programu? Można się spodziewać jedynie oczekiwania "kiedyż dzwonek?".

Skąd bierze się ten brak zainteresowania matematyką?

Często można się spotkać z opinią, że matematyka jest "z natury" nudna. Nie ma przedmiotów obiektywnie nudnych i odwrotnie, każdy przedmiot może być subiektywnie interesujący, jeżeli w toku zajmowania się nim powstanie i rozwinie się zainteresowanie.

Jeżeli uczniowie w szkole, obojętne na jakim szczeblu, wykazują brak zainteresowania danym przedmiotem, to pierwszą przyczyną tego jest nierozbudzanie przez wykładowcę zainteresowania. Zarówno treść lekcji, jak sposób jej przedstawienia, jak wreszcie postawa samego pedagoga wyznaczają stopień zainteresowania.

Uczeń, zwłaszcza młodszy, musi widzieć w danym przedmiocie narzędzie jakiegoś działania. Jest to jeden z najistotniejszych elementów metodyki, tak rzadko niestety w pełni stosowany. Uczeń, który nie wie po co się uczy matematyki, uczeń, który nie wie, jak potężnym, jak ciekawym narzędziem poznania i działania jest matematyka, taki uczeń nie może jej umiejscowić w obrębie praktyki swego życia, nie może odczuwać potrzeby posługiwania się nią, ani poważnie ani na wesoło (w różnych grach zgadywankach), taki uczeń nie może się nią interesować. W braku zaś zainteresowania traktuje ją jako zło konieczne, boryka się z nią jako z najtrudniejszym przedmiotem, przeżywa stany gwałtownych zdenerwowań na samą myśl o niej i jednego tylko pragnie: uwolnić się od niej jak najrychlej. Czy takiemu uczniowi matematyka może się wydać najtrudniejszym przedmiotem? Oczywiście, że może.

Czy matematyki można się uczyć w sposób bardzo interesujący? Można. Można, ale trzeba umieć to robić, a żeby umieć, trzeba wpierw uświadomić sobie konieczność tego i chcieć się samemu uczyć, pamiętając, że wzbudzanie zainteresowania u młodzieży do matematyki należy do zadań raczej trudnych. Ale też, gdy ta umiejętność zostanie przez nauczyciela opanowana, matematyka staje się dla uczniów z miejsca o wiele łatwiejsza.

Odpowiedni plan lekcji, należyty dobór interesujących przykładów naprowadzających oraz podawanie praktycznych zastosowań poznanych twierdzeń - oto ważne środki budzenia zainteresowania.

Jeżeli uczeń zaznajomił się już ze wzorem na łuk koła, warto mu pokazać sposób, w jaki na kilka wieków przed naszą erą obliczono promień ziemi.

Podając uczniom wzory trygonometryczne, należy wykorzystać tę okazję do pokazania im, jak przy pomocy tych wzorów oblicza się odległość księżyca czy słońca od ziemi.

Widząc powiązania teorii z zastosowaniem uczeń zainteresuje się na pewno potężnym narzędziem poznawania rzeczywistości, jakim jest matematyka.

Praktyka uczy, że dla ucznia szczególnie interesujące są takie zagadnienia, przy których sam musi dobrać dane potrzebne do ich rozwiązania.

Oto kilka przykładów.

Oblicz objętość kopca piasku o kształcie prostego stożka, mając do dyspozycji zwój sznurka i miarkę metrową.

Oblicz wysokość drzewa przy pomocy taśmy 5 metrowej i prymitywnego teodolitu[1].

Takie zadania nie tylko wzbudzają zainteresowania mate-

1) Przyrząd do mierzenia kątów.

matyczne ale przyczyniają się do zrozumienia jej funkcji narzędziowej przy poznawaniu świata otaczającego.

Nie należy jednak popełniać poza tym błędów tak bardzo rozpowszechnionych w przedwojennych podręcznikach. Oto przykład wręcz komicznego zadania z przedwojennego podręcznika: 5 robotników wykopie studnię w 30 godzinach. W ilu godzinach wykopie tę studnię 50 robotników? Uczeń oblicza, że w trzech godzinach. Czy 50 robotników może kopać studnię równocześnie? Przykład to więc całkiem nierealny. Przed takim wiązaniem książki z życiem ostrzegał Lenin, nazywając je plagą pozostawioną w spadku przez kapitalizm.

Idąc wskazaną powyżej drogą, nauczyciel nie będzie musiał zapewniać uczniów na słowo, że matematyka jest bardzo interesującym przedmiotem.

Podsumowując, można postawić taką tezę: *jeżeli stwierdzasz, że uczeń ma trudności w matematyce, sprawdź, czy się nią odrobinę interesuje, a jeżeli nie, zapytaj się siebie, co uczyniłeś, ażeby nią ucznia zainteresować?*

b) Niejasność pojęć i definicji matematycznych

Wiadomo z życia codziennego do jakich nieporozumień prowadzi posługiwanie się nawet w mowie potocznej wyrazami wieloznacznymi, nie mówiąc już o zdaniach niezrozumiałych. Podobnie jest w nauce, gdzie tolerancja pod tym względem jest o wiele mniejsza. Tutaj operowanie niejasnymi pojęciami jest wykluczone, a jeśli ma miejsce, wówczas zrozumienie niedomaga. W tym samym stopniu odnosi się to do przekazywania wiadomości, do podawania komuś czy przez kogoś wiedzy, do każdego procesu nauczania.

Podobnie, jak w każdej dziedzinie działania, niewłaściwe objaśnianie narzędzi pracy prowadzi do niewłaściwego lub błędnego posługiwania się nimi, tak i tutaj w nauce niewłaściwe objaśnianie pojęć i twierdzeń, niewłaściwe przyswojenie ich przez ucznia musi prowadzić do błędnego lub co najwyżej przypadkowo dobrego operowania nimi, a w każdym razie do poważnych trudności związanych z ich używaniem.

Matematyka, jak każda inna nauka powstała, zrodziła się z potrzeb człowieka, przede wszystkim z potrzeb natury gospodarczej. Stopniowo doskonaliła się, stawała się coraz głębszym narzędziem poznania rzeczywistości, ale równocześnie zatracała swój początkowy oglądowy charakter na rzecz wzrastającej abstrakcyjności. Zupełnie jasno ujmuje to Engels (Anty-Dühring, str. 48) "Tak już pojęcie liczby, jak też pojęcie figury wzięte jest wyłącznie ze świata zewnętrznego, a nie zrodziło się w głowie z czystego myślenia. Musiały istnieć przedmioty, które miały kształt i których kształty porównywano, zanim można było dojść do pojęcia figury. Przedmiotem czystej matematyki są formy przestrzenne i stosunki ilościowe rzeczywistego świata, a więc materiał bardzo realny. Fakt, że materiał ten występuje w formie w najwyższym stopniu abstrakcyjnej, może tylko powierzchownie przysłonić jego pochodzenie ze świata zewnętrznego, żeby jednak te formy i stosunki można było badać w czystej postaci, trzeba je całkowicie oddzielić od ich treści, odrzucić ją jako obojętną: w ten sposób otrzymujemy punkty bez wymiarów, linie bez grubości i szerokości".

Należy podkreślić, iż nie tylko pojęcia matematyczne zaczerpnięte są ze świata zewnętrznego, ale także i prawa, twierdzenia matematyczne posiadają w nim swoje źródła.

W procesie nauczania matematyki praktyczna matematyka oglądowa musi stanowić punkt wyjścia, na niej uczeń dochodzi stopniowo do coraz większych uogólnień, coraz głębszych i odleglejszych zależności. Jeżeli ten oglądowy start nie nastąpi w sposób poprawny, muszą z miejsca powstać bardzo poważne trudności z powodu operowania słowami, które nie mają pokrycia w odzwieciedlaniu rzeczywistości.

Odnosi się to do każdej nauki, ale szczególnie właśnie do matematyki. Matematyka jest nauką operującą pojęciami, które wprawdzie jak wszystkie inne pojęcia odzwierciedlają rzeczywistość, ale których dystans od tej rzeczywistości w toku operowania nimi jest bez porównania większy niż w fizyce, biologii czy geografii. W żadnej nauce nie mści się tak bardzo nienależyte wyjaśnianie uczniom nowowprowadzonych terminów i nieścisłe rzeczowe określenia. Intrepretacja poprawna okaże się tutaj niemożliwa, terminy stają się po prostu pustymi dźwiękami, wyrazami bez znaczenia.

Czy można się dziwić, że to prowadzi do piętrzących się przed uczniem coraz większych trudności.

W matematyce posługujemy się znakowaniem literowym. W podręcznikach szkolnych spotykamy się często z wyjaśnieniami, że literami alfabetu można oznaczać dowolne liczby. Co to znaczy "dowolne liczby"?

Dla jednych uczniów oznacza to jakąś jedną liczbę wybraną na chybił trafił, z reguły całkowitą. Dla innych - liczbę ciągle się zmieniającą. Wreszcie dla jeszcze innych - puste miejsce, które może być zapełnione liczbą.

Ucznia nie można pozostawiać z tego rodzaju niejasną wieloznacznością. Uczeń musi zrozumieć, że litera oznacza albo określoną liczbę, której nie możemy, lub której nie chcemy zapisać cyfrowo, albo oznacza puste miejsce, w które możemy wstawić liczbę z pewnego zbioru. Jeżeli jednak mamy jakieś wyrażenie matematyczne. w którym dana litera się powtarza, wówczas oznacza ona tę samą liczbę, lub miejsce puste na taką samą liczbę. W wyrażeniu $x + 1 = 5$ litera x oznacza albo określoną liczbę i wtedy mamy równość (prawdziwą względnie fałszywą), albo oznacza miejsce puste i wtedy mamy równanie o jednej niewiadomej.

Weźmy pod uwagę wyrażenie:

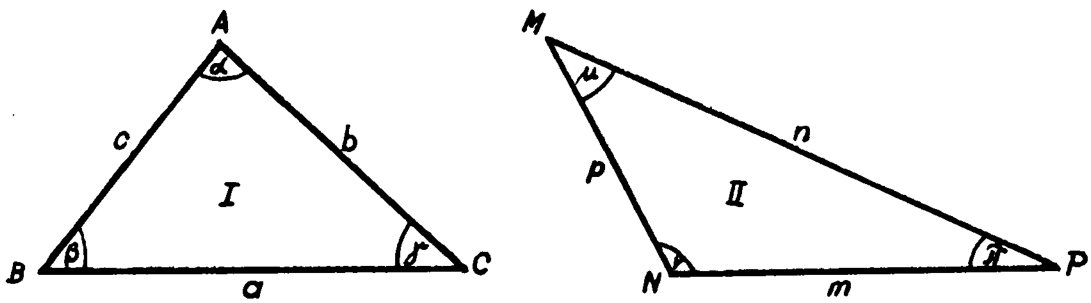
$$ax + b = 0$$

Bez właściwego komentarza uczeń nie wie, jak nazwać to wyrażenie. Jeżeli matematyk nazywa je "równaniem o jednej niewiadomej x" to czyni to dlatego, że przyjął milcząco, że litera x oznacza puste miejsce, natomiast litery a, b oznaczają pewne liczby, tzw. parametry, których nie możemy lub nie chcemy zapisać cyframi. Uczeń musi jasno zrozumieć znaczenie używanych zwrotów, znaczenie używanych pojęć.

Przy przystawaniu i przy podobieństwie dwóch trójkątów spotykamy się z terminem "odpowiednie boki", "odpowiednie kąty", wzgl. "przyporządkowane boki", "przyporządkowane kąty".

Autorzy podręczników często nie podają żadnych wyjaśnień dotyczących znaczenia tych terminów. Nic też dziwnego, że młodzież staje bezradna, gdy ma wyszukać w dwóch trójkątach "odpowiednie elementy". Z tego powodu uważamy za konieczne wyjaśnienie uczniom na czym polega tworzenie odpowiedności, wzgl. przyporządkowania elementów dwóch trójkątów.

Mając dane dwa trójkąty I i II (Rys.1).



Rys. 1

postarajmy się powiązać elementy obu trójkątów w pary w taki sposób, by

1) każdy bok trójkąta I był związany z jednym bokiem trójkąta II,

2) każdy kąt trójkąta I był związany z jednym kątem trójkąta II,

3) każde dwa elementy trójkąta I były związane z różnymi elementami trójkąta II,

4) naprzeciw związanych ze sobą boków, leżały związane ze sobą kąty.

Uczynienie zadość wymienionym powyżej warunkom nie sprawia większych trudności.

Z bokiem "a" możemy związać bok "m" lub "n" lub "p". Zwiążmy "a" np. z "m". Wtedy bok "b" można związać z "n" lub "p". Związmy "b" np. z "p". Ostatni bok "c" musimy związać z bokiem "n".

Przy wiązaniu w pary kątów nie mamy już żadnej swobody, gdyż musimy je powiązać następująco:

"α" z "μ"; "β" z "π"; i "γ" z "ν"[1]

Dla większej przejrzystości zestawmy powiązane pary elementów w tabelce:

a	m
b	p
c	n
α	μ
β	π
γ	ν

Takie powiązanie w pary elementów dwóch trójkątów, które spełnia warunki 1), 2), 3) i 4) nazywamy przyporządkowaniem wzgl. odpowiedniością elementów dwóch trójkątów, a elementy pary nazywamy elementami przyporządkowanymi lub odpowiednimi.

Zauważmy, że mamy nie jedną, lecz więcej (sześć) możliwości wytworzenia różnych przyporządkowań elementów dwóch trójkątów. Po wprowadzeniu odpowiedniości elementów dwóch trójkątów staje się dla uczniów jasną wypowiedź: Dwa trójkąty są przystające, gdy z n a j d z i e m y c h o ć j e d n ą taką odpowiedniość elementów tych trójkątów, że wszystkie odpowiednie elementy są sobie równe.

Dwa trójkąty nie są przystające, gdy przy w s z y s t k i c h możliwych odpowiedniościach elementów tych trójkątów przynajmniej jedna para elementów nie jest sobie równa.

Widoczną jest rzeczą, że konieczne są gruntowne zmiany w stosowanym dotychczas określaniu pojęć, w używanych defi-

1) Wiązanie w pary możemy rozpocząć także od kątów.

nicjach matematycznych i w sposobie ich podawania. Konieczne jest zerwanie z szablonowością metodyczną i dostosowanie zarówno definicji jak sposobów ich podawania do konkretnych możliwości odbiorcy.

Konieczne jest wreszcie świadome kierowanie, planowe kształtowanie recepcji ucznia w tym zakresie.

To wszystko wymaga przede wszystkim wielostronnej pracy badawczej. Każda nowa definicja, każdy nowy sposób objaśniania jej i posługiwania się nią powinny być poddane licznym próbom zanim zostaną wprowadzone do powszechnego użytku szkolnego.

Jeżeli te wszystkie postulaty czekają na realizację lub są w początkach realizacji, czy można się dziwić, że matematyka sprawia obecnie uczniom wielkie trudności?

c) Niedomagania w procesach myślowych

Opanowanie materiału poznania na szczeblu ludzkim opiera się głównie na myśleniu abstrakcyjnym. Tam, gdzie zachodzą niedomagania w jego przebiegu, tam poznanie musi być uwikłane w błędy, a przede wszystkim w mniejsze lub większe trudności.

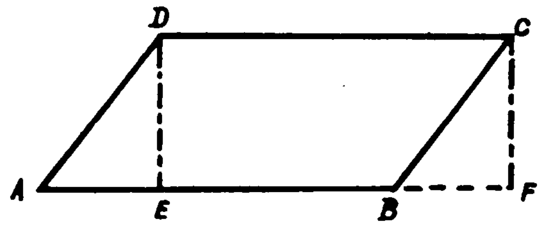
Myślenie jest odzwierciedleniem ogólnych cech przedmiotów i zjawisk oraz stosunków i związków pomiędzy przedmiotami i zjawiskami. Proces myślenia przebiega łatwiej lub trudniej w zależności z jednej strony od dotychczasowego doświadczenia danej osoby w tym zakresie, z drugiej od jakości i sposobu działania danego przedmiotu na nią w procesie nauczania, od przygotowania ucznia i od metodyki stosowanej przez nauczyciela.

Trudności mogą powstawać zarówno przy opanowywaniu pojęć a więc przy dochodzeniu do wyodrębniania ogólnych i istotnych cech przedmiotów, jak przy opanowywaniu stosunków, zależności pomiędzy różnymi elementami treściowymi. W obu wypadkach prowadzi to do mniejszych lub większych niedociągnięć w rozwiązywaniu zagadnień, którego warunkiem jest właśnie rozumienie pojęć i sposobów operowania nimi, rozumienie obiektywnych zależności.

Przy ujmowaniu stosunków, zależności, jeszcze w większym stopniu grozi niebezpieczeństwo mieszania mechanicznego zapamiętania formuł czy reguł z ich myślowym opanowaniem.

Jeden z badaczy zagadnienia myślenia w matematyce, Max Wertheimer podaje przykład świetnie ilustrujący pozorne opanowanie ujmowania zależności.

Dzieci, które nauczyły się obliczać pole prostokąta stoją przed nowym zadaniem obliczania pola równoległoboku.



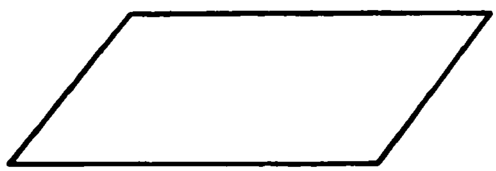
Rys. 2

Nauczyciel podaje im sposób tego obliczania: z punktu C i D (Rys. 2) prowadzę prostopadłe do prostej A B. Nowe punkty oznaczam E i F. Ponieważ A D jest przystające do B C a D E jest przystające do C B, zaś kąty A E D i B F C są proste, więc trójkąt A D E jest przystający do trójkąta B C F. A wtedy pole równoległoboku **AB C D** jest równe polu prostokąta E F C D.

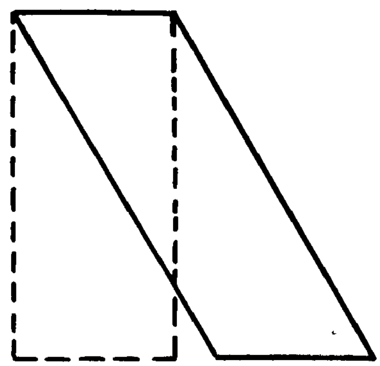
A zatem w oparciu o wzór na pole prostokąta można już obliczyć łatwo pole równoległoboku, mnożąc "podstawę przez wysokość". Dzieci uczą się na pamięć tej konkretnej reguły, uczą się dosłownie przepisu postępowania przy ustalaniu danych potrzebnych do zamiany równoległoboku na prostokąt i na tym się kończy. W domu wykonują mechanicznie kilka podobnych zadań i zagadnienie "jest" opanowane.

Czy rzeczywiście opanowane? Umyślnie podkreśliliśmy, że zadanie zostało w domu w y k o n a n e, a nie r o z w i ą z a n e. Rozwiązanie zakłada myślenie, a to co dzieci robiły i robią najczęściej w podobnych sytuacjach, to jest czysto mechaniczna zamiana sygnałów słownych na ruchy, według kolejności ustalonej przez nauczyciela, a zupełnie nie rozumianej przez ucznia.

Wertheimer przeprowadził następującą próbę. Dzieciom, które nauczyły się obliczać pole równoległoboku przedstawionego na rysunku 3 i wykonały w tym zakresie kilka zadań, Wertheimer [1] polecił na kolejnej lekcji zamienić równoległobok przedstawiony na rys. 4 na prostokąt "o równym polu".



Rys. 3



Rys. 4

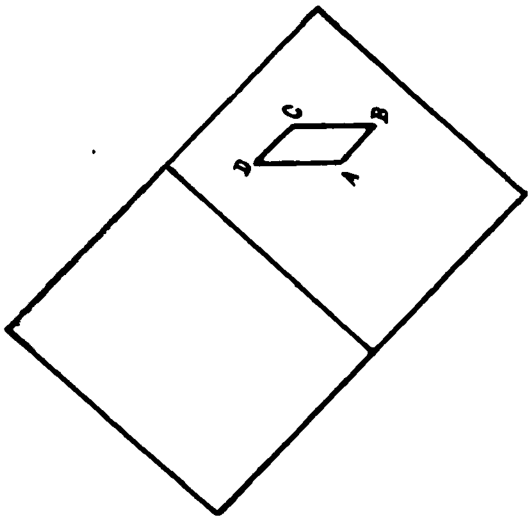
Żadne z dzieci, nawet "najlepsi matematycy" nie rozwiązali tego zadania, a odpowiedź była jedna: "Proszę Pana, myśmy tego jeszcze nie brali". Ci, którzy próbowali zamienić mechanicznie zapamiętane sygnały słowne na ruchy, otrzymywali obie wysokości poza obrębem równoległoboku i zaskoczeni nie wiedzieli co z tym zrobić. Dopiero, gdy któryś z uczniów obrócił zeszyt tak, że równoległobok (rys. 5) znalazł się w położeniu, do którego mógł zastosować zapamiętaną operację [2] recepta nie zawiodła, zamiana równoległoboku na prostokąt poszła mechanicznie gładko.

Na tym przykładzie widać dobrze, że tutaj nie nastąpiło odzwierciedlenie jakichkolwiek istotnych stosunków, zależności, a jedynie powtarzanie czysto werbalnej, czy werbalno-motorycznej reakcji w wypadku zadziałania podniety podob-

---

1) M. Wertheimer: Productive Thinking,1950 r.

2) Por. W. Szewczuk: Teoria postaci i psychologia postaci, Warszawa 1951 r.



Rys. 5

nej (położenie) do uprzednio działającej podniety. Nie ma w tym absolutnie śladu zrozumienia. A tymczasem ten sam autor stwierdza je w działaniu 5 i półletniego dziecka, które rozwiązuje poprawnie analogiczne zadania, w oparciu o poprawne odzwierciedlenie istotnych zależności. Wertheimer nie mija się z prawdą twierdząc, że bardzo wielu nauczycieli matematyki i na szczeblu podstawowym i wyżej uczy reguł matematycznych a nie matematycznego myślenia.

Rozważmy jeszcze jeden przykład, który świadczy, iż nauczyciel nie dbał o wyrobienie u uczniów poprawnego myślenia i rozumowania. Uczeń otrzymał na zadanie domowe udowodnienie twierdzenia, że suma kątów w czworokącie równa się kątowi pełnemu.

Dowód ucznia polegał na tym, że narysował prostokąt i napisał: prostokąt ma cztery kąty proste, więc suma kątów równa się kątowi pełnemu.

Gdyby ucznia przyzwyczajono do tego, że nie zawsze tylko jedna nakreślona figura czyni zadość założeniom twierdzenia, to spostrzegłby natychmiast, że jego rozumowanie nie odnosi się np. do rombów.

Czy nauczyciel może wyrobić myślenie i rozumowanie u uczniów, gdy odpytując będzie zadowalał się poprawnymi a "fonograficznymi" odpowiedziami? Napewno nie. Natomiast przez odpowiednie sformułowanie pytań, które zmuszą uczniów do samodzielnego sformułowania odpowiedzi będzie kształcił ich myślenie.

Przykład: Zaznajomiono uczniów z definicją przystawania trójkątów. Pytanie: "Co to znaczy, że dwa trójkąty są przystające?" wywoła fonograficzne powtórzenie podanej uprzednio definicji, natomiast pytanie: "Jak możesz stwierdzić, że dwa trójkąty są przystające?", zmusza ucznia do myślenia, aby w oparciu o znaną mu definicję dać odpowiedź na zadane pytanie.

Stwierdzamy, że t r u d n o ś c i o p a n o w y w a n i a m a t e m a t y k i **t k w i ą** m i ę d z y i n n y m i **w t y m, i ż r o z w i ą z y w a n i e z a g a d n i e** n i a m a t e m a t y c z n e g o w y m a g a w i ę c e j n i ż w i n n y m p r z e d m i o c i e s a m o d z i e l n e g o m y ś l e n i a i r o z u m o w a n i a, d o c z e g o m o ż n a u c z n i ó w z a p r a w i ć p r z e z n a l e ż y t e m e t o d y c z n e n a u c z a n i e, s t o s o w a n e p r z e z n a u c z y c i e l a u m i e j ę t n i e i s y s t e m a t y c z n i e.

Należyte nauczanie matematyki ułatwia uczniom przyswojenie metody dialektycznej i rozwija w nich dialektyczny sposób myślenia. "Na każdym kroku (Kairow, Pedagogika, str. 112) uczniowie stykają się z przejawami takich praw dialektyki, jak przechodzenie ilości w jakość, jedność przeciwieństw itd. Zaznajomienie się z faktami matematycznymi, w których przejawiają się te prawa, sprzyja rozwojowi dialektycznego myślenia uczniów."

Podajmy choć jeden przykład: zwiększając kąt między ramionami trójkąta równoramiennego stwierdzamy, że gdy kąt osiągnie 180^o otrzymujemy figurę, która już nie jest trójkątem. Zmiana ilości spowodowała zmianę jakości.

Czy można się dziwić, że nie myśląc matematycznie uczniowie mają trudności w matematyce?

d) Trudności związane z zakresem pamięci bezpośredniej

Matematyka, jak rzadko który przedmiot, wymaga umiejętności "obejmowania" i "utrzymywania" w "polu uwagi" i w "polu reakcji" wielości elementów treściowych, które mają stanowić kolejne ogniwa rozumowania. Chodzi tu po prostu o to, że zanim nastąpi aktywne ujęcie jakiejś zależności, przystąpienie do operowania elementami treściowymi (geometrycznymi czy liczbowymi) jako częściami związanymi w obrębie jakiejś całości myślowej, musi nastąpić wyodrębnienie możliwie wszystkich tych elementów i one wszystkie muszą być cały czas w pogotowiu myślowym, "pod ręką". Podobna sytuacja zachodzi przy grze w szachy, gdzie istnieje wielość różnych elementów ich kombinacji i trzeba zdawać sobie z nich sprawę przez cały czas działania.

Weźmy przykład:

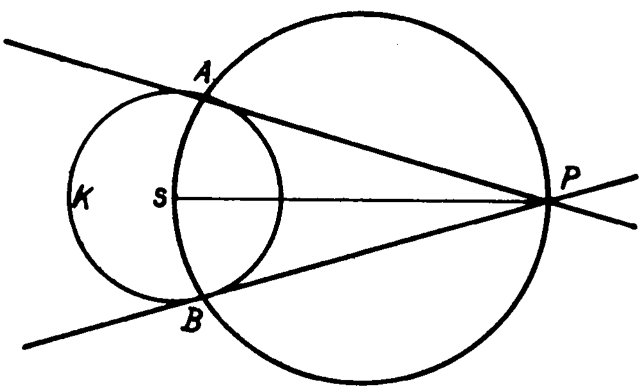
Uczeń ma rozwiązać następujące zadanie konstrukcyjne: Nakreślić styczne do danego koła K przechodzące przez dany punkt P leżący zewnątrz koła.

Gdy uczeń przypomni sobie, że

1) styczna tworzy z promieniem koła łączący środek S z punktem styczności A kąt prosty;

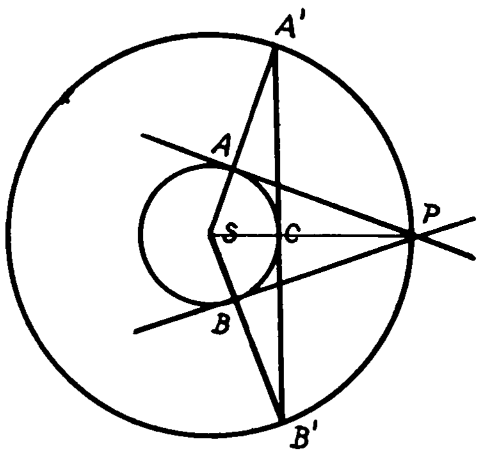
2) kąt wpisany w okrąg a wspierający się na średnicy jest kątem prostym

nie trudno mu będzie podać rozwiązanie uwidocznione na rysunku 6. Jeżeli uczniowi nie przyszła na myśl druga z wymieniowych własności to i wtedy mógłby rozwiązać zadanie, rozumując w następujący sposób:



Rys. 6

Wyobrażę sobie, że taką styczną już znalazłem, np. P A. Trójkąt ASP jest trójkątem prostokątnym. Nie mając stycznej PA nie potrafię zbudować tego trójkąta SAP (zob. rys. 7). Skoro potrafię znaleźć A′ i B′ (A′ B′ $\perp$ S P) to łącząc odcinkiem S z A′ otrzymam punkt styczności A, podobnie otrzymam punkt B i zadanie jest rozwiązane.



Rys. 7

Na tym przykładzie widzimy jak pojemna wierna i usłużna pamięć nasuwa uczniowi pomysł (i to nie jeden) drogi prowadzącej do rozwiązania.

Gdy chodzi o dłuższe dowody twierdzeń, to zdarza się, iż uczeń nie mając wyrobionej dobrej pamięci zgubi się w toku dowodzenia. Zwrócił na to uwagę Poincaré podkreślając, może w sposób zbyt schematyczny, że "między chwilą, w której pierwszy raz napotykamy jakiejś twierdzenie będące wnioskiem z sylogizmu, a chwilą, w której znowu je odnajdujemy, jako przesłankę innego sylogizmu, upłynie często znaczny czas, przesunie się wiele ogniw łańcucha, albo co gorsza zapominamy, co ono właściwie oznacza".

Tam, gdzie nie ma szerokiego zakresu pamięci bezpośredniej z tą cechą zewnętrznej operatywności członów związanych z sobą zależnościami, tam nie rozwinie się również "wyczucie" konieczności danego toku rozumowania.

Tam, gdzie nie ma szerokiego zakresu pamięci bezpośredniej i opierającego się na niej zrozumienia konieczności logicznej konsekwencji ogniw myślowych, tam muszą istnieć trudności, tam matematyka musi być szczególnie trudna.

T r o s k a i s y s t e m a t y c z n e c z u w a n i e n a u c z y c i e l a, b y w y r a b i a ć u u c z n i a t ę b e z p o ś r e d n i ą p a m i ę ć w i e l o c z ł o n o w y c h u k ł a d ó w, u s u n i e w b a r d z o p o w a ż n y m s t o p n i u "t r u d n o ś c i" m a t e m a t y k i.

e) Niebezpieczeństwo luk

Wiadomości każdej nauki stanowią zwarty system, ale w żadnej nauce wiadomości nie są z sobą tak ściśle powiązane, nie zazębiają się z sobą w tym stopniu, jak w matematyce. Brak znajomości jednego, nieraz na pozór drobnego faktu, na którym opieramy się, utrudnia, a czasami uniemożliwia uczniowi zrozumienie rozważania matematycznego.

Systematyczność matematyki przewyższa każdą inną naukę. W wielu naukach występuje wielostopniowość, ale w żadnej nauce wyższe stopnie nie są tak zależne od niższych, logicznie (właśnie logicznie) prostszych, jak w matematyce. Luka w wiadomościach na szczeblu wcześniejszym, wynikła z reguły z niesystematycznej pracy ucznia i niedokładnej kontroli uczącego, nie mówiąc już o niedociągnięciach metodycznych tego ostatniego, uniemożliwia efektywne posuwanie się naprzód.

Jeżeli uczeń ma luki w wiadomościach geograficznych, dotyczących Europy, to one nie stanowią istotnej przeszkody w opanowaniu geografii Australii czy Afryki. A w matematyce drobna nieraz luka w wiadomościach, uniemożliwia uczniowi zrozumienie nowego materiału. Gdyby uczący zdawali sobie sprawę z tego, to przed przystąpieniem do nowej lekcji przypominaliby drogą odpowiednio dobranych pytań, te wszystkie wiadomości, które będą potrzebne do zrozumienia nowego materiału.

Należy z całym naciskiem podkreślić konieczność gruntownego opanowania przez każdego ucznia podstawowych wiadomości matematycznych, do których bezustannie musi się odwoływać, oraz umiejętności zastosowania posiadanych wiadomości. Brak wiadomości i nieumiejętność stosowania posiadanych wiadomości, powodują często spotykane u ucznia niezrozumienie.

Pięknie wypowiedział się na ten temat Jan Śniadecki (Baraniecki: Teoria wyznaczników 1879 Przedmowa).

"Nikt zapewne nie wątpi o wielkich matematyki pożytkach, ale z początkową tej nauki znajomością żaden kraj ani do tych pożytków nie trafi, ani do rzędu narodów gruntownie uczonych należeć nie będzie. Żeby zaś do głębszych wiadomości matematycznych przebrać się pomyślnie i uczuć tę rozkosz umysłu, jaką napełniają myślącego człowieka, trzeba je koniecznie w początkowych zasadach objąć gruntownie".

f) Tzw. kompleks niższości i poczucia nieudolności

Nauka burżuazyjna nierzadko fałszuje rzeczywistość w interesie klasy panującej. Widzieliśmy to poprzednio przy omawianiu teorii wrodzonych uzdolnień. Innym wariantem tego błędnego wyjaśniania rzeczywistości jest adlerowska teoria o kompleksie niższości, którego zadatki człowiek przynosi z sobą na świat, który w środowisku społecznym wyraźnieje, stając się podstawowym czynnikiem determinującym rozwój jego psychiki.

Jeżeli człowiek osiąga coć w życiu, to z reguły właśnie w wyniku przezwyciężania owego kompleksu niższości. Teoria ta w sposób dobrze zawoalowany broniła status quo społeczeństwa klasowego.

Nie fikcyjny kompleks niższości występujący w wyjątkowych wypadkach patologicznych względnie psychopatycznych, lecz zwykłe normalne poczucie nieudolności, może być przyczyną strukturalną trudności w odniesieniu do matematyki, może spowodować niechęć, a nawet silną awersję do matematyki.

Ale poczucie nieudolności nie jest czymś gotowym, nie jest postawą zajętą od pierwszej chwili zetknięcia się z nowym przedmiotem. Poczucie nieudolności rodzi się, powstaje, wzrasta i utrwala się. Kiedy indziej powstaje, wzrasta, potem maleje, zanika. Stalin na XVI Zjeździe WKP(b) chłoszcząc prawicowych oportunistów za chęć kapitulacji wobec trudności powiedział (J. Stalin, Dzieła t. 13, str. 28): Pojawiła się jakaś trudność, coś hamuje, już się trwożą ... Zaszeleścił gdzieś karaluch, nie zdążył jeszcze wypełznąć jak należy ze swej kryjówki a oni już odskakują, już są przerażeni i podnoszą przeraźliwy krzyk o katastrofie".

Czy tych słów Stalina nie można odnieść do wielu uczniów, gdy chodzi o pokonywanie przez nich trudności napotykanych w matematyce? Sądzimy, że tak.

A zatem poczucie nieudolności powstaje faktycznie w wyniku trudności, na jakie uczeń napotyka w toku swej działalności, szczególnie, gdy nie ma możliwości ich opanowania. Jest ono pochodną trudności wynikłą z obiektywnych, a nieraz wyimaginowanych trudności zaistniałych w samym działaniu, w samym uczeniu się matematyki.

Uczeń na samym początku nie może sobie dać rady z opanowaniem przerobionego materiału. Próbuje raz, drugi - nie udaje się. Uczeń nie wie o tym, że przeczyną tego jest niewłaściwe przedstawienie zagadnienia przez nauczyciela, że przyczyną jest może jego nieuwaga w czasie lekcji, względnie luki w wiadomościach.

Opierając się na spostrzeżeniach poczynionych podczas około 500 lekcyj matematycznych prowadzonych przez z górą 120 nauczycieli, możemy stwierdzić, iż na każdej lekcji co najmniej kilku uczniów nie uważało wcale zajmując się rozmaitymi sprawami nie związanymi z lekcją. A nadto brak uwagi wykazuje jeszcze pewna grupa uczniów spośród tych, których zachowanie zewnętrzne nie budzi zastrzeżeń o czym świadczy to, iż uczniowie ci wezwani do odpowiedzi nie potrafią powtórzyć nawet pytania nauczyciela.

Wytworzenie w czasie lekcji odpowiedniego nastroju sprzyjającego skupieniu uwagi, przede wszystkim przez wzbudzenie zainteresowania, zaliczymy do bardzo ważnych ale jednocześnie do bardzo trudnych zadań nauczyciela matematyki.

Należy jednak przyznać, że nauka oparta wyłącznie na zainteresowaniu nie sprzyja wyrobieniu samoopanowania i woli ucznia. W nauce nie wszystko jest zawsze interesujące, trzeba niekiedy zdobywać siłą woli pewne wiadomości.

Uczeń stoi w obliczu faktu, że nie może sobie dać rady, że z drugiej strony inni dali sobie radę. Odpisuje zadanie, wynik poprawny, ale faktu niezrozumienia to nie usuwa. Następnym razem powtarza się to samo. Zdarza się indywidualna kontrola, wynik negatywny. Nauczyciel z reguły stwierdza, że uczeń "nie umie", uczeń czuje, że "nie potrafi". Wytwarza się coraz mocniejsze przekonanie o własnej nieudolności. Jeżeli się doda, że to wszystko dzieje się na tle nierozumienią przez dziecko sensu uczenia się matematyki i zazwyczaj bardzo rzadkiej interwencji nauczyciela w odpowiednim momencie, a bardzo często niewłaściwej interwencji rodziców, nie trudno zrozumieć, że w dziecku na tle nieudolności rodzi się negatywna postawa, niechęć, uraz do matematyki.

Poczucie nieudolności miewa i inne, całkiem uboczne przyczyny. Panuje jeszcze i dziś przekonanie, że dziewczęta mają mniejsze od chłopców zdolności do matematyki. Faktem jest, że dotychczas wśród wybitnych matematyków rzadko spotyka się kobietę. Faktem jest, że dotychczas większy procent chłopców niż dziewcząt interesowało się matematyką. Faktem jest, że w szkole dziewczęta częściej niż chłopcy mają trudności w matematyce. Ale z tego wszystkiego nie wynika wcale, że istnieją jakieś obiektywne normalne przyczyny większych trudności w matematyce u dziewcząt niż u chłopców, przyczyny tkwiące w sposobie pracy ich kory mózgowej. Przypuszczenie takie byłoby dziś skończonym absurdem.

Właśnie w przesądach domowych, rzadziej w błędnych przekonaniach nauczających tkwi przyczyna tych różnic. Dziewczynka z góry nastawiona na to, że matematyka jest trudna, że dla niej jako dziewczynki matematyka jest szczególnie trudna, widzi trudności przez "szkło powiększające" i łatwo się załamuje na starcie, szczególnie gdy nauczyciel nie stoi na wysokości zadania.

Taka negatywna postawa na wyrost wyrobiona w wyniku osłuchania się w domu i wśród starszych uczniów w szkole, odnośnie do trudności matematyki, staje się rzeczywiście poważnym hamulcem w opanowywaniu materiału a tym samym nieistotnym źródłem poważnych trudności.

4. Uzdolnienia matematyczne

Matematyka należy do przedmiotów szkolnych uważanych za najtrudniejsze. Poznaliśmy kilka zasadniczych przyczyn tego stanu rzeczy. Uzasadniliśmy, że w żadnym razie nie należy doszukiwać się przyczyny w braku wrodzonych uzdolnień.

Czy w takim razie każdy uczeń może opanować matematykę? Tak, **każdy** może ją opanować.

Im lepiej poznajemy przyczyny istniejących trudności, im doskonalszą staje się metodyka matematyki i posługiwanie się nią, tym bardziej oddalamy się od poglądu ugruntowanego przez idealistyczną psychologię Binetów, Sternów, Claperedów, poglądu metafizycznego, antynaukowego, tym wyraźniej widzimy słuszność naszego prawdziwego naukowego marksistowskiego stanowiska: wychowanie, praca nad sobą a nie geny decydują o ukształtowaniu naszej psychiki.

Jeżeli znany J. Perry twierdzi, że prawie każdy człowiek może opanować matematykę w stopniu umożliwiającym pracę twórczą, to raczej nie mija się z prawdą.

Czy w takim razie jest sens mówić o uzdolnieniach matematycznych? Naturalnie, że jest sens. Przypomnijmy sobie definicję uzdolnienia. Uzdolnienie jest powstającym w toku działania zespołem sprawnościowym, który umożliwia swoistą złożoną działalność produkcyjną w jakiejś dziedzinie.

Nie trudno wyciągnąć z tego wniosek, że uzdolnienia można kształtować i rozwijać, że w każdym psychicznie normalnym człowieku można rozwinąć uzdolnienia matematyczne. Nie musi to być zaraz talent, ale będą to niewątpliwie uzdolnienia.

Jak we wszystkim, tak i tutaj osiągnięcie tego rodzaju celu zakłada spełnienie określonych warunków.

Oto zasadnicze z nich:

1. Usunięcie jakichkolwiek uprzedzeń obawowych lub wręcz wrogich nastawień ucznia względem matematyki.

2. Rozbudzenie w uczniu zainteresowania matematyką, głównie w oparciu o taki sposób wprowadzenia go do tej nauki, aże-

by widział w niej realne narzędzie działania o zajmującej go treści, ażeby rozwiązywanie zadań matematycznych było przeżywane jako przyjemne pokonywanie przeszkód, jako pełne sensu działanie, ażeby stało się potrzebą.

3. Nauczenie ucznia sposobów myślowego wyodrębniania ogniw rozumowania matematycznego tak, aby przychodziło mu ono z łatwością, stając się podstawą rozumienia sytuacji zadania matematycznego.

4. Ćwiczenie możliwie najbardziej pojemnej pamięci bezpośredniej w zakresie treści matematycznych.

5. Wyodrębnienie umiejętności szybkiego ujmowania stosunków, zależności zachodzących między elementami złożonych wielości treściowych.

6. Doprowadzenie do maksymalnej jasności operatywnej w zakresie definicji, pojęć i twierdzeń wchodzących w skład rozumowania matematycznego.

7. Doprowadzanie do możliwie największej jasności każdego kroku, zanim uczyniony zostanie następny krok na drodze opanowywania materiału, tak ażeby nie powstała najmniejsza luka wiadomościowa oraz sprawnościowa.

8. Indywidualne traktowanie uczniów wykorzystujące w jak największym stopniu w formie pomocy możliwości bardziej zaawansowanych w stosunku do mniej zaawansowanych.

Realizując te postulaty nauczyciel musi sobie doskonale zdawać sprawę, że żadne pojęcie matematyczne oraz żadne twierdzenie nie może być przez uczniów należycie i głęboko przyswojone przez jednorazowy akt poznawczy, gdyż poznanie jest procesem rozwojowym, jest procesem dialektycznych zmian, które prowadzą do coraz pełniejszego odzwierciedlenia rzeczywistości, tego co w niej najistotniejsze.

Lenin akcentując wszędzie, że tylko myślenie dialektyczne prowadzi do prawdziwego poznania, poucza, że "myśleć dialektycznie to znaczy nie zakładać, że nasze poznanie jest od razu czymś gotowym i niezmiennym, lecz analizować, w jaki sposób z niewiedzy powstaje wiedza, w jaki sposób wiedza niepełna, nieścisła staje się pełniejszą i ściślejszą[1]".

---

1) Lenin: Dzieła, Tom 14, str. 115.

Liczne zastosowania dotyczące coraz innego materiału pozwalają uczniowi przy stosowaniu tych samych twierdzeń wnikać coraz głębiej w ich rozumienie. "Wszelka przyswojona przez umysł wiedza - pisze Uszyński[1], powracając ponownie do świadomości nie tylko staje się jaśniejsza i gruntowniejsza, lecz zyskuje zdolność, że się tak wyrażę, przyciąganie do siebie nowych wiadomości i przekazywania im swojej własnej trwałości".

Jeżeli wyszczególnione przez nas postulaty zostaną zrealizowane w procesie nauczania, można mieć pewność poważnego polepszenia się postępów w opanowaniu matematyki przez uczniów, można się spodziewać rozwinięcia się uzdolnień matematycznych u całej młodzieży. Trzeba jednak pamiętać, że na powstanie zainteresowań składa się bardzo wiele czynników i że z drugiej strony trudno wymagać aby uzdolnienia do matematyki miały dominować przed innymi. Dlatego praktyczna realizacja tych postulatów doprowadzi z pewnością do poprawnej znajomości matematyki u wszystkich uczniów, a tylko niektórzy uczniowie osiągną szczebel szczególnego uzdolnienia czy nawet talentu.

Rzecz w tym, aby uczniów przestała ostatecznie dręczyć "zmora" matematyki, aby zniknęły bariery odgradzające ucznia od nauki równie ciekawej jak każda inna, stanowiąca jak wszystkie nauki z jednej strony narzędzie, z drugiej rezultat poznawania rzeczywistości, a w obu wypadkach podstawę kształtowania przez człowieka otaczającego go świata.

Ale uczeń każdy musi zrozumieć, że najlepszy nauczyciel nie potrafi nic zrobić, jeżeli w nim, w uczniu, nie będzie dobrej chęci, jeśli on nie przyswoił sobie, nie wziął do serca słów skierowanych przez Stalina pod jego adresem: "... aby budować, trzeba umieć, trzeba opanować naukę. Aby umieć, trzeba się uczyć. Uczyć się uporczywie i wytrwale... Przed nami stoi twierdza. Twierdza ta - to nauka z jej licznymi gałęziami wiedzy. Tę twierdzę powinniśmy zdobyć za wszel-

---

1) Wybór pism pedagogicznych, 1939, T.I, str. 338.

ką cenę. Tę twierdzę powinna zdobyć młodzież, jeśli chce być budowniczym nowego życia, jeśli rzeczywiście chce stanowić zmianę starej gwardii".

Bibliografia

Baranowski J.: Teoria wyznaczników. 1879.

Engels F.: Anty-Dühring. Warszawa, 1949.

Gierulanka D.: O przyswajaniu pojęć geometrycznych. Poznań, 1948.

Kagen W.F. : Osnowy geometrji. I,II.

Lenin W.I.: Marks, Engels - marksizm. 1949.

Lenin W.I.: Materializm a empiriokrytycyzm. Dzieła, t.14. Warszawa 1949.

Pczołko A.: Metodyka nauczania arytmetyki w szkole początkowej, Warszawa, 1951.

Sawyer W.W.: Mathematician's delight. 1950.

Stalin J.: Końcowe przemówienie na XVI Zjeździe WKP(b). Dzieła, t.XIII.

Szewczuk W.: Teoria postaci i psychologia postaci. Warszawa 1951.

Uszyński K.D.: Wybór pism pedagogicznych. 1939.