Stanisław Gołąb

O formule Gaussa-Bonneta [1])

Dobrze znana z klasycznej geometrii różniczkowej formuła Gaussa--Bonneta była przedmiotem wielu prac (także w ostatnich czasach), które przynosiły bądź nową metodę dowodu, bądź uogólnienie tej formuły. Uogólnienia mogą iść w różnych kierunkach, np. w kierunku rozszerzenia ważności tej formuły na przestrzenie więcej wymiarowe lub na przestrzenie nieeuklidesowe.

W niniejszym referacie pragnę poruszyć inny kierunek uogólnień, a mianowicie polegający na możliwie daleko posuniętej redukcji założeń regularności. O sprawie tej mówiłem ogólnie w swym odczycie na niedawnym kongresie w Bukareszcie [2]). Obecnie wybrałem z tego kręgu zagadnień ten temat szczególny z uwagi na to, że formuła Gaussa-Bonneta stała się ostatnio w pracach Hartmana i Wintnera potężnym instrumentem przy badaniach nad liniami geodezyjnymi na powierzchniach, przy badaniach dotyczących wzajemnego stosunku między geodetyką jako całką pewnego układu równań zwyczajnych drugiego rzędu a geodetyką jako linią najkrótszą łączącą dwa punkty na powierzchni.

W formule Gaussa-Bonneta

$$\iint\limits_S K\,dS + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{W_i}^{W_{i+1}} k_g \cdot ds = 2\pi \tag{1}$$

K oznacza krzywiznę Gaussa, S oznacza płat powierzchni ograniczony n łukami $Ł_i$ łączącymi punkt W_i z punktem W_{i+1} ($W_{n+1} = W_1$), k_g oznacza krzywiznę geodezyjną łuków, dS element powierzchni płata, ds element długości łuku, wreszcie α_i oznacza miarę kąta (zewnętrznego), jaki tworzy łuk zorientowany $Ł_i$ z łukiem $Ł_{i+1}$ we wspólnym wierzchołku W_i.

Powstaje problem, przy jakich założeniach regularności co do płata S oraz co do łuków $Ł_i$ obowiązuje powyższa formuła Gaussa-Bonneta.

---

[1]) Artykuł niniejszy jest streszczeniem komunikatu, jaki wygłosiłem na kolokwium geometrycznym w Balatonvilágos w dniu 12 X 1956.

[2]) w dniu 2 VI 1956.

Otóż podręczniki klasycznej geometrii różniczkowej dowodzą tego twierdzenia przy założeniach, że płat S jest klasy C_3, łuki $Ł_i$ zaś klasy C_2. W r. 1938 van Kampen podał dowód formuły Gaussa-Bonneta przy założeniach słabszych, zakładając mianowicie, że płat S jest klasy C_2. Hartman i Wintner w r. 1951 uogólnili ten wynik, dowodząc prawdziwości formuły G-B przy założeniu, że składowe g_{ik} tensora metrycznego (pierwszej kwadratowej formy różniczkowej) są klasy C_1. Przy tych założeniach krzywizna Gaussa K może nie istnieć w sensie klasycznym. Krzywizna ta może być jednak uogólniona — jak to pokazał Weyl w swej pracy o sztywności owaloidów — i określona za pomocą formuły całkowej. Powstaje problem prawdziwości formuły G-B przy dalszym uogólnieniu pojęcia krzywizny np. w sensie Sobolewa. W każdym razie można stwierdzić na przykładach zachodzenie formuły G-B również i w przypadkach, gdy np. krzywizna K jest na płacie S nie ograniczona lub gdy nie jest spełniona jednoznaczność geodetyk przez dwa, dość bliskie, punkty płata S.

Nie próbowano natomiast — o ile mi wiadomo — uogólniać formuły G-B, redukując założenia co do regularności łuków $Ł_i$. Sprawa ta łączy się ściśle z kwestią, w jakim sensie brać krzywiznę geodezyjną k_g łuków $Ł_i$. Wiadomo, że istnieje kilka definicyj tego pojęcia, nierównoważnych sobie wzajemnie, jeśli łuk $Ł_i$ jest słabej regularności. Krzywiznę geodezyjną k_g można zdefiniować czysto analitycznie za pomocą pierwszego z równań Darboux

$$\frac{dt_1}{ds} = k_g \cdot t_2 + k_n \cdot t_3, \tag{2}$$

gdzie s oznacza łuk krzywej na powierzchni, t_1 — wektor jednostkowy styczny do krzywej, t_3 — wektor jednostkowy normalny do powierzchni (skierowany konwencjonalnie), t_2 zaś wektor uzupełniający (położony w płaszczyźnie stycznej do powierzchni), taki, żeby układ (t_1, t_2, t_3) był układem ortonormalnym. Współczynniki skalarne k_g i k_n noszą właśnie nazwę, odpowiednio: krzywizny geodezyjnej oraz krzywizny normalnej.

Krzywiznę k_g można również określić czysto geometrycznie, jako krzywiznę rzutu krzywej na płaszczyznę styczną do powierzchni, a ponieważ samą krzywiznę można rozmaicie zdefiniować, stąd więc pochodzi wieloznaczność określenia krzywizny geodezyjnej. Krzywiznę geodezyjną k_g można jeszcze inaczej zdefiniować, a mianowicie za pomocą pojęcia geodetyki, które to ostatnie pojęcie może znów być wielorako określone.

W tej wieloznaczności k_g oraz różnorakiej regularności łuku, wymaganej przez różne definicje, tkwi szereg otwartych pytań odnośnie do ważności formuły G-B. Rozstrzygnięciem tych pytań ma się w najbliższym czasie zająć S. Serafin asystent WSP.