ROCZNIK NAUKOWO-DYDAKTYCZNY WSP W KRAKOWIE
NR 7 MATEMATYKA 1958

Zenon Moszner

O mierzalności według Lebesgue'a rodzin pewnych zbiorów

Celem niniejszej noty jest dowód następującego twierdzenia (Tw.):

I. Suma mnogościowa Z dowolnej rodziny R zbiorów prawie wypukłych [1]) przestrzeni kartezjańskiej n-wymiarowej R_n, z których każdy posiada przynajmniej jeden punkt wewnętrzny, jest mierzalna objętościowo według Lebesgue'a [2]).

II. Ponadto miara Lebesgue'a zbioru Z nie zależy od tego, czy i jakie punkty brzegowe zbiorów rodziny R do nich należą, a więc w szczególności od tego, czy zbiory te są domknięte, czy otwarte.

Dowód

Do każdego punktu p należącego do zbioru Z zbudujemy taki ciąg $\{\sigma_k(p)\}$ kul domkniętych, że:

a) Kula $\sigma_k(p)$ zawiera się wewnątrz pewnego zbioru rodziny R, a więc $\sigma_k(p) \subset Z$,

b) Kula $\sigma_k(p)$ leży wewnątrz kostki $W_k(p)$ o środku w punkcie p oraz boku $\frac{1}{k}$,

c) istnieje taka stała α niezależna od k [3]), dla której:

---

1) Zbiór nazywam prawie wypukłym, jeżeli można go otrzymać ze zbioru wypukłego przez usunięcie z niego co najwyżej pewnych (ewentualnie wszystkich) jego punktów brzegowych.

2) Twierdzenie to jest uogólnieniem (dla miary Lebesgue'a) następującego twierdzenia: Każdy ograniczony zbiór przestrzeni R_n, który jest sumą mnogościową zbiorów wypukłych, i takich, że każdy z nich zawiera kulę o stałym promieniu, jest mierzalny w sensie Jordana, — którego dowodzi F. Behrend w pracy *Bemerkung zur Inhaltstheorie* Math. Ann. Bd. 111 Leipzig 1935, str. 289—292. Zob. też mój artykuł „*Przyczynek do teorii mierzalności zbiorów w sensie Jordana.* Dziesięciolecie WSP w Krakowie. Zbiór rozpraw i artykułów. Kraków 1957. Twierdzenie (Tw.) nie daje się przenieść na miarę Jordana (zob. tamże str. 446).

3) Stała α może zależeć od punktu p.

$$\frac{|\sigma_k(p)|}{|W_k(p)|} > \alpha > 0$$ [4]

Ponieważ $p \in Z$, istnieje w rodzinie R taki zbiór A prawie wypukły, że $p \in A$.

Ponieważ w myśl założenia zbiór A ma punkty wewnętrzne, istnieje taki punkt q, oraz taka stała $\varrho > 0$, że kula K o środku w punkcie q i promieniu ϱ zawiera się wewnątrz zbioru A.

Oznaczmy przez ϱ_k promień kuli wpisanej w kostkę $W_k(p)$, mamy $\varrho_k = \frac{1}{2k}$.

Rozważmy przypadki:

I. $p = q$

Połóżmy $\bar{\varrho}_k = \min\left(\frac{\varrho}{2}, \frac{\varrho_k}{2}\right)$ i niech $\sigma_k(p)$ oznacza kulę domkniętą o środku w punkcie p i promienu $\bar{\varrho}_k$. Wobec $p = q$ oraz $\bar{\varrho}_k < \varrho$ mamy $\sigma_k(p) \subset K$, stąd kula $\sigma_k(p)$ zawiera się wewnątrz zbioru A, warunek a) jest więc spełniony.

Wobec $\bar{\varrho}_k < \varrho_k$ kula $\sigma_k(p)$ zawiera się wewnątrz kostki $W_k(p)$, spełniony jest więc i warunek b).

Mamy: $$\frac{|\sigma_k(p)|}{|W_k(p)|} = \frac{\lambda_n \cdot (\bar{\varrho}_k)^n}{\left(\frac{1}{k}\right)^n} = \lambda_n \cdot (k \cdot \bar{\varrho}_k)^n$$ [5].

Ponieważ $\bar{\varrho}_k = \min\left(\frac{\varrho}{2}, \frac{\varrho_k}{2}\right) = \min\left(\frac{\varrho}{2}, \frac{1}{4k}\right)$,

stąd 1) gdy $\bar{\varrho}_k = \frac{\varrho}{2}$ mamy $k \cdot \bar{\varrho}_k = \frac{k \cdot \varrho}{2} > \frac{\varrho}{4}$,

a więc $$\frac{|\sigma_k(p)|}{|W_k(p)|} > \lambda_n \left(\frac{\varrho}{4}\right)^n,$$

2) gdy $\bar{\varrho}_k = \frac{1}{4k}$ mamy $k \cdot \bar{\varrho}_k = \frac{1}{4} > \frac{1}{5}$,

a więc $$\frac{|\sigma_k(p)|}{|W_k(p)|} > \lambda_n \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n.$$

Oznaczmy przez $$\alpha = \min\left(\lambda_n\left(\frac{\varrho}{4}\right)^n, \lambda_n \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$$

---

[4] Przez $|Z|$ oznaczam tu i dalej:
a) miarę zewnętrzną według Lebesgue'a zbioru Z, lub
b) miarę Lebesgue'a zbioru Z, jeżeli jest on mierzalny w tym sensie.

[5] Przez $\lambda_n \varrho^n$ oznaczam objętość kuli o promieniu ϱ w przestrzeni n-wymiarowej.

wtedy
$$\frac{|\sigma_k(p)|}{|W_k(p)|} > \alpha,$$
oraz wobec $\varrho > 0$ mamy $\alpha > 0$, a więc i warunek c) jest spełniony.

II. $p \neq q$.

Oznaczmy przez r_k punkt, w którym promień $\overline{pq}$ przecina powłokę kuli wpisanej w kostkę $W_k(p)$, a przez t_k środek odcinka pr_k.

Połóżmy
$$\bar{\varrho}_k = \min\left(\frac{\varrho_k}{4}, \frac{\varrho \cdot \overline{t_k p}}{2 \cdot \overline{pq}}\right)$$
i niech $\sigma_k(p)$ oznacza kulę domkniętą o środku w punkcie t_k i promieniu $\bar{\varrho}_k$.

Wnętrze kuli o środku w punkcie t_k i promieniu $\frac{\varrho\, \overline{t_k p}}{\overline{pq}}$ zawiera się w zbiorze A [6]), a stąd kula domknięta $\sigma_k(p)$ o promieniu dwukrotnie mniejszym leży wewnątrz zbioru A, czyli warunek a) jest spełniony.

Ponieważ środek t_k kuli $\sigma_k(p)$ jest od punktu p odległy o $\frac{\varrho_k}{2}$, a promień kuli $\sigma_k(p)$ jest nie większy od $\frac{\varrho_k}{4}$, kula $\sigma_k(p)$ leży wewnątrz kostki $W_k(p)$, warunek b) jest więc też spełniony.

Mamy:
$$\frac{|\sigma_k(p)|}{|W_k(p)|} = \frac{\lambda_n (\bar{\varrho}_k)^n}{\left(\frac{1}{k}\right)^n} = \lambda_n \cdot (k\bar{\varrho}_k)^n.$$

Ponieważ
$$\bar{\varrho}_k = \min\left(\frac{\varrho_k}{4}, \frac{\varrho \cdot \overline{t_k p}}{2\,\overline{pq}}\right) = \min\left(\frac{1}{8k}, \frac{\varrho \cdot \frac{1}{4k}}{2 \cdot \overline{pq}}\right) = \min\left(\frac{1}{8k}, \frac{\varrho}{8k \cdot \overline{pq}}\right),$$
stąd:

1) gdy $\bar{\varrho}_k = \frac{1}{8k}$ mamy $k \cdot \bar{\varrho}_k = \frac{1}{8} > \frac{1}{9}$,

a więc
$$\frac{|\sigma_k(p)|}{|W_k(p)|} > \lambda_n \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^n,$$

2) gdy $\bar{\varrho}_k = \frac{\varrho}{8k \cdot \overline{pq}}$ mamy $k \cdot \bar{\varrho}_k = \frac{\varrho}{8 \cdot \overline{pq}} > \frac{\varrho}{9 \cdot \overline{pq}}$,

a więc
$$\frac{|\sigma_k(p)|}{|W_k(p)|} > \lambda_n \cdot \left(\frac{\varrho}{9 \cdot \overline{pq}}\right)^n.$$

Oznaczmy przez $\alpha = \min\left(\lambda_n \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^n, \lambda_n \cdot \left(\frac{\varrho}{9 \cdot \overline{pq}}\right)^n\right)$. Liczba dodatnia α nie

[6]) Dla dowodu zob. lemmat do twierdzenia II w cytowanej pracy: *Przyczynek do teorii mierzalności zbiorów w sensie Jordana.*

zależy od k, a nadto: $\frac{|\sigma_k(p)|}{|W_k(p)|} > \alpha$,

więc i warunek c) jest spełniony.
Do każdego punktu $p \in Z$ zbudowaliśmy więc taki ciąg kul domkniętych, które czynią zadość warunkom a), b), c).

Z uwagi na b) i c) zbiory $\sigma_k(p)$ czynią zadość założeniom twierdzenia o pokrywaniu Vitalego[7]), stąd więc istnieje taka co najwyżej przeliczalna rodzina tych kul, że jeżeli przez B oznaczamy jej sumę mnogościową, to:

d) $$|Z - B| = 0.$$

Zbiór B jest zbiorem typu F_σ, jest bowiem sumą co najwyżej przeliczalnej ilości kul domkniętych, nadto $B \subset Z$, bowiem z warunku a) wszystkie kule $\sigma_k(p)$ zawierają się w zbiorze Z.

Zbiór Z różni się więc od pewnego zbioru F_σ w nim zawartego o zbiór miary zero, jest więc [8]) mierzalny według Lebesgue'a.

Ponieważ

$$Z = B + (Z - B), \text{ mamy } |Z| = |B| + |Z - B|,$$

stąd
wobec d): $|Z| = |B|$, ale wobec a) zbiór B, a więc i jego miara nie zależy od tego, czy i jakie punkty brzegowe zbiorów rodziny R do nich należą, otrzymujemy więc stąd wniosek o prawdziwości drugiej części (II) dowodzonego twierdzenia.

W n i o s e k

Z udowodnionego twierdzenia wynika, że:
Suma mnogościowa S dowolnej rodziny kul lub kostek K przestrzeni R_n jest mierzalna objętościowo według Lebesgue'a i miara zbioru S nie zależy od tego, czy i jakie punkty brzegowe kul (kostek) K do nich należą.

---

[7]) Zob. C. C a r a t h e o d o r y, *Vorlesungen über reelle Funktionen*, Leipzig 1918 (tw. 3), str. 305.

[8]) Zob. S. S a k s, *Zarys teorii całki*, Warszawa 1930, (tw. 10(6)), str. 40.