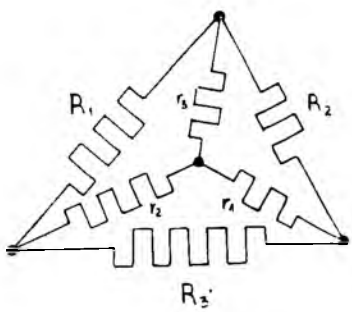
Tadeusz Rumak

Nomogram trójkąta oporów elektrycznych [1]

1. Wstęp

Przy projektowaniu sieci elektrycznych często trzeba zamieniać trójkąt oporów elektrycznych (R_1, R_2, R_3) na gwiazdę oporów (r_1, r_2, r_3) lub na odwrót.

Przy zamianie trójkąta oporów elektrycznych na gwiazdę korzysta się ze wzorów:



Rys. 1

(I)
$$r_1 = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$
$$r_2 = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \qquad r_3 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Przy zamianie gwiazdy na trójkąt korzysta się ze wzorów:

(II)
$$R_1 = r_2 + r_3 + \frac{r_2 \cdot r_3}{r_1}$$
$$R_2 = r_1 + r_3 + \frac{r_1 \cdot r_3}{r_2}$$
$$R_3 = r_1 + r_2 + \frac{r_1 \cdot r_2}{r_3}$$

[1]) Nomogram ten skonstruowałem w odpowiedzi na pytanie jednego z pracowników Zakładu Sieci Elektrycznych w Krakowie: jak skonstruować nomogram dla wzorów obu typów?

Wzory te są proste, jednakże posługiwanie się nimi bez maszyny do liczenia jest dosyć uciążliwe. Poniżej podaję jeden nomogram, jak się zdaje dosyć prosty zarówno dla wzorów (I), jak i (II).

2. Zasada nomogramu

W niniejszym rozdziale przyjmujemy, że czytelnik zna elementy nomografii [2]).

Równanie:

$$r_1 = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

sprowadzamy do postaci: $R_2(r_1 - R_3) + R_1 r_1 + R_3 r_1 = 0$. Stąd otrzymujemy, że równania skal w układzie prostokątnym xOy mają postać:

$$\begin{array}{llll} R_1: & x = 1, & y = -R_1 & \\ R_2: & x = 0, & y = R_2 & (\alpha) \\ w_1(r_1, R_3): & x = \dfrac{r_1}{R_3}, & y = r_1. & \end{array}$$

Ponieważ dwa dalsze równania (I) mają analogiczną postać, więc równania skal w tych przypadkach będą:

$$\begin{array}{llll} R_2: & x = 1, & y = -R_2 & \\ R_3: & x = 0, & y = R_3 & (\beta) \\ w_2(r_2, R_1): & x = \dfrac{r_2}{R_1}, & y = r_2 & \\ R_3: & x = 1, & y = -R_3 & \\ R_1: & x = 0, & y = R_1 & (\gamma) \\ w_3(r_3, R_2): & x = \dfrac{r_3}{R_2}, & y = r_3. & \end{array}$$

Równania skal w układzie xOy dla związku $R_1 r_1 - r_2(r_1 + r_3) - r_1 r_3 = 0$ będą miały postać:

$$\begin{array}{llll} R_1: & x = 1, & y = -R_1 & \\ r_2: & x = 0, & y = -r_2 & (\alpha') \\ \overline{w}_1(r_1, r_3): & x = -\dfrac{r_1}{r_3}, & y = r_1. & \end{array}$$

---

2) Np. w zakresie podanym w książce: B. K o n o r s k i, W. K r y s i c k i, *Nomografia*, Warszawa 1956 lub M. W. P i e n t k o w s k i j, *Nomografija*, Moskwa 1949.

Dla dalszych dwóch związków (II) równania skal będą analogiczne:

$$\begin{array}{llll} R_2: & x = 1, & y = -R_2 & \\ r_3: & x = 0, & y = -r_3 & (\beta') \\ \overline{w}_2(r_2,\ r_1): & x = -\dfrac{r_2}{r_1}, & y = r_2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} R_3: & x = 1, & y = -R_3 & \\ r_2: & x = 0, & y = -r_2 & (\gamma') \\ \overline{w}_3(r_3,\ r_2): & x = -\dfrac{r_3}{r_2}, & y = r_3. & \end{array}$$

3. Opis nomogramu

Nomogram składa się z czterech skal funkcyjnych i trzech rodzin prostych oznaczonych jak następuje:

	wielkość fizyczna		
skala 1	R_1	R_2	R_3
skala 2	R_2	R_3	R_1
rodzina *A*	R_3	R_1	R_2
rodzina *B*	r_1	r_2	r_3
skala 3	r_2	r_3	r_1
rodzina C[3])	r_3	r_1	r_2

Oznaczenia są wypisane albo po lewej, albo po prawej stronie każdej ze skal ewentualnie rodziny prostych. Przy korzystaniu z nomogramu dla związków (I) posługujemy się skalami 1, 2 i pękiem *A*, które mają oznaczenia po stronie prawej. Wynik odczytujemy za pomocą prostych z rodziny *B*. Korzystając zaś z nomogramu dla związków (II) posługujemy się pękiem C, rodziną *B* i skalą 3, które mają oznaczenia po stronie lewej. Wynik natomiast odczytujemy na skali 1.

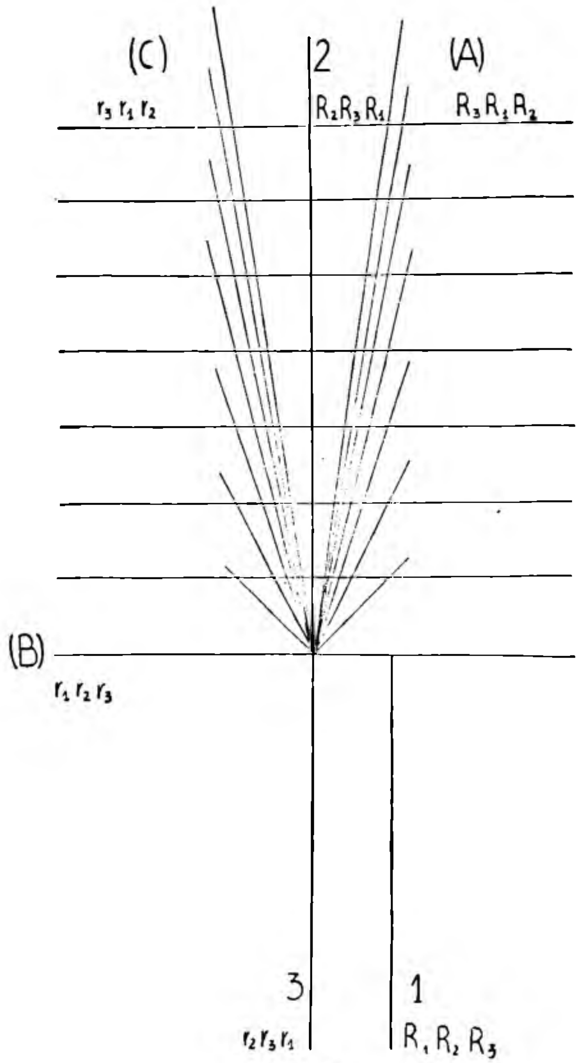
Podajemy schemat nomogramu na stronie 20.

4. Wykreślanie nomogramu i korzystanie z niego

W układzie prostokątnym xOy skalę 1 umieszczamy na prostej $x = 1$ $y = t$ w dół od osi x. Na osi y umieszczamy skalę 2 w górę od osi x i 3 w dół od osi x. Wszystkie trzy skale są równomierne.

---

[3]) Rodziny prostych *A* i C będziemy nazywali pękami prostych lub krótko pękami.



Rys. 2

Pęk A jest rodziną prostych $y = ax$ przechodzących przez początek układu, gdzie $a > 0$. Najwygodniej jest obrać sobie wartości parametru a na przedłużeniu skali 1 [4]). Analogicznie pęk C możemy wyznaczyć jako rodzinę prostych $y = cx$, gdzie $c < 0$, przy czym wartośći parametru c najwygodniej jest zaznaczać na dodatniej części prostej $x = -1$, $y = t$, tzn. na części znajdującej się nad osią x prostej równoległej do osi y. Rodzina B jest zbiorem prostych równoległych do osi x: $y = b$, gdzie $b > 0$.

---

[4]) Zaczynamy od $t = 0$, ponieważ za t przyjmujemy kolejno: R_1, R_2, R_3.

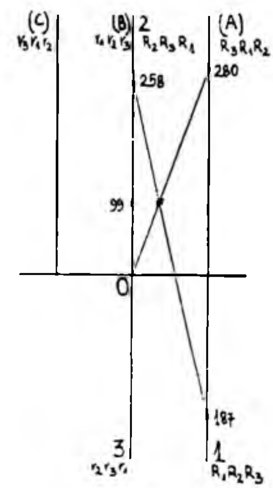
Nomogram jest tak skonstruowany, że jeśli posługujemy się papierem milimetrowym, to nie potrzeba wyznaczać rodziny *B* jak również pęków *A* i *C*. Bowiem na papierze milimetrowym rodzina *B* jest wyznaczona, a zamiast posługiwać się pękami *A* i *C* wystarczy posługiwać się linią.

Poniżej podano sposób rozwiązywania nomograficznego dwu przykładów spotykanych w praktyce. W przykładach tych kropka (·) oznacza wielkość daną, krzyżyk (x) wynik. Zaznaczono również linie pomocnicze. Oczywiście w zastosowaniach praktycznych takie oznaczenia nie są potrzebne. Dla większej jasności podajemy szczegółowy tok postępowania w obu przykładach:

P r z y k ł a d 1

Dane $R_1 = 0{,}187\,\Omega$, $R_2 = 0{,}258\,\Omega$, $R_3 = 0{,}28\,\Omega$. Obliczyć r_1, r_2, r_3.

Na skali 1 odczytujemy $R_1 = 0{,}187$, na skali 2 $R_2 = 0{,}258$. Przez punkty odpowiadające tym liczbom prowadzimy pomocniczą prostą. Przez punkt na skali *A* (przedłużenie skali 1) odpowiadający liczbie $R_3 = 0{,}28$ i przez punkt *O* prowadzimy drugą prostą pomocniczą. W punkcie przecięcia tych dwóch prostych pomocniczych otrzymujemy wynik $r_1 = 0{,}999$, który odczytujemy na prostej *OB*.



Rys. 3

Do wyznaczenia r_2 na skali 1 odczytujemy $R_2 = 0{,}258$, na skali 2 $R_3 = 0{,}28$ i na skali *A* $R_1 = 0{,}187$. Prowadzimy proste pomocnicze i wynik $r_2 = 0{,}072$ odczytujemy na prostej *OB*.

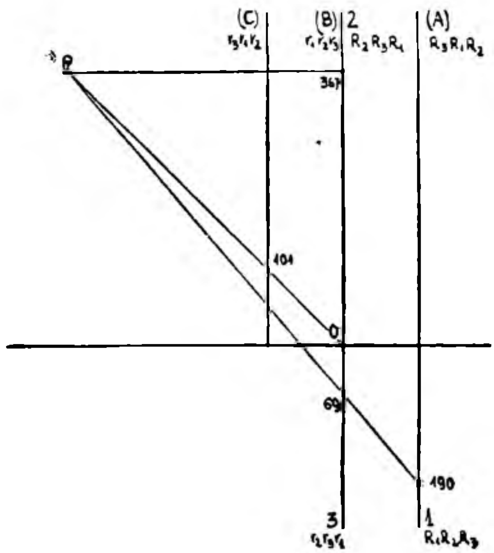
Analogicznie postępujemy, zaczynając od skali 1, dla wyznaczenia $r_3 = 0{,}066$.

Przykład 2

Dane $r_1 = 0{,}367\ \Omega$, $r_2 = 0{,}0696\ \Omega$, $r_3 = 0{,}101\ \Omega$. Obliczyć R_1, R_2, R_3.

Na skali OB obieramy $r_1 = 0{,}367$, na skali 3 $r_2 = 0{,}0696$ i na skali C $r_3 = 0{,}101$. Przez punkt O i punkt odpowiadający r_3 na skali C prowadzimy prostą aż do przecięcia się z prostą równoległą do osi x i odpowiadającą r_1 w punkcie P. Następnie prowadzimy prostą przez punkt P i punkt odpowiadający r_2 na skali 3 aż do przecięcia się ze skalą 1, na której odczytujemy wynik $R_1 = 0{,}19$.

Analogicznie postępujemy przy wyznaczaniu R_2 i R_3, zaczynając od skali OB, a wynik odczytując na skali 1.



Rys. 4

5. Dokładność nomogramu

Po odczytaniu nomogramu dla czterech przykładów dla wzorów (I) i (II) porównano wyniki z dokładnymi wynikami, otrzymanymi na maszynie do liczenia. Średni błąd obliczony jako

$$\sqrt{\frac{1}{24}\sum_{i=1}^{24}\Delta_i^2}$$

wynosi 0,34%.