Zofia Krygowska

O pojęciach pierwotnych w kursie systematyczno-dedukcyjnym geometrii w szkole

W zakończeniu książki poświęconej konstrukcjom H. Lebesgue[1]) umieścił niezwykle interesujący rozdział zatytułowany: *„L'étude de la droite"*. Lebesgue zwraca tu uwagę na historyczny proces konstruowania pojęć punktu i prostej. Dla Greków prosta i okrąg dane były jako całości (idee platońskie), nie zaś jako nieskończone zbiory punktów. Pewne było tylko istnienie punktów „konstruowalnych za pomocą okręgów i prostych". W ten sposób Grecy — jak się wyraża Lebesgue — rozpoczęli historyczny proces „obsadzania prostej punktami". Prosta Talesa była prostą niepełną z dzisiejszego punktu widzenia, nie dość nasyconą punktami. Pitagoras, Viète, Descartes, Liouville, Hermite, Lindemann, Cantor, Dedekind kontynuowali ten proces, przeprowadzając równocześnie „inwentaryzację" coraz to szerszego zbioru punktów prostej i ich klasyfikację, co stało się możliwe dzięki rozwojowi algebry. Ostatecznie osiągnięto współczesne pojęcie prostej Dedekinda. Nie jest to, zdaniem Lebesgue'a, etap ostatni.

Kolejne rekonstrukcje pojęcia prostej wyrażały się w uzupełnianiu i precyzowaniu aksjomatyki geometrii. Prostą euklidesową w dzisiejszym rozumieniu definiuje w sposób uwikłany, z dokładnością do izomorfii, układ aksjomatów Hilberta.

Historia podstawowych pojęć geometrii nie może być obojętna dla metodyki nauczania. Uczeń rozpoczynający kurs geometrii systematycznej ma już za sobą część tej historii w indywidualnym przeżyciu, a przed sobą jej dalszy ciąg. Posługuje się on już terminami: punkt, prosta, płaszczyzna, używając ich w określonym sensie dostępnym mu w aktualnym stadium rozwoju jego myślenia. Proces formowania się tych pojęć nie jest jeszcze dlań zakończony.

Systematyczno-dedukcyjny kurs geometrii można opracować rozmaicie. Bez względu jednak na to, jak są ujęte podstawy tego kursu (wy-

[1]) H. Lebesgue, *Leçons sur les constructions géométriques*, Paris 1950.

raźnie sformułowane pewniki lub szersza nie sprecyzowana ściśle podstawa intuicyjno-poglądowa), uczeń powinien wynieść ze szkoły pojęcia punktu, prostej, płaszczyzny, czyniące zadość aksjomatom geometrii euklidesowej. Nasuwa się pytanie, czy ujęcie własności prostej i płaszczyzny w postaci czy to pewników, czy też mniej ścisłych opisów, które wprowadzamy na początku kursu, jest tylko rejestracją wiadomości wyniesionych przez ucznia z poprzedniego okresu rozwoju jego pojęć geometrycznych, czy też potrzebny tu będzie nowy krok naprzód, nowa rekonstrukcja, wprowadzająca elementy dotąd nie ujęte.

Jeżeli sięgniemy do ogromnego dorobku badań psychologicznej szkoły J. Piageta [2]) w zakresie rozwoju pojęć geometrycznych i skonfrontujemy obraz, jaki można sobie wytworzyć na podstawie wniosków z tych badań, z obserwacjami i doświadczeniami praktyki nauczania, to stwierdzimy w wielu przypadkach zgodność wyników. Uczeń 12—14-letni rozporządza już dość bogatym systemem operacji abstrakcyjnych, które umożliwiają mu ujęcie — w istocie swej formalnych — pojęć punktu, prostej, płaszczyzny, odcinka, kąta itp. Okolicznością szczególnie ważną dla nauczania matematyki na wyższym już poziomie, na którym trzeba będzie niejednokrotnie w sposób jawny lub zamaskowany wprowadzać elementy nieskończonościowe jest to, że uczeń w tym okresie jest już na ogół zdolny do ujęcia abstrakcyjnego schematu kolejnych myślowych operacji, może on pomyśleć o nieograniczonym przedłużaniu takiego ciągu. To ujęcie jednym aktem myśli nieskończonego ciągu operacji jest — jak wiemy — bardzo ważnym elementem myślenia matematycznego. Jest także według nomenklatury J. Piageta jedną z operacji drugiego stopnia (operacja na operacjach), które charakteryzują psychologicznie hipotetyczno-dedukcyjny, formalny etap rozwoju myślenia dziecka. Dzięki tej operacji uczeń rozumie pojęcie punktu nie jako „residuum statyczne", ale jako odbicie nieskończonego procesu rozkładów[3]). W związku z tym zdaje sobie sprawę z gęstości zbioru punktów na prostej; rozumie również pojęcie kierunku i porządku liniowego. Piaget wykazuje za pomocą wielu eksperymentów, że u dziecka w wieku przedszkolnym i w pierwszych latach nauczania kształtuje się stopniowo w kilku kolejnych stadiach pojęcie prostej w drodze interioryzacji konkretnie wykonywanych przez nie czynności celowania, zachowania stałego kierunku w ruchu, kolejnych podziałów całości na coraz mniejsze części, porządkowania i szeregowania przedmiotów itp. Czynności te są źródłem dwóch aspektów wytworzonego

---

2) J. Piaget, B. Inhelder, A. Szemińska, *La géométrie spontanée de l'enfant*, Paris 1948.

J. Piaget, B. Inhelder, *La représentation de l'espace chez l'enfant*, Paris 1948.

3) Op. cit. str. 177.

pojęcia prostej: z jednej strony dziecko ujmuje prostą jako kierunek, z drugiej jako twór topologiczny, tj. zbiór punktów. Wreszcie rozumie ono także pewne metryczne własności prostej (np. odcinek prostej jako najkrótszy tor łączący dwa dane punkty).

Do tych wszystkich elementów pojęciowych już abstrakcyjnych w dużym stopniu, choć jeszcze ściśle związanych z konkretnymi przedmiotami i czynnościami, a więc obciążonych silnie treścią oglądową, powinno nawiązać nauczanie. Są one punktem wyjścia dla sformułowania podstaw geometrii systematycznej, koniecznych dla wprowadzenia młodego umysłu w metodę matematyczną — w dedukcję.

Geometria szkolna nie jest bowiem od początku wieloznaczną teorią aksjomatyczną, jak ją rozumiał D. Hilbert. Terminy: punkt, prosta, płaszczyzna, nie są dla ucznia symbolami, którym znaczenie nadają dopiero aksjomaty. One mają już dla niego pewną treść oglądową, mają już swoją historię. Ujęcie czysto formalne nie byłoby ani możliwe, ani celowe w stosunku do dzieci 12—14-letnich. F. Klein już pół wieku temu przeciwstawiał się przedwczesnemu formalizmowi w nauczaniu wysuwanemu w imię poprawności naukowej. „Uczyć, naukowo — to znaczy tylko prowadzić człowieka do tego, by myślał naukowo, ale w żadnym razie nie znaczy, by trzeba go było zaskoczyć od początku zimną, naukową, czystą systematyką” [4]).

Dlatego formułując podstawy kursu systematyczno-dedukcyjnego geometrii nawiązujemy do tych pojęć, którymi uczeń już rozporządza, pamiętając jednak, że nawiązywanie to równocześnie rozwijanie i rekonstruowanie w ciągłym procesie asymilacji nowych treści do przyswojonych już schematów i adaptacji dawnych schematów do nowych sytuacji, których nie można ująć w schematy dawne.

Tradycyjny pogląd na tak zwane „pojęcia pierwotne” geometrii sprowadza natomiast w nauczaniu opracowanie aksjomatyki, dotyczącej punktu, prostej i płaszczyzny, w istocie rzeczy do rejestracji abstrakcyjnych tez, które według przekonania nauczyciela uczniowie powinni znać już *a priori*, jako „oczywiste”. Dlatego zdarza się i dziś jeszcze, że pierwsze lekcje geometrii systematycznej mają charakter werbalny i niewiele uczniowi dają. Nie docenia się jego trudności, które właśnie mogą wystąpić w związku z pierwotnymi pojęciami ze względu na ich formalny charakter. Zapomina się o tym, że uczeń zdobywa te pojęcia nie jednorazowo, ale że podlegają one w jego świadomości stopniowemu precyzowaniu, utrwalaniu i rozwojowi. Pomija się także, niesłusznie, ważny czynnik stopnia aktywności przyswojonego już, zdawałoby się, pojęcia, który decyduje o tym, czy uczeń umie się posługiwać tym pojęciem w ro-

---

[4]) F. Klein, *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, Berlin 1924, str. 290.

zumowaniu. Nie można również niwelować różnicy między ujęciem formalnym a ujęciem psychologicznym. Pierwsze może być bardzo proste, a drugie właśnie skomplikowane (zwracał na to uwagę już Poincaré w swoim studium [5]) o definicji matematycznej). Dojrzały umysł matematyka posługuje się również elementami oglądowymi, analogiami, mniej lub więcej konkretnymi reprezentacjami w toku pracy twórczej, oddziela jednak wyraźnie i świadomie tę stronę myśli od strony formalnej. Dlatego matematykę jako naukę cechuje „puryzm metodologiczny", umożliwiający ową „zimną" jasność, o której pisali Klein i Poincaré. Uczeń nie umie tak wyraźnie zróżnicować jeszcze różnych punktów widzenia. Jego pojęcia są pełne treści oglądowej, ściśle związane z przedstawieniami konkretnymi. Charakter jego pracy myślowej daleki jest więc od puryzmu formalnego. Dlatego znajduje się często w sytuacji trudniejszej metodologicznie niż dojrzały matematyk i o tym trzeba pamiętać śledząc wnikliwie jego konflikty myślowe i wyobrażeniowe i pomagając mu je przezwyciężać.

W artykule niniejszym chcę zwrócić uwagę na niektóre specyficzne trudności obserwowane przeze mnie w wielu przypadkach w toku normalnych lekcji w szkole i związane z pojęciami prostej i płaszczyzny.

Nieskończoność prostej i płaszczyzny

Gdy nauczyciel na pierwszej lekcji geometrii wyjaśnia 12-letnim uczniom, że „prosta jest nieskończona i rozciąga się w obu kierunkach nieograniczenie", brzmi to prawie metafizycznie i w istocie rzeczy nie bardzo wiadomo, co znaczy. Nasuwa się pytanie, co sam nauczyciel przez to rozumie i co chce, aby jego młodzi uczniowie rozumieli.

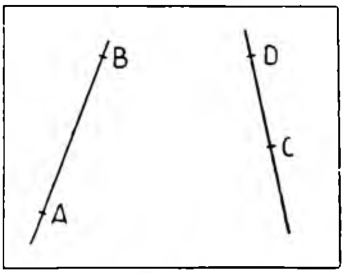
Sięgnijmy po wyjaśnienie do formalnej dedukcyjnej geometrii. W układzie Hilberta nie ma mowy wyraźnie o nieskończoności prostej, ale jest ona zagwarantowana całym systemem aksjomatów przynależności, porządku i przystawania. Mówiąc „półprosta AB jest nieskończona" wyrażamy w skrócie myśl następującą: „Mając zadany odcinek a i zadaną liczbę naturalną n możemy na półprostej AB wyznaczyć ciąg punktów A_1, $A_2 \dots A_n$ taki, że 1°. punkt A_i leży między punktami A_{i-1}, A_{i+1} (dla $i/2 \dots n-1$), 2°. odcinki $A_i\ A_{i+1}$ przystają do odcinka a, 3°. każde dwa odcinki ciągu mają tylko jeden punkt wspólny (jeden koniec), jeżeli są kolejne, i żadnego punktu wspólnego, jeżeli nie są kolejne". Po wprowadzeniu pojęcia miary odcinka możemy również scharakteryzować nieskończoność prostej w sposób następujący: „na pół-

---

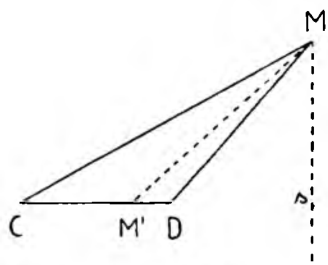
[5]) H. Poincaré, *Nauka i metoda*, Warszawa 1911.

prostej, począwszy od dowolnego jej punktu można zbudować odcinek, którego miara równa się dowolnie dużej z góry zadanej liczbie".

„Nieskończoność prostej" wyraża się zatem w możliwości nieograniczonego kontynuowania ściśle określonych konstrukcji i jej sens jest dokładnie związany ze znaczeniem, jakie nadajemy terminom „przystawanie odcinków" i „leży między" (punkt leży między dwoma punktami). W interpretacji Beltrami-Kleina płaszczyzny hiperbolicznej prosta hiperboliczna jest identyczna z euklidesową cięciwą otwartą okręgu podstawowego. Ze względu na odpowiednio zinterpretowane hiperboliczne pojęcia przystawania i porządku taka cięciwa jest nieskończona. Wszystkie warunki „nieskończoności" są tu spełnione. Ta sama cięciwa na płaszczyźnie euklidesowej jest oczywiście skończona ze względu na euklidesowe pojęcia przystawania i porządku.



Rys. 1



Rys. 2

„Nieskończoność" prostej ma więc sens istotnie formalny i z formalnego punktu widzenia jest pojęciem zupełnie jasnym i nieskomplikowanym. Wyraża się w możliwości wykonywania pewnych elementarnych operacji, zapewnionej aksjomatami, i w tym sensie np. proste euklidesowa i hiperboliczna są nieskończone, prosta eliptyczna jest skończona.

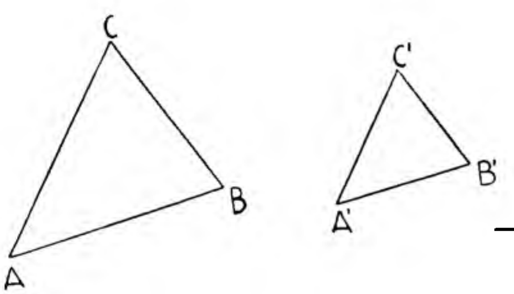
Psychologicznie jednak sprawa nie przedstawia się tak prosto. Obserwacja pomyłek, błędów i trudności uczniów nie tylko tych, którzy rozpoczynają naukę geometrii, ale i starszych daje wiele dowodów na to, że tak jest rzeczywiście. Oto przykłady typowe, wybrane spośród wielu, które obserwowałam niejednokrotnie.

1) Na pytanie nauczyciela, czy proste AB i CD, reprezentowane na rysunku przez dwa wykreślone odcinki (rys. 1) przecinają się, pada zwykle w kl. VII, a często w kl. VIII odpowiedź negatywna. W jednej z klas VII uczennica wyjaśniła wprawdzie: „gdyby te proste przedłużyć, toby się przecięły", ale dodała natychmiast „ale się nie przetną, bo tablica jest za mała i przedłużyć ich się nie da".

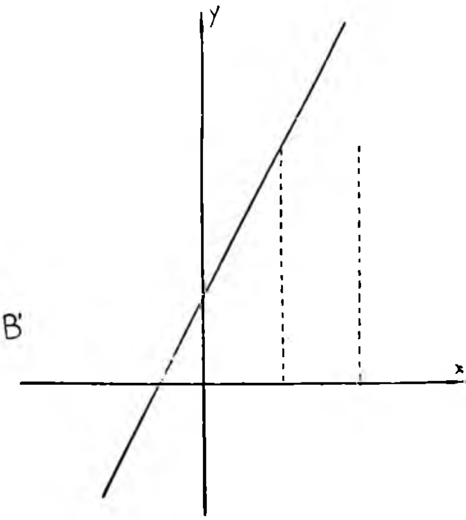
2) Uczeń klasy VIII ma zaznaczyć odręcznie rzut punktu M na pro-

stą CD (rys. 2). Nie umie sobie z tym poradzić i stwierdza, że to się zrobić nie da. Drugi z uczniów kreśli ruchem ręki z uporem transwersalną trójkąta, która nie jest prostopadła do CD; uczennica innej klasy VIII zaznacza „pionowy" kierunek s, ale również staje bezradna wobec tego, że kierunek s nie trafia w żaden punkt odcinka CD.

3) Uczennica klasy IX w toku dowodzenia cechy podobieństwa trójkątów ma odłożyć odcinek AC na półprostej $C'A'$, poczynając od punktu C' (rys. 3). Jest mocno tym zakłopotana i usiłuje skłonić nauczyciela do zastosowania konstrukcji odwrotnej, tj. do odłożenia odcinka $A'\,C'$ na półprostej CA, bo $C'\,A' < CA$.



Rys.3



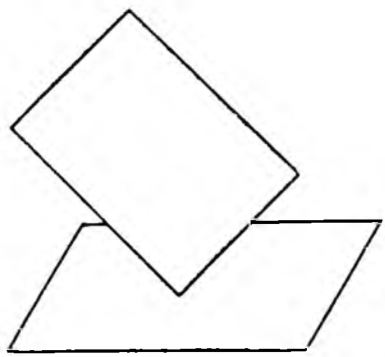
Rys. 4

4) Uczeń klasy IX z wykresu funkcji liniowej (rys. 4) ma odczytać wartość tej funkcji dla $x = 1$ i dla $x = 2$. W pierwszym przypadku wywiązuje się z zadania bez trudu, drugi sprawia mu pewien kłopot. Takiego samego zahamowania doznają zresztą i inni uczniowie przy korzystaniu z wykresów innych funkcji.

5) Pewnik — „jeżeli dwie płaszczyzny mają punkt wspólny, to mają prostą wspólną" — nie spotyka się z pełną aprobatą uczniów, nie tylko w klasie VII, ale i w klasie IX. Dla podania kontr-przykładu uczniowie często ustawiają dwa zeszyty tak, jak to przedstawia rys. 5., i stwierdzają: „te dwie płaszczyzny mają tylko jeden punkt wspólny". Podobnie — płaszczyzny przeciwległych ścian ostrosłupa czworokątnego mają nierzadko według opinii uczniów nawet klasy IX tylko jeden punkt wspólny, tj. wierzchołek. Stąd trudności przy wyznaczaniu kąta dwuściennego tych ścian występują jeszcze w klasie XI. Wskazanie spodka

wysokości ostrosłupa w przypadku, gdy nie leży on na podstawie ostrosłupa, wprawia w zakłopotanie wielu uczniów klas X i XI.

6) Kąt pełny to często według opinii ucznia po prostu koło, kąt środkowy okręgu, to często wycinek [6]). Nigdy nie zdarzyło mi się, aby na polecenie: „wskaż punkt wewnątrz kąta środkowego" uczeń zaznaczył spontanicznie punkt zewnątrz okręgu. Na wyraźne zaś żąda-



Rys. 5

nie: „wskaż punkt kąta środkowego nie leżący w kole" — uczniowie klasy VII i VIII często w pierwszej chwili reagują zdziwieniem stwierdzając: „takiego punktu nie ma".

Te wszystkie uporczywe, choć, wydawałoby się pozornie, drobne trudności uchodzące często uwagi nauczyciela mają głębsze przyczyny i nie można ich tylko sprowadzać do pomyłek. Świadczą o tym, że dla ucznia prosta i płaszczyzna nie są jeszcze tworami na tyle aktualnie nieskończonymi, aby mógł on przezwyciężyć sugestie rysunku i modelu zawsze skończonego, ograniczonego. Ten brak objawia się w sposobie wyrażania się ucznia nawet wtedy, gdy już, zdawałoby się, istotę rzeczy zrozumiał. Mówi on najczęściej, wskazując na dwa odcinki narysowane reprezentujące dwie proste, „te proste się p r z e t n ą", a nie „te proste się p r z e c i n a j ą", „tę p r o s t ą przedłużam" zamiast „ten o d c i n e k przedłużam".

D. G i e r u l a n k a w swej interesującej pracy [7]) poświęconej zagadnieniu wprowadzania i przyswajania pojęć geometrycznych zwraca uwagę na to, że o wiele trudniej jest ująć nieskończoność prostej niż „bezwymiarowość" punktu, choć tu i tam potrzebne jest zrozumienie pewnego przejścia granicznego. Można również stwierdzić, że uczniowie łatwiej „pamiętają" o gęstości prostej niż o jej nieskończoności, mimo że

[6]) W ujęciu szkolnym kąt definiuje się jako część płaszczyzny.

[7]) D. G i e r u l a n k a, *O przyswajaniu pojęć geometrycznych*, Poznań 1946.

i tu, i tam chodzi o ujęcie jednym aktem myśli nieskończonego ciągu pomyślanych operacji.

Różnica ta jest zrozumiała; konkretne czynności będące źródłem pierwotnych abstrakcyjnych operacji wykonują oni zawsze w swym bezpośrednio bliskim otoczeniu. Rysunek i model, którym się posługują, jest zawsze przestrzennie ograniczony. Ciągłość linii, za pomocą której kreślimy rysunkowe schematy, mające reprezentować odcinki i proste, pomaga, nie przeszkadza w ujęciu gęstości zbioru punktów prostej; ograniczoność tych przedstawień graficznych właśnie utrudnia ujęcie nieskończoności prostej i płaszczyzny, aktywne i zawsze obecne w świadomości. Rzecz w tym, że dla ucznia te przedstawienia są w początkach uczenia się geometrii zanadto jeszcze realnymi obrazami, a za mało symbolami, gdy natomiast elementy „nieskończonościowe" w matematyce mają charakter formalny i potencjalny (można odłożyć, można zagęścić itp.); o nieskończonym ciągu operacji można pomyśleć, nie można go sobie jednak w całości wyobrazić.

Dla usunięcia tych trudności nie wystarczają tylko werbalne wyjaśnienia. „Nie osiągnie się wiele, oświadczając po prostu: prosta rozciąga się nieograniczenie w obie strony. Uczeń powtórzy to zdanie, ale zostanie ono dla niego martwą literą" — pisze słusznie S. Kulczycki w książce *Nauczanie geometrii w kl. VI i VII* [8]).

Konieczne jest natomiast organizowanie przy różnych okazjach różnorodnych czynności ucznia wprawdzie konkretnych i wyobrażeniowych, z wyraźnym jednak celem prowadzenia jego myśli do abstrakcji coraz bardziej wyzwalanej z poglądowych obciążeń. Przykłady takich ćwiczeń można np. znaleźć we wspomnianej książce Kulczyckiego [9]).

Warto tu także zwrócić uwagę na psychologiczne znaczenie rozmaitych specjalnych konstrukcji. Do takich należą np. konstrukcje ornamentów liniowych i płaskich (np. posadzkowanie). Uchwycenie rytmu ornamentu pomaga niewątpliwie ujęciu jednym aktem myśli ciągu nieskończonego operacji przedłużania i rozszerzania. Cenne tu są także konstrukcje „w próżni" (konstrukcje w ograniczonym obszarze, konstrukcje „z przeszkodami"), w których toku uczeń posługuje się wyraźnie prostą-kierunkiem i niepełnym tylko rysunkiem. Konstrukcja np. prostej przechodzącej przez nieosiągalny praktycznie punkt przecięcia dwóch innych prostych, dostępna na tle materiału nauczania uczniowi klasy VII, daje w tej dziedzinie więcej niż werbalne zapewnienia, że „prosta rozciąga się nieograniczenie w obie strony". Sformułowanie wyjaśnień w tym zakresie powinno także nawiązywać do operatywnego określenia

[8]) S. Kulczycki, *Nauczanie geometrii w klasach VI i VII*, Warszawa 1953.
[9]) Op. cit., str. 66 i 132.

naukowego. „Prosta jest nieskończona" — to znaczy z punktu widzenia czysto matematycznego tylko to, że można wykonywać pewne operacje na odcinkach. Nie ma żadnego powodu do przypuszczenia — jak mówi matematyk francuski Dieudonné — aby definicja niepoprawna była łatwiejsza do zrozumienia niż definicja poprawna. Trzeba tylko umieć nie naruszając poprawności przystosować ją do poziomu umysłowego ucznia.

Prosta jako kontinuum

Wydawać by się mogło, że to zagadnienie nie wchodzi w ogóle w zakres rozważań szkolnych. W rzeczywistości jednak uczeń napotyka ciągle w swoich elementarnych rozważaniach pojęcia i twierdzenia związane z nieskończonością zbioru punktów prostej i z jego ciągłością. Niezwykle interesujące wyniki daje wnikliwa obserwacja, jak uczeń myśli i jak na skomplikowanym terenie poglądowo-formalnym dochodzi wreszcie w nieustannych procesach asymilacji i adaptacji do pojęcia prostej, którą moglibyśmy nazwać już prostą Dedekinda. Nie podejmując tu jakiegoś ogólnego opisu tych spraw, poprzestanę na omówieniu dwóch, charakterystycznych moim zdaniem przykładów.

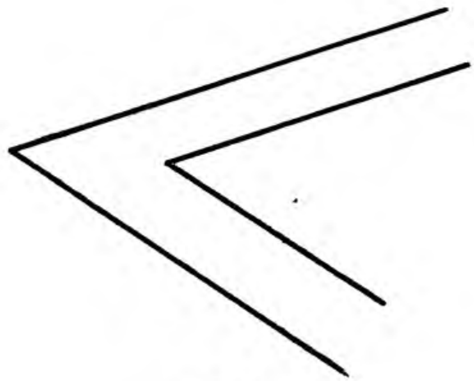
Uczeń klasy VII, VIII, IX rozumie już prostą wyraźnie jako gęsty, a więc i nieskończenie liczny zbiór punktów. Niektóre proste operacje na tym zbiorze prowadzą jednak do zasadniczych konfliktów pojęciowych, których obserwacja i analiza wykazuje, jak chwiejne i jeszcze nie skrystalizowane są znaczenia przypisywane przez ucznia w tym wieku tzw. terminom pierwotnym i jak trudne jest dlań każde ujęcie formalne. Zacytuję tu dwa typowe przykłady takich konfliktów, z którymi spotkałam się kilkakrotnie w formie spontanicznej (w kl. VII, VIII i IX). Wywoływałam je także za pomocą pozornie marginesowych uwag na lekcji i w innych klasach, w różnych sytuacjach z tym samym wynikiem; przebieg dyskusji z uczennicami był w zasadzie podobny we wszystkich tych przypadkach. Przedstawię ją tak, jak przebiegała po raz pierwszy w klasie VII, ponieważ tu bardzo świeży i naiwny stosunek dzieci do dostrzeżonego przez nie problemu pozwala na głębsze wniknięcie w istotę konfliktu. Dlatego sądzę, że warto tu podać choćby w skrócie protokół tej charakterystycznej lekcji. Tematem jej było przekształcenie przez jednokładność. Oto jej przebieg: Uczennice powiększają dwukrotnie ornament złożony z izolowanych punktów. Następnie przekształcają tak samo dany odcinek AB. Stwierdzają, że punktów odcinka nie można przekształcać pojedynczo, bo jest ich „za wiele", proponują przekształcenie tylko punktów A i B oraz połączenie otrzymanych punktów A' i B' odcinkiem. Przecinając oba odcinki półprostymi wychodzącymi z środka jednokładności, wskazują następnie pary punktów wzajemnie przyporządkowanych w jednokładności. Rysunek służy tu wyraźnie do ilustracji właściwej operacji myślowej, której zrozumienie wyrażają mówiąc „tak będzie dla każdego punktu odcinka *AB*". Kiedy jednakże jedna z nich nagle zauważa z pełnym zdumieniem, że w ten sposób ustawić można w pary punkty odcinka mniejszego z punktami odcinka większego i że na tym dużym odcinku nie pozostanie żaden punkt wolny, rozwija się żywa, spontaniczna dyskusja, w której wyraźnie uczennice usiłują usunąć w sposób naiwny niepokojącą „sprzeczność" przez modyfikację znaczenia terminów p u n k t i p r o s t a. Tak więc niektóre uczennice znajdują chwilowe rozwiązanie w tym, że punkty na obu odcinkach są „różnej grubości", inne, że punkty są takie same, ale „odstępy" między punktami są różne na różnych odcinkach. Wydaje się, że konflikt myślowy, jaki uczennice przeżywają, zupełnie podważa sens pojęć, którymi przecież dotąd posługiwały się z p e w n y m zrozumieniem. Równocześnie zażenowanie i łatwość, z jaką ustępują przed argumentami przeciwniczek („punkt nie ma grubości", „na prostej nie ma dziur, bo między każde dwa punkty wchodzi jeszcze jeden"), świadczy o tym, że zdają sobie sprawę z absurdalności własnych wyjaśnień, nie zadawalających ich samych. Bardzo przy tym interesujące jest zakończenie dyskusji. Jedna z najmłodszych w klasie uczennic (12 lat) oświadcza: „ja to trochę rozumiem, to jest tak dlatego, że tych punktów nie można zliczyć" (piękny przykład poglądowości definicji Cantora zbioru nieskończonego!). Kiedy zachęcona tym nauczycielka sięga do arsenału „wielkiej matematyki", ustawiając w pary liczby naturalne i parzyste za pomocą zapisu:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \\ 2 & 4 & 6 & 8 & \ldots, \end{matrix}$$

dziewczynka ta dodaje, „gdyby tych liczb było tyle, żeby je można było policzyć, to tak by się nie udało zrobić. Na odcinkach jest tak samo".

Obserwowałam też, jak analogiczny niepokój w jednej z klas VI wywołała konstrukcja kątów przystających za pomocą przesunięcia równoległego ekierki i obrysowania jej jednego kąta w dwóch położeniach (rys. 6). Uczennice nie mogły się pogodzić z tym, że kąty te przystają, a jeden zawiera się w drugim, więc „powinien być mniejszy". Niepewność w tej sprawie ilustrują też często błędy początkujących przy porównywaniu co do wielkości kątów wewnętrznego konturu ekierki z odpowiadającymi im kątami konturu zewnętrznego.

W obu przypadkach, które opisałam, występują podobne w istocie rzeczy konflikty. W pierwszym uczennice patrzą na odcinek z dwóch różnych punktów widzenia. Odcinki są więc tworami geometrycznymi, które można porównywać pod względem w i e l k o ś c i (większy, mniejszy, przystający), ale równocześnie są zbiorami punktów, które można porównywać co do liczności (więcej, mniej, równo-liczny). W drugim przypadku uczeń porównuje kąty ze względu na relacje: mniejszy, większy, przystający i równocześnie zestawia je ze względu na relację zawierania się. Te różne relacje zostały przez niego pomieszane.



Rys. 6

Z drugiej strony oczywiście istotną trudnością jest tu znowu „nieskończoność" zbioru punktów odcinka i nieograniczoność kąta, do której ujęcia poprzednio przyswojone schematy punktu i prostej najwidoczniej nie wystarczają. W rozwiązaniu konfliktu, tj. adaptacji tych schematów do nowej sytuacji, nie może się obejść bez formalnych elementów, w tym przypadku bez kantorowskiego pojęcia zbioru nieskończonego, do którego w naiwny, ale w gruncie rzeczy poprawny sposób doszły uczennice, usiłując wyjaśnić niepokojącą je sprzeczność. Warto zwrócić tu uwagę jeszcze i na to, że cały tok lekcji i rozumowania uczennic był oparty na konkretnych i dostępnych im operacjach: transformacji zbioru i wzajemnie jednoznacznego przyporządkowania punktów dwóch zbiorów.

Analogiczne momenty sprzeczności prowadzących do rekonstrukcji pojęć znajdziemy w myśleniu ucznia, z którym opracowujemy pojęcie długości odcinka, równocześnie z rozszerzeniem pojęcia liczby do pojęcia liczby rzeczywistej. Proces ten opisywałam już gdzieindziej [10]).

Ponieważ zagadnienie to wiąże się bezpośrednio z omawianym tu tematem „nieskończoności" w pojęciach pierwotnych, przypomnę zasadnicze etapy tego procesu. 1) Konkretne mierzenie odcinka prowadzi do ułamka dziesiętnego skończonego, który jest równocześnie wynikiem i za-

[10]) Z. Krygowska, *Metodologiczne i psychologiczne podstawy metody czynnościowej* „Księga Dziesięciolecia WSP w Krakowie" 1957.

pisem rejestrującym wykonane czynności dzielenia i odkładania odcinka; 2) świadomy niedokładności każdego rzeczywistego pomiaru, uczeń wyobraża sobie możliwość dokładniejszego pomiaru, przedłużając w wyobraźni ciąg wykonanych konkretnych czynności, ale myśli jeszcze stale o ciągu skończonym; 3) mierzenie np. jednostką 1 m odcinka $^1/_3$ m wywołuje pierwszy konflikt z poprzednio już przyswojonym schematem miary; okazuje się bowiem, że tylko w praktyce proces mierzenia jest skończony, w teorii może być nieskończony. Modyfikując swe dotychczasowe poglądy, uczeń nie rozszerza jednak jeszcze pojęcia liczby. Otrzymany ułamek dziesiętny nieskończony jest bowiem w rozważanym przypadku okresowy, a więc jest rozwinięciem liczby wymiernej; 4) mierzenie przekątnej kwadratu jego bokiem prowadzi jeszcze raz do konfliktu i następnej adaptacji pojęcia liczby i miary do nowej sytuacji już w płaszczyźnie czysto formalnej. Przekątna kwadratu i jego bok są niewspółmierne, otrzymany ułamek dziesiętny nie może więc być okresowy. Aby i w tym przypadku móc mówić o długości odcinka, trzeba wprowadzić nową liczbę, którą przedstawia ułamek dziesiętny nieskończony, nieokresowy, rejestrujący kolejne czynności wymierzania. Konsekwencją nauki o mierzeniu jest rekonstrukcja pojęcia prostej rozumianej jako zbiór punktów, jakkolwiek się o tym wyraźnie może w szkole nie mówi. Mimo bowiem całej naiwności szkolnego ujęcia uczeń uświadamia sobie ostatecznie izomorfię zbioru punktów prostej ze zbiorem liczb rzeczywistych, a więc prostą Dedekinda.

Rozważania powyższe miały na celu ilustrację faktu o szczególnym znaczeniu dla aktywnych metod nauczania geometrii. Tzw. pojęcia pierwotne geometrii nie tylko że nie są dane uczniowi *a priori*, ale nie są też rozumiane przez ucznia od początku kursu właściwie, mimo wyjaśnień i opisów zastępujących tu uwikłane definicje przez aksjomaty. Mają one często dla ucznia sens chwiejny, niesprecyzowany, mimo że posługuje się on nimi pozornie poprawnie w zadaniach i rozumowaniach. Pojęcia te podlegają ewolucji i rekonstrukcjom w toku nauczania. Są to pojęcia trudne dla ucznia, niewątpliwie trudniejsze niż bardziej złożone twory geometrii, jak okrąg, trójkąt, kula itp.

W ujmowaniu schematów punktu, prostej i płaszczyzny nie można ominąć „nieskończoności". Trudne, formalne ujęcie staje się jednak dla ucznia możliwe, jeżeli nauczanie podstaw geometrii będzie zgodne i z matematyką, i z psychologią. Matematyk tłumaczy „nieskończoność" na język ściśle określonych operacji, psycholog stwierdza, że do abstrakcyjnych operacji prowadzi droga przez interioryzację konkretnych czynności ucznia. Nasuwa się więc potrzeba metodycznego opracowania materiału nauczania i z tego także punktu widzenia.