ROCZNIK NAUKOWO-DYDAKTYCZNY WSP W KRAKOWIE
NR 7 MATEMATYKA 1958

Zenon Moszner

O pewnych zagadnieniach ważnych dla przyszłego nauczyciela matematyki

W artykule *O powiązanie matematyki szkoły średniej z matematyką wyższą na terenie wyższych szkół pedagogicznych"* [1]) wskazywałem na konieczność pogłębiania i uzupełniania matematyki szkolnej na wykładach i ćwiczeniach z przedmiotów matematycznych w czasie studiów w WSP. Obecnie chciałbym, nawiązując do tego apelu, poprzeć go omówieniem trzech, zresztą nie związanych ze sobą zagadnień, które uważam za ważne dla przyszłego nauczyciela matematyki.
Zagadnienia te są następujące:

I. Definicja potęgi o dowolnym wykładniku rzeczywistym, w szczególności potęgi o wykładniku niewymiernym.
II. Zasada Cavalieriego.
III. Dowód zasadniczego twierdzenia algebry.

Oczywistą jest rzeczą, że wymienione powyżej tematy nie wyczerpują listy zagadnień szczególnie ważnych dla przyszłych nauczycieli. Przy wyborze kierowałem się tym, że te problemy są albo zupełnie pomijane, albo traktowane fragmentarycznie w obecnych programach studiów matematycznych w WSP.

I. Definicja potęgi o dowolnym wykładniku rzeczywistym

§ 1. Pojęcie potęgi o wykładniku niewymiernym jest w nauczaniu matematyki w szkole średniej podane w sposób nieścisły i poglądowy. Podobny zarzut można by zresztą postawić już przy wprowadzeniu pojęcia arytmetycznego pierwiastka stopnia naturalnego. Jasną jest rzeczą, że ominięcie tych nieścisłości na terenie szkoły średniej jest bardzo trudne. Nauczyciel matematyki powinien je sobie jednak uświadamiać

[1]) Artykuł w „Roczniku Naukowo-Dydaktycznym Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Krakowie"; Zesz. 1, „Matematyka", Kraków 1954.

i wiedzieć, jak przy użyciu środków matematyki wyższej można nieścisłości te i niedomówienia usunąć, ewentualnie uzupełnić. Zagadnienia te są w mniej lub więcej przystępny i wyczerpujący sposób opracowane w podręcznikach analizy matematycznej [2]), warto jednak zwrócić na nie uwagę czytelników.

§ 2. Niech a będzie dowolną liczbą dodatnią, różną od 1 [3]). Umawiamy się, że:

I. $a^0 = 1$,

II. $a^1 = a$,

$a^{n+1} = a \cdot a^n$, gdzie n jest dowolną liczbą naturalną,

III. $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$ gdzie p jest dowolną liczbą naturalną, a q dowolną liczbą naturalną większą od 1.

Definicja III wymaga pewnego uzupełnienia. Posługujemy się w niej bowiem pojęciem pierwiastka arytmetycznego stopnia q. Wyłania się pytanie, czy dla danej liczby dodatniej b istnieje, i to dokładnie jeden pierwiastek arytmetyczny stopnia naturalnego q. W przeciwnym bowiem wypadku definicja III byłaby niepoprawna. Ponieważ zagadnienie to omówiłem w wspomnianym na wstępie artykule[4]), pomijam je obecnie.

Przyjmijmy w dalszym ciągu następującą umowę:

IV. $a^x = \dfrac{1}{a^{-x}}$ gdzie x jest dowolną liczbą wymierną ujemną.

Jak to wynika z def. I, II, III, mamy $a^{-x} \neq 0$ dla dowolnej liczby wymiernej nieujemnej $-x$.

W ten sposób mamy określoną potęgę a^x dla dowolnej liczby wymiernej x, a więc funkcja a^x jest określona w zbiorze liczb wymiernych.

§ 3. Udowodnimy kilka własności funkcji a^x określonej w zbiorze liczb wymiernych.

Własność 1

Jeżeli x jest liczbą wymierną, to a^x jest liczbą dodatnią.

Pomijam dowód podawany w szkole, a polegający na sprawdzeniu tezy tego twierdzenia w poszczególnych przypadkach definicji.

Własność 2

Jeżeli x jest liczbą wymierną dodatnią i $a > 1$, to $a^x > 1$.

---

[2]) Zob. np. W. Sierpiński, *Działania nieskończone*, Warszawa 1948, str. 82—140; A. Łomnicki, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, t. I, cz. 1, Katowice, str. 109, 114—117, 125; G. Kowalewski, *Zasady rachunku różniczkowego i całkowego*, Warszawa 1923, str. 37—42.

[3]) Przypadek $a = 1$ jest banalny, wtedy bowiem niezależnie od liczby x rzeczywistej $a^x = 1$. Przypadek ten odrzucam również z uwagi na to, że wówczas funkcja a^x jest nieodwracalna.

[4]) *O powiązanie matematyki szkoły średniej z matematyką wyższą na terenie wyższych szkół pedagogicznych*, „Rocznik Naukowo-dydaktyczny WSP w Krakowie", zesz. 1, „Matematyka", Kraków 1954, str. 124.

Dowód szkolny polega także na sprawdzeniu tezy twierdzenia w poszczególnych przypadkach definicji.

Własność 3

Jeżeli x_1 i x_2 są liczbami wymiernymi, to $a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}$

Dowód (szkolny) pomijam.

Wniosek. Kładąc w własności 3

$$x_1 = x \text{ i } x_2 = -x,$$

gdzie x jest dowolną liczbą wymierną, otrzymujemy

$$a^x = \frac{1}{a^{-x}}.$$

Własność 4

a) Jeżeli $a > 1$, to a^x jest funkcją rosnącą w zbiorze liczb wymiernych.

b) Jeżeli $0 < a < 1$, to a^x jest funkcją malejącą w zbiorze liczb wymiernych.

Dowód

a) Niech x_1 i x_2 będą liczbami wymiernymi, przy czym $x_1 < x_2$. Wtedy $a^{x_2} - a^{x_1} = a^{x_1}(a^{x_2-x_1} - 1) > 0$, bo z własności 1 wynika $a^{x_1} > 0$, z własności 2 i z uwagi na to, że $x_2 - x_1 > 0$, wynika $a^{x_2-x_1} - 1 > 0$. Zatem $a^{x_2} > a^{x_1}$., co dowodzi, że funkcja a^x jest rosnąca w zbiorze liczb wymiernych.

b) Przypadek ten można sprowadzić do poprzedniego, bo gdy $0 < a < 1$, to $\frac{1}{a} > 1$.

§ 4. Udowodnimy teraz:

Twierdzenie (T)

Jeżeli a jest liczbą dodatnią, różną od 1 oraz x_n jest ciągiem liczb wymiernych zbieżnym do zera, to ciąg a^{x_n} zmierza do 1.

Lemmaty

1. Jeżeli u_n jest dowolnym ciągiem o wyrazach, które są liczbami naturalnymi, i $u_n \to +\infty$, to $\sqrt[u_n]{a} \to 1$.

Dowód

a) Załóżmy, że $a > 1$. Wtedy z def. III i własności 2 mamy

$$\sqrt[u_n]{a} > 1.$$

Oznaczmy przez

$$\delta_n = \sqrt[u_n]{a} - 1,$$

wtedy

$$\delta_n > 0 \quad \text{i} \quad 1 + \delta_n = \sqrt[u_n]{a},$$

czyli

$$a = (1 + \delta_n)^{u_n} \geqslant 1 + \delta_n \cdot u_n$$

na podstawie nierówności Bernoulliego [5]). Z ostatniej nierówności otrzymujemy:

$$\frac{a-1}{u_n} \geqslant \delta_n > 0,$$

skąd na podstawie twierdzenia o trzech ciągach

mamy $\delta_n \to 0 \left(\dfrac{a-1}{u_n} \to 0 \quad , \quad \text{bo} \quad u_n \to +\infty\right)$

czyli

$$\sqrt[u_n]{a} \to 1.$$

b) Niech będzie

$$0 < a < 1,$$

wtedy $\dfrac{1}{a} > 1$ i $\sqrt[u_n]{\dfrac{1}{a}} > 1$

na podstawie pierwszej części dowodu. Ale wtedy jest:

$$\sqrt[u_n]{a} = \frac{1}{\dfrac{1}{\sqrt[u_n]{a}}} = \frac{1}{\sqrt[u_n]{\dfrac{1}{a}}} > 1$$

2. Jeżeli ciąg x_n liczb wymiernych dodatnich zmierza do zera, to:

$$a^{x_n} \to 1.$$

D o w ó d

Ciąg $\dfrac{1}{x_n} \to \infty$. Połóżmy $u_n = C\left(\dfrac{1}{x_n}\right)$ [6]). Jeżeli ograniczymy się do $x_n < 1$, co nie wpłynie na ogólność rozważań [7]), to wtedy $\dfrac{1}{x_n} > 1$ i u_n są liczbami naturalnymi. Z określenia u_n mamy:

---

[5]) Nierówność Bernoulliego ma postać: $(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$, gdzie $x \geqslant 0$ i n jest liczbą naturalną. O prawdziwości tej nierówności przy wymienionych założeniach można upewnić się rozwijając $(1 + x)^n$ według wzoru Newtona i odrzucając wyrazy od trzeciego począwszy. Dowód można także przeprowadzić za pomocą indukcji matematycznej.

[6]) Przez $C(a)$ oznaczam cechę liczby a, czyli największą z liczb całkowitych, mniejszych lub równych liczbie a.

[7]) Z uwagi na to, że $x_n \to 0$, tylko skończona ilość wyrazów tego ciągu może spełniać nierówność $x_n \geqslant 1$.

$$u_n \leqslant \frac{1}{x_n} < u_n + 1$$

więc

$$u_n \to +\infty,$$

gdy

$$x_n \to 0.$$

Z ostatniej nierówności otrzymujemy:

$$\frac{1}{u_n} \geqslant x_n > \frac{1}{u_n + 1}.$$

a) Załóżmy, że $a > 1$. Wtedy z własności 4 i uzyskanej powyżej nierówności wynika:

$$\sqrt[u_n]{a} \geqslant a^{x_n} > \sqrt[u_n+1]{a}$$

Ale na podstawie lemmatu 1:

$$\lim \sqrt[u_n]{a} = \lim \sqrt[u_n+1]{a} = 1$$

a więc i

$$\lim a^{x_n} = 1.$$

b) Gdy $0 < a < 1$ dowód przebiega podobnie.

3. Jeżeli x_n jest ciągiem liczb ujemnych wymiernych, zbieżnych do zera, to

$$a^{x_n} \to 1.$$

Dowód

Na podstawie wniosku z własności 3:

$$a^{x_n} = \frac{1}{a^{-x_n}} \to 1$$

na podstawie lemmatu poprzedniego (bo $-x_n \to 0$ i $-x_n > 0$).

Dowód twierdzenia (T)

Dla dowolnego ciągu liczb wymiernych x_n mamy

$$-|x_n| \leqslant x_n \leqslant |x_n|.$$

a) Jeżeli $a > 1$ mamy

$$a^{-|x_n|} \leqq a^{x_n} \leqq a^{|x_n|}$$

ale ponieważ

$$\lim a^{-|x_n|} = \lim a^{|x_n|} = 1$$

z lemmatów 2 i 3, wynika

$$\lim a^{x_n} = 1.$$

b) Dla a spełniającego nierówność $0 < a < 1$ dowód przebiega podobnie.

§ 5. Niech x oznacza dowolną liczbę niewymierną, a x_n dowolny ciąg liczb wymiernych zbieżny do x.

Wykażemy, że ciąg a^{x_n} posiada granicę niezależną od wyboru ciągu x_n. Niech l_n oznacza ciąg rosnący liczb wymiernych zbieżny do x i niech $a > 1$. Niech ponadto l będzie liczbą wymierną większą od liczby x $(l > x)$.

Wtedy

$$l_n < x < l,$$

czyli

$$l_n < l.$$

Na podstawie własności 4 ciąg a^{l_n} jest rosnący i jako ograniczony od góry przez liczbę a^l jest zbieżny do granicy skończonej, którą oznaczam przez A.

Ponieważ

$$a^{x_n} = a^{l_n} \cdot a^{x_n - l_n} \quad \text{i} \quad a^{x_n - l_n} \to 1$$

na podstawie twierdzenia (T) poprzedniego paragrafu $(x_n - l_n \to 0)$, mamy

$$a^{x_n} \to A,$$

a więc granica ciągu a^{x_n} istnieje i nie zależy od wyboru ciągu x_n.

V. Umawiamy się, że:

$$a^x = A.$$

W ten sposób mamy jednoznacznie zdefiniowaną potęgę a^x dla dowolnego wykładnika x niewymiernego, a więc łącznie z definicjami poprzednimi dla dowolnego wykładnika rzeczywistego.

Uwagi

1. Zastosowany tu sposób definiowania potęgi o wykładniku niewymiernym nie jest jedyny, można bowiem ominąć w definicji pojęcie granicy używając pojęcia przekroju Dedekinda [8]).

2. W szkole średniej potęgę o wykładniku niewymiernym można definiować metodą wskazaną przez St. Gołąba w artykule *Pewien sposób wprowadzenia potęgi o wykładniku niewymiernym w szkole średniej* „Matematyka" 1954, nr 1 (8).

3. Podane powyżej rozumowanie (§ 4, § 5) stanowi uzasadnienie szkolnego sposobu definiowania potęgi o wykładniku niewymiernym przez przybliżenia dziesiętne tego wykładnika [9]).

---

[8]) Zob. np. F. Leja, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, wyd. 3, Warszawa 1954, str. 13.

[9]) Zob. np. S. Steckel, *Algebra*, Warszawa 1949, str. 35.

II Zasada Cavalieriego

§ 1. Zasada Cavalieriego jest znanym twierdzeniem teorii miary, czego najlepszym dowodem jest fakt formułowania jej z natury rzeczy w sposób nieścisły nawet w podręcznikach z zakresu matematyki szkoły średniej[10]). Wypowiedziana na gruncie miary Lebesgue'a jest prostym wnioskiem z twierdzenia Fubiniego i z innych znanych twierdzeń dotyczących funkcji całkowalnych w sensie Lebesgue'a [11]). Stąd zaś można otrzymać jako wniosek zasadę Cavalieriego dla miary Jordana, bliższej szkolnemu (intuicyjnemu) pojęciu objętości. Niemniej w znanych mi, a ogólnie dostępnych podręcznikach matematyki wyższej zasada ta albo nie jest w ogóle wypowiadana, albo też jej sformułowanie i dowód pozostawiają wiele do życzenia. Ponieważ wchodzi ona w zakres materiału szkolnego, dlatego jako cel stawiam sobie jej ścisłą wypowiedź dla miary Jordana i dowód bez użycia pojęcia miary i całki Lebesgue'a (z tymi pojęciami studenci WSP zaznajamiają się raczej tylko pobieżnie), a jedynie w oparciu o pojęcie całkowalności w sensie Riemanna.

§ 2. Przejdziemy teraz do wypowiedzi i dowodu zasady Cavalieriego:

T w i e r d z e n i e I

Jeżeli w przestrzeni trójwymiarowej mamy dwa zbiory punktów Z_1 i Z_2, mierzalne objętościowo według Jordana i jeżeli istnieje taka płaszczyzna π, że dla każdej płaszczyzny π_1, równoległej do płaszczyzny π, przekroje zbiorów Z_1 i Z_2 płaszczyzną π_1 mają miary polowe według Jordana równe, to zbiory Z_1 i Z_2 mają równe objętości.

Dowód tego twierdzenia oprzemy na następujących dwu lemmatach:

L e m m a t 1 [12])

a) Niech Z będzie dowolnym zbiorem płaskim. Wprowadźmy na płaszczyźnie, w której leży ten zbiór, prostokątny, kartezjański układ odniesienia, a przez $f(x, y)$ oznaczmy funkcję charakterystyczną tego zbioru, tzn. funkcję równą 1 w wszystkich punktach zbioru Z, a poza nim równą 0. Warunkiem koniecznym i dostatecznym mierzalności polowej zbioru Z według Jordana jest, aby funkcja $f(x, y)$ była w zbiorze Z całkowalna według Riemanna.

Nadto zachodzi równość

$$m^2(Z) = \iint_Z f(x, y)\, dx dy \ ^{13)}.$$

[10]) Zob. B. I w a s z k i e w i c z, *Geometria elementarna*, cz. III, Warszawa 1951, str. 180.

[11]) Zob. S. S a k s, *Zarys teorii całki*, Warszawa 1930, str. 104 i nast.

[12]) Dowody tych twierdzeń znajdują się np. w podręczniku F. L e i *Rachunek różniczkowy i całkowy* Warszawa 1954, str. 300 i 309.

[13]) Przez $m^2(Z)$ oznaczam miarę polową zbioru Z według Jordana.

b) Niech Z będzie zbiorem w przestrzeni trójwymiarowej. Wprowadźmy dowolny, prostokątny, kartezjański układ odniesienia i przez $f(x, y, z)$ oznaczmy funkcję charakterystyczną zbioru Z, określoną tak jak w punkcie a).

Warunkiem koniecznym i dostatecznym mierzalności objętościowej zbioru Z według Jordana jest, aby funkcja $f(x, y, z)$ była w zbiorze Z całkowalna według Riemanna. Nadto zachodzi równość:

$$m^3(Z) = \iiint_Z f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$ [14])

Twierdzenia te warto podać (niezależnie od zasady Cavalieriego) czy to w kursie analizy matematycznej przy interpretacji geometrycznej całki podwójnej i potrójnej, czy to w kursie matematyki elementarnej z wyższego stanowiska przy omawianiu miary Jordana jako ustalające związek między tą miarą a całką według Riemanna.

L e m m a t 2

Jeżeli $f(x, y, z)$ jest funkcją całkowalną według Riemanna w prostopadłościanie P, określonym nierównościami $\{a \leq x \leq a';\ b \leq y \leq b';\ c \leq z \leq c'\}$ i jeżeli całka podwójna $\iint_D f(x, y, z)\, dy\, dz$, gdzie D jest prostokątem $\{b \leq y \leq b';\ c \leq z \leq c'\}$, istnieje dla każdego x z przedziału $[a, a']$, to funkcja

$$\varphi(x) = \iint_D f(x, y, z)\, dy\, dz$$

jest całkowalna w przedziale $[a, a']$ oraz:

$$\iiint_P f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_a^{a'} \left[\iint_D f(x, y, z)\, dy\, dz\right] dx.$$

Twierdzenie to jest tylko nieznacznym uogólenieniem znanego twierdzenia o zamianie całki potrójnej na iterowaną i dowód jego przebiega analogicznie [15]).

D o w ó d t w i e r d z e n i a I

Ponieważ zbiory Z_1 i Z_2 są mierzalne objętościowo według Jordana, są ograniczone, a stąd zbiór $Z_1 + Z_2$ zawiera się w pewnym prostopadłościanie P, którego jedna ściana jest równoległa do płaszczyzny π. Dobierzmy prostokątny, kartezjański układ odniesienia (x, y, z) tak, by:

a) oś x była prostopadła do płaszczyzny π,

b) ściany prostopadłościanu P były równoległe do płaszczyzn układu odniesienia.

---

[14]) Przez $m^3(Z)$ oznaczam objętość zbioru Z według Jordana.

[15]) Zob. np. F. L e j a, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, Kraków 1947, str. 298—299, 309 oraz uwaga na str. 299.

Niech w tak dobranym układzie prostopadłościan P będzie określony nierównościami $\{a \leqq x \leqq a';\ b \leqq y \leqq b';\ c \leqq z \leqq c'\}$. Oznaczmy przez $f_1(x, y, z)$ i $f_2(x, y, z)$ funkcje charakterystyczne zbiorów Z_1 i Z_2. Wtedy mamy w myśl lemmatu 1 b):

$$m^3(Z_1) = \iiint\limits_{Z_1} f_1(x, y, z)\,dx\,dy\,dz \quad \text{oraz} \quad m^3(Z_2) = \iiint\limits_{Z_2} f_2(x, y, z)\,dx\,dy\,dz \tag{1}$$

Według definicji całki po zbiorze [16]), zachodzi

$$\iiint\limits_{Z_1} f_1(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{P} f_1(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$\text{oraz} \quad \iiint\limits_{Z_2} f_2(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{P} f_2(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \tag{2}$$

Oznaczmy przez $Z^i_{x_0}$ dla $i = 1, 2$ oraz $x_0 \in [a, a']$ przekrój zbioru Z płaszczyzną $x = x_0$. Ponieważ funkcja dwu zmiennych $f_i(x_0, y, z)$ jest dla $i = 1, 2$ funkcją charakterystyczną zbioru $Z^i_{x_0}$, rozpatrywanego jako zbiór płaski na płaszczyźnie $x = x_0$, w myśl lemmatu 1 a) i założeń twierdzenia I mamy:

$$\iint\limits_{Z^i_{x_0}} f_i(x_0, y, z)\,dy\,dz = m^2(Z^i_{x_0}) \quad \text{dla} \quad i = 1, 2. \tag{3}$$

Według definicji całki po zbiorze płaskim [17]) przy dowolnie ustalonym x_0 mamy:

$$\iint\limits_{Z^i_{x_0}} f_i(x_0, y, z)\,dy\,dz = \iint\limits_{D} f_i(x_0, y, z)\,dy\,dz \quad \text{dla} \quad i = 1, 2. \tag{4}$$

gdzie D jest prostokątem $\{b \leqq y \leqq b';\ c \leqq z \leqq c'\}$, leżącym w płaszczyźnie $x = x_0$. W myśl lemmatu 2 mamy stąd:

$$\iiint\limits_{P} f_i(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_a^{a'} \Big[\iint\limits_{D} f_i(x,y,z)\,dy\,dz\Big]\,dx \quad \text{dla} \quad i = 1,2. \tag{5}$$

W myśl założeń twierdzenia I jest:

$$m^2(Z^1_x) = m^2(Z^2_x) \quad \text{dla} \quad x \in [a, a'], \tag{6}$$

a stąd i z (3) i (4):

$$\iint\limits_{D} f_1(x, y, z)\,dy\,dz = \iint\limits_{D} f_2(x, y, z)\,dy\,dz \quad \text{dla} \quad x \in [a, a']. \tag{7}$$

Z (5) mamy więc:

$$\iiint\limits_{P} f_1(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{P} f_2(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

a z (2) i (1):

$$m^3(Z_1) = m^3(Z_2),$$

co należało wykazać.

Poniżej przeprowadzony dowód można z łatwością przedstawić studentom w wykładzie analizy matematycznej przy okazji całek potrójnych lub w wykładzie matematyki elementarnej przy omawianiu miary Jordana.

---

[16]) Zob. op. cit. str. 309.
[17]) Zob. op. cit. str. 300.

III. Dowód zasadniczego twierdzenia algebry

Z dowodem tego tak znanego twierdzenia wchodzącego w zakres matematyki szkolnej [18]) nie ma trudności, znajduje się on bowiem we wszystkich podręcznikach algebry wyższej, a także w podręcznikach funkcji analitycznych. Trudność leży tu w tym, iż podawany w algebrze wyższej dowód nie jest czysto algebraiczny, wymaga zastosowania pewnych twierdzeń z teorii funkcji ciągłych dwóch zmiennych i z tego powodu nie może być wyłożony w kursie algebry wyższej słuchaczom I roku matematyki. Stąd projekt programu algebry wyższej I roku studiów w WSP zaleca podawanie tego twierdzenia bez dowodu. W kursie analizy matematycznej przy omawianiu teorii funkcji dwu zmiennych nie ma czasu na wracanie do tego zagadnienia, tak że dowód ten nie mieści się w programie studiów WSP, z czym ze względu na wagę tego twierdzenia w szkole średniej zgodzić się nie można.

Racjonalnym usunięciem tego braku byłoby włączenie dowodu zasadniczego twierdzenia algebry jako obowiązującego punktu do programu proseminarium, co obecnie nie obowiązkowo, lecz przykładowo sugeruje projekt tego programu. Proseminarium odbywa się w pierwszym półroczu III roku studiów, studenci mają więc przerobiony odnośny materiał przygotowawczy i dysponują odpowiednim wyrobieniem matematycznym. Dowód ten może być tematem wspólnej lektury na proseminarium lub referatu opracowanego przez studentów (nawet wszystkich z danej grupy ćwiczeniowej). Przez dwa lata prowadzenia proseminarium z powodzeniem stosowałem ten sposób zapoznawania studentów z dowodem zasadniczego twierdzenia algebry, korzystając z dowodu przeprowadzonego w podręczniku Wacława Sierpińskiego [19]).

W związku z tym dowodem chciałbym przedstawić pewną interpretację intuicyjno-geometryczną jego myśli przewodniej, pozwalającą uchwycić lepiej tok rozumowania.

Niech

$$f(u) = a_0u^m + a_1u^{m-1} + \ldots\ldots + a_{m-1}u + a_m,$$

gdzie

$$a_0 \neq 0 \text{ i } m \geqslant 1,$$

będzie wielomianem zmiennej zespolonej u o zespolonych współczynnikach $a_0, a_1 \ldots. a_{m-1}, a_m$. Moduł tej funkcji $|f(u)|$ możemy uważać za pewną funkcję $F(x, y)$ rzeczywistą dwu zmiennych rzeczywistych x i y, ciągłą na całej płaszczyźnie (x, y). Weźmy pod uwagę wykres

---

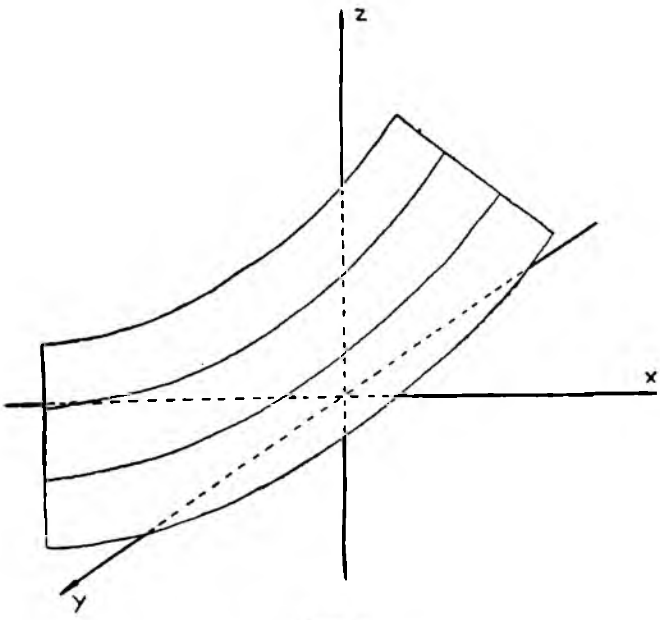
18) K. Freilich, M. Hornowski, *Algebra dla kl. X—XI*, Warszawa 1953, str. 227.

19) W. Sierpiński, *Zasady algebry wyższej*, Warszawa 1946, str. 98—101.

funkcji $z = F(x, y)$. Wykres ten jest pewną powierzchnią leżącą nad lub na (tzn. $z \geqslant 0$) płaszczyźnie (x, y) kartezjańskiego układu odniesienia w przestrzeni. Geometryczny sens zasadniczego twierdzenia algebry leży w tym, że powierzchnia ta przynajmniej w jednym punkcie styka się z płaszczyzną (x, y). Do stwierdzenia, że taki punkt istnieje, dochodzimy na drodze następującego rozumowania:
Najpierw uzasadniamy lemmat Gaussa:

Jeżeli dla liczby zespolonej u_0 mamy $f(u_0) \neq 0$, to istnieje taka liczba zespolona u, dla której $|f(u)| < |f(u_0)|$.

W geometrycznej interpretacji oznacza to, że z każdego punktu P powierzchni $z = F(x, y)$, nie leżącego na płaszczyźnie (x, y), można zejść po niej niżej, tzn. do pewnego punktu Q, leżącego też na tej powierzchni, a położonego bliżej niż punkt P płaszczyzny (x, y). Ale sam fakt możliwości schodzenia po powierzchni coraz to niżej nie oznacza jeszcze, że można, schodząc po niej, zejść aż na płaszczyznę $z = 0$, jak na to wskazuje przykład powierzchni o równaniu $z = e^x$ (zob. rys. 1).



Rys. 1

Wychodząc z dowolnego punktu tej powierzchni można po niej tak się posuwać, by odległość od płaszczyzny (x, y) malała do zera, a mimo to nie zejść nigdy na płaszczyznę (x, y). Intuicyjnie wyczuwamy, iż spowodowane to jest nieograniczonym oddalaniem się od początku układu przy takim schodzeniu.

Dlatego w pierwszej części omawianego dowodu zasadniczego twierdzenia algebry budujemy taki walec kołowy W o osi pokrywającej się z osią z-tów, na zewnątrz którego powierzchnia $z = F(x, y)$ leży powyżej pewnego poziomu. Poniżej tego poziomu można po powierzchni $z = F(x, y)$ schodzić więc tylko w obrębie walca W. Przy takim schodzeniu, wobec ciągłości powierzchni $z = F(x, y)$ musimy zejść przynajmniej raz na płaszczyznę (x, y), co w sposób ścisły uzasadnione jest w drugiej części dowodu [20]).

[20]) Op. cit. str. 101.