Zenon Moszner

O pewnym uogólnieniu zasady Cavalieriego

Sformułowaną w poprzednim artykule [1]) zasadę Cavalieriego można uogólnić następująco [2]):

Twierdzenie (T)

Niech w przestrzeni kartezjańskiej n-wymiarowej $R_n (n \geqslant 2)$ będą dane dwa zbiory punktów Z_1 i Z_2 mierzalne n-wymiarowo według Jordana.

Zbiory te jako mierzalne muszą być ograniczone. Oznaczmy przez d_1 średnicę pierwszego z nich, a przez d_2 średnicę drugiego. Niech $d = \max(d_1, d_2)$. Istnieją więc takie dwie $n-1$ wymiarowe hiperpłaszczyzny (hiperpłaszczyzny takie będę w dalszym ciągu nazywał płaszczyznami) $\pi_1{}^1$ i $\pi_2{}^2$ przestrzeni R_n, odległe od siebie o d, między którymi leży zbiór Z_1 [3]). Oznaczamy przez $\pi_a{}^1$ płaszczyznę równoległą do płaszczyzny $\pi_1{}^1$, leżącą między płaszczyznami $\pi_1{}^1$ i $\pi_1{}^2$ i odległą o a od płaszczyzny $\pi_1{}^1$. Każdej liczbie rzeczywistej a spełniającej nierówność $0 \leqq a \leqq d$ odpowiada jedna taka płaszczyzna $\pi_a{}^1$ i odwrotnie. Oznaczmy przez $Z_a{}^1$ iloczyn $\pi_a{}^1 Z_1$ [4]).

Dla zbioru Z_2 wprowadźmy analogicznie płaszczyzny $\pi_2{}^1$, $\pi_2{}^2$, $\pi_a{}^2$ i zbiór $Z_a{}^2$.

Zbiory $Z_a{}^1$ i $Z_a{}^2$ mogą być rozpatrywane jako zbiory w przestrzeni $n-1$ wymiarowej.

Założmy ponadto, że:

---

1) Zob. tw. I, str. 133.
2) Uogólnienie to formułuję w przestrzeni kartezjańskiej o dowolnej ilości wymiarów.
3) Zbiór Z_1 leży między płaszczyznami $\pi_1{}^1$ n $\pi_1{}^2$, jeżeli odległość każdego punktu tego zbioru od płaszczyzn $\pi_1{}^1$ i $\pi_1{}^2$ nie przekracza d.
4) Uogólnienie można by posunąć dalej, rozpatrując przekroje zbiorów Z_1 i Z_2 płaszczyznami k-wymiarowymi, gdzie $1 \leqslant k < n$. Myśl przewodnia poniżej przeprowadzonego dowodu nie uległaby przez to zmianie.

1) $m_w(Z_a{}^1) = m_w(Z_a{}^2)$ [5]) dla prawie każdego a należącego do przedziału $[0, d]$, tzn. z wyjątkiem co najwyżej takiego zbioru liczb a, którego miara liniowa Lebesgue'a równa się zero; lub

2) $m_z(Z_a{}^1) = m_z(Z_a{}^2)$ dla prawie każdego a należącego do przedziału $[0, d]$, lub

3) $m_w(Z_a{}^1) = m_z(Z_a{}^2)$ dla prawie każdego a należącego do przedziału $[0, d]$, lub

4) $m_z(Z_a{}^1) = m_w(Z_a{}^2)$ dla prawie każdego a należącego do przedziału $[0, d]$.

Przy tych założeniach twierdzimy, że miary n-wymiarowe zbiorów Z_1 i Z_2 według Jordana są sobie równe.

Myśl przewodnia dowodu niniejszego twierdzenia jest taka jak i w dowodzie twierdzenia I z poprzedniego artykułu [6]). Wymagane są tylko szersze (nie wchodzące już w zakres programów WSP) wiadomości z zakresu miary Jordana i całki Riemanna, które w dalszym ciągu podaję w postaci lemmatów.

L e m m a t 1

Niech zbiór Z będzie ograniczonym zbiorem punktów przestrzeni R_n. Wtedy:

n-wymiarowa miara wewnętrzna tego zbioru równa jest $\underline{\int}_Z 1dp$

n-wymiarowa miara zewnętrzna tego zbioru równa jest $\overline{\int}_Z 1dp$

Dowód tego lemmatu jest oczywisty, jeżeli zestawić definicję miary wewnętrznej i zewnetrznej według Jordana zbioru Z z definicją całki dolnej i górnej po zbiorze Z według Riemanna [8]). Z lemmatu tego wynika następujący wniosek:

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby zbiór Z był mierzalny w sensie Jordana, jest

$$\underline{\int}_Z 1dp = \overline{\int}_Z 1dp.$$

Stąd, jeżeli zbiór jest mierzalny, to jego miara równa się $\int 1dp$.

[5]) Przez $m_z(Z_a{}^i)$ dla $i = 1, 2$ oznaczan miarę zewnętrzną $n - 1$ wymiarową zbioru $Z_a{}^i$ według Jordana, a przez $m_w(Z_a{}^i)$ jego miarę wewnętrzną.

[6]) Zob. str. 133.

[7]) Przez $\underline{\int}_Z f(x_1, x_2 \ldots . x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$ lub krócej $\underline{\int}_Z f(p)dp$ oznaczam całkę dolną w sensie Riemanna z funkcji $f(p)$ po zbiorze Z. Podobnie $\overline{\int}_Z f(p)dp$ oznacza całkę górną.

[8]) Dokładny dowód w: S. B a n a c h, *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych.* Warszawa 1951, str. 206—207.

Lemmat 2

Niech Z oznacza zbiór ograniczony przestrzeni R_n, a $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$ funkcję n zmiennych całkowalną w sensie Riemanna w zbiorze Z. Przez B oznaczmy rzut zbioru Z na przestrzeń R_1 zmiennej x_1, a przez $A(x_1)$ $(x_1 \in B)$ zbiór tych wszystkich punktów zbioru Z, których rzutem jest punkt x_1, czyli tych wszystkich punktów zbioru Z, których pierwsza współrzędna wynosi x_1.

Prawdziwy jest wzór następujący:

$$\int_Z f(x_1 x_2 \ldots x_n)\, dx_1 \ldots dx_n = \int_B \Big[\overline{\int}_{A(x_1)} f(x_1 x_2 \ldots x_n)\, dx_2 \ldots dx_n\Big] dx_1 =$$
$$= \int_B \Big[\underline{\int}_{A(x_1)} f(x_1 x_2 \ldots x_n)\, dx_2 \ldots dx_n\Big] dx_1 .$$

Twierdzenie to jest uogólnieniem znanego twierdzenia o całce podwójnej, jako całce iterowanej. Jest ono wnioskiem z ogólniejszego twierdzenia o iterowaniu [9]).

Lemmat 3

Przyjmijmy oznaczenia poprzedniego lemmatu i ponadto załóżmy, że zbiór Z jest mierzalny n-wymiarowo według Jordana i jego miarę oznaczmy przez $m(Z)$.

Oznaczmy przez $m_w(A(x_1))$ oraz $m_z(A(x_1))$ $n-1$ wymiarową miarę wewnętrzną i zewnętrzną zbioru $A(x_1)$, braną w przestrzeni $n-1$ wymiarowej $(x_2 \ldots x_n)$.

Wtedy:

$$m(Z) = \int_B m_w(A(x_1))dx_1 = \int_B m_z(A(x_1))dx_1 .$$

Dowód

Z wniosku wyprowadzonego z lemmatu 1 mamy

$$m(Z) = \int_Z 1\, dx_1 \ldots dx_n . \tag{1}$$

Z lemmatu 2 otrzymujemy:

$$\int_Z 1\, dx_1 \ldots dx_n = \int_B \Big[\overline{\int}_{A(x_1)} 1\, dx_2 \ldots dx_n\Big] dx_1 = \int_B \Big[\underline{\int}_{A(x_1)} 1\, dx_2 \ldots dx_n\Big] dx_1 . \tag{2}$$

Stosując lemmat 1 do zbioru $A(x_1)$ w przestrzeni $R_{n-1}(x_2 \ldots x_n)$ mamy

$$\overline{\int}_{A(x_1)} 1\, dx_2 \ldots dx_n = m_z(A(x_1)) \quad \text{i} \quad \underline{\int}_{A(x_1)} 1\, dx_2 \ldots dx_n = m_w(A(x_1)) . \tag{3}$$

Zbierając (1), (2) i (3) otrzymujemy

$$m(Z) = \int_B m_z(A(x_1))\, dx_1 = \int_B m_w(A(x_1))\, dx_1 ,$$

a więc tezę lemmatu.

[9]) Zob. op. cit. str. 213—214, tamże dowód.

Lemmat 4

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest całkowalna w sensie Riemanna w przedziale $[a, b]$ i $f(x) = 0$ dla każdego $x \in [a, b]$, z wyjątkiem co najwyżej zbioru punktów miary liniowej Lebesgue'a zero, to

$$\int_a^b f(x)\, dx = 0 \ .$$

Dowód

Niech $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ będzie dowolną siecią narzuconą na przedział $[a, b]$. Ponieważ zbiór liniowy miary Lebesgue'a zero nie może zawierać żadnego przedziału, w każdym oczku tej sieci istnieje taki punkt ξ_i ($\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ dla $i = 0,1 \ldots n$-1), dla którego $f(\xi_i) = 0$. Stąd

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = 0 \ ,$$

a więc na podstawie założenia całkowalności $f(x)$ w przedziale $[a, b]$ zachodzi

$$\int_a^b f(x)\, dx = 0.$$

Dowód twierdzenia (T)

Ponieważ tak miarę zbioru Z_1, jak i zbior Z_2 można wyznaczać, wychodząc z siatki o bokach równoległych do płaszczyzny dowolnego układu odniesienia [10]), wybierzmy:

a) dla zbioru Z_1 układ odniesienia tak, by płaszczyzna $\pi_1{}^1$ miała równanie $x_1 = 0$, a płaszczyzna $\pi_1{}^2$ równanie $x_1 = \mathrm{d}$,

b) dla zbioru Z_2 układ tak, by płaszczyzna $\pi_2{}^1$ miała równanie $x_1 = 0$, a płaszczyzna $\pi_2{}^2$ równanie $x_1 = d$.

Oznaczmy przez B_1 i B_2 rzuty zbiorów Z_1 i Z_2 na przestrzenie R_1 zmiennej x_1.

Przez $A_i(x_1)$ dla $x_1 \in R_i$ oraz $i = 1,2$ oznaczamy zbiór tych wszystkich punktów zbioru Z_i, których rzutem jest punkt x_1.

Na podstawie lemmatu 3 i założeń naszego twierdzenia

$$m(Z_1) = \int_{B_1} m_w(A_1(x_1))\, dx_1 = \int_{B_1} m_z(A_1(x_1))\, dx_1 \tag{1}$$

oraz

$$m(Z_2) = \int_{B_2} m_w(A_2(x_1))\, dx_1 = \int_{B_2} m_z(A_2(x_1))\, dx_1.$$

Ponieważ zbiory B_1 i B_2 zawierają się w przedziale $[0, d]$ zmiennych x_1, mamy na podstawie określenia zbiorów Z_a^i (zob. wypowiedź twierdzenia (T)) oraz zbiorów $A_i(x_1)$:

[10]) Zob. mój artykuł w „Roczniku Naukowo-dydaktycznym WSP w Krakowie", Zesz. 1, „Matematyka", 1954, str. 99—111.

$Z^i_{x_1} = A_i(x_1)$ dla liczby x_1 należącej do B_i oraz $i = 1,2$,

$Z^i_{x_1} = 0$ dla liczby x_1 z przedziału $[0, d]$ nie należącej do B_i oraz $i = 1,2$.

Stąd:

$$m_w(Z^i_{x_1}) = m_w(A_i(x_1))$$

oraz

$$m_z(Z^i_{x_1}) = m_z(A_i(x_1)),$$

gdy

$$x_1 \in B_i \quad \text{oraz} \quad i = 1,2\ ^{11})$$

Natomiast

$$m_w(Z^i_{x_1}) = m_z(Z^i_{x_1}) = 0$$

gdy

$$x_1 \notin B_i,\ x_1 \in [0,d] \text{ oraz } i = 1,2.$$

Z powyższego oraz z uwagi na definicję całki po zbiorze otrzymujemy:

$$\int_{B_i} m_w(A_i(x_1))\,dx_1 = \int_0^d m_w(Z^i_{x_1})\,dx_1 \quad \text{dla } i = 1,2$$

$$\int_{B_i} m_z(A_i(x_1))\,dx_1 = \int_0^d m_z(Z^i_{x_1})\,dx_1 \quad \text{dla } i = 1,2.$$

Stąd oraz z (1)

$$m(Z_1) = \int_0^d m_w(Z^1_{x_1})\,dx_1 = \int_0^d m_z(Z^1_{x_1})\,dx_1$$

$$m(Z_2) = \int_0^d m_w(Z^2_{x_1})\,dx_1 = \int_0^d m_z(Z^2_{x_1})\,dx_1\ ,$$

czyli

$$m(Z_1) - m(Z_2) = \int_0^d [m_w(Z^1_{x_1}) - m_w(Z^2_{x_1})]\,dx_1 = \int_0^d [m_z(Z^1_{x_1}) - m_z(Z^2_{x_1})]\,dx_1 =$$

$$= \int_0^d [m_z(Z^1_{x_1}) - m_w(Z^2_{x_1})]\,dx_1 = \int_0^d [m_w(Z^1_{x_1}) - m_z(Z^2_{x_1})]\,dx_1. \tag{2}$$

Niech zachodzi przynajmniej jedna z ewentualności 1) 2) 3) 4) wymienionych w założeniach twierdzenia (T). Wtedy co najmniej jedna z czterech funkcji podcałkowych, występujących w związkach (2), równa się zero w całym przedziale $[0, d]$, z wyjątkiem zbioru punktów miary liniowej Lebesgue'a zero. Ale wtedy odnośna całka też musi równać się zero (lemmat 4), co pociąga za sobą równość

$$m(Z_1) = m(Z_2).$$

---

[11]) Miara w sensie Jordana nie zależy bowiem od układu odniesienia. Por. przypis 10.

Uwagi

1) Założeń twierdzenia (T) nie da się osłabić w tym sensie, by zakładać mierzalność tylko dla zbioru Z_1, o czym świadczy przykład następujący:

Niech Z_1 będzie zbiorem punktów walca: $x_2^2+x_3^2+\ldots+x_n^2\leqq 1$ i $0\leqq \leqq x_1\leqq 1$;
a Z_2 zbiorem punktów, których współrzędne spełniają warunki następujące:
$x_2^2+x_3^2+\ldots+x_n^2\leqq 1$ i $0\leqq x_1\leqq 1$ i x_1 jest liczbą wymierną lub
$(x_2-2)^2+x_3^2+\ldots+x_n^2\leqq 1$ i $0\leqq x_1\leqq 1$ i x_1 jest liczbą niewymierną.
Zbiór Z_2 powstaje więc ze zbioru Z_1, przez przesunięnie równoległe kół $x_2^2+x_3^2+\ldots+x_n^2\leq 1$ i $x_1=a$ (gdzie $a\in(0,1)$ i a jest liczbą niewymierną), o wektor o składowych $(0,2,0\ldots0)$.

Zbiór Z_1 jest mierzalny n-wymiarowo według Jordana.
Przekroje zbiorów Z_1 i Z_2 płaszczyznami $x_1=c$ ($c\in[0,1]$) są albo identyczne, albo przystające przez przesunięcie równoległe, ponadto są mierzalne n—1 wymiarowo, miary ich są więc równe. Mimo to zbiór Z_2, jak łatwo stwierdzić, jest niemierzalny n-wymiarowo w sensie Jordana.

2) Nie każdy przekrój płaski zbioru mierzalnego n-wymiarowo według Jordana musi być mierzalny n—1 wymiarowo, na co wskazuje następujący prosty przykład.

Niech zbiór Z *będzie walcem:* $x_2^2+x_3^2+\ldots+x_n^2\leqq 1$ i $x_1\in[0,1]$, w którym z przekroju płaszczyzną $x_1={}^1/_2$ usunięto wszystkie takie punkty, że choć jedna ich współrzędna jest niewymierna.

Zbiór Z jest mierzalny n-wymiarowo, a jego przekrój płaszczyzną $x_1=\frac{1}{2}$ nie jest mierzalny n—1 wymiarowo.

Można tu jednak udowodnić twierdzenie (T_1) następujące:

Niech Z_1 oznacza zbiór punktów w przestrzeni n-wymiarowej, mierzalny n-wymiarowo według Jordana. Analogicznie jak w wypowiedzi twierdzenia (T) prowadźmy płaszczyzny π_1^1; π_1^2; π_a^1 liczbę d i zbiory Z_a^1

Zbiór tych liczb a, dla których zbiory Z_a^1 są niemierzalne n—1 wymiarowo, jest miary liniowej Lebesgue'a zero [12]).

Na podstawie powyższego twierdzenia można udowodnić, że alternatywa założeń 1) 2) 3) 4) twierdzenia (T) równoważna jest następującemu założeniu

$$m\left(Z_a^1\right)=m\left(Z_a^2\right) \quad {}^{13})$$

---

[12]) Dowód tego twierdzenia przesłałem do redakcji „Wiadomości Matematycznych". Ukaże się on w tomie 2,2 tego czasopisma.

[13]) Tu przez $m\left(Z_a^i\right)$ dla $i=1,2$ oznaczam n-1 wymiarową miarę Jordana zbioru Z .

dla prawie wszystkich liczb a należących do przedziału $[0, d]$.
Widoczne jest, że z założenia 5) wynika przynajmniej jeden z warunków 1) 2) 3) i 4).

Niech np. zachodzi założenie 3). Oznaczmy przez A_1, zbiór tych liczb a, dla których zbiór Z_a^1 jest niemierzalny n—1 wymiarowo według Jordana, przez A_2 zbiór tych liczb a, dla których zbiór Z_a jest niemierzalny n—1 wymiarowo, a przez A_3 zbiór tych liczb a, dla których

$$m_w(Z_a^1) \neq m_z(Z_a^2)$$

Zbiory A_1 i A_2 są miary liniowej Lebesgue'a zero, na podstawie twierdzenia (T_1), a zbiór A_3 jest miary liniowej Lebesgue'a zero, na podstawie założenia 3). Stąd i suma $A_1 + A_2 + A_3$ jest miary liniowej Lebesgue'a zero. Dla dowolnej liczby a należącej do zbioru $[0, d]$ — $(A_1 + A_2 + A_3)$, zbiory Z_a^1 i Z_a^2 są mierzalne n—1 *wymiarowo i* $m_w(Z_a^1) = m_z(Z_a^2)$ a więc:

$$m(Z_a^1) = m(Z_a^2)$$

gdy

$$a \in [0, d] - (A_1 + A_2 + A_3)$$

czyli dla prawie wszystkich liczb a z przedziału $[0, d]$, co należało okazać.