

*Stanisław Serafin*

## **Uwagi o ćwiczeniach pisemnych z przedmiotów matematycznych**

Powszechnie są znane bardzo słabe wyniki z matematyki, jakie absolwenci szkół średnich uzyskują na egzaminach wstępnych na wyższe uczelnie. Zastraszające są zwłaszcza wyniki egzaminu pisemnego. Dla ilustracji wspomnę, że w lipcu 1956 r. spośród 55 kandydatów na matematykę w naszej WSP zaledwie 16 miało pracę pisemną ocenioną jako pozytywną. Pozostałe prace ze względu na całkowitą nieudolność w rozwiązywaniu oraz na podstawowe błędy tak w zakresie algebraicznych przekształceń, jak i wiadomości z podstaw geometrii przestrzennej, musiały być ocenione jako niedostateczne. Dodać jeszcze muszę, że zadania, jakie kandydaci otrzymali do rozwiązania, należały do łatwiejszych zadań szkolnych. Podobnie wyglądała ta sprawa i na innych uczelniach. Stan taki, trwający od kilku lat, uznajemy za groźny, mimo że ustne odpowiedzi niektórych źle piszących kandydatów można było ocenić pozytywnie.

Umiejętność bowiem matematyki to nie tylko znajomość pewnej ilości teoretycznych rozważań czy wzorów i twierdzeń, ale także (i to bardzo ważna) wprawa w samodzielny posługiwanie się poznanym aparatem teoretycznym w rozwiązywaniu różnego typu zadań, w opracowaniu rozwiązania zadania na piśmie. Wprawy tej uczniowie ze szkoły średniej nie wynoszą. Niejednokrotnie w rozmowach czy bezimiennych ankietach studenci stwierdzają, że w szkole średniej niemal żadnego zadania samodzielnie nie rozwiązali ani jednego zadania pisemnego z maturalnym włącznie nie napisali bez „pomocy”.

Z tego właśnie powodu wyrabianie umiejętności i przyzwyczajenie w tym zakresie zwłaszcza u kandydatów na nauczycieli jest problemem dużej wagi i zadanie to dziś jeszcze ciąży głównie na szkole wyższej. Najpełniej i najskuteczniej można je wypełniać w toku ćwiczeń.

Ćwiczenia w każdej dyscyplinie, a w matematyce w szczególności dzielimy na audytoryjne i pisemne. Tematem niniejszych uwag, napisa-

nych na podstawie materiałów zebranych w krakowskiej WSP i przedyskutowanych na zebraniach katedr matematycznych, są właśnie ćwiczenia pisemne.

### I. Cel ćwiczeń pisemnych

Najczęściej ćwiczenia pisemne spełniają rolę kontrolną, choć i efekty kształcące, jakie można przez nie uzyskać, są niezaprzeczalne. Cele, jakie stawiamy przed takimi ćwiczeniami z przedmiotów matematycznych, dają się ująć następująco:

1) sprawdzenie stopnia przyswojenia przez studentów materiału naukowego,

2) stwierdzenie postępów studentów w zdobywaniu sprawności rachunkowych i przekształceniowych,

3) kontrola wyrobionych w toku ćwiczeń audytoryjnych umiejętności rozwiązywania zadań,

4) wyrabianie u studentów umiejętności redagowania matematycznego rozumowania i przyzwyczajanie ich do poprawnego, ścisłego zapisu matematycznego oraz do podawania rzeczowych, dokładnych objaśnień słownych,

5) zbadanie wyników naszej pracy ze studentami i ocena skuteczności stosowanych metod i środków dydaktycznych.

Szczególną rolę odgrywają ćwiczenia pisemne w kształceniu umiejętności formułowania własnych myśli na piśmie w sposób ścisły, zwięzły i równocześnie zrozumiały. Żywy język, dyskusja z prowadzącym ćwiczenia, możliwość skorygowania i uzupełniania swej odpowiedzi stwarzają na ćwiczeniach audytoryjnych sytuację całkowicie odmienną od tej, z jaką student spotyka się podczas ćwiczeń pisemnych, w toku których pozostawiony sam sobie odpowiedzialny jest za każde napisane słowo. Wyniki uzyskane przez studentów w pracach pisemnych stanowią poważny podkład pod okresową ocenę ich pracy.

### II. Rodzaje ćwiczeń pisemnych

Dla osiągnięcia powyższych celów praktykowaliśmy trzy rodzaje ćwiczeń pisemnych:

A) ćwiczenia pisemne jako jedną z wielu form kontroli pracy studentów:

1) tzw. „dziesięciominutówki” — krótkie zadania, które student ma rozwiązać w określonym czasie (10 minut). Ćwiczenia takie szczególnie nadają się do badania sprawności rachunkowych w opracowywanej

części materiału czy też sprawdzania właściwego rozumienia definicji i twierdzeń. Wyniki takich zadań, jeśli je często stosować, pozwalają zorientować się prowadzącemu ćwiczenia, czy i w jakim stopniu studenci nabywają wprawy w szybkim i w poprawnym rozwiązywaniu nietrudnych zagadnień lub formułowaniu odpowiedzi na pytanie z zakresu teorii;

2) ćwiczenia pisemne okresowe (tzw. „kolokwia” pisemne). Urządzamy je przeważnie jedno czy dwa na semestr dla zamknięcia pewnej większej partii materiału przerobionej już w ramach wykładu i ćwiczeń audytoryjnych.

B) ćwiczenia pisemne jako jedyna forma kontroli pracy studenta w ciągu semestru.

### III. Przeprowadzenie ćwiczeń pisemnych

Z przeprowadzeniem każdego ćwiczenia pisemnego wiąże się szereg zagadnień, które omówię w oparciu o przyjęty u nas regulamin ćwiczeń i wspomniane na początku doświadczenia. Większość omawianych spraw dotyczy każdego z rodzajów ćwiczeń. Oddzielnie jednak zwrócę uwagę na ostatnią formę, gdyż — o ile mi wiadomo — jest ona rzadziej stosowana, a mam pewne w związku z nią doświadczenia.

#### A) Tematyka ćwiczeń pisemnych — jej przygotowanie

Ćwiczenie pisemne wymaga przygotowania i opracowania tematów zadań, których treść i rodzaj zależy od opracowanego już (ze studentami) materiału naukowego oraz celu szczegółowego, jaki w ramach naszego planu ma spełnić dane ćwiczenie. Wiąże się to z koniecznością (trudną do realizacji z powodu małej ilości godzin ćwiczeń) różnicowania tematyki ćwiczeń pod wspomnianym kątem widzenia. Tematy ćwiczenia pisemnego przygotowujemy zwyczajnie z tego materiału, który uprzednio na ćwiczeniach audytoryjnych został opracowany, zilustrowany przykładami, wykorzystany do rozwiązywania wzorcowych zadań oraz z którego studenci w ramach pracy domowej przerobili już pewną ilość zadań. Dobieramy zadania tak, by treścią swą obejmowały możliwie największą ilość materiału. Oczywiście z każdej partii materiału można podać różnego rodzaju zadania, w zależności od tego, co chcemy skontrolować lub czego studentów nauczyć. Jeśli więc chcemy zbadać sprawność w obliczaniu pochodnych, to dobieramy kilkanaście funkcji różnych typów i w temacie zaznaczamy wyraźnie, że chodzi tylko o obliczenie pochodnych. Gdy zaś chcemy zbadać całość wiadomości dotyczących przebiegu funkcji ograniczamy się do jednego przykładu, ale takiego, by jego opracowanie

wymagało pełnej znajomości wszystkich pojęć i twierdzeń w tym zakresie. Dla sprawdzenia zrozumienia i opanowania teorii konstruujemy zadanie, w którym istota rzeczy polega na zbadaniu stosowalności jednego z poważniejszych twierdzeń lub na udowodnieniu jakiegoś nowego dla studentów twierdzenia. Ten ostatni rodzaj zadania stosowaliśmy rzadko, szczególnie na pierwszym roku studiów, choć jego walory kształtujące nie budzą u nikogo wątpliwości.

Stopień trudności zadań (będących tematem ćwiczenia pisemnego) nie powinien odbiegać od zadań rozwiązywanych na ćwiczeniach audytoryjnych, a w każdym razie powinien być nie wyższy niż w zadaniach stanowiących temat pracy domowej. Zasady tej przestrzegamy ściśle, pamiętając z drugiej strony, że rozwiązanie zadania na ćwiczeniach pisemnych nie może się sprowadzać do skopiowania tylko zadań już rozwiązanych czy tylko do mechanicznego rachunku. Student bowiem powinien mieć możliwość wykazania pewnej samodzielności w podejściu do tematu i zaradności w pokonywaniu trudności. Kiedy sam układałem tematy, starałem się tak je dobrać, by typowe metody prowadziły do rozwiązania, ale by rozwiązujący miał również sposobność do zastosowania własnych pomysłów (np. oryginalnych skróconych rachunków — obliczenia całki przez pomysłową zmianę zmiennych, uproszczenia przez sprytny rozkład na czynniki itp.).

### **B) Przebieg ćwiczeń pisemnych**

Jak już wspomniałem, studenci sami stwierdzają, że trudności w opnowywaniu matematyki w szkole średniej leżały w tym, że za mało zadań rozwiązywali samodzielnie. Są nawet tacy (i to spory procent), którzy przyznają, że sami nie rozwiązywali żadnego zadania (w tym również pisemnego). Nie dziwimy się więc zbytnio, gdy stwierdzamy, że swe szkolne przyzwyczajenia chcą przenieść na teren wyższej uczelni. Likwidacja starych przyzwyczajzeń i wyrabianie nowych w tym zakresie, zwłaszcza u kandydatów na nauczycieli, jest zadaniem, którego realizacja wymaga obok odwołania się do rozsądku studentów także pewnych poczynań „administracyjnych” w rodzaju odpowiedniego rozmieszczenia piszących w sali oraz stałej kontroli podczas pisania. Jest bowiem rzeczą oczywistą, że podstawowym warunkiem osiągnięcia celu ćwiczeń pisemnych jest zabezpieczenie pełnej samodzielności pracy piszącego; inaczej pisemna praca studenta staje się bezwartościową fikcją. Oddzielnym i dyskusyjnym zagadnieniem jest dopuszczenie używania przez piszących podczas ćwiczeń pisemnych podręczników lub notatek. W dotychczasowej praktyce przeważnie pozwalaliśmy na to, zostawiając kwestię do każdorazowego uzgodnienia między wykładającym i prowadzącym ćwiczenia.

czenia (decyzję podawano studentom możliwie wcześniej). Używanie podręczników wprowadza w tok ćwiczeń moment rozprężenia i demobilizacji (utrudniona kontrola), z drugiej jednak strony może dla studenta dobrze przygotowanego stanowić ważne źródło psychicznego odprężenia i lepszego samopoczucia podczas pisania. Skłaniamy się jednak coraz bardziej ku pogładowi, że student powinien wymagany materiał opanować pamięciowo na tyle, by był w stanie rozwiązać zadania bez środków pomocniczych. Możliwość udzielenia studentom wyjaśnień podczas pisania zostawiamy do decyzji prowadzącego ćwiczenia, przestrzegając jednak zasady, że wyjaśnień udzielamy głośno dla wszystkich piszących.

### C) Poprawa prac pisemnych

Poprawa zadań pisemnych składa się z trzech części: poprawa pierwsza wykonywana jest przez prowadzącego ćwiczenia dla oceny pracy, druga wspólnie ze studentami i trzecia przez samych studentów. Przy poprawie przez prowadzącego ćwiczenia trzymamy się pewnych zasad, które jako ważne dla nauczyciela staramy się tą drogą zaszczerpić studentom. Każde więc zadanie poprawiamy od początku do końca, mimo napotykanych po drodze błędów. Chodzi bowiem o znalezienie wszystkich błędów, ich zróżnicowanie na istotne i pomyłkowe, oraz prześledzenie i ocenę sposobu rozwiązywania. Jest przecież jasne, że wynik otrzymamy w zadaniu przez studenta nie jest żadnym wskaźnikiem poprawności rozwiązania, a pierwszy błąd nie musi pracy dyskwalifikować. Ocenę ustalamy po poprawieniu prac wszystkich studentów. Jako podstawę dla niej przyjmujemy ilość rozwiązanych (przez piszącego) zadań, sposób ich rozwiązywania oraz ilość i jakość popełnionych błędów. Błędy zasadnicze, z materiału objętego programem szkoły średniej, dyskwalifikują pracę niezależnie od tego, czy są też błędy z matematyki wyższej, czy ich nie ma. Poprawa zadań ze studentami zaczyna się najczęściej od omówienia wyników. Głównym jednak jej celem jest omówienie najpoważniejszych i często spotykanych błędów, poparte przykładami z prac studentów; analiza przyczyn powstania tych błędów, wskazanie sposobów ich uniknięcia. Wydaje się celowe, niestety z braku czasu trudne do zrealizowania, rozwiązywanie wszystkich zadań z ćwiczeń pisemnych na ćwiczeniach audytoryjnych (i to możliwie na kilka różnych sposobów) i ocena różnych sposobów rozwiązania. W praktyce ograniczamy się do jednego z zadań, tego mianowicie, w którym było najwięcej trudności i błędów. Poprawione prace oddajemy studentom do przeglądu, by mogli zobaczyć, jakie popełnili błędy czy ewentualnie skonfrontować ocenę ze swoją pracą.

Z reguły zdarzają się piszący, których prace nie mogą być ocenione pozytywnie. Zachodzi wtedy konieczność dokonania poprawy pracy przez studenta (trzecia poprawa). Egzekwujemy to różnymi sposobami. Żądamy np. od studenta, by na piśmie opracował jeszcze raz rozwiązanie zadań z ćwiczeń pisemnych (ewentualnie jakichś jeszcze dodatkowych zadań), a często, by nadto podczas konsultacji podał ustne wyjaśnienia i wykazał się dokładną znajomością odnośnego materiału naukowego. W wypadku dużej ilości ocen niedostatecznych przy okresowym ćwiczeniu pisemnym (rodzaj A) 2) urządzamy czasem zadania pisemne poprawcze, po dodatkowym przeanalizowaniu na ćwiczeniach audytoryjnych czy po konsultacjach i po rozwiązaniu dalszych zadań przykładowych.

#### D) Kilka uwag o ćwiczeniach pisemnych

W toku ćwiczeń audytoryjnych prowadzący najczęściej ocenia postępy studentów uzyskując w ten sposób łącznie z wynikami prac pisemnych podstawę do zaliczenia studentowi ćwiczeń. W ćwiczeniach audytoryjnych więc obok celów kształcących realizujemy cele kontrolne. Ta kontrola i ocena odpowiedzi może wpłynąć i często wpływa hamująco na realizację celów kształcących, krępując swobodę wypowiedzi i stawiania pytań przez studentów, przeszkadzając w dyskusji nieodzownej dla kształcenia i rozwoju naukowych zainteresowań. (Oczywiście zależy to w dużym stopniu od wyrobienia i taktu metodycznego prowadzącego ćwiczenia). By temu zapobiec (dla eksperymentu), prowadziłem przez drugi semestr r. ak. 1955/56 specjalny rodzaj ćwiczeń z analizy matematycznej na trzecim rogu studiów. Ocenę i kontrolę pracy studentów przenieśliem całkowicie na ćwiczenia pisemne, stawiając ćwiczeniom audytoryjnym cele tylko kształcące. Wypełniały je mianowicie zapytania i dyskusje na temat materiału teoretycznego (dowody), rozwiązywanie przykładowych zadań (czasem na różne sposoby) pod moim kierunkiem itp. Ponieważ ćwiczenia pisemne musiały być przeprowadzane często, materiał ćwiczeniowy dzieliłem na partie, z których każdą przebrałem podczas ćwiczeń audytoryjnych (2 pełne godziny). Każda taka część zamknięta była listą zadań domowych oraz ćwiczeniami pisemnymi (1 pełna godzina). Ćwiczenia pisemne obejmowały trzy zadania tak pomyślane, by sprawdzały i znajomość teorii, i umiejętność jej zastosowania (zasadniczo w zakresie omawianym na ostatnich ćwiczeniach audytoryjnych), przy czym ich rozwiązanie nie wymagało zbyt skomplikowanych rachunków. Z góry podawałem minimum pracy, stanowiące warunek konieczny pozytywnej oceny.

Taki sposób prowadzenia ćwiczeń miał tę dodatnią stronę, że ćwicze-

nia audytoryjne były nieskrępowane, a przez to mogły studentom dawać więcej korzyści. Ćwiczenia tego rodzaju mobilizowały studentów do większej pracy w domu, zwłaszcza nad rozwiązaniem zadań. Częste ćwiczenia pisemne pozwalały na wyrobienie pewnych nawyków, choćby w estetycznym opracowaniu strony zewnętrznej rozwiązania; stały się rzeczą zwyczajną, eliminując tym samym moment zdenerwowania, zjawiający się zawsze przy rzadko wykonywanych czynnościach.

Podnieść trzeba jednak i strony ujemne tego systemu. Pracowitość studentów zwiększona wprawdzie, kierowała się ku rozwiązywaniu dużej ilości zadań typowych, mniej ku opanowaniu teorii i jej zastosowaniu w zadaniach nieszablonowych. Podczas pisania za cel stawiano sobie „by tylko coś obliczyć”, pomijając często rozumowanie, które czasem mogło zupełnie uwolnić od rachunków. Wreszcie, przygotowanie studentów do ćwiczeń audytoryjnych było słabsze (niż do pisemnych), w związku z czym, mimo że mogły, to nie spełniały one całkowicie zamierzonych celów i nie przynosiły spodziewanych wyników.

Trudno oczywiście osądzać ten sposób po półrocznym jego wypróbowaniu. Osobiście jestem jego zwolennikiem i uważam, że — przy zwiększonej ilości godzin ćwiczeń w stosunku do wykładów — daje on możliwość osiągnięcia dobrych wyników. Jednakże pomijając motywy psychologiczne oraz ewentualną niesprawiedliwość i niepełność oceny opartej tylko na wynikach prac pisemnych trudności w realizacji odstraszały od prowadzenia ćwiczeń tym sposobem. Już sam podział materiału tak, by zmieścić go w zaplanowanym czasie przy możliwie obszernym i dogłębnym potraktowaniu, jest raczej kłopotliwy. Przygotowanie zadań takich, by na podstawie ich rozwiązania uzyskać dostatecznie rzetelny pogląd na wiedzę studenta, jest trudne i pochłaniające dużo czasu. Poprawa i ocena często pisanych zadań zajmuje wiele godzin, których i tak za dużo nie mamy. Skromny wymiar godzin ćwiczeń w stosunku do wykładów zmusza do pośpiechu, nie pozwalając np. na gruntowną poprawę i omówienie wszystkich zadań.

Dla ilustracji uzyskiwanych wyników przytoczę następujące dane liczbowe: przy pięciu pisanych zadaniach na 20 osób piszących 11 uzyskało trzy lub więcej ocen pozytywnych (automatyczne zaliczenie ćwiczeń), 4 osoby po dwie oceny pozytywne i trzy negatywne (— dt, nd), trzy osoby po jednej tylko ocenie pozytywnej (dwie ostatnie grupy składały ustne kolokwium zaliczeniowe) oraz 2 osoby nie miały ani jednej oceny pozytywnej i nie otrzymały zaliczenia ani możliwości starania się o nie. Wszystkie oceny pozytywne miała tylko jedna studentka, uzyskując średnią „—dobrze”.

#### IV. Przyczyny słabych wyników ćwiczeń i egzaminów pisemnych

Jak to widać, choćby z przytoczonych wyżej danych (praktyka w naszej szkole i na innych uczelniach wykazuje w tym względzie dużą zbieżność), wyniki, jakie piszący uzyskują na ćwiczeniach i na egzaminach pisemnych, są niezadowolające. Oczywiście ciąży na nich złe przygotowanie ze szkoły średniej, mała wprawa, a w wielu wypadkach i rażąca nieudolność w samodzielnym podejściu do zagadnienia; bywa to czasem związane z błędami naszej rekrutacji. Ma to jednak i przyczyny wynikające ze sposobu pracy samych studentów oraz naszej pracy ze studentami w toku studiów. Ze strony studentów najpoważniejszą przyczyną słabych wyników jest u wielu z nich brak systematycznej pracy, zwłaszcza nad zadaniami podawanymi do rozwiązania w domu; wstępne trudności odstrasza ją ich od dalszego wysiłku. Studiowanie zaś zrywami przed ćwiczeniem pisemnym tylko u zdolniejszych może prowadzić do pozytywnego wyniku.

Z przyczyn wynikających z naszego sposobu pracy ze studentami wymienię dwie. Jedną, to fakt, że z braku czasu ćwiczenia pisemne urządzamy zbyt rzadko, co wobec małego przyzwyczajenia studentów do pisania powoduje dodatkowy moment zdenerwowania utrudniający pracę.

Za drugą uważam pewną sprzeczność między kształceniem umiejętności matematycznego rozumowania a koniecznością wyrabiania mechanizmów pozwalających studentowi bez większego mobilizowania sił umysłowych rozwiązać nawet nieszablonowe zadanie. W ćwiczeniach audytoryjnych oczywiście większy nacisk (i słusznie) kładziemy na pierwszą z wymienionych stron kształcenia. Umiejętność bowiem rozumowania matematycznego jest najistotniejszym elementem wykształcenia w tej dziedzinie wiedzy. Ograniczona ilość czasu nie pozwala położyć podobnie silnego nacisku na wyrabianie pewnych mechanicznych sprawności użytecznych przy rozwiązywaniu nietrudnych zadań. Moim zdaniem, wręcz szkodliwym jest przestawianie roli tych dwóch stron procesu kształcenia; uważam bowiem, że u studenta uzdolnionego ta druga powinna być niejako produktem ubocznym pierwszej. Student sam po gruntownym opanowaniu materiału teoretycznego i dokładnym przeanalizowaniu zadań rozwiązanych dla przykładu powinien umieć grupować zadania w typy według myśli przewodnich rozwiązania, sprawności rachunkowe zaś powinien zdobywać w pracy domowej. Środkiem więc likwidującym wspomnianą sprzeczność może być, moim zdaniem, zwiększona aktywność studentów, wykorzystanie przez nich podręczników i zbiorów zadań oraz opieka z strony prowadzących ćwiczenia (konsultacje).