Stanisław Gołąb

SUR UNE MÉTHODE RÉDUCTIVE DE DÉFINITION DES COURBURES D'UNE COURBE PLONGÉE DANS UN ESPACE n-DIMENSIONNEL

La courbe C dans l'espace euclidien à n dimensions, suffisamment régulière, possède, comme on sait, dans chaque point non singulier $n-1$ courbures

$$/1/ \qquad \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \ldots, \mathcal{K}_{n-1}$$

dont $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \ldots, \mathcal{K}_{n-2}$ sont déterminées absolument tandis que la dernière $\mathcal{K}_{n-1}$ peut être définie algébriquement /avec le signe/. Les courbures /1/ peuvent être définies soit analytiquement /au moyen des équations de Frenet/ en introduisant l'arc comme un paramètre naturel, soit par une voie géométrique. Dans le dernier cas nous disposons des méthodes différentes. Quelques définitions géométriques ont un caractère plus général que les définitions analytiques, qui exigent les suppositions de régularité plus fortes que dans les cas de définitions géométriques. Dans ma recherche [1] j'ai donné, par exemple, la généralisation de certaines formules de Burali-Forti à l'aide desquelles on peut définir les courbures /1/ même dans le cas où ces courbures n'existent pas au sens de définition classique /par exemple dans le cas où la courbe C n'est pas rectifiable/.

Dans la présente recherche nous allons donner une proposition /qui dans le cas $n = 3$ est connue/ qui va nous servir pour la définition par réduction des courbures /1/ en partant de celle dont l'ordre est le plus grand, c'est à dire de la coubure $\mathcal{K}_{n-1}$.

On sait que si la courbe C dans l'espace à 3 dimensions R_3 possède en un point déterminé les courbures $\mathcal{K}_1$ et $\mathcal{K}_2$ et a au point envisagé le plan osculateur π, dans ce cas, si l'on désigne par $\tilde{C}$ la projection orthogonale de la courbe C sur le plan π, cette projection $\tilde{C}$ aura au point envisagé /de contact/ la première courbure égale en valeur absolue à la première courbure de la courbe C. Nous allons généraliser cette proposition en démontrant la

<u>Proposition 1</u>

Soit une courbe C de l'espace euclidien R_n dont la classe de régularité est $C^{n/n-1/}$ au point envisagé p_0 [1]. En introduisant comme paramètre l'arc σ, désignons par $H_{n-1}/p_0/$ l'hyperplan osculateur étendu sur les vecteurs

$$/2/ \qquad r'/\sigma_0/, \ldots, r^{/n-1/}/\sigma_0/$$

et par $\tilde{C}$ la projection orthogonale de la courbe C sur $H_{n-1}/p_0/$. Nous affirmons que la courbe $\tilde{C}$ a au point p_0 les courbures

---

1/ Nous disons que la courbe est de classe de régularité $C^{p/q/}$ /où $q < p$/ au point envisagé s'il existe une représentation paramétrique de la courbe à l'aide du rayon-vecteur $r/\tau/$ telle que le champs de $r/\tau/$ possède les dérivées continues jusqu'à l'ordre p inclusivement, les vecteurs $r'/\tau/, \ldots, r^{(q)}/\tau/$ étant linéairement indépendants au point considéré.

/3/ $$\tilde{\mathcal{K}}_1, \ldots, \tilde{\mathcal{K}}_{n-1}$$

et que pour tous les $i = 1, \ldots, n-2$ ont lieu les égalités

/4/ $$|\tilde{\mathcal{K}}_i| = |\mathcal{K}_i|.$$

Démonstration. Il résulte des suppositions faites que dans le cas considéré sont applicables les équations de Frenet. En désignant par $t_1, \ldots, t_n$ les vecteurs du n-èdre de Frenet au point p_o, nous savons que l'hyperplan osculateur H_{n-1} étendu sur les vecteurs /2/ coïncide avec l'hyperplan étendu sur les vecteurs

/5/ $$t_1, \ldots, t_{n-1}.$$

Nous allons faire usage du système de coordonnées dont l'origine se trouve au point p_o et dont les axes x_i passent respectivement par les vecteurs t_i pour $i = 1, \ldots, n-1$. Dans ce système nous écrirons les équations des courbes C et $\tilde{C}$ respectivement

/6/ $$r = r/\sigma/, \qquad r = \tilde{r}/\sigma/$$

où r et $\tilde{r}$ ont respectivement les coordonnées

/7/ $$\begin{aligned} r/\sigma/ &= \left\{x_1/\sigma/, \ldots, x_{n-1}/\sigma/, \ x_n/\sigma/\right\} \\ \tilde{r}/\sigma/ &= \left\{x_1/\sigma/, \ldots, x_{n-1}/\sigma/, \ 0\right\}. \end{aligned}$$

Il en résulte que la courbe $\tilde{C}$ sera au point p_o également de la classe de régularité $C^{n/n-1/}$. Notons cependant que le paramètre σ ne sera plus généralement un arc pour la courbe $\tilde{C}$. Nous nous servirons maintenant des formules bien connues pour les courbures /en supposant $C^{n/n-1/}$/ valables pour une paramétrisation quelconque. Désignons dans ce but par

$$/8/ \qquad \begin{aligned} a_{ik} &\overset{df}{=} r^{/i/} . r^{/k/} \\ \tilde{a}_{ik} &\overset{df}{=} \tilde{r}^{/i/} . \tilde{r}^{/k/} \end{aligned}$$

les produits respectifs scalaires des vecteurs dérivés /différentiation par rapport au paramètre σ /.
Désignons ensuite par G_i /et respectivement par $\tilde{G}_i$/ les determinants de Gram

$$/9/ \qquad G_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix} \qquad i = 1,2,\ldots,n.$$

On aura dans ce cas les formules

$$/10/ \quad \mathcal{K}_i^2 = \frac{G_{i-1} \cdot G_{i+1}}{G_1 \cdot G_i^2} \text{ pour } i=2,\ldots,n-1; \mathcal{K}_1^2 = \frac{G_2}{G_1^3}.$$

En tenant compte des formules de Frenet

$$/11/ \qquad \begin{cases} t_1' = - \mathcal{K}_1 t_2 \\ t_j' = - \mathcal{K}_{j-1} t_{j-1} + \mathcal{K}_j t_{j+1}, \quad j=2,\ldots,n-1 \\ t_n' = - \mathcal{K}_{n-1} t_{n-1} \end{cases}$$

nous pouvons exprimer linéairement $r^{/i/}/0/$ par $t_1,\ldots,t_n$. On a notamment:

$r'/0/ = t_1$, $r''/0/ = \mathcal{K}_1 t_2$, $r'''/0/ =$
$$= \mathcal{K}_1' t_2 - \mathcal{K}_1^2 t_1 + \mathcal{K}_1 \mathcal{K}_2 t_3$$

et ainsi de suite. En vertu du lemme du travail [1] nous avons

$$/12/ \quad r^{/i/}/0/ = \sum_{m=1}^{i-1} \alpha_m^i t_m + \mathcal{X}_1 \mathcal{X}_2 \dots \mathcal{X}_{i-1} t_i ; \; i=1,\dots,n,$$

où les coefficients α_m^i sont des polynômes de courbures $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots \mathcal{X}_{i-2}$ et de leurs dérivées. Il en résulte en particulier que

$$/13/ \quad \begin{aligned} x_n^{/i/}/0/ &= 0 \quad \text{pour } i = 1,2,\dots,n-1 \\ x_n^{/n/}/0/ &= \mathcal{X}_1 \mathcal{X}_2 \dots \mathcal{X}_{n-1} . \end{aligned}$$

Il s'ensuit de la formule pour $\bar{r}/\sigma/$ et de la définition /8/ des éléments a_{ik}, $\tilde{a}_{ik}$ que

$$a_{ik} = \sum_{j=1}^{n} x_j^{/i/} x_j^{/k/}$$

$$\tilde{a}_{ik} = \sum_{j=1}^{n-1} x_j^{/i/} x_j^{/k/}$$

Donc

$$/14/ \quad a_{ik} = \tilde{a}_{ik} + x_n^{/i/} x_n^{/k/}$$

On en déduit, en tenant compte de /13/, que pour le point considéré p_o $/\sigma = 0/$ on a

$$/15/ \quad a_{nn} = \tilde{a}_{nn} + /\mathcal{X}_1 \mathcal{X}_2 \dots \mathcal{X}_{n-1}/^2$$

Par contre

$$/16/ \quad a_{ik} = \tilde{a}_{ik} \quad \text{si} \quad i < n \quad \text{ou } k < n.$$

De ces dernières égalités il resulte que

$$/17/ \qquad \tilde{G}_i = G_i \quad \text{pour} \quad i=1,\dots,n-1,$$

et en tenant compte des formules /10/

$$/18/ \qquad \tilde{\mathcal{K}}_i = \mathcal{K}_i \quad \text{pour} \quad i=1,\dots,n-2,$$

ce que nous voulions précisément démontrer.

En nous basant sur la proposition que nous venons de démontrer plus haut, nous voulons propcser maintenant la définition suivante:

Supposons que la courbe C plongée dans l'espace euclidien à n dimensions R_n possède au point p_o et dans son voisinage l'hyperplan osculateur à n-1 dimensions $H_{n-1}/p_o/$ ainsi que $H_{n-1}/p/$ d'un ordre de contact maximum. Soit $\overset{o}{t}{}^{*}_n$ et t^{*}_n les vecteurs-unités perpendiculaires respectivement à $H_{n-1}/p_o/$, soit à $H_{n-1}/p/$ et dirigés conventionnellement; σ désigne la longueur d'arc $\overset{\frown}{p_o p}$ et θ_1 -l'angle entre les vecteurs $\overset{o}{t}{}^{*}_n$, t^{*}_n. S'il existe

$$/19/ \qquad \lim_{\sigma \to 0} \frac{\theta_1}{\sigma} = g_1$$

on dira que le nombre g_1 est la /n-1/-me courbure absolue de la courbe C au point p_o, que nous désignons

$$/20/ \qquad \mathcal{K}^{*}_{n-1} = g_1.$$

En désirant déterminer la courbure $\mathcal{K}^{*}_{n-2}$ nous projetons C sur $H_{n-1}/p_o/$. Désignons cette projection par C_1. Si la courbe C_1 possède au pcint p_o et aux points voisins p_1 les hyperplans osculateurs $H_{n-2}/p_o/$ et $H_{n-2}/p_1/$ d'un ordre de contact maximum, nous désignons de nouveau par $\overset{o}{t}{}^{*}_{n-1}$ et t^{*}_{n-1} les vecteurs-unités perpendiculaires respectivement à $H_{n-2}/p_o/$ et $H_{n-2}/p_1/$ et situés dans l'hyperplan $H_{n-1}/p_o/$. Désignons par θ_2 l'angle entre $\overset{o}{t}{}^*_{n-1}$ et t^*_{n-1} et par σ_1 l'arc de la courbe C_1 entre . les points p_o et p_1. S'il existe la limite

/21/ $$\lim_{\sigma_1 \to 0} \frac{\theta_2}{\sigma_1} = g_2 \ , \quad \text{on posera}$$

/22/ $$\mathcal{K}^*_{n-2} = g_2.$$

En procédant ainsi par recurrence, nous arriverons à la courbe plane C_{n-2}. Si cette dernière a au point p_o et aux points voisins p_{n-2} les droites $H_1/p_o/$ et $H_1/p_{n-2}/$ d'un ordre de contact maximum, dans ce cas en désignant par $\overset{o}{t}{}^*_1$ et t^*_1 les vecteurs-unités perpendiculaires respectivement à $H_1/p_o/$ et $H_1/p_{n-2}/$ et situés dans le plan $H_2/p_o/$, par θ_{n-1} l'angle entre ces vecteurs et par σ_{n-2} la longueur d'arc de la courbe C_{n-2} entre les points p_o, p_{n-2}, on détermine la limite

/23/ $$\lim_{\sigma_{n-2} \to 0} \frac{\theta_{n-1}}{\sigma_{n-2}} = g_{n-1} \ , \quad \text{en désignant}$$

/24/ $$\mathcal{K}^*_1 = g_{n-1} \ .$$

On détermine de cette manière /si les hyperplans correspondants $H_i/p_o/$, $H_i/p_{n-i-1}/$ et les limites correspondantes existent/ la suite de nombres

/25/ $$\mathcal{K}^*_{n-1}, \dots, \mathcal{K}^*_1$$

que nous appellerons respectivement /n-1/-me, /n-2/-me, ..., la première courbure de la courbe C au point p_o.

Comme on le voit, nous nous basons dans cette définition sur:

1/ la notion d'hyperplan osculateur à p dimensions comme un hyperplan d'un ordre de contact maximum /dans la définition de ce dernier n'intervient que la notion de distance/,

2/ le calcul de la limite du rapport d'un angle entre deux vecteurs voisins à la distance entre les points d'application de ces vecteurs,

3/ les projections consécutifs de la courbe C sur les hyperplans osculateurs $H_i/p_o/$ de dimensions de plus en plus petites en terminant par $H_2/p_o/$.

Il peut arriver dans cette méthode qu'il existe des courbures $\mathcal{K}^*_{n-1},\dots,\mathcal{K}^*_p$ tandis que la courbure $\mathcal{K}^*_{p-1}$ n'existe déjà plus. Ce phénomène est à un certain degré inverse à celui d'une définition inductive classique des courbures $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2,\dots$, $\mathcal{K}_{n-1}$. L'exemple qui se trouve dans l'ouvrage de Z.Moszner [2] montre que la courbe peut avoir l'unique hyperplan $H_i/p_o/$ d'un ordre de contact maximum, tout en ne possédant pas l'hyperplan unique $H_{i-1}/p_o/$ d'ordre maximum de contact.

La définition des courbures $\mathcal{K}_i$, qui résulte de la généralisation des formules Burali-Forti et que je cite dans l'ouvrage [1], n'exige pas que l'on commence la définition soit à partir de $\mathcal{K}_1$ ou de $\mathcal{K}_{n-1}$ mais peut être appliquée à l'une quelconque de courbures $\mathcal{K}_i$. Si, notamment, la courbe C a au point p_o l'hyperplan $H_i/p_o/$ d'un ordre de contact maximum pour $i = 1,2,\dots n-1$ et si l'on désigne par δ_i la distance

$$/26/ \qquad \delta_i = \rho\left[p,\ H_i/p_o/\right]$$

où p est un point voisin sur la courbe C, dans ce cas nous pouvons définir

$$\mathcal{K}_i = \lim_{p \to p_o} \frac{/i+1/ \cdot \delta_i}{\delta_o \cdot \delta_{i-1}}, \tag{27}$$

$$\delta_o = \sigma = \text{la longueur de l'arc } \widetilde{p_o p}$$

Nous voyons que dans cette définition qui n'a ni un caractère de définition par induction, ni par réduction interviennent les distances du point p aux deux /voisins quant aux dimensions/ hyperplans osculateurs.

Nous allons maintenant démontrer, en nous servant de deux propositions de Z.Moszner [2], les propositions suivantes.

Proposition 2

Si la courbe C de l'espace R_n est de classe $C^{n/n/}$, dans ce cas il existe toutes les courbures $\mathcal{K}^*_{n-1}, \ldots, \mathcal{K}^*_1$ et ont lieu les égalités

$$\mathcal{K}^*_i = \mathcal{K}_i \quad \text{pour} \quad i=1,\ldots,n-1 \tag{28}$$

où $\mathcal{K}_i$ sont des courbures au sens classique et les vecteurs $t^*_n, t^*_{n-1}, \ldots, t^*_1$ /au sens près/ sont des vecteurs-unités du n-èdre de Frenet.

Proposition 3

Si la courbe C n'est que de classe $C^{n/n-1/}$ et possède la courbure $\mathcal{K}^*_{n-1}$, dans ce cas est vrai également la thèse de la proposition 1.

Démonstration. Il résulte de la supposition $C^{n/n-1/}$ que la courbe possède les courbures $\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_{n-1}$ au sens classique remplissant l'équation de Frenet. De la supposition $C^{n/n/}$ et de la proposition I de Z.Moszner il résulte également que la courbe possède l'hyperplan osculateur H_{n-1} d'ordre maximum n. Comme on le sait, l'hyperplan H_{n-1} est déterminé par les vecteurs /linéairement indépendants/ /5/ du n-èdre de Frenet. Il s'ensuit que le vecteur-unité t_n^* perpendiculaire au H_{n-1} se confond /au sens près/ avec le vecteur t_n du n-èdre de Frenet, c'est à dire

$$t_n^* = \varepsilon_n t_n.$$

De là, en vertu de la définition de $\mathcal{X}_{n-1}^*$ et de la dernière équation de Frenet, il resulte que l on doit avoir

$$\left|\mathcal{X}_{n-1}^*\right| = \left|\mathcal{X}_{n-1}\right|.$$

Désignons par $\tilde{C}$ la projection /orthogonale/ de la courbe C sur H_{n-1}. Il s'ensuit de notre proposition 1 que

$$\left|\tilde{\mathcal{X}}_{n-2}\right| = \mathcal{X}_{n-2} .$$

De la proposition de Moszner découle que l'hyperplan H_{n-2} étendu sur les vecteurs $t_1,\dots,t_{n-2}$ a précisément l'ordre maximum de contact avec la courbe. Le vecteur-unité t_{n-1}^* perpendiculaire à H_{n-2} situé dans H_{n-1} se confond, par conséquent, /au sens près/ avec t_{n-1}. Il en résulte que $\left|\mathcal{X}_{n-2}^*\right| = \mathcal{X}_{n-2}$. En appliquant le raisonnement analogue aux projections successives, nous obtenons conséquemment les formules /28/, puisque $\mathcal{X}_1^*$ est déterminé en valeur absolue.

La proposition 3 se démontre pareillement en se servant de la proposition II de Z.Moszner [2].

Ouvrages cités

[1] S.Gołąb, On the geometrical significance of curvatures of higher orders for curves lying in n-dimensional spaces. Ann.Pol.Math.II /1955/ p. 209-214.

[2] Z.Moszner, Sur quelques théorèmes concernant les hyperplans osculateurs. Rocznik Naukowo-Dydaktyczny WSP w Krakowie, zesz.13, /1961/.

Краткое изложение

О некотором способе регрессивного определения кривизн кривой n-мерного пространства

На основании обобщения известной теоремы, что кривизна кривой, которая есть проекцией данной кривой на её оскаляционную плоскость в точке p_0, равняется первой кривизне данной кривой в точке p_0, автор определяет регрессивно кривизны $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots, \mathcal{X}_{n-1}$ начиная от кривизны $\mathcal{X}_{n-1}$.