Zenon Moszner

SUR QUELQUES THÉORÈMES CONCERNANT LES HYPERPLANS OSCULATEURS

1. Etant donnée une courbe C dans l'espace euclidien E_n de dimension n et ayant fixé un point p_o sur cette courbe, on peut définir les hyperplans osculateurs successifs de la courbe C dans le point p_o de la manière suivante. Désignant par i le nombre entier entre 1 et n-1, et par $H_i/p_o/$ l'hyperplan osculateur de dimension i, nous déterminons d'abord $H_1/p_o/$ c.à d. l'hyperplan tangent de dimension 1 /la droite/ comme limite de la droite variable p_op quand $p \to p_o$, où $p \neq p_o$, $p \in C$. Supposant que nous avons déjà défini l'espace $H_i/p_o/$, nous prenons de nouveau le point $p \neq p_o$, $p \in C$, et si p n'appartient pas à $H_i/p_o/$, nous considérons l'hyperplan de dimension i + 1 qui est étendu sur l'hyperplan $H_i/p_o/$ et le vecteur $\overrightarrow{p_op}$; si sa limite existe, nous la désignons par $H_{i+1}/p_o/$.

Cette façon de définir est peut-être la plus naturelle et conduit en conséquence aux définitions successives des courbures $\mathcal{K}_i/p_o/$ de la courbe C dans le point p_o pour $i = 1,2,\ldots,/n-1/$. On peut omettre pourtant cette façon inductive et ayant fixé un nombre entier i, remplissant les inégalites: $1 \leq i \leq n - 1$, on peut définir directement $H_i/p_o/$, n'ayant pas défini préalablement les $H_1/p_o/,\ldots,H_{i-1}/p_o/$. C'est pourquoi nous prenons la famille de tous les hyperplans de dimension i, qui passent par le point $p_o \in C$. Désignons n'importe lequel de ces hyperplans par H_i^*. Soit p un point quelconque de la courbe C et $p \neq p_o$. Désignons par $\rho /p,H_i^*/$, $\rho /p,p_o/$ respectivement la distance du point p a l'hyperplan H_i^* et au point p_o. En prenant $\rho /p,p_o/$ comme infiniment petit du premier ordre, il peut arriver /cela dépend de la courbe C et du choix de l'hyperplan H_i^*/ que $\rho /p,H_i^*/$ sera un infiniment petit d'ordre déterminé α. S'il existe dans la famille des hyperplans H_i^* un hyperplan unique ayant l'ordre maximum α /voir la définition 3/, nous l'appelons l'hyperplan osculateur de dimension i de la courbe C au point p_o.

Cette note n'est pas consacrée à l'analyse précise du rapport mutuel de ces deux définitions.

Le seconde de ces définitions et une généralisation de la formule de Burali-Forti donnée par S. Gołąb /voir [1]/ et qui concerne l'interprétation géométrique des courbures $\mathcal{K}_i/p_o/$, ont donné l'impulsion à la définition réductive des courbures $\mathcal{K}_i/p_o/$ c.à d. à leurs définitions successives commençant par la plus haute $\mathcal{K}_{n-1}/p_o/$ /voir [2]/. Cela entraine la nécessité de se servir de quelques théorèmes concernant des hyperplans osculateurs $H_i/p_o/$ et ces théorèmes sont justement l'objet de cette note. Certaines définitions introductives sont formulées non pour des courbes, mais pour des ensembles quelconques. Les théorèmes par contre concernent les courbes.

2. <u>Définition 1.</u>

Un nombre α /fini non négatif ou $+\infty$/ est appelé l'ordre du contact d'un hyperplan H_{n-1} à l'ensemble

$Z \subset E_n$ dans le point p_o, qui est un point d'accumulation de l'ensemble Z, si:

1/ dans le cas où α est un nombre fini:

$$\lim_{\substack{p \to p_o \\ p \in Z}} \frac{\rho/p, H_{n-1}/}{\left[\rho/p, p_o/\right]^{\alpha}} = g ,$$

où g est un nombre fini positif,

2/ dans le cas où $\alpha = +\infty$ on a pour chaque nombre m entier positif:

$$\lim_{\substack{p \to p_o \\ p \in Z}} \frac{\rho/p, H_{n-1}/}{\left[\rho/p, p_o/\right]^{m}} = 0.$$

Il y a des ensembles Z tels que pour chaque hyperplan H_{n-1} passant par $p_o \in Z$ il n'existe pas d'ordre déterminé du contact de H_{n-1} avec Z. L'exemple d'un tel ensemble dans l'espace E_2 est une spirale quelconque hyperbolique ou logarithmique s'enroulant autour du point p_o. Aucune droite de E_2 passant par le point p_o n'a pas d'ordre déterminé du contact à cette spirale. S'il existe pourtant l'ordre du contact d'un hyperplan à l'ensemble Z dans le point p_o, il est déterminé d'une manière univoque. Cela a lieu car:

α étant l'ordre du contact de H_{n-1} à Z dans p_o, on a:

1/ si α est un nombre fini, alors:

a/ pour chaque nombre β tel que $0 \leq \beta < \alpha$:

$$\frac{\rho/p, H_{n-1}/}{\left[\rho/p, p_o/\right]^{\beta}} = \frac{\rho/p, H_{n-1}/}{\left[\rho/p, p_o/\right]^{\alpha}} \cdot \left[\rho/p, p_o/\right]^{\alpha-\beta} \xrightarrow[p \in Z]{p \to p_o} g \cdot 0 = 0;$$

b/ pour chaque nombre $\beta > \alpha$:

$$\frac{\rho/p,H_{n-1}/}{\left[\rho/p,p_o/\right]^{\beta}} = \frac{\rho/p,H_{n-1}/}{\left[\rho/p,p_o/\right]^{\alpha}} \cdot \frac{1}{\left[\rho/p,p_o/\right]^{\beta-\alpha}} \xrightarrow[p\in Z]{p\to p_o} g./+\infty/=+\infty;$$

2/ si $\alpha = +\infty$, alors pour chaque nombre β fini:

$$\frac{\rho/p,H_{n-1}/}{\left[\rho/p,p_o/\right]^{\beta}} = \frac{\rho/p,H_{n-1}/}{\left[\rho/p,p_o/\right]^{m}} \left[\rho/p,p_o/\right]^{m-\beta} \xrightarrow[p\in Z]{p\to p_o} 0 \cdot C = 0,$$

où m est un nombre entier positif quelconque tel que $\beta < m$.
L'ordre du contact d'un hyperplan H_{n-1} à un ensemble Z dans un point p_o /s'il existe/ sera désigné par $\left\{H_{n-1}, Z, p_o\right\}$.

Lemme.

Si l'on suppose que:

/1/ l'ensemble Z est une courbe C d'équation paramétrique-vectorielle $r = r/t/$, pour $t \in [a,b]$,

/2/ en point $t = t_o \in [a,b]$ il existe la derivée $r'/t/$;

/3/ $r'/t_o/ \neq \vec{0}$,

alors la définition 1 d'ordre du contact est équivalente à la définition suivante:

Définition 2.

Nous appelons un nombre α /fini non négatif ou $+\infty$/ l'ordre du contact d'un hyperplan H_{n-1} à la courbe C dans un point $p_o \in C$, /correspondant à la valeur t_o du paramètre t/, si:

1/ dans le cas où α est un nombre fini:

$$\lim_{\substack{t\to t_o\\ t\in[a,b]}} \frac{\rho/p/t/, H_{n-1}/}{/t - t_o/^{\alpha}} = g, \text{ fini et } > 0,$$

où $p/t/$ est le point de la courbe C, correspondant à la valeur t du paramètre,

2/ dans le cas où $\alpha = +\infty$, pour chaque nombre entier positif m:

$$\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \in [a,b]}} \frac{\rho/p/t/,\ H_{n-1}/}{/t - t_0/^m} = 0.$$

Démonstration.

Il suffit de remarquer pour la démonstration que pour $t \neq t_0$ et pour chaque nombre β non négatif on a:

$$\frac{\rho/p,H_{n-1}/}{[\rho/p,p_0/]^\beta} = \frac{\rho/p/t/,H_{n-1}/}{|r/t/-r/t_0/|^\beta} = \frac{\rho/p/t/,H_{n-1}|}{/t - t_0/^\beta} \cdot \frac{1}{\left|\frac{r/t/-r/t_0/}{t - t_0}\right|^\beta}$$

et d'après l'hypothèse /2/ et /3/:

$$\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \in [a,b]}} \frac{1}{\left|\frac{r/t/ - r/t_0/}{t - t_0}\right|^\beta} = \frac{1}{|r'/t_0/|^\beta} \neq 0.$$

Remarque 1.

L'exemple cité ci-dessous montre que l'hypothèse /3/ est essentielle dans le lemme précédent et que sans cette hypothèse l'ordre du contact au sens de la définition 2 n'a pas un caractère géométrique, car il peut dépendre du paramétrage de la courbe C.

Exemple 1.

Soit C la courbe d'espace E_2 d'équation paramétrique:

$$\left.\begin{aligned} x &= t^2 \\ y &= t^4 \end{aligned}\right| \quad \text{pour} \quad t \in [-1,1].$$

La courbe C est de classe C^1 dans $[-1,1]$, mais elle ne remplit pas l'hypothèse /3/ au point $t_o = 0$.

Considérons la droite H_1 à l'équation $y = 0$.

Puisque: $$\frac{\rho/p/t/,\ H_1/}{|t-0|^4} = \frac{|t|^4}{|t|^4} = 1 \xrightarrow[t\to 0]{} 1,$$

alors l'ordre du contact, au sens de la définition 2, de la droite H_1 à la courbe C dans le point p_o /0, 0/ est égal à 4.

Mais d'autre part:

$$\frac{\rho/p/t/,H_1/}{[\rho/p/t/,p_o/]^2} = \frac{|t|^4}{[\sqrt{t^4+t^8}]^2} = \frac{|t|^4}{t^4+t^8} = \frac{1}{1+t^4} \xrightarrow[t\to 0]{} 1,$$

alors $\{H_1,\ C,\ p_o\}$ au sens de la définition 1 est égal à 2.

<u>Remarque 2.</u>

Les hypothèses du lemme n'impliquent pas l'existence de $\{H_{n-1},\ C,\ p_o\}$ pour chaque hyperplan H_{n-1} ce que montre l'exemple 3 à la page 24.

<u>Définition 3.</u>

Nous appelons l'hyperplan H_{n-1} l'hyperplan d'ordre maximum du contact à l'ensemble Z au point p_o, si

1/ il existe $\{H_{n-1},\ Z,\ p_o\}$;

2/ pour chaque hyperplan $H^*_{n-1} \neq H_{n-1}$:

a/ il existe $\{H^*_{n-1},\ Z,\ p_o\}$

et $\{H^*_{n-1},\ Z,\ p_o\} \leqslant \{H_{n-1},\ Z,\ p_o\}$, ou bien b/ $\left| H^{*}_{n-1}, Z, p_o \right|$ n'existe pas.

Remarquons que:

I. Pour un ensemble donné Z et un point p_o, l'hyperplan d'ordre maximum du contact à Z dans p_o peut ne pas exister. Cela est une conséquence de l'existence de tels ensembles pour lesquels il n'y a pas d'hyperplans d'ordre déterminé du contact dans un point donné p_o.

II. Il y a des exemples où il existe une infinité des hyperplans d'ordre maximum du contact à Z dans un point donné p_o.

<u>Exemple 2.</u>

Prenons comme Z la courbe C dans l'espace E_3 d'équations suivantes:

$$x = t \quad \text{pour} \quad t \in [-1,1],$$

$$y = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad t = 0, \\ e^{-\frac{1}{t^2}} & \text{pour} \quad t \neq 0 \text{ et } t \in [-1,1], \end{cases}$$

$$z = 0.$$

La courbe C est de classe C^{∞} dans $[-1, 1]$. Désignons par p_o le point /0,0,0/. Pour chaque plan H_2 d'équation $By + Cz = 0$, où $B^2 + C^2 > 0$, et pour chaque nombre entier positif m nous avons:

$$\frac{\rho/p/t/,H_2/}{|t|^m} = \frac{|B.e^{-\frac{1}{t^2}} + C.0|}{|t|^m} = |B|.\left|\frac{e^{-\frac{1}{t^2}}}{t^m}\right| \xrightarrow[t \to 0]{} 0$$

alors d'après le lemme on a: $\left\{H_2, C, p_o\right\} = +\infty$.

Il existe alors une infinité de plans d'ordre maximum du contact à la courbe C dans le point p_o.

III. Même, s'il existe exactement un seul hyperplan d'ordre maximum du contact à l'ensemble Z dans le point p_o, il peut y avoir des hyperplans pour lesquels l'ordre du contact à Z dans p_o n'existe pas, comme le montre l'exemple suivant:

Exemple 3.

Soit C la courbe d'équations:

$$x = t \quad \text{pour} \quad t \in -[1, 1],$$

$$y = \begin{cases} t^{q+1} & \text{pour } t \in [0,1,] \text{ où } q \text{ est un nombre entier positif,} \\ t^{q+2} & \text{pour } t \in [-1,0] \end{cases}$$

$$z = 0$$

On établit sans difficulté que

1/ la courbe C est de classe C^1 dans $[-1,1]$,

2/ l'ordre du contact du plan $z = 0$ à la courbe C dans le point p_o /0, 0, 0/ est égal à $+\infty$,

3/ pour chaque plan H_2 d'équation $Ax + By + Cz = 0$ où $A \neq 0$, nous avons:

$$\frac{\rho/p/t/,H_2/}{|t|} = \frac{|At+By/t/+C.0|}{|t|} = \left|A+B\,\frac{y/t/}{t}\right| \xrightarrow[t\to 0]{} |A| \neq 0,$$

d'où on a d'après le lemme: $\{H_2, C, p_o\} = 1$;

4/ pour chaque plan H_2 d'équation $By + Cz = 0$, où $B \neq 0$, nous avons:

$$\frac{\rho/p/t/,H_2/}{|t|^{q+1}} = \frac{|B.y/t/+C.0|}{|t|^{q+1}} = |B|.\left|\frac{y/t/}{t^{q+1}}\right|,$$

alors:

$$\lim_{t\to 0+0} \frac{\rho/p/t/,H_2/}{|t|^{q+1}} = \lim_{t\to 0+0} |B|.\left|\frac{t^{q+1}}{t^{q+1}}\right| = |B| \neq 0,$$

et, par conséquent,

$$\lim_{t\to 0-0} \frac{\rho/p/t/,H_2/}{|t|^{q+1}} = \lim_{t\to 0-0} |B| \cdot \left|\frac{t^{q+2}}{t^{q+1}}\right| = 0.$$

On voit donc d'après le lemme que $\{H_2, C, p_0\}$ n'existe pas. La discussion précédente nous permet de conclure que dans ce cas-ci il existe exactement un seul plan d'ordre maximum du contact, et que malgré cela il y a des plans pour lesquels l'ordre du contact à C dans p_0 n'existe pas.

3. Nous démontrerons maintenant un théorème qui donne une condition suffisante d'existence et d'unicité de l'hyperplan d'ordre maximum du contact:

<u>Théorème I</u>

Si l'on suppose que:

/1/ l'ensemble Z de l'espace E_n est la courbe C d'équation $r = r/t/$ pour $t \in [a,b]$,

/2/ la fonction r/t/ est de classe C^n dans un entourage d'un point $t_0 \in [a,b]$,

/3/ le rang de la matrice $\|\mathring{r}_1, \mathring{r}_2, \ldots, \mathring{r}_n\|$[1/] est égal à n,

alors, il existe exactement un seul hyperplan H_{n-1}, passant par le point $p_0 = r/t_0/$, d'ordre maximum du contact à la courbe C dans le point p_0. L'équation de l'hyperplan H_{n-1} est de la forme:

/4/ $(R - r/t_0/) \cdot \mathring{u} = 0,$ [2/]

1/ Ici et dans la suite je désigne par $\mathring{r}_i$ la dérivée $\left(\frac{d^i\, r/t/}{dt^i}\right)_{t=t_0}$ pour $i=1,2,\ldots,n$.

2/ Je désigne ici et dans la suite par $r_1 \cdot r_2$ le produit scalaire des vecteurs r_1 et r_2.

où R est le rayon-vecteur du point variable sur H_{n-1}, et $\underset{\circ}{u} = \mathring{r}_1 \wedge \mathring{r}_2 \wedge \ldots \wedge \mathring{r}_{n-1}$.[1] De plus: $\{H_{n-1}, C, p_o\} = n$.

Démonstration.

On peut représenter chaque hyperplan H^*_{n-1}, passant par p_o, par l'équation de la forme:

$$/5/ \qquad (R - r/t_o/) \cdot u = 0,$$

où u est un vecteur de longueur 1.

Nous avons: $\rho(p/t/, H^*_{n-1}) = |(r/t/ - r/t_o/) \cdot u|$.

Développons r/t/ d'après la formule de Peano jusqu'au terme d'ordre n dans un entourage du point p_o /ce qui est possible d'après la hypothèse /2/:

$$r/t/ = r/t_o/ + \mathring{r}_1/t-t_o/ + \ldots + \mathring{r}_{n-1} \frac{/t-t_o/^{n-1}}{/n-1/!} +$$

$$+ \left[\mathring{r}_n + e/t/\right] \cdot \frac{/t-t_o/^n}{n!},$$

où:

$$/6/ \qquad \lim_{t \to t_o} e/t/ = \vec{0}.$$

De là:

$$/7/ \quad \rho(p/t/, H^*_{n-1}) = \Big| /\mathring{r}_1 \cdot u//t-t_o/ + \ldots + /\mathring{r}_{n-1} \cdot u/ \frac{/t-t_o/^{n-1}}{/n-1/!} +$$

$$+ \left[(\mathring{r}_n + e/t/) \cdot u\right] \cdot \frac{/t-t_o/^n}{n!} \Big|.$$

La supposition /3/ entraine qu'il n'existe pas de vecteur $u \neq \vec{0}$

1/ Je désigne ici et dans la suite par $r_1 \wedge r_2 \wedge \ldots \wedge r_{n-1}$ le produit vectoriel des vecteurs $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$ d'espace E_n.

perpendiculaire à tous les vecteurs $\mathring{r}_1, \mathring{r}_2, \ldots, \mathring{r}_n$.
De là pour chaque vecteur donné $u \neq \vec{0}$ il existe un nombre k a la propriété suivante:

- k est le plus petit des nombres $1,2,\ldots,n$ pour lequel $\mathring{r}_k \cdot u \neq 0$.

Alors d'après le lemme, /7/ et /6/ nous avons:

$$\left\{H^*_{n-1}, C, p_o\right\} = k .$$

Cela implique que les hyperplans pour lesquels $k = n$, c.à d. les hyperplans d'équation /5/ pour lesquels:

/8/ $u.\mathring{r}_n \neq 0$ et $u.\mathring{r}_i = 0$ pour $i = 1,2,\ldots,n-1$,

auront l'ordre maximum du contact à la courbe.
D'après la supposition /3/ nous savons pourtant que le vecteur $\tilde{u}$ de longueur 1 satisfaisant aux conditions /8/ est donné par la formule:

$$\tilde{u} = \pm \frac{\mathring{r}_1 \wedge \mathring{r}_2 \wedge \ldots \wedge \mathring{r}_{n-1}}{\left|\mathring{r}_1 \wedge \mathring{r}_2 \wedge \ldots \wedge \mathring{r}_{n-1}\right|},$$

alors il existe exactement un seul l'hyperplan H^*_{n-1}, pour lequel $\left\{H^*_{n-1}, C, p_o\right\} = n$, et on peut le représenter par l'équation de la forme: $(R - r/t_o/) \cdot \tilde{u} = 0$, donc de la forme: $(R-r/t_o/) \cdot /\mathring{r}_1 \wedge \ldots \wedge \mathring{r}_{n-1}/ = 0$, c.q.f.d.

<u>Remarque 3</u>.

L'exemple 2 à la page 23 montre que la supposition /3/ dans le théorème I est essentielle et on ne peut pas l'éliminer, même par l'augmentation de la classe de régularité de la courbe C. Dans cet exemple il existe une infinité des plans qui ont l'ordre maximum du contact.

Nous démontrons maintenant le théorème suivant:

<u>Théorème II</u>.

Supposons que:

/1/ l'ensemble Z d'espace E_n est la courbe C d'équation $r = r/t/$ pour $t \in [a,b]$,

/2/ la fonction r/t/ est de classe C^{n-1} dans un entourage du point $t_o \in [a,b]$,

/3/ le rang de la matrice $\| \mathring{r}_1, \mathring{r}_2, \ldots, \mathring{r}_{n-1} \|$ est égal à n - 1,

/4/ il existe exactement un seul hyperplan H_{n-1}, passant par le point $p_o = r/t_o/$ et d'ordre maximum du contact à C au point p_o.

En désignant par C' la projection perpendiculaire de la courbe C sur l'hyperplan H_{n-1}, nous affirmons que l'équation de l'hyperplan H_{n-1} est de la forme:

/5/ $$(R-r/t_o/) \cdot u = 0,$$ où

/6/ $$u = \mathring{r}_1 \wedge \mathring{r}_2 \wedge \ldots \wedge \mathring{r}_{n-1},$$ et

/7/ qu'il existe exactement un seul hyperplan H_{n-2} de dimension n-2, passant par le point p_o et d'ordre maximum du contact à C' au point p_o.

<u>Démonstration</u>.

Pour la démonstration de la conclusion /5/ et /6/ par l'absurde admettons que l'équation de l'hyperplan H_{n-1} est de la forme: $(R-r/t_o/) \cdot v = 0$, où

/8/ $$|v| = 1,$$ et

/9/ le vecteur v n'est pas parallèle au vecteur $u = \mathring{r}_1 \wedge \ldots \wedge \mathring{r}_{n-1}$.

Par conséquent, le vecteur v n'est pas perpendiculaire à tous les vecteurs $\mathring{r}_1, \mathring{r}_2, \ldots, \mathring{r}_{n-3}$ il existe donc un nombre entier l tel que: $1 \leq l \leq n-1$ et $v.\mathring{r}_l \neq 0$. Désignons par m:

/10/ le plus petit des nombres 1,2,...,n-1, pour lequel $v \cdot \mathring{r}_m \neq 0$.

Développons r/t/ d'après la formule de Peano jusqu'au terme d'ordre m:

$$/11/ \quad r/t/=r/t_o/+\mathring{r}_1/t-t_o/+ \ldots + \mathring{r}_{m-1} \frac{/t-t_o/^{m-1}}{/m-1/!} + $$
$$+ \left[\mathring{r}_m + e/t/\right] \cdot \frac{/t-t_o/^m}{m!}$$

où:

$$/12/ \qquad \lim_{t \to t_o} e/t/ = \vec{0}.$$

Nous avons: $\rho(p/t/, H_{n-1}) = \left|(r/t/ - r/t_o/) \cdot v\right|$,

alors d'après /11/ et /10/:

$$\rho(p/t/, H_{n-1}) = \left| \left[(\mathring{r}_m + e/t/) \cdot v\right] \frac{/t-t_o/^m}{m!} \right|.$$

Cela donne d'après /10/ et /12/:

$$\lim_{t \to t_o} \frac{\rho(p/t/, H_{n-1})}{|t - t_o|^m} = \frac{|\mathring{r}_m \cdot v|}{m!} \neq 0.$$

L'hyperplan H_{n-1} a alors, d'après le lemme, l'ordre du contact à la courbe C dans le point p_o égal à m.
Ce raisonnement implique que pour chaque hyperplan H^*_{n-1} d'équation: $(R - r/t_o/) \cdot v_1 = 0$, pour lequel

$\mathring{r}_1 \cdot v_1 = \mathring{r}_2 \cdot v_1 = \ldots = \mathring{r}_{m-1} \cdot v_1 = 0$ et $\mathring{r}_m \cdot v_1 \neq 0$, nous avons: $\left\{ H^*_{n-1}, C, p_o \right\} = m$. Mais le nombre de ces hyperplans H^*_{n-1} étant infini, nous obtenons la contradiction avec la supposition /4/. La conclusion /5/ et /6/ est donc démontrée.

Nous allons démontrer la propriété /7/. Prenons le système des coordonnées de telle façon que l´équation de l´hyperplan H_{n-1} est de la forme $x_n = 0$. 1/

/13/. Le vecteur u perpendiculaire à cet hyperplan aura la n-ième coordonnée différente de zéro.

Désignons les coordonnées du vecteur r/t/ par $\varphi_1/t/, \varphi_2/t/, \ldots, \varphi_n/t/$.

Puisque $u = \mathring{r}_1 \wedge \ldots \wedge \mathring{r}_{n-1}$, alors la n-ième coordonnée du vecteur u est égale à:

$$\Delta = /-1/^{n+1} \begin{vmatrix} \varphi'_1/t_o/, & \varphi'_2/t_o/, & \ldots, & \varphi'_{n-1}/t_o/ \\ \varphi''_1/t_o/, & \varphi''_2/t_o/, & \ldots, & \varphi''_{n-1}/t_o/ \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi^{(n-1)}_1/t_o/, & \varphi^{(n-1)}_2/t_o/, & \ldots, & \varphi^{(n-1)}_{n-1}/t_o/ \end{vmatrix},$$

et de là, d´après /13/, nous avons:

/14/ $$\Delta \neq 0.$$

La projection C´ de la courbe C sur l´hyperplan H_{n-1} a l´équation de la forme $r^* = r^*/t/$, où le vecteur $r^*/t/$ a les coordonnées: $\varphi_1/t/, \varphi_2/t/, \ldots, \varphi_{n-1}/t/, 0$.

Nous constatons alors, envisageant la courbe C´comme la

1/ Les hypothèses du théorème II ne dépendent pas du système des coordonnées.

courbe dans l'espace de dimension $n - 1$ que:

1/ en vertu de la supposition /2/ la courbe C' est de classe C^{n-1} dans un entourage du point p_o,

2/ le rang de la matrice $\| \mathring{r}_1^*, \mathring{r}_2^*, \ldots, \mathring{r}_{n-1}^* \|$, où

$$\mathring{r}_i^* = \left(\frac{d^i r^*/t/}{dt^i}\right)_{t=t_o} \qquad \text{pour } i = 1,2,\ldots,n-1 \text{ est, d'après}$$

/14, égal à $n-1$.

En vertu du théorème I, où nous posons $n-1$ à la place de n, nous concluons qu'il existe exactement un seul hyperplan H_{n-2}, passant par p_o, d'ordre maximum du contact à la courbe C' dans le point p_o, c.q.f.d.

Remarque 4.

L'exemple 3 de la page 24 montre que la supposition /3/ du théorème II est essentielle et on ne peut pas la supprimer, même par l'augmentation de la classe de régularité de la courbe C.

La courbe définie dans l'exemple 3 est de classe C^q /q est un nombre quelconque entier positif/ dans certain entourage du point $t_o = 0$ et il existe exactement un seul plan /z = 0/ d'ordre maximum du contact à C au point /0,0,0/. Nous montrerons que dans cet exemple la projection C' de la courbe C sur le plan z = 0 ne possède pas dans le point /0,0/ une droite unique d'ordre maximum du contact à C'.

Considérons une droite quelconque H_1, passant par le point p_1 /0,0/. Son équation est de la forme: $Ax+By = 0$, où $A^2 + B^2 > 0$.

1/ Si $A \neq 0$, alors en raisonnant de la même façon comme dans le point 3/ de l'exemple 3 nous obtenons:

$\{H_1, C', p_1\} = 1$. Mais on peut trouver une infinité de droites d'équation $Ax + By = 0$, où $A \neq 0$, alors aucune d'elles ne peut être une droite unique possédant l'ordre maximum du contact à C dans p_1.

2/ Si $A = 0$, alors $B \neq 0$ et dans ce cas, en raisonnant de la même façon comme dans le point 4/ de l'exemple 3, nous obtenons la conclusion que $\{H_1, C', p_1\}$ n'existe pas.

Puisque les cas 1/ et 2/ épuisent toutes les possibilités quant à la position de la droite H_1, alors il n'existe pas de droite unique possédant l'ordre maximum du contact à C' dans p_1.

Remarque 5.

La supposition /4/ dans le théorème II n'est pas une conséquence de la supposition /3/. Si cela était juste, les suppositions /1/, /2/, /3/, /4/ du théorème II auraient lieu d'après les hypothèses /1/, /2/, /3/. Alors d'après le théorème II, il aurait lieu /5/ et /6/, et l'hyperplan H_{n-1} d'équation: $(R - r/t_o/) \cdot u = 0$ où $u = \mathring{r}_1 \wedge \mathring{r}_2 \wedge \ldots \wedge \mathring{r}_{n-1}$ serait l'hyperplan d'ordre maximum du contact à la courbe C dans le point p_o. C'est pourquoi il devrait y avoir un ordre déterminé du contact à C dans p_o. Mais cela ne doit pas nécessairement avoir lieu, comme le montre l'exemple suivant:

Exemple 4.

Soit $C \subset E_3$ la courbe donnée par les équations:

$$x = t \qquad \text{pour } t \in [-1,1],$$
$$y = t^2 \qquad \text{pour } t \in [-1,1],$$
$$z = \begin{cases} t^{2q}\sin\frac{1}{t} & \text{pour } t \neq 0 \text{ et } t \in [-1,1], \text{ où } q \text{ est un nombre entier positif,} \\ 0 & \text{pour } t = 0. \end{cases}$$

Cette courbe est de classe C^q en chaque point d'intervalle $[-1, 1]$. La matrice $\|\mathring{r}_1, \mathring{r}_2\|$ dans le point $t_o = 0$ a la forme:

$$\begin{Vmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 2, & 0 \end{Vmatrix}$$

alors elle a le rang 2.

Le vecteur $\mathring{r}_1 \wedge \mathring{r}_2$ a les coordonnées /0, 0, 2/. Prenons le plan H_2 d'équation $z = 0$.

Nous avons: $\rho(p/t/, H_2) = \left|t^{2q} \sin\frac{1}{t}\right|$, alors:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\rho(p/t/, H_2)}{|t^{2q}|} = \lim_{t\to 0} \left|\sin\frac{1}{t}\right|$$ n'existe pas et, par conséquent, comme on peut facilement démontrer, il n'existe pas $\{H_2, C, p_o\}$.

<u>Remarque 6</u>.

L'exemple 4, donné plus haut, démontre aussi que:

a/ on ne peut pas remplacer l'hypothèse /3/ dans le théorème I par la supposition /3/ du théorème II, même par l'augmentation de régularité /2/ de la courbe C,

b/ le plan osculateur de la courbe peut ne pas avoir un ordre déterminé du contact à cette courbe.

Le théoreme suivant est une conclusion simple des théo - rèmes I et II;

Théorème III

Si l'on suppose que:

/1/ la courbe $C \subset E_n$ d'équation $r = r/t/$ est de classe C^n dans un entourage d'un point t_o,

/2/ le rang de la matrice $\| \overset{\circ}{r}_1, \overset{\circ}{r}_2, \ldots, \overset{\circ}{r}_n \|$ est égal à n, alors:

/3/ il existe exactement un hyperplan H_{n-1} de dimension $n - 1$, passant par le point $p_o = r/t_o/$ et ayant l'ordre maximum du contact à C au point p_o, et si nous désignons par C' la projection perpendiculaire de la courbe C sur l'hyperplan H_{n-1}, alors:

/4/ il existe exactement un seul hyperplan H_{n-2} de dimension $n - 2$, qui passe par le point p_o et qui est de l'ordre maximum du contact à C' au point p_o.

Ouvrages cités

[1] . S.Gołąb "On the geometrical significance of courvatures of higher orders for curves lying in n-dimensional spaces". Annales Polonici Mathematici II.2 /1955/ p.209-214.

[2] . S.Gołąb "Sur une méthode réductive de définition des courbures d'une courbe plongée dans un espace n-dimensionnel". Rocznik Naukowo-Dydaktyczny WSP w Krakowie, Zeszyt 13.

Краткое изложение

Несколько теорем, связанных с соприкасающимися гиперплоскостями

Этот труд связан с возможностями определения соприкасающихся гиперплоскостей кривой C картезианского n -мерного пространства E_n в данной на ней точке p_0, не предельным переходом а степенью касания с этой кривой и с некоторыми теоремами, связанными с вышеуказанным способом определения. Начальные определения сформулированы для произвольных множеств, а не обязательно для кривых. Теоремы однако касаются кривых. Примеры, которые даны в настоящем труде, обосновывают необходимость этого затеснения.

Обозначим через: H_i i -мерную гиперплоскость простанства E_n а через $\rho(p, H_i)$, $\rho(p, p_0)$ соответственно расстояние точки p от гиперплоскости H_i и от точки p_0.

Принимаем следующие определения:

Определение 1

Число α /конечное неотрицательное, или $+\infty$/ называем степенью касания гиперплоскости H_{n-1} ко множеству $Z \subset E_n$ в точке p_0, являющейся предельной точкой множества Z , если:

I/ в случае если α конечное число:

$$\lim_{\substack{p \to p_0 \\ p \in Z}} \frac{\rho(p, H_{n-1})}{[\rho(p, p_0)]^{\alpha}} = g,$$

где g конечное положительное число,

2/ в случае если $\alpha = +\infty$, для каждого натурального числа m :

$$\lim_{\substack{p \to p_0 \\ p \in Z}} \frac{\rho(p, H_{n-1})}{[\rho(p, p_0]^m} = 0.$$

Если существует степень касания гиперплоскости H_{n-1} ко множеству Z в точке p_0, то будем его обозначать через $\{H_{n-1}, Z, p_0\}$.

Определение 3 [1]

Гиперплоскость H_{n-1} называем гиперплоскостью с максимальной степенью касания ко множеству Z в точке p_0, когда:

I/ существует $\{H_{n-1}, Z, p_0\}$,

2/ для каждой гиперплоскости $H^*_{n-1} \neq H_{n-1}$:

или: а/ существует $\{H^*_{n-1}, Z, p_0\}$

и $\{H^*_{n-1}, Z, p_0\} < \{H_{n-1}, Z, p_0\}$,

или: b / не существует $\{H^*_{n-1}, Z, p_0\}$.

Теорема I.

Если:

/I/: множество Z пространства E_n кривая C с уравнением $r = r(t)$ для $t \in [a,b]$,

/2/: функция $r(t)$ класса C^n в некотором окружении точки $t_0 \in [a,b]$,

/3/: ранг матрицы $\| \mathring{r}_1, \mathring{r}_2, \ldots, \mathring{r}_m \|$ [2] равен n,

то существует только одна гиперплоскость H_{n-1}, которая проходит через точку $p_0 = r(t_0)$ и

I/ В резюме не приводится 2-го определения, имея в виду его вспомогательный характер.

2/ Тут и дальше через $\mathring{r}_i$ я обозначаю $\left(\frac{d^i r(t)}{dt^i}\right)_{t=t_0}$ для $i = 1, 2, \ldots n$, имеет максимальную степень касания к кривой С в точке p_o.

Кроме того: $\{H_{n-1}, C, p_o\} = n$.

Теорема 2.

Если:

/I/: множество Z пространства E_n кривая С с уравнением $r=r(t)$ для $t \in [a,b]$,

/2/: функция $r(t)$ класса C^{n-1} в окружении точки $t_o \in [a,b]$,

/3/: ранг матрицы $\| \mathring{r}_1, \mathring{r}_2, \ldots, \mathring{r}_{n-1} \|$ равен $n-1$,

/4/: существует только гиперплоскость H_{n-1}, проходящая через точку $p_o = r(t_o)$ и имеющая максимальную степень касания к С в p_o, и через С' обозначим ортогональную проекцию кривой С на гиперплоскость H_{n-1}

то существует только одна n-2-мерная гиперплоскость H_{n-2}, проходящая через точку p_o и имеющая максимальную степень касания к С' в p_o.

Возможность определения соприкасающихся гиперплоскостей степенью их касания к кривой с некоторым обобщением формулы Бурали-Форти, данным С.Голомбом /см./I/ в списке литературы/, позволяет регрессивно определить кривизны кривой С, это значит поочерёдно их определить, начиная с высшей /см./2/ в списке литературы/.