Stanisław Serafin

O PROSTOWALNOŚCI KRZYWYCH PRZEZ STYCZNE

Wstęp

Definicja 1

Jeżeli krzywa K jest sparametryzowana [1/] przy pomocy równania $r = r/t/$, $\alpha \leq t \leq \beta$, gdzie składowe wektora $r/t/$ są ciągłe w $[\alpha,\beta]$ i jeśli punkty P_1, P_2 krzywej odpowiadają wartościom parametru t_1, t_2, to łukiem $\widehat{P_1P_2}$ krzywej K nazywamy zbiór punktów krzywej odpowiadających wartościom parametru z przedziału $[t_1,t_2]$.

Definicja 2

Krzywa prostowalna K ma w swym punkcie P_o własność Archimedesa /A/, gdy $\lim\limits_{P \to P_o} \frac{|\widehat{P_oP}|}{|P_oP|} = 1$, gdzie P jest zmiennym punktem krzywej K, $|\widehat{P_oP}|$ oznacza długość łuku $\widehat{P_oP}$ krzywej K, zaś $|P_oP|$ jest długością cięciwy P_oP.

Definicja 3

a/ Krzywa K ma w punkcie P_o styczną s, jeżeli prosta s jest granicą siecznych P_oP, gdy $P \to P_o$ oraz $P \in K$.

b/ Krzywa K o równaniu parametrycznym $r = r/t/$ ma w punkcie P_o o parametrze t_o wektor styczny, jeśli istnieje $\lim\limits_{t \to t_o} \frac{r/t/ - r/t_o/}{\varepsilon|r/t/-r/t_o/|}$, gdzie $\varepsilon = \operatorname{sgn} /t-t_o/$.

1/ Zakładamy tu i w dalszym ciągu, że nie ma takiego przedziału zmienności parametru, którego obrazem przez funkcję $r/t/$ byłby zbiór złożony z jednego punktu.

Uwaga 1. Krzywą prostowalną można sparametryzować łukiem. Przy takiej parametryzacji $r = r/s/$ składowe $x/s/$, $y/s/$, $z/s/$ wektora $r/s/$, dla $0 \leq s \leq L$ /L oznacza długość krzywej/ spełniają warunek Lipschitz'a, więc długość L tej krzywej wynosi:

$$L = \int_0^L \left|\frac{dr}{ds}\right| ds \qquad /[1],str.412/ \qquad /1/$$

/ $\int$ oznacza tu całkę w sensie Lebesgue'a/. Wyprowadzimy stąd pewien wniosek o zbiorze punktów, w których krzywa prostowalna nie ma stycznej. Dla dowolnych dwóch punktów P_o, P krzywej K odpowiadających wartościom s_o, s parametru zachodzi:

$$\frac{r/s/ - r/s_o/}{\varepsilon|r/s/-r/s_o/|} = \frac{r/s/ - r/s_o/}{s-s_o} \cdot \frac{\varepsilon \cdot /s-s_o/}{|r/s/-r/s_o/|}, \qquad /2/$$

gdzie $\varepsilon = \mathrm{sgn}\ /s-s_o/$.

Można to również zapisać:

$$\frac{r/s/-r/s_o/}{\varepsilon \cdot |P_oP|} = \frac{r/s/-r/s_o/}{s-s_o} \cdot \frac{|\overset{\frown}{P_oP}|}{|P_oP|} .$$

Jest oczywiście $\frac{|\overset{\frown}{P_oP}|}{|P_oP|} \geq 1$ oraz $\left|\frac{r/s/ - r/s_o/}{\varepsilon \cdot |P_oP|}\right| = 1$

zatem

$$\left|\frac{r/s/ - r/s_o/}{s - s_o}\right| \leq 1$$

i jeśli $\frac{dr}{ds}$ istnieje, to $\left|\frac{dr}{ds}\right| \leq 1$. /3/

Nierówność /3/ w połączeniu z /1/ pozwala wnosić, że $\left|\frac{dr}{ds}\right| \neq 0$ prawie wszędzie w $[0,L]$. Otrzymujemy więc wniosek, że krzywa prostowalna K ma prawie wszędzie styczną.

Definicja 4

Niech krzywa prostowalna będzie dana równaniem $r = r/t/$, $\alpha < t < \beta$. Rozważmy dowolny regularny [1/] ciąg podziałów $\{p_n\}$ przedziału $[\alpha,\beta]$, p_n; $\{\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = \beta\}$ oraz ciąg łamanych $\{\Omega_n\}$ wpisanych w K, o wierzchołkach w punktach wyznaczonych przez punkty kolejnych podziałów. W każdym przedziale częściowym $[t_i, t_{i+1}]$ dowolnego podziału wybierzmy punkt τ_i taki, by K w odpowiadającym mu punkcie miała styczną /taki punkt istnieje na podstawie uwagi 1/. Cięciwę odpowiadającą temu przedziałowi zrzutujmy prostopadle na styczną w wybranym uprzednio punkcie. Sumując długości utworzonych rzutów dla cięciw tworzących łamaną Ω_n, otrzymamy liczbę ω_n. Ponieważ ciąg podziałów jest regularny, więc ciąg $\{|\Omega_n|\}$ długości łamanych Ω_n ma za granicę długość L krzywej K.

Jeżeli dla dowolnego regularnego ciągu $\{p_n\}$ podziałów przedziału $[\alpha,\beta]$ i dowolnego ciągu układów punktów τ_n takich, że w każdym z tych punktów krzywa ma styczną, zachodzi $\lim\limits_{n\to\infty} \omega_n = L$, to krzywą nazywać będziemy prostowalną przez styczne.

Przy oznaczeniach przyjętych w definicji 4 niech τ_i będzie taką wartością parametru w przedziale $[t_i, t_{i+1}]$ podziału p_n, że krzywa K ma w końcu wektora $r/\tau_i/$ stycz-

---

1/ Ciąg podziałów $\{p_n\}$ nazywamy regularnym, jeżeli $\lambda_n = \max\limits_{i=1,\dots,n}/t_i - t_{i-1}/ \longrightarrow 0$, gdy $n \to \infty$.

ną. Jeżeli ta styczna tworzy z cięciwą łączącą końce wektorów $r/t_i/$, $r/t_{i+1}/$ kąt φ_i, to długość rzutu cięciwy na styczną wynosi:

$$\left| r/t_{i+1}/ - r/t_i/ \right| \cdot \left| \cos \varphi_i \right| .$$

Wobec tego $$\omega_n = \sum_{i|o}^{n-1} \left| r/t_{i+1}/-r/t_i/ \right| \cdot \left| \cos \varphi_i \right| . \qquad /4/$$

Jeśli ponadto w każdym punkcie τ_i istnieje niezerowy wektor $\frac{dr}{dt}$, to wówczas zamiast /4/ napiszemy:

$$\omega_n = \sum_{i|o}^{n-1} \left| \left\{ r/t_{i+1}/-r/t_i/ \right\} \cdot \left(\frac{\frac{dr}{dt}}{\left|\frac{dr}{dt}\right|} \right)_{t=\tau_i} \right| . \qquad /5/$$

Ilie Constantinescu wykazał, że jeżeli krzywa ma przedstawienie $r = r/t/$, $\alpha \leq t \leq \beta$, spełniające warunki:

a/ $r/t/ \in C^{(1)}$

b/ $\frac{dr}{dt} \neq 0$, dla $t \in [\alpha,\beta]$, to krzywa jest prostowalna przez styczne [2].

Celem niniejszej pracy jest zbadanie związku prostowalności przez styczne ze zwykłą prostowalnością krzywej. Okazuje się, że prostowalność, a nawet mocniejsze założenia nie gwarantują prostowalności krzywej przez styczne.

<u>Twierdzenie 1</u>

Istnieje krzywa prostowalna taka, że dla dowolnej liczby η, $0 < \eta \leq 1$, istnieją: regularny ciąg podziałów przedziału zmienności parametru i ciąg układów punktów, dla których:

$$\lim_{n\to\infty} \omega_n = \eta \cdot L,$$

gdzie L oznacza długość tej krzywej.

Dowód. Wiadomo, że istnieje krzywa prostowalna o tej własności, że indykatrysą wektorów stycznych na każdym jej łuku częściowym jest cała sfera [3]. Rozważmy taką właśnie krzywą i wybierzmy dla niej dowolny regularny ciąg podziałów przedziału zmienności parametru. W każdym częściowym przedziale wybierzmy taki punkt, by styczna w odpowiednim punkcie krzywej tworzyła z cięciwą łuku wyznaczonego przez ten przedział kąt, którego cosinus wynosi η. Posługując się oznaczeniami z definicji 4 otrzymamy związek: $\omega_n = \eta\,|\Omega_n|$ i ponieważ $\lim_{n\to\infty}|\Omega_n| = L$ więc:

$$\lim_{n\to\infty} \omega_n = \eta \cdot L.$$

<u>Twierdzenie 2</u>

Istnieje krzywa o własnościach:

a/ jest prostowalna,

b/ ma w każdym punkcie wektor styczny,

c/ ma w każdym punkcie własność /A/,

d/ nie jest prostowalna przez styczne.

Dowód. Niech na płaszczyźnie dany będzie prostokątny układ współrzędnych.

I. Na przedziale $[0,1]$ osi odciętych określamy następujący ciąg rodzin zbiorów:

a/ Rodzina R_1 składa się z jednego przedziału otwartego π_1^1 o środku w środku przedziału $[0,1]$ i długości $\frac{1}{4}$. Zbiór $Q_1 = [0,1] - \pi_1^1$ składa się z dwóch rozłącznych przedziałów domkniętych, przy czym długość każdego z nich wynosi $\frac{1}{2}/1-\frac{1}{4}/ > \frac{1}{4^2}$.

b/ Rodzina R_2 składa się z dwóch $/2^{2-1}/$ przedziałów otwartych o środkach w środkach przedziałów tworzących zbiór Q_1, których długości równe są $\frac{1}{4^2}$. Oznaczmy te przedziały π_1^2, π_2^2.

$$\text{Zbiór } Q_2 = [0,1] - /\pi_1^1 + \pi_1^2 + \pi_2^2/ = [0,1] - \sum_{i|1}^{2} \sum_{j|1}^{2^{i-1}} \pi_j^i$$

składa się z czterech rozłącznych między sobą przedziałów domkniętych, przy czym długość każdego z nich wynosi $\frac{1}{2} /\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{4^2}/ = \frac{1}{2} \cdot \frac{3.2 - 1}{4^2} > \frac{1}{4^3}$.

c/ Ogólnie rodzina R_k $/k > 2/$ składa się z 2^{k-1} przedziałów otwartych π_j^k, $j|1,2,\dots,2^{k-1}$ o środkach w środkach przedziałów domkniętych tworzących zbiór Q_{k-1}, przy czym długości przedziałów π_j^k równe są $\frac{1}{4^k}$.

Zbiór $Q_k = [0,1] - \sum_{i|1}^{k} \sum_{j|1}^{2^{k-1}} \pi_j^k$ składać się będzie z 2^k przedziałów domkniętych, przy czym długość każdego z nich wynosi:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3.2^{k-2} - 2^{k-3} - 2^{k-4} - \dots - 1}{4^{k-1}} - \frac{1}{4^k}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3 \cdot 2^{k-1} - 2^{k-2} - 2^{k-3} - \dots - 1}{4^k} > \frac{1}{4^{k+1}} .$$

II. Z określenia ciągu rodzin zbiorów widać, że każde dwa przedziały π_j^i, π_l^k, $i|1,2,\dots$; $j|1,2,\dots,2^{i-1}$; $k|1,2,\dots$; $l|1,2,\dots,2^{k-1}$ są rozłączne. Wprowadźmy oznaczenie $Z_k = \sum_{j|1}^{2^{k-1}} \pi_j^k$. Dla każdego $k \in N_1$, Z_k jest zbiorem otwartym. Jest więc też $Z = \sum_{k|1}^{\infty} Z_k$ zbiorem otwartym oraz $Q \overset{df}{=} [0,1] - Z$ zbiorem zamkniętym.

Zbiór Q jest też, jak widać z konstrukcji, zbiorem nigdziegęstym.

III. Jeśli $|Q|$ oznacza miarę Lebesgue'a zbioru Q, to:

$$|Q| = 1 - \sum_{i|1}^{\infty} \frac{2^{i-1}}{4^i} = 1 - \frac{1}{2} \sum_{i|1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2} .$$

IV. Obierzmy dowolny odcinek $[\alpha,\beta] \subset [0,1]$ tak, że jeden z jego końców /np. α/ jest elementem zbioru Q i $\beta - \alpha < \frac{1}{4}$.

Istnieje liczba naturalna p taka, że $\frac{1}{4^p} \leqslant \beta - \alpha < \frac{1}{4^{p-1}}$.

Oszacujemy od góry ilość zbiorów każdej rodziny R_k mających punkty wspólne z przedziałem $[\alpha,\beta]$.

Dla $k < p - 1$ ani jeden zbiór rodziny R_k nie zawiera się w $[\alpha,\beta]$. Jeżeli zaś jakiś przedział z takiej rodziny ma punkty wspólne z $[\alpha,\beta]$, to wspólna część tych przedziałów ma długość mniejszą niż

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4^k} - \frac{1}{4^{2k}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4^k - 1}{4^{2k}} .$$

Jest bowiem $k < p - 1$, czyli $k + 1 \leqslant p - 1$ oraz $k+1 \leqslant 2k$.
Wynika stąd, że $\frac{1}{4^{k+1}} \geqslant \frac{1}{4^{p-1}}$ i $\frac{1}{4^{k+1}} > \frac{1}{4^{2k}} > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4^{2k}}$.

Dodając stronami powyższe nierówności, otrzymujemy:

$$2 \cdot \frac{1}{4^{k+1}} > \frac{1}{4^{p-1}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4^{2k}} ,$$

czyli:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4^k}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4^{2k}} > \frac{1}{4^{p-1}} > \beta-\alpha$$

zatem ostatecznie

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4^k}-\frac{1}{4^{2k}}\right) > \beta-\alpha,$$

a więc wspólna część przedziału π_j^k z przedziałem $[\alpha,\beta]$ ma długość mniejszą niż $\frac{1}{2}\cdot\frac{4^k-1}{4^{2k}}$.

Dla $k = p-1$ tylko jeden przedział rodziny R_{p-1} może mieć punkty wspólne z $[\alpha,\beta]$ z tym, że długość wspólnej części tych przedziałów może być większa lub równa

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4^{p-1}}-\frac{1}{4^{2/p-1/}}\right).$$

Gdyby bowiem dwa różne przedziały rodziny R_{p-1} miały punkty wspólne z przedziałem $[\alpha,\beta]$, to w $[\alpha,\beta]$ musiałby się zawierać jakiś cały przedział, którejś z rodzin R_i dla $i|1,2,\ldots,p-2$. Z konstrukcji rodzin R_k wynika bowiem, że między każdymi dwoma przedziałami rodziny R_k, $k > 2$, znajduje się choć jeden przedział jakiejś rodziny R_i dla $i|1,2,\ldots,k-1$.

Z uwagi na to, że długość przedziału π_j^{p-1} wynosi $\frac{1}{4^{p-1}}$, zaś $\beta-\alpha<\frac{1}{4^{p-1}}$, żaden przedział rodziny R_{p-1} nie zawiera się całkowicie w $[\alpha,\beta]$.

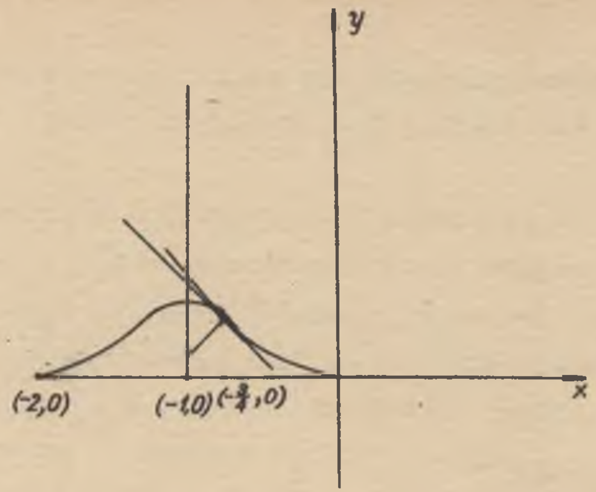
Dla $k = p$ tylko jeden przedział rodziny R_p może się zawierać w $[\alpha,\beta]$, przy czym dwa przedziały tej rodziny nie mogą mieć równocześnie punktów wspólnych z $[\alpha,\beta]$. Gdyby bowiem dwa przedziały rodziny R_p miały punkty wspólne z $[\alpha,\beta]$, to w $[\alpha,\beta]$ zawierałby się choć jeden przedział którejś z rodzin R_i, $i|1,2,\ldots,p-1$.

Pokażemy indukcyjnie, że dla $s \in N_1$ istnieje co najwyżej 2^s przedziałów rodziny R_{p+s} mających punkty wspólne z $[\alpha,\beta]$.

Dla $k = p+1$ mogą istnieć co najwyżej dwa przedziały rodziny R_{p+1} mające punkty wspólne z $[\alpha,\beta]$ /z dwóch stron ewentualnego jedynego przedziału rodziny R_p/.

Dla $k = p+s+1$, gdzie $s \in N_1$ mogą istnieć co najwyżej z obu stron każdego przedziału rodziny R_{p+s} po dwa przedziały z R_{p+s+1} mające punkty wspólne z $[\alpha,\beta]$. Jeśli więc ilość przedziałów rodziny R_{p+s} mających punkty wspólne z $[\alpha,\beta]$ nie przekracza 2^s, to łączna ilość przedziałów rodziny R_{p+s+1} mających punkty wspólne z $[\alpha,\beta]$ nie przekroczy liczby 2^{s+1}.

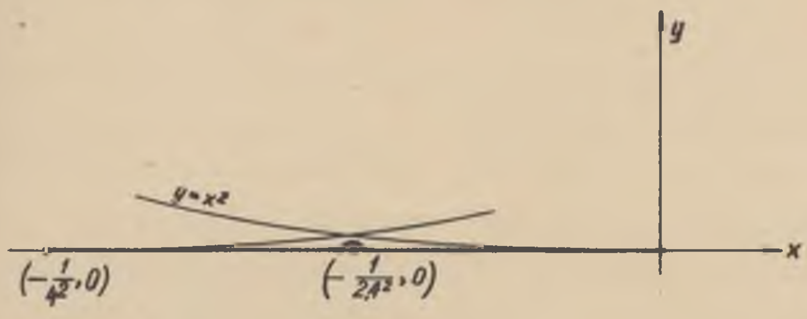
V. Zbudujmy nad odcinkiem $\left[-\frac{3}{4}, 0\right]$ osi odciętych łuk paraboli $y = \frac{2}{3}x^2$ i "dosztukujmy" do niego w punkcie $\left(-\frac{3}{4}, \frac{3}{8}\right)$ łuk okręgu rozpostarty nad odcinkiem $\left[-1, -\frac{3}{4}\right]$ osi odciętych tak, by środek okręgu leżał na prostej $x = -1$ oraz by utworzony łuk $\bar{\mathcal{L}}$ "zesztukowany" miał styczną w punkcie $\left(-\frac{3}{4}, \frac{3}{8}\right)$. Odbijmy łuk $\bar{\mathcal{L}}$ symetrycznie względem prostej $x = -1$. Łuk $\bar{\mathcal{L}}$ i jego symetryczne odbicie utworzą łuk $\mathcal{L}$. Łuk ten w każdym punkcie ma styczną, styczną w końcach $\mathcal{L}$ jest oś odciętych, zaś styczna w punkcie $\left(-\frac{3}{4}, \frac{3}{8}\right)$ tworzy z osią odciętych kąt 45°. Styczna wzdłuż całego łuku $\mathcal{L}$ zmienia się w sposób ciągły, przy czym kąt stycznej z osią odciętych jest w granicach $[-45^\circ, 45^\circ]$, /rys. 1/.



Rys. 1

VI. Rozważmy łuk paraboli $y = x^2$ rozpostarty nad przedziałem $\left[-\frac{1}{2.4^{2k}}, 0\right]$ /gdzie k jest dowolną liczbą naturalną/ i odbijmy go symetrycznie względem prostej $x = -\frac{1}{2.4^{2k}}$. Przesuńmy łuk $\mathcal{L}$ wzdłuż osi odciętych tak, by punkt /-1,0/ jego cięciwy przeszedł w punkt $\left(-\frac{1}{2.4^{2k}}, 0\right)$. Otrzymany łuk $\mathcal{L}'_k$ przekształcimy jednokładnie względem środka $\left(-\frac{1}{2.4^{2k}}, 0\right)$ w takim stosunku ρ_k, by obraz $\mathcal{L}''_k$ łuku $\mathcal{L}'_k$ /bez końców/ zawarty był wewnątrz obszaru ograniczonego osią odciętych i skonstruowanymi wyżej łukami parabol. /Wystarczy wziąć stosunek jednokładności ρ_k mniejszy niż odległość punktu $\left(-\frac{1}{2.4^{2k}}, 0\right)$ od wspomnianych łuków parabol/. Rys.2 ilustruje konstrukcję dla k = 1.

Łuk $\mathcal{L}''_k$ uzupełnimy odcinkami leżącymi na osi odciętych do łuku prostego σ_k o końcach w $\left(-\frac{1}{4^{2k}}, 0\right)$ i $(0,0)$.



Rys. 2

Z konstrukcji łuku σ_k wynika, że ma on w każdym punkcie styczną, oś odciętych jest styczną do niego w jego końcach oraz istnieje taki punkt, w którym σ_k ma styczną tworzącą z osią odciętych kąt 45^o. Ponadto styczna zmienia się na łuku σ_k w sposób ciągły.

Opisaną konstrukcję wykonujemy dla wszelkich k naturalnych.

VII. Łuk $\mathcal{L}$ ma skończoną długość s, zatem i łuk σ_k ma też skończoną długość $|\sigma_k|$. Oszacujmy stosunek długości łuku σ_k do długości cięciwy łączącej jego końce. Jest oczywiście:

$$1 < \frac{|\sigma_k|}{\frac{1}{4^{2k}}} = \frac{\rho_k \cdot s + m}{\rho_k \cdot 2 + m}$$

gdzie m oznacza sumę długości odcinków prostoliniowych dołączonych do $\mathcal{L}_k''$ dla utworzenia σ_k.

Ale $s > 2$ z konstrukcji łuku $\mathcal{L}$, zatem $\frac{\rho_k \cdot s+m}{\rho_k \cdot 2+m} < \frac{s}{2}$, czyli

$$\frac{1}{4^{2k}} < |\sigma_k| < \frac{s}{2} \cdot \frac{1}{4^{2k}} = \lambda \frac{1}{4^{2k}} ,$$

gdzie

$$\lambda = \frac{s}{2} > 1.$$

VIII. Zbudujemy teraz krzywą K, której istnienie zapowiedziano w twierdzeniu.

Przy każdym $k \in N_1$ łuk σ_k przesuniemy równolegle wzdłuż osi odciętych do każdego przedziału π_j^k rodziny R_k tak, aby środek przedziału π_j^k był środkiem cięciwy obrazu $\bar{\sigma}_j^k$ łuku σ_k. Łuk $\bar{\sigma}_j^k$ uzupełnimy odcinkami prostoliniowymi do łuku prostego σ_j^k o końcach w końcach przedziału π_j^k. Żądaną krzywą K będzie zbiór punktów:

$$K \stackrel{df}{=} \sum_{k|1}^{\infty} \sum_{j|1}^{2^{k-1}} \sigma_j^k + Q.$$

Zbiór K jest krzywą i to łukiem prostym, bowiem z jego konstrukcji widać, że każdemu $x \in [0,1]$ odpowiada dokładnie jeden punkt tego zbioru, przy czym odpowiedniość ta jest funkcją ciągłą.

IX. Skonstruowana w VIII krzywa K ma w każdym punkcie styczną i jest krzywą prostowalną.

Jeżeli bowiem punkt P należy do krzywej K i jest punktem /ale nie końcem/ któregoś łuku σ_j^k, to z poprzednich rozważań wiadomo, że w tym punkcie K ma styczną. Jeśli zaś $P \in Q$, to przesunąwszy parabolę o równaniu $y = x^2$ równolegle wzdłuż osi odciętych tak, by P był wierzchołkiem otrzymanego obrazu stwierdzamy, że w otoczeniu punktu P krzywa K leży pod otrzymaną parabolą, a nad osią odciętych. Zatem w takim punkcie P krzywa K ma również styczną i tą styczną jest oś odciętych.

Wobec końcowej uwagi w VIII krzywą K można podać równaniem $y = f/x/$. Z poprzednich rozważań wynika, że $f/x/$ w każdym punkcie przedziału $[0,1]$ ma pochodną $f'/x/$ i $|f'/x/| \leqslant 1$. /Nierówność ta jest wnioskiem z konstrukcji wymienionych w V, VI, VIII/. Funkcja $f/x/$ spełnia więc w $[0,1]$ warunek Lipschitz'a, a więc krzywa K jest prostowalna.

X. Każdy punkt P zbioru Q jest punktem nieciągłości stycznej do krzywej K.

Punkt P jest bowiem punktem skupienia końców przedziałów π_j^k, zatem w każdym jego otoczeniu można znaleźć zawarty w nim jakiś przedział π_j^k, a w tym przedziale punkt, w którym styczna tworzy z osią odciętych kąt 45°. W samym punkcie P, jak wiadomo z IX, styczną jest oś odciętych.

XI. Krzywa K ma w każdym punkcie własność /A/.

Jeżeli P_o jest punktem wewnętrznym któregoś z łuków σ_j^k, to własność ta jest bezpośrednio widoczna z konstrukcji tego łuku.

Udowodnimy, że gdy $P_o \in Q$, to również w nim K ma własność /A/. Oznaczmy przez P' rzut punktu P krzywej K na oś odciętych.

Wówczas

$$\frac{|\widetilde{P_oP}|}{|\overline{P_oP}|} \leqslant \frac{|\widetilde{P_oP}|}{|\overline{P_oP'}|},$$

bowiem

$$|P_oP| \geqslant |P_oP'|.$$

Długość łuku $|\widetilde{P_oP}|$ przedstawmy w postaci sumy $l_1/P/ + l_2/P/$, gdzie $l_2/P/$ jest sumą długości łuków $\bar{\sigma}_j^k$ mających punkty wspólne z łukiem $\widetilde{P_oP}$, zaś

$$l_1/P/ \stackrel{df}{=} |\widetilde{P_oP}| - l_2/P/.$$

Gdy $\frac{1}{4^p} \leqslant |P_oP'| < \frac{1}{4^{p-1}}$, to zgodnie z IV i VII otrzymujemy:

$$0 \leqslant l_2/P/ \leqslant \sum_{j|o}^{\infty} 2^j \cdot \lambda \frac{1}{4^{2/p+j/}} + \lambda \frac{1}{4^{2p-2}} =$$

$$= \frac{1}{4^{2p}} \left(\lambda \sum_{j|o}^{\infty} \frac{1}{2^{3j}} + \lambda \frac{1}{4^{-2}} \right) = \frac{1}{4^{2p}} \cdot M,$$

gdzie M jest stałą. Możemy więc napisać:

$$\frac{|\overset{\frown}{P_oP}|}{|P_oP|} \leqslant \frac{l_1/P/ + l_2/P/}{|P_oP'|} =$$

$$= \frac{l_1/P/}{|P_oP'|} + \frac{l_2/P/}{|P_oP'|} \leqslant \frac{l_1/P/}{|P_oP'|} + \frac{M \frac{1}{4^{2p}}}{|P_oP|} \leqslant \frac{l_1/P/}{|P_oP|} + \frac{M \cdot \frac{1}{4^{2p}}}{\frac{1}{4^p}} =$$

$$= \frac{l_1/P/}{|P_oP'|} + M \frac{1}{4^p}$$

Gdy $P \longrightarrow P_o$, to $P' \longrightarrow P_o$ i $p \longrightarrow \infty$, zatem $M \cdot \frac{1}{4^p} \longrightarrow 0$.

Ale $\frac{l_1/P/}{|P_oP'|} \leqslant 1$, bowiem $l_1/P/$ jest sumą długości odcinków położonych na osi odciętych i zawartych w odcinku P_oP'.

Ponieważ zaś $\frac{|\overset{\frown}{P_oP}|}{|P_oP|} \geqslant 1$, zatem $1 \leqslant \frac{|\overset{\frown}{P_oP}|}{|P_oP|} \leqslant 1 + \varepsilon/P/$,

gdzie $\theta/P/ \longrightarrow 0$. Wynika stąd równość

$$\lim_{P \to P_o} \frac{|\overset{\frown}{P_oP}|}{|P_oP|} = 1.$$

XII. Niech L oznacza długość krzywej K. Określamy ciąg podziałów przedziału $[0,1]$ jak następuje:

a/ Punktami podziału p_1 będą końce przedziału $[0,1]$ oraz końce przedziału π_1^1.

b/ Podział p_{k+1} otrzymamy z podziału p_k, dołączając /jako nowe punkty podziału/ końce wszystkich przedziałów π_j^{k+1}, $j|1,2,\ldots,2^k$ oraz skończoną ilość punktów leżących wewnątrz przedziałów π_j^i, $i|1,2,\ldots,k$; $j|1,2,\ldots,2^{i-1}$ tak dobieranych, by średnica podziału malała do zera, gdy $k \to \infty$.

Łamaną Ω_k odpowiadającą podziałowi p_k, $k|1,2,\ldots$ przedstawimy w postaci sumy dwóch składników $\Omega_k = \Omega_k^1 + \Omega_k^2$. Do Ω_k^1 zaliczymy każdą cięciwę łuku σ_j^k, $j|1,2,\ldots,2^{k-1}$ oraz każdy odcinek wpisany w jakiś łuk σ_j^i, $i|1,2,\ldots,k-1$; $j|1,2,\ldots,2^{i-1}$. Do Ω_k^2 zaliczamy pozostałe odcinki wchodzące w skład łamanej Ω_k.

Widać, że przy każdym $k \in N_1$ zbiór Ω_k^2 stanowi skończone pokrycie zbioru Q, przy czym odcinki wchodzące w skład tego pokrycia nie mają punktów wspólnych.

Gdy $|\Omega_k|, |\Omega_k^1|, |\Omega_k^2|$ oznaczają sumy długości odcinków tworzących Ω_k, Ω_k^1, Ω_k^2, to $|\Omega_k| = |\Omega_k^1| + |\Omega_k^2|$.

Ale
$$|\Omega_k^2| = 1 - \sum_{i|1}^{k} \frac{2^{i-1}}{4^i}, \quad \text{zatem}$$

$$\lim_{k\to\infty} |\Omega_k^2| = \frac{1}{2},$$

czyli
$$\lim_{k\to\infty} |\Omega_k^2| = |Q|$$

/zob. III/.

Ponieważ $\lim\limits_{k\to\infty} |\Omega_k| = L$, zatem istnieje $\lim\limits_{k\to\infty} |\Omega_k^1|$.

XIII. Dla każdej ustalonej liczby η, $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \eta \leq 1$ można podać taki ciąg podziałów i ciąg układów punktów, że:

$$\lim_{k\to\infty} \omega_k = \lim_{k\to\infty} |\Omega_k^1| + \eta \cdot |Q|$$

/ω_k określone w def.4/.

Wybierzmy ciąg podziałów $\{p_k\}$ taki sam jak w XII. Dla podziału p_k określamy układ punktów w ten sposób, by:

a/ w każdym przedziale odpowiadającym odcinkowi z Ω_k^1 styczna do K wystawiona w wybranym punkcie była równoległa do tego odcinka,

b/ w każdym przedziale odpowiadającym odcinkowi z Ω_k^2 styczna do K wystawiona w wybranym punkcie tworzyła z osią odciętych kąt, którego cosinus wynosi η.

Taki wybór punktów jest możliwy, bo K w każdym punkcie ma styczną, każdy łuk σ_j^1 jest klasy $C^{(1)}$ oraz w każdym odcinku z Ω_k^2 zawiera się jakiś przedział π_j^l $|l>k|$. Wobec zaś końcowej uwagi w V oraz wobec VI i VIII, w każdym przedziale π_j^l istnieje taki punkt, że cosinus kąta, jaki styczna do K w tym punkcie tworzy z osią odciętych, wynosi η.

Przy tak wybranym ciągu podziałów i ciągu układów punktów zachodzi:

$$\omega_k = |\Omega_k^1| + \eta \cdot |\Omega_k^2|,$$

zatem

$$\lim_{k\to\infty} \omega_k = \lim_{k\to\infty} |\Omega_k^1| + \eta \cdot |Q| .$$

XIV. Krzywa K nie jest prostowalna przez styczne. Wystarczy w tym celu zauważyć, że skoro $|Q| = \frac{1}{2} > 0$, a $\eta < 1$, to

$$S > \lim_{k \to \infty} \omega_k .$$

Wniosek: przykład powyższy dowodzi, że zbiór punktów nieciągłości wektora stycznego do krzywej może być miary dodatniej.

Twierdzenie 3

Prostowalność krzywej i ciągłość wektora stycznego do tej krzywej prawie wszędzie /poza zbiorem miary Lebesgue'a zero/, nie stanowią warunku dostatecznego prostowalności krzywej przez styczne.

Dowód. Wykres funkcji Cantora /[1], str.410/ jest krzywą, dla której spełnione są warunki: a/ prostowalność, b/ ciągłość wektora stycznego poza zbiorem Cantora /którego miara Lebesgue'a wynosi zero/.

Rozważmy dla tej krzywej dowolny regularny ciąg podziałów przedziału $[0,1]$. W każdym przedziale każdego podziału można oczywiście znaleźć punkt taki, że styczna w odpowiadającym mu punkcie krzywej jest równoległa do osi odciętych.

Ciąg ω_n dla tak dobranych ciągu podziałów i ciągu układów punktów spełnia warunek $\omega_n = 1$ dla każdego n. Zatem

$$\lim_{n \to \infty} \omega_n = 1,$$

podczas, gdy długość łuku tej krzywej jest większa niż 1, bowiem krzywa ta nie jest odcinkiem linii prostej równoległej do osi odciętych.

Twierdzenie 4

Jeżeli krzywa spełnia warunki:

a/ jest prostowalna,

b/ w każdym punkcie, w którym ma styczną, ma wektor styczny,

c/ w każdym punkcie, w którym ma styczną, ma też własność /A/,

d/ zbiór punktów nieciągłości wektora stycznego jest miary Lebesgue'a zero,

to krzywa jest prostowalna przez styczne.

Dowód. Dla rozważanej krzywej K prostowalnej wprowadźmy równanie parametryczne r = r/s/, gdzie s jest długością łuku od punktu początkowego zaś x/s/, y/s/, z/s/ są składowymi wektora r/s/.

Obierzmy dowolny punkt o parametrze s_o krzywej K, w którym istnieje jednostkowy wektor styczny

$$t/s_o/ \overset{df}{=} \lim_{s \to s_o} \frac{r/s/ - r/s_o/}{\varepsilon|r/s/-r/s_o/|},$$

gdzie $\varepsilon = \text{sgn}\ /s - s_o/$

Zachodzi

$$\frac{r/s/-r/s_o/}{\varepsilon\cdot|r/s/-r/s_o/|} = \frac{r/s/-r/s_o/}{s - s_o} \cdot \frac{\varepsilon\cdot/s - s_o/}{|r/s/-r/s_o/|}. \qquad /1/$$

Krzywa ma w rozważanym punkcie własność /A/, zatem

$$\lim_{s \to s_o} \frac{\varepsilon\cdot /s - s_o/}{|r/s/ - r/s_o/|} = 1$$

i wobec /1/

$$\lim_{s \to s_0} \frac{r/s/ - r/s_0/}{s - s_0} = \left(\frac{dr}{ds}\right)_{s=s_0}$$

istnieje i

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)_{s=s_0} = t/s_0/.$$

Niech teraz p_n będzie regularnym ciągiem podziałów przedziału $[0,L]$, gdzie L oznacza długość krzywej. Rozważmy jakiś ciąg $\{\omega_n\}$ odpowiadający temu ciągowi podziałów i dowolnemu ciągowi układów punktów /po jednym punkcie z każdego przedziału/.

Wówczas

$$\omega_n = \sum_{i|o}^{n-1} \left| \left\{ r/s_{i+1}/ - r/s_i/ \right\} \cdot \left(\frac{dr}{ds}\right)_{s=\bar{s}_i} \right|,$$

gdzie $[s_i, s_{i+1}]$ jest przedziałem podziału p_n i $\bar{s}_i$ jest pewną liczbą tego przedziału, przy czym krzywa ma styczną w punkcie o parametrze $\bar{s}_i$.

Zachodzi oczywiście:

$$\sum_{i|o}^{n-1} \left\{ r/s_{i+1}/-r/s_i/ \right\} \cdot \left(\frac{dr}{ds}\right)_{s=\bar{s}_i} \leq \omega_n \leq |\Omega_n|, \qquad /2/$$

zaś

$$\sum_{i|o}^{n-1} \left\{ r/s_{i+1}/ - r/s_i/ \right\} \cdot \left(\frac{dr}{ds}\right)_{s=\bar{s}_i} =$$

$$= \sum_{i|o}^{n-1} \left\{ x/s_{i+1}/-x/s_i/ \right\} \cdot x'/\bar{s}_i/ + \sum_{i|o}^{n-1} \left\{ y/s_{i+1}/-y/s_i/ \right\} \cdot y'/\bar{s}_i/ +$$

$$+ \sum_{i|o}^{n-1} \left\{ z/s_{i+1}/ - z/s_i/ \right\} \cdot z'/\bar{s}_i/ . \qquad /3/$$

Rozważmy funkcję

$$\varphi/s/ \stackrel{df}{=} \begin{cases} x'/s/ \text{ dla tych s, dla których } x'/s/ \text{ istnieje;} \\ 1 \text{ dla tych s, dla których } x'/s/ \text{ nie istnieje.} \end{cases}$$

Funkcja ta spełnia warunek $|\varphi/s/| \leqslant 1$, $0 < s \leqslant L$. Wynika to stąd, że $x/s/$ spełnia warunek Lipschitz'a ze stałą 1.

Suma

$$u_n = \sum_{i|o}^{n-1} \left\{x/s_{i+1}/-x/s_i/\right\} \cdot x'/\bar{s}_i/ \qquad /[1],\text{str.}479/$$

jest pewną sumą aproksymacyjną Riemanna-Stieltjesa dla funkcji $\varphi/s/$ względem $x/s/$.

Każdy punkt ciągłości wektora stycznego do krzywej odpowiada takiej wartości parametru s, dla której $x'/s/$ jest ciągła, zatem według założenia $x'/s/$ jest ciągła prawie wszędzie w $[0, L]$. Funkcja $x/s/$ jest absolutnie ciągła, więc wobec określenia $\varphi/s/$ i założenia /d/ oraz uwagi zrobionej odnośnie $x'/s/$ otrzymujemy wniosek, że $\varphi/s/$ jest względem $x/s/$ całkowalna w sensie Riemanna-Stieltjesa /[1], str. 404, 443, 485/, zatem gdy $n \to \infty$, to

$$u_n \longrightarrow \underset{(RS)}{\int_0^L} \varphi/s/dx/s/ = \underset{(LS)}{\int_0^L} \varphi/s/dx/s/,^{1/} \qquad /[1],\text{str.}486/. \quad /4/$$

Te same założenia pozwalają napisać związek /[1], str. 472/

$$\underset{(LS)}{\int_0^L} \varphi/s/dx/s/ = \underset{(L)}{\int_0^L} \varphi/s/ \cdot x'/s/ds^{2/} \qquad /5/$$

1/ (RS) w sensie Riemanna Stieltjesa,
(LS) w sensie Lebesgue'a Stieltjesa.

2/ (L) w sensie Lebesgue'a.

Ale prawie wszędzie w $[0,L]$ zachodzi $\varphi/s/.x'/s/=[x'/s/]^2$, zatem wobec /4/ i /5/

$$u_n \longrightarrow \int_{(L)\,0}^{L} [x'/s/]^2\, ds. \qquad /6/$$

Ponieważ możemy podobnie postąpić z pozostałymi składnikami w prawej stronie związku /2/, więc gdy $n \to \infty$, to

$$\sum_{i|o}^{n-1} \left\{ r/s_{i+1}/ - r/s_i/ \right\} \cdot \left(\frac{dr}{ds}\right)_{s=s_i} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \int_{(L)\,0}^{L} \left\{ [x'/s/]^2 + [y'/s/]^2 + [z'/s/]^2 \right\} ds = \int_{(L)\,0}^{L} ds = L \qquad /7/$$

Prawie wszędzie bowiem w $[0,L]$ zachodzi $\left|\frac{dr}{ds}\right| = 1$.
Uwzględniając nierówność /1/ i związek /7/ otrzymujemy ostatecznie, że istnieje $\lim\limits_{n\to\infty} \omega_n$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \omega_n = L$.

Twierdzenie 5

Jeżeli dla krzywej prostowalnej istnieje przedstawienie parametryczne $r = r/t/$, $\alpha \leq t \leq \beta$ spełniające warunki:

a/ istnieje niezerowy wektor $\frac{dr}{dt}$ dla wszelkich $t \in [\alpha, \beta]$,

b/ składowe wektora $r/t/$ są absolutnie ciągłe w $[\alpha,\beta]$,

c/ zbiór punktów nieciągłości wektora $\frac{dr}{dt}$ jest miary Lebesgue'a zero, to krzywa jest prostowalna przez styczne.

Dowód jest analogiczny do dowodu twierdzenia 3.

Uwaga 2. Jeżeli któreś z założeń b/ lub c/ twierdzenia 4 nie jest spełnione w skończonej ilości punktów, to teza mimo to utrzymuje się w mocy. Wystarczy bowiem zauważyć, że gdyby punktem, dla którego choć jedno z tych założeń nie jest spełnione był tylko koniec krzywej, to dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ znajdziemy taki punkt P krzywej, że długość łuku krzywej od rozważanego końca do punktu P wynosi ε. Dla pozostałego łuku krzywej spełnione są wszystkie założenia twierdzenia 3, zatem łuk ten jest prostowalny przez styczne. Wobec dowolności liczby ε cała krzywa jest też prostowalna przez styczne. Gdy zaś takich punktów, w których założenia b/ lub c/ tw. 4 nie są spełnione, jest skończona ilość, to wobec addytywności długości łuku możemy krzywą rozbić na skończoną ilość łuków, dla których tylko w jednym końcu założenia b/ lub c/ nie są spełnione. Do nich zastosujemy poprzednie rozumowanie i stwierdzimy, że uwaga 2 jest słuszna dla całej krzywej.

Literatura cytowana

[1]. Roman Sikorski, Funkcje rzeczywiste, Monografie Matematyczne, PWN, Warszawa 1958.

[2]. Ilie Constantinescu, Sur le Calcul de la longueur d'un arc de courbe, Zeszyty Naukowe AGH nr 35, Geodezja, zesz.4, 1961.

[3]. Zygmunt Zahorski, Sur les courbes dont la tangente prend sur tout arc partiel toutes les directions, Czechoslovak Mathematical Journal, Vol.1/76/, 1952, str. 105-117.

Summary

On rectifiability of curves by tangents

One rectifiable curve is given by equation $r = r/t/$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$. Let $\{p_n\}$ be an infinite sequence of chains of points between α and β /a chain p_n between α and β is a finite sequence of points $t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n$ such that $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = \beta$ /.
We denote as Ω_n the broken line consisting of segments with vertices in final points of vectors $r/t_i/$, $i|0,1,\dots,n$.
In every interval $[t_i, t_{i+1}]$, $t_i, t_{i+1} \in p_n$ we take a point τ_i such that a curve has tangent for it. Projecting the segment /corresponding to interval $[t_i, t_{i+1}]$ / on the tangent of curve at final point of vector $r/\tau_i/$, we denote as ω_n the sum of lengths of the projections /for p_n/. If for every regular 1/ sequence $\{p_n\}$ and every sequence of points sets $/\tau_i/$

$$\lim_{n\to\infty} \omega_n = L, \qquad /L \text{ length of curve}/,$$

then we say, that a curve is rectifiable by tangents.
There exists a rectifiable curve for which $\lim_{n\to\infty} \omega_n$ can be an optional number of interval $[0,L]$. It is a curve constructed by Z.Zahorski /see [3]/. There exists a rectifiable curve for which the set of tangent vector discontinuity points has Lebesgue measure zero, and which is not rectifiable by tangents. It is the graphic of Cantor function /see [1] page 410/.

1/ If $\lambda_n = \max/t_i - t_{i-1}/ \to 0$ with $n \to \infty$, then sequence of chains $\{p_n\}$ is named regular sequence of chains.

There exists a rectifiable curve having the following properties:

a/ it has a tangent vector in every point,

b/ in every point P_o of this curve

$$\lim_{P \to P_o} \frac{|\overset{\frown}{P_oP}|}{|P_oP|} = 1$$

/ $|\overset{\frown}{P_oP}|$ is the length of arc $\overset{\frown}{P_oP}$ of curve, $|P_oP|$ is the length of segment P_oP/,

c/ it is not rectifiable by tangents.

The construction of that curve is described in the proof of theorem 2. It is known that if a curve has a parametric representation $r = r/t/\ \alpha \leq t \leq \beta$ such that $\frac{dr}{dt}$ exists is continuous and different from zero for every $t \in [\alpha, \beta]$ then this curve is rectifiable by tangents /see [2]/.

Theorem 4 of this paper says that if a curve has following properties:

a/ it is rectifiable,

b/ it has tangent vector in every point in which it has the tangent,

c/ in every point in which it has tangent there is

$$\lim_{P \to P_o} \frac{|\overset{\frown}{P_oP}|}{|P_oP|} = 1,$$

d/ the set of tangent vector discontinuity points has Lebesgue measure zero, then this curve is rectifiable by tangents.

Theorem 5 of this paper says that a curve having parametric representation $r = r/t/$, $\alpha \leq t < \beta$ with properties:

a/ components of vector r/t/ are absolutely continuous functions in $[\alpha,\beta]$

b/ there exist different from zero vector $\frac{dr}{dt}$ for every $t\in[\alpha,\beta]$,

c/ vector $\frac{dr}{dt}$ is continuous almost everywhere in $[\alpha,\beta]$, is rectifiable by tangents.

Краткое изложение

О спрямляемости кривых касательными

Спряамляемая кривая дается уравнением $r=r(t)$, $\alpha<t<\beta$. Обозначим $\{p_n\}$ бесконечную последовательность систем точек

$$\alpha=t_0<t_1\dots t_{n-1}<t_n=\beta .$$

Обозначим дальше Ω_n ломанную линию с вершинами в концах векторов $r(t_i), i|0,1,\dots,n$. В каждой ячейке $[t_i,t_{i+1}]$ выбираем точку τ_i такую, что кривая имеет для ней касательную. Проектируя каждую сторону ломаной Ω_n на касательную кривой /касательная в выбранной выше точке каждой ячейки/, обозначаем ω_n сумму длин этих проекций.

Когда для каждой последовательности $\{p_n\}$, такой что $\max_{i/1\dots,n}(t_i-t_{i-1})\to 0$ с $n\to\infty$, и каждой последовательности систем точек (τ_i) $\lim_{n\to\infty}\omega_n=l$ / l длина кривой/, то кривая называется спрямляемой касательными.

Существует спрямляемая кривая для которой $\lim_{n\to\infty}\omega_n$

может быть любым числом интервала $[0,L]$. Эта кривая была сконструирована З. Захорским /см. [3]/.

Существует спрямляемая кривая, для которой множество точек разрыва касательного вектора имеет меру Лебега нуль, и которая не спрямляемая касательными. Это график функции Кантора /см. [1], стр. 410/.

Существует спрямляемая кривая, которая:

а/ в каждой точке имеет касательный вектор,

б/ в каждой точке P_0 этой кривой

$$\lim_{P\to P_0} \frac{|\widetilde{P_0P}|}{|P_0P|}=1$$ / $|\widetilde{P_0P}|$ длина дуги $\widetilde{P_0P}$ кривой,

$|P_0P|$ длина хорды P_0P/,

в/ не спрямляемая касательными.

Конструкция этой кривой представлена в доказательстве теоремы 2 статьи.

Известно, что кривая, имеющая параметрическое представление $r=r(t), \alpha \le t \le \beta$ такое, что существует непрерывный и не равный нулю вектор $\frac{dr}{dt}$ для всех $t\in[\alpha,\beta]$, есть спрямляемая касательными /см. [2]/.

Теорема 4 статьи: Если кривая:

а/ есть спрямляемая,

б/ имеет вектор касательный в каждой точке, в которой имеет касательную,

в/ $\lim\limits_{P\to P_0} \frac{|\widetilde{P_0P}|}{|P_0P|}=1$, для каждой точки P_0, в которой кривая имеет касательную,

г/ множество точек разрыва касательного вектора имеет меру нуль /по Лебегу/,

то она есть спрямляемая касательными.

Теорема 5 статьи: Если кривая имеет параметрическое представление $r=r(t), \alpha \leq t \leq \beta$, для которого:

а/ существует $\frac{dr}{dt}$ и $\left|\frac{dr}{dt}\right|>0$ для всякого $t \in [\alpha, \beta]$,

б/ координаты вектора $r(t)$ абсолютно непрерывные функции в $[\alpha, \beta]$,

в/ вектор $\frac{dr}{dt}$ непрерывный почти везде в $[\alpha, \beta]$, тогда эта кривая есть спрямляемая касательными.