Dobiesław Brydak

# O FUNKCJACH PÓŁWYPUKŁYCH $\{f\}$.

1. Tematem tej pracy będzie związek pomiędzy pojęciem wypukłości i półwypukłości $\{f\}$. Pojęcie funkcji półwypukłej $\{f\}$ oraz półmonotonicznej $\{f\}$ zostało wprowadzone w ogólnej postaci przez M. Kuczmę [1], zaś w szczególnej postaci - dla $f/x/ = x+\omega$, gdzie $\omega$ jest stałą - przez J. Anastassiadisa [3] /pod nazwą półwypukłości $\omega$ i półmonotoniczności $\omega$ /.

Niech $f/x/$ będzie funkcją rzeczywistą określoną w przedziale $/a,b/$, spełniającą dla każdego $x \in /a,b/$ warunek $f/x/ > x$ i taką, że $f(/a,b/) \subset /a,b/$. Oznaczmy przez $f^n/x/$ n-tą iteratę funkcji $f/x/$:

$$f^0/x/ = x, \qquad f^{n+1}/x/ = f(f^n/x/), \qquad n = 0,1,\ldots$$

Funkcję $\varphi/x/$ określoną w przedziale I nazywamy w tym przedziale półwypukłą $\{f\}$ lub półwklęsłą $\{f\}$, jeśli odpowiednio

$$/1/ \qquad \varphi(f/x/) \leqslant \frac{\varphi/x/ + \varphi(f^2/x/)}{2} \qquad \text{dla } x \in I,$$

lub

$$/2/ \qquad \varphi(f/x/) \geqslant \frac{\varphi/x/ + \varphi(f^2/x/)}{2} \qquad \text{dla } x \in I.$$

Funkcję $\varphi/x/$ nazywamy ściśle półwypukłą $\{f\}$ lub ściśle półwklęsłą $\{f\}$, jeśli odpowiednio

$$\varphi(f/x/) < \frac{\varphi/x/ + \varphi(f^2/x/)}{2} \qquad \text{dla } x \in I,$$

lub

$$\psi(f/x/) > \frac{\psi/x/ + \psi(f^2/x/)}{2} \qquad \text{dla } x \in I.$$

Analogicznie: funkcję $\psi$ /x/ nazywamy półrosnącą $\{f\}$ w przedziale I, lub półmalejącą $\{f\}$ w przedziale I, jeśli

$$\psi(f/x/) \geqslant \psi/x/ \qquad \text{dla } x \in I,$$

lub $\psi(f/x/) \leqslant \psi/x/$ dla $x \in I$,

zaś ściśle półrosnącą $\{f\}$ lub ściśle półmalejącą $\{f\}$, jeśli

$$\psi(f/x/) > \psi/x/ \qquad \text{dla } x \in I,$$

lub $\psi(f/x/) < \psi/x/$ dla $x \in I$.

Pojęcie półwypukłości i półmonotoniczności powstało w w związku z badaniem równania funkcyjnego

$$/3/ \qquad \varphi/x/ + \varphi(f/x/) = F/x/,$$

gdzie $\varphi$ /x/ oznacza funkcję szukaną, a f/x/ i F/x/ funkcje dane. Dowodzi się mianowicie, że równanie to ma, przy pewnych naturalnych założeniach, dokładnie jedno rozwiązanie w klasie funkcji półmonotonicznych $\{f\}$, jeśli funkcja F/ x/ jest półwypukła $\{f\}$ lub półwklęsła $\{f\}$ [2]. Przy analogicznych założeniach można też udowodnić, że równanie /3/ posiada co najwyżej jedno rozwiązanie w klasie funkcji półwypukłych $\{f\}$ [1]. Pojęcie półwypukłości $\{f\}$ i półmonotoniczności $\{f\}$ odgrywa więc dużą rolę w zagadnieniu jednoznaczności rozwiązań równania /3/.

2. Pojęcie funkcji półmonotonicznych $\{f\}$ jest ogólniejsze niż pojęcie funkcji monotonicznych w zwykłym sensie. Jest widoczne, że każda funkcja monotoniczna w zwykłym sensie jest również półmonotoniczna $\{f\}$, jeśli tyl-

ko funkcja $f/x/$ spełnia podane we wstępie założenia. Chociaż może to się wydać w pierwszej chwili zaskakujące, nie jest już tak dla funkcji wypukłych; funkcja wypukła w zwykłym sensie może nie być półwypukła $\{f\}$, jak o tym świadczy następujący przykład:

niech $\varphi/x/ = \log_p x$, $p < 1$, $f/x/ = x^2$, $x > 1$. Funkcja $\varphi/x/$ jest w przedziale $/1,\infty/$ wypukła w zwykłym sensie, ale

$$2\varphi(f/x/) = 4\log_p x > 5\log_p x = \log_p x^4 + \log_p x = \varphi(f^2/x/) + \varphi/x/$$

dla każdego $x > 1$; funkcja $\varphi/x/$ nie jest więc w tym przypadku półwypukła $\{f\}$.

Z drugiej strony funkcja półwypukła $\{f\}$ może nie tylko nie być wypukła w zwykłym sensie, ale może być nawet bardzo nieregularna. Np. funkcja $\varphi/x/ = \beta(x-E/x/)$ ($E/x/$ oznacza tutaj cechę liczby $x$), gdzie $\beta/x/$ jest zupełnie dowolną funkcją określoną w lewostronnie domkniętym przedziale $[0,1)$, jest półwypukła $\{f\}$ dla $f/x/ = x + 1$, może ona nie być nie tylko wypukła w zwykłym sensie, ale jeśli wziąć odpowiednią funkcję $\beta/x/$, może być nawet niemierzalna. Tak więc pojęcia wypukłości i półwypukłości $\{f\}$ zachodzą na siebie, ale żadne z nich nie zawiera się w drugim. Związek między tymi pojęciami ustala dokładniej następujące:

<u>Twierdzenie 1.</u>

Niech $f/x/$ będzie funkcją określoną w przedziale $/\alpha,\infty/$ i spełniającą warunek $f/x/ > x$ dla każdego $x > \alpha$. Niech ponadto $f/x/$ posiada własność Darboux w $/\alpha,\infty/$.

Jeśli każda funkcja $\varphi/x/$ określona i wypukła w zwykłym sensie w przedziale $/\alpha,\infty/$ jest w tym przedziale półwypukła $\{f\}$ lub półwklęsła $\{f\}$, to $f/x/$ jest dla wszystkich $x > \alpha$ postaci $x + h$, gdzie $h$ jest stałą.

Dowód: Udowodnimy najpierw, że funkcja $f/x/$ musi spełniać dla $x > \alpha$ równanie funkcyjne

$$/4/ \qquad f(f/x/) - f/x/ = f/x/ - x$$

Przypuśćmy, że tak nie jest, tzn., że istnieje taki punkt $x_0 > \alpha$, dla którego jest albo

$$/5/ \qquad f^2/x_0/ - f/x_0/ > f/x_0/ - x_0,$$

albo też

$$/6/ \qquad f^2/x_0/ - f/x_0/ < f/x_0/ - x_0.$$

Rozpatrzmy kolejno oba przypadki.

a/ Przypuśćmy, że zachodzi przypadek /5/. Możliwe są dalsze dwa podprzypadki:

I. $f^3/x_0/ - f^2/x_0/ < f^2/x_0/ - f/x_0/,$

II. $f^3/x_0/ - f^2/x_0/ \geqslant f^2/x_0/ - f/x_0/.$

W przypadku I weźmy pod uwagę funkcję $\varphi/x/ = x$. Funkcja ta jest wypukła w $/\alpha, \infty/$, powinna więc w myśl założeń twierdzenia 1 spełniać nierówność /1/ lub /2/, a więc również i równoważną nierówność

$$/7/ \qquad \varphi(f^2/x/) - \varphi(f/x_0/) \geqslant \varphi(f/x/) - \varphi/x/$$

dla każdego $x > \alpha$

lub

$$/8/ \qquad \varphi(f^2/x/) - \varphi(f/x/) \leqslant \varphi(f/x/) - \varphi/x/$$

dla każdego $x > \alpha$.

Tymczasem mamy:

$$\varphi(f^3/x_0/) - \varphi(f^2/x_0/) = f^3/x_0/ - f^2/x_0/ < f^2/x_0/ - f/x_0/ =$$

$$= \varphi(f^2/x_0/) - \varphi(f/x_0/),$$

natomiast

$$\varphi(f^2/x_0/) - \varphi(f/x_0/) =$$

$$= f^2/x_0/ - f/x_0/ > f/x_0/ - x_0 = \varphi(f/x_0/) - \varphi/x_0/.$$

Tak więc dla $x = x_0$ spełniona jest nierówność /7/, a dla $x = f/x_0/$ nierówność /8/, co przeczy założeniu, że $\varphi/x/$ jest funkcją półwypukłą $\{f\}$ w całym przedziale lub półwklęsłą $\{f\}$ w całym przedziale $/\alpha, \infty/$.

W przypadku II rozważmy funkcję $\varphi/x/ = |x - f^2/x_0/|$. Wtedy

$$\varphi(f^3/x/) - \varphi(f^2/x_0/) = |f^3/x_0/ - f^2/x_0/| =$$

$$= f^3/x_0/ - f^2/x_0/ \geqslant f^2/x_0/ - f/x_0/ =$$

$$= \varphi(f^2/x_0/) - \varphi(f/x_0/),$$

natomiast

$$\varphi(f^2/x_0/) - \varphi(f/x_0/) =$$

$$= f/x_0/ - f^2/x_0/ < -f/x_0/ - f^2/x_0/ + f^2/x_0/ + x_0 = \varphi(f/x_0/) - \varphi/x_0/.$$

Znów więc dla $x = x_0$ spełniona jest nierówność /8/, a dla $x = f/x_0/$ nierówność /7/, a zatem funkcja $\varphi/x/$ /wypukła w zwykłym sensie/ nie jest ani półwypukła $\{f\}$ ani półwklęsła $\{f\}$ wbrew założeniu.

b/ Przypuśćmy teraz, że zachodzi przypadek /6/. Tu również możliwe są dwa podprzypadki:

III. $f^3/x_0/ - f^2/x_0/ > f^2/x_0/ - f/x_0/$

IV. $f^3/x_0/ - f^2/x_0/ \leqslant f^2/x_0/ - f/x_0/$.

W przypadku III zupełnie analogicznie jak w przypadku I, można pokazać, że funkcja $\varphi/x/ = x$ nie jest w $/\alpha,\infty/$ ani półwypukła $\{f\}$ ani półwklęsła $\{f\}$, zaś w przypadku IV można, analogicznie jak w przypadku II, dowieść, że funkcja $\varphi/x/ = |x - f/x_0/|$ nie jest ani półwypukła $\{f\}$ ani też półwklęsła $\{f\}$. Każda bowiem z tych funkcji spełnia dla $x = x_0$ nierówność przeciwną niż dla $x=f/x_0/$.

Udowodniliśmy więc, że tak w przypadku /7/, jak i w przypadku /8/ istnieje funkcja $\varphi/x/$ wypukła w zwykłym sensie w przedziale $/\alpha, \infty/$, która nie jest ani półwypukła $\{f\}$ ani półwklęsła $\{f\}$. W obu tych przypadkach doszliśmy więc do sprzeczności z założeniem, że istnieje takie $x_0$, dla którego związek /4/ nie jest spełniony. Równanie /4/ musi być zatem spełnione dla każdego $x > \alpha$.

Równanie /4/ sprowadza się przez podstawienie $f/x/ = g/x/ + x$ do równania

$$/9/ \qquad g(x + g/x/) = g/x/,$$

przy czym funkcja $g/x/$ jest również określona dla $x > \alpha$ i posiada w całym przedziale $/\alpha, \infty/$ własność Darboux. Jeśli jednak funkcja $g/x/$ określona i posiadająca własność Darboux w przedziale $/\alpha, \infty/$ spełnia w tym przedziale równanie /9/, to, jak zostało wykazane w [4] i [5], musi być stała. Tak więc musi być $g/x/ \equiv h$, skąd

$$f/x/ \equiv h + x \qquad w\ /\alpha, \infty/,$$

co kończy dowód naszego twierdzenia.

Uwaga 1: Jeśli w twierdzeniu 1 położymy $\psi/x/=-\varphi/x/$, to otrzymamy twierdzenie następujące /przy założeniach o funkcji $f/x/$ analogicznych, jak w twierdzeniu 1/:

Jeśli funkcja $\psi/x/$ określona i wklęsła w zwykłym sensie w przedziale $/\alpha, \infty/$ jest w tym przedziale półwypukła $\{f\}$ lub półwklęsła $\{f\}$, to $f/x/$ jest dla wszystkich $x > \alpha$ postaci $x + h$.

Uwaga 2: Założenie, że funkcja $f/x/$ posiada własność Darboux, jest istotne, gdyż np. funkcja $f/x/=\bar{g}/x/ + x$, gdzie

$$\bar{g}/x/ = \begin{cases} -1 & \text{dla } x < 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \\ 1 & \text{dla } x > 0, \end{cases}$$

spełnia równanie /4/ w przedziale $/-\infty, +\infty/$, a nie jest postaci $x + h$.

3. Prawdziwe jest również, do pewnego stopnia odwrotne, następujące

<u>Twierdzenie 2.</u>

Jeśli $\varphi/x/$ jest funkcją określoną w przedziale $/\alpha\beta/$ i jeśli istnieje takie $\delta > 0$, że dla każdego $0 < h < \delta$ $\varphi/x/$ jest półwypukła $\{f_h\}$ w $/\alpha, \beta/$, gdzie $f_h/x/ = x + h$, to $\varphi/x/$ jest wypukła w zwykłym sensie w $/\alpha, \beta/$.

Analogicznie: Jeśli $\varphi/x/$ jest funkcją określoną w $/\alpha, \beta/$ i jeśli istnieje takie $\delta > 0$, że dla każdego $0 < h < \delta$ $\varphi/x/$ jest półwklęsła $\{f_h\}$ w $/\alpha, \beta/$, gdzie $f_h/x/ = x + h$, to $\varphi/x/$ jest wklęsła w zwykłym sensie w $/\alpha, \beta/$.

Dowód: Udowodnimy tutaj tylko pierwszą część twierdzenia, gdyż dowód w przypadku funkcji $\varphi/x/$ półwklęsłej $\{f_h\}$

jest analogiczny. Założenie, że $\varphi/x/$ jest półwypukła $\{f_h\}$ oznacza, że dla każdego $0 < h < \delta$ i dla każdego $x \in /\alpha, \beta-2h/$ spełniona jest nierówność:

$$/10/ \qquad 2\varphi/x+h/ \leqslant \varphi/x/ + \varphi/x+2h/.$$

Niech y będzie dowolnym punktem przedziału $/\alpha, \beta/$, zaś $k_n$ dowolnym ciągiem takim, że $0 < k_n < \min /\delta, \beta-y/$ dla $n = 1, 2, \ldots$ i $\lim_{n\to\infty} k_n = 0$. Dla każdego ustalonego n połóżmy $x = y - k_n$; wtedy z nierówności /10/ otrzymamy /przy $h = k_n$/:

$$\varphi/y+k_n/+\varphi/y-k_n/-2\varphi/y/\geqslant 0 \qquad \text{dla } n = 1, 2, \ldots,$$

a stąd wynika, że

$$/11/ \quad \limsup_{k\to 0} \frac{\varphi/y+k/+\varphi/y-k/-2\varphi/y/}{k^2} \geqslant 0 \text{ dla } y \in /\alpha, \beta/.$$

Zaś, jak wiadomo /[6], str. 53/, związek /11/ stanowi warunek dostateczny, by funkcja $\varphi/x/$ była wypukła w zwykłym sensie w przedziale $/\alpha, \beta/$.

## Literatura cytowana


[1] M. Kuczma, Remarks on some functional equations, Ann. Pol. Math. 8 /1960/, str. 277-284.

[2] --- On the form of solutions of some functional equations, Ann. Pol. Math. 9/1960/, str. 55-63.

[3] J. Anastassiadis, Fonctions semi-monotones et semi-convexes et solutions d'une équation fonctionnelle, Bull. Sci. Math./2/, 76 /1952/, str. 148-160.

[4] C. Kuratowski, Sur une équation fonctionnelle, Sprawozdania z posiedzeń Tow. Nauk. warszawskiego 22/1929/, Dział III, str. 160 - 161.

[5] R. Wagner, Eindeutige Lösungen der Funktionalgleichung $f(x+f/x/) = f/x/$, Elemente der Math. 4/1959/, str. 73-78.

[6] N. Bourbaki, Les Structures fondamentales de l'Analyse; Fonctions d'une Variable Réelle, Paris 1949.

## Résumé

### Sur les fonctions semi-convexes $\{f\}$

Dans cette note on présente quelques résultats concernant les relations entre les fonctions semi-convexes $\{f\}$ et les fonctions convexes au sens ordinaire.

En supposant que la fonction $f/x/$ satisfait à la condition $f/x/ > x$ on appelle une fonction $\varphi/x/$ semi-convexe $\{f\}$ si elle satisfait à l'inégalité /1/ et semi-concave $\{f\}$ si elle satisfait à l'inégalité /2/.

La notion de semiconvexité $\{f\}$ fut appliquée dans la théorie des équations fonctionnelles par M. Kuczma.

Les résultats présentés dans cette note sont:

<u>Théorème 1</u>. Soit $f/x/$ une fonction définie dans un intervalle $/\alpha, \infty/$ et jouissant de la propriété de Darboux dans cet intervalle. On suppose en outre que $f/x/ > x$ dans $/\alpha, \infty/$.

Si chaque fonction $\varphi/x/$ convexe dans $/\alpha, \infty/$ sa-

tisfait à l'inégalité /1/ ou /2/, alors la fonction f/x/ est de la forme x + h dans /$\alpha$, $\infty$/.

Théorème 2. Soit $\varphi$/x/ une fonction définie dans /$\alpha$, $\beta$/. S'il existe un $\delta > 0$ tel que pour tout $0 < h < \delta$ $\varphi$/x/ est semi-convexe $\{f_h\}$, où $f_h$/x/ = x+h, alors $\varphi$/x/ est la fonction convexe au sens ordinaire dans /$\alpha$, $\beta$/.

Ces deux théorèmes établissent la relation entre les notions de convexité et de semi-convexité $\{f\}$. Les exemples présentés au début de paragraphe 2 font voir que ces notions ne doivent coincider qu'au cas où f/x/ $\equiv$ x + h.

## Краткое изложение

### О функциях полувыпуклых $\{f\}$

В этой статье даются некоторые результаты относительно соотношений между функциями полувыпуклыми $\{f\}$ и полувыпуклыми в обычном значении.

Имея функцию $f(x)$ для которой $f(x) > x$, мы называем функцию $\varphi(x)$ полувыпуклой $\{f\}$, если она удовлетворяет неравенству /1/, а полувогнутой, если неравенству /2/. Эти понятия были приложены М.Кучмой к теории функциональных уравнений.

Теорема I. Пусть $f(x)$ - функция обладает свойством Дарбу в интервале $(\alpha, \infty)$ и удовлетворяет в нем неравенству $f(x) > x$.

Если всякая функция $\varphi(x)$, выпуклая в $(\alpha, \infty)$ удовлетворяет неравенству /1/ или /2/, то функция $f(x)$ имеет вид $x+h$.

Теорема II. Пусть $\varphi(x)$ задана в интервале $(\alpha,\beta)$, и пусть существует такое $\delta>0$, что для всех $h\in(0,\delta)$, $\varphi(x)$ полувыпукла $\{f_n\}$, где $f_k = x+h$. Тогда $\varphi(x)$ выпукла в обычном значении.

Эти теоремы указывают связь выпуклости и полувыпуклости $\{f\}$. Эти понятия не эквивалентны при $f(x)\not\equiv x+h$.