Zenon Moszner

# PEWNE ZAGADNIENIA ZWIĄZANE Z MIERZALNOŚCIĄ LINIOWĄ I POWIERZCHNIOWĄ ZBIORÓW

## Wstęp

Minkowski /zob. [7] w spisie literatury na końcu pracy/ podał pewną definicję miary liniowej i miary powierzchniowej dowolnego zbioru [1/].

Estermann /zob. [11] / w swojej pracy zestawiającej definicję miary liniowej zbioru według Minkowskiego z definicją tego pojęcia podaną przez Carathéodoryego przyjmuje umowę następującą:
Niech Z oznacza dowolny zbiór punktów przestrzeni n-wymiarowej $R_n$. Oznaczmy przez $Z_\varrho$ zbiór tych wszystkich punktów tej przestrzeni, których odległość od zbioru Z jest niewiększa od $\varrho$.
Zbiór $Z_\varrho$ jest zamknięty, co jest bezpośrednim wnioskiem z ciągłości odległości punktu od zbioru /zob. [2] tw.4 str. 198/, jest więc mierzalny w sensie Lebesgue'a Oznaczmy jego miarę Lebesgue'a przez $|Z_\varrho|$ [2/].
Niech $\lambda_n \varrho^n$, gdzie $\lambda_n$ jest stałą zależną tylko od n /zob. [6] str. 216/, będzie objętością kuli n-wymiarowej o promieniu $\varrho$.

---

1/ Według Killinga i Hovestadta /zob. [1] str.250-256/ także i Dehn w wykładzie na uniwersytecie w Münster wprowadził w roku 1911 analogiczne definicje.

2/ W dalszym ciągu przez $|A|$ będziemy oznaczać miarę Lebesgue'a zbioru A.

Przyjmujemy następujące oznaczenia:

$$\overline{m}/Z/ = \overline{\lim_{\rho \to 0}} \frac{|Z_\rho|}{\lambda_{n-1}\rho^{n-1}}$$

oraz

$$\underline{m}/Z/ = \underline{\lim_{\rho \to 0}} \frac{|Z_\rho|}{\lambda_{n-1}\rho^{n-1}} .$$

Jeżeli $\overline{m}/Z/ = \underline{m}/Z/$ [1/], to zbiór Z będziemy nazywali mierzalnym liniowo według Minkowskiego /krótko: według /M//, a wspólną wartość $\overline{m}/Z/ = \underline{m}/Z/ = m/Z/$, /która może być równa $+\infty$/ jego miarą liniową według /M/.
Jeżeli $\overline{m}/Z/ = \underline{m}/Z/ < +\infty$, to zbiór Z będziemy nazywali mierzalnym liniowo w sensie węższym według /M/.
Favard /zob. [12]/ przyjmuje analogiczną definicję mierzalności liniowej zbioru w przestrzeni 3-wymiarowej, biorąc jedynie pod uwagę zamiast zbioru $Z_\rho$ zbiór $Z^*/\rho/$, który definiuje jako sumę mnogościową kul otwartych o promieniach $\rho$ i środkach w punktach zbioru Z.
Zbiór $Z^*/\rho/$, jako otwarty, jest mierzalny w sensie Lebesgue'a. Nadto rozważa on mierzalność powierzchniową zbiorów w przestrzeni 3-wymiarowej, definiowaną analogicznie do mierzalności liniowej na podstawie funkcji:

$$\underline{\sigma}/Z/ = \underline{\lim_{\rho \to 0}} \frac{|Z^*(\rho)|}{2\rho} \quad \text{oraz} \quad \overline{\sigma}/Z/ = \overline{\lim_{\rho \to 0}} \frac{|Z^*(\rho)|}{2\rho} .$$

Ponieważ zbiory $Z_\rho$ i $Z^*/\rho/$ są różne, wyłania się zagadnienie równoważności podanych tu definicji.

---

1/ Istnieją zbiory, dla których $\underline{m}/Z/ < \overline{m}/Z/$, a więc niemierzalne liniowo według /M/. Zob. [10] str. 184 oraz [13] str. 202-212.

Wprowadźmy poza zbiorami $Z_\varrho$ i $Z^*/\varrho/$ jeszcze zbiory:

$Z^*_\varrho$ - zbiór punktów przestrzeni $R_n$, których odległość od zbioru Z jest mniejsza od $\varrho$,

$Z/\varrho/$ - zbiór punktów równy sumie mnogościowej kul domkniętych o promieniu $\varrho$ i środkach w punktach zbioru Z.

Powyżej podane zagadnienie równoważności /dla zbiorów $Z_\varrho$ i $Z^*/\varrho//$ można ogólnie sformułować następująco: Czy obojętne jest, z którego ze zbiorów $Z_\varrho$, $Z^*/\varrho/$, $Z^*_\varrho$, $Z/\varrho/$ będziemy wychodzili definiując miarę liniową lub powierzchniową zbioru Z według /M/?[1/].

§1 niniejszej pracy poświęcony jest rozwiązaniu powyższego zagadnienia.

W §2 podaję pewne warunki dostateczne mierzalności liniowej zbiorów według /M/.

Killing i Hovestadt /zob. [1]/ omawiając definicje Dehna mierzalności liniowej i powierzchniowej zbiorów, pokrywające się z definicjami Minkowskiego tych pojęć, podają też następującą ich modyfikację:

I. Niech C oznacza krzywą płaską mającą styczną w każdym punkcie. Przez każdy punkt p tej krzywej poprowadźmy odcinek o długości $2\varrho$ $/\varrho > 0/$, o środku w punkcie p, prostopadły do krzywej C w punkcie p[2/].

---

1/ Wystarczy tu ograniczyć się do zbioru Z ograniczonego, bowiem w przeciwnym przypadku miary Lebesgue'a zbiorów $Z_\varrho$, $Z^*/\varrho/$, $Z^*_\varrho$, $Z/\varrho/$ są, niezależnie od $\varrho$, równe $+\infty$ /dla zbioru $Z_\varrho$ wynika to z [11] tw.3 str.76, dla pozostałych można przekonać się o tym rozumowaniem analogicznym/.

2/ Killing i Hovestadt odkładają odcinki o długości $\varrho$ prostopadłe do krzywej C, czy powierzchni F, po jednej tylko ich stronie; w celu uniknięcia kłopotliwych rozważań związanych ze stroną krzywej czy powierzchni modyfikuję nieco te definicje.

Oznaczmy przez $N/\rho/$ sumę mnogościową tych odcinków, gdy punkt p zmienia się po krzywej C. Jeżeli zbiór $N/\rho/$ jest mierzalny /polowo np. w sensie Lebesgue'a/ i jeżeli istnieje /skończona lub nie/ granica $\lim\limits_{\rho \to 0} \frac{|N/\rho/|}{2\rho}$, to krzywą nazywamy mierzalną liniowo według /K-H/.

II. Niech F oznacza powierzchnię mającą w każdym punkcie płaszczyznę styczną. Podobnie jak poprzednio przez każdy punkt p tej powierzchni poprowadźmy odcinek o długości $2\rho$, środku w punkcie p, prostopadły do powierzchni F w punkcie p. Oznaczmy przez $N^*/\rho/$ sumę mnogościową tych odcinków, gdy punkt p zmienia się po powierzchni F. Jeżeli zbiór $N^*/\rho/$ jest mierzalny /objętościowo np. w sensie Lebesgue'a/ i istnieje granica /skończona lub nie/ $\lim\limits_{\rho \to 0} \frac{|N^*/\rho/|}{2\rho}$, to powierzchnię F nazywamy mierzalną powierzchniowo według /K-H/, a granicę tę jej miarą powierzchniową w tym sensie.

W związku z definicją I wprowadzam następujące jej uogólnienie: Niech Z oznacza ustalony zbiór w przestrzeni $R_n$. W każdym punkcie p przestrzeni $R_n$, w którym kontingens Bouliganda /zob. [4] str. 66/ zbioru Z zawiera przynajmniej jedną prostą P /tzn. do którego należą dwa opozycyjne promienie/, tworzymy n-1 wymiarową hiperpłaszczyznę N/p,P,Z/ prostopadłą do prostej P w punkcie p. Bierzemy pod uwagę zbiór A/p,P,Z/ tych punktów przestrzeni $R_n$, które leżą na hiperpłaszczyźnie N/p,P,Z/ i których odległość od punktu p jest nie wieksza od $\rho$ /$\rho$ liczba dodatnia/ i oznaczamy przez $N/\rho/$ sumę mnogościową tak utworzonych zbiorów A/p,P,Z/, gdy punkt p zmienia się w przestrzeni $R_n$ oraz prosta P należy do kontigensu Bouliganda zbioru Z w punkcie p.

Jeżeli zbiór $N/\rho/$ jest mierzalny objętościowo np.

w sensie Lebesgue'a i jeżeli istnieje $\lim\limits_{\rho \to 0} \frac{|N/\rho/|}{\lambda_{n-1}\rho^{n-1}}$, to zbiór Z nazywamy mierzalnym liniowo według /K-H/, a wartość tej granicy jego miarą liniową według /K-H/.

W §3 niniejszej pracy zajmuję się ustaleniem w pewnych wypadkach równoważności mierzalności liniowej zbiorów według /M/ oraz według /K-H/ i wniosków stąd wypływających.

§4 poświęcony jest zbadaniu równoważności mierzalności powierzchniowej według /M/ oraz według /K-H/ zbiorów w przestrzeni trójwymiarowej.

## § 1.

Twierdzenie I

Zbiory $Z_\rho$, $Z^*_\rho$, $Z/\rho/$ i $Z^*/\rho/$ [1] są mierzalne w sensie Jordana i miary ich są równe.

Dowód

Udowodnimy najpierw, że:

$$Z^*_\rho = Z^*/\rho/ \subset Z/\rho/ \subset Z_\rho \subset /Z^*_\rho/' \text{ [2]} . \qquad /1/$$

Uzasadnienia wymaga jedynie zawieranie ostatnie, bowiem związki poprzednie widoczne są z definicji zbiorów $Z^*_\rho$, $Z^*/\rho/$, $Z/\rho/$ i $Z_\rho$.

Niech punkt $p \in Z_\rho$. Należy wykazać, że w każdym otoczeniu punktu p o promieniu $\varepsilon$ dodatnim istnieje choć jeden różny od p punkt zbioru $Z^*_\rho$, a więc punkt odległy od zbioru Z o mniej niż $\rho$. Do $\frac{\varepsilon}{2}$, w myśl definicji odległości punktu od zbioru, istnieje w zbiorze Z punkt $q$ taki, że: $\overline{p\ q} < \rho + \frac{\varepsilon}{2}$. Niech r oznacza punkt na odcinku

1/ Zbiory te określone zostały we wstępie.

2/ Jedynie ostatnie zawieranie można zastąpić równością.

$\overline{pq}$ odległy od punktu p o $\frac{2}{3}\varepsilon$. Mamy wtedy:

$$\overline{qr} = \overline{qp} - \overline{rp} \leq \rho + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{2}{3}\varepsilon = \rho - \frac{\varepsilon}{6},$$

stąd: $\overline{qr} \leq \rho - \frac{\varepsilon}{6}$, a stąd odległość punktu r od zbioru Z jest nie wieksza od $\rho - \frac{\varepsilon}{6}$, a więc jest mniejsza od $\rho$, co należało okazać. Mierzalność w sensie Jordana zbioru $Z^*/\rho/$ udowodniłem w pracy [14]. Stąd mierzalny jest też zbiór $Z^*_\rho$, a więc i zbiór $/Z^*_\rho/'$ /zob. [6] tw./4.5/ str. 201/ oraz $|Z^*_\rho| = |/Z^*_\rho/|$. Ze związku /1/ otrzymujemy wniosek o mierzalności w sensie Jordana zbiorów $Z_\rho$ i $Z/\rho/$ i równości miar Jordana zbiorów $Z_\rho$, $Z^*_\rho$, $Z/\rho/$ i $Z^*/\rho/$.

## § 2.

Podamy teraz pewne warunki dostateczne mierzalności liniowej zbiorów według /M/.

Estermann /zob. [11] str. 110/ wprowadza następujące pojęcie zbioru ciągłego /kontinuierlich/:

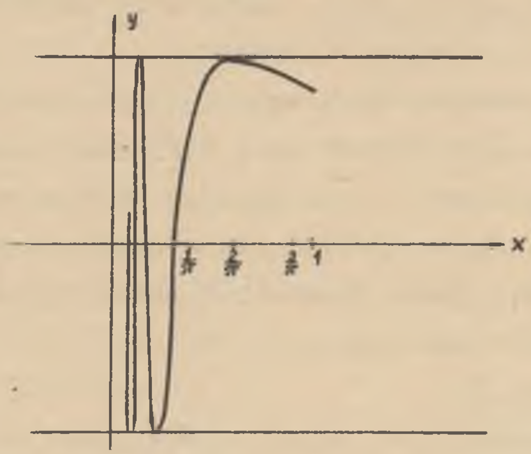
- zbiór Z jest ciągły, gdy do niego należy więcej niż jeden punkt, oraz gdy do każdych dwu punktów do niego należących istnieje takie kontinuum, do którego te punkty należą i które zawiera się w zbiorze Z. O zbiorach ciągłych dowodzi on, że są mierzalne liniowo według /M/ /zob. [11] tw.24 str. 110/.

Każdy zbiór ciągły jest spójny /zob. [6] tw. 6.3 str. 88/, ale nie odwrotnie, jak na to wskazują przykłady następujące:

1/ Wykres funkcji /zob. rys.1/:

$f/x/ = \sin\frac{1}{x}$ dla $x \in (0,1)$ i $f/0/ = 0$,

jest przykładem zbioru spójnego i ograniczonego, który nie jest zbiorem ciągłym.

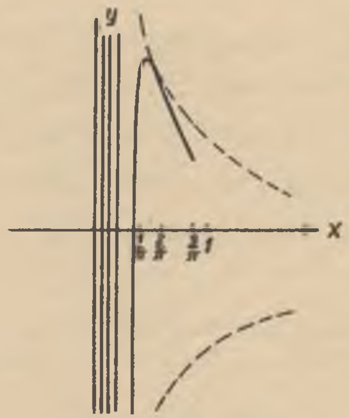



Rys. 1

2/ Wykres funkcji /zob. rys.2/:

$$f/x/ = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} \text{ dla } \quad x \in (0,1),$$

z dołączeniem do niego prostej $x = 0$, jest przykładem zbioru spójnego i domkniętego, który nie jest zbiorem ciągłym.




Rys. 2

Nazwijmy <u>prawie spójnym</u> każdy taki zbiór $Z$, którego domknięcie $\bar{Z}$ jest zbiorem spójnym.

Ponieważ domknięcie zbioru spójnego jest też zbiorem spójnym /zob. [6] tw. 6.2 str. 87/, każdy zbiór spójny jest prawie spójny, ale oczywiście nie odwrotnie.

Warunek dostateczny liniowej mierzalności według /M/ zbioru $Z$ podany przez Estermanna /ciągłość zbioru $Z$/ można uogólnić jak następuje:

<u>Twierdzenie II</u>

Suma skończonej ilości zbiorów prawie spójnych jest zbiorem mierzalnym liniowo według /M/.

<u>Dowód</u>

Niech $Z = \sum_{v=1}^{\mu} Z_v$, gdzie $Z_v$ dla $v = 1,2,\ldots\mu$ są zbiorami prawie spójnymi. Ponieważ dla $\varrho > 0$ zachodzi $Z_\varrho = \bar{Z}_\varrho$ /zob. [2] tw.2 str.198/, mierzalność liniowa zbioru $Z$ równoważna jest mierzalności liniowej zbioru $\bar{Z}$.

Nadto $\bar{Z} = \sum_{v=1}^{\mu} \bar{Z}_v$, gdzie $\bar{Z}_v$ dla $v = 1,2\ldots\mu$ są zbiorami zamkniętymi i spójnymi. Dla uzasadnienia mierzalności liniowej zbioru $Z$ wystarczy więc pokazać, że suma skończonej ilości zbiorów zamkniętych i spójnych jest zbiorem mierzalnym liniowo według /M/. Dowód powyższego przeprowadzimy indukcyjnie ze względu na ilość $\mu$ składników w sumie.

1. Wykażemy najpierw, że zbiór zamknięty i spójny $Z$ jest mierzalny liniowo.

   Rozważmy następujące trzy przypadki:

   a/ zbiór $Z$ składa się z jednego punktu, wtedy jest mierzalny liniowo, bowiem $\underline{m}/Z/ = \overline{m}/Z/ = 0$,

b/ do zbioru Z należą przynajmniej dwa punkty, przy czym jest on ograniczony. Ponieważ z założenia jest spójny i domknięty, jest kontinuum, a więc zbiorem ciągłym, a stąd na podstawie cytowanego powyżej twierdzenia Estermanna jest mierzalny liniowo,

c/ zbiór Z jest nieograniczony, wtedy $\overline{m}/Z/=\underline{m}/Z/=+\infty$ /zob. [11] tw.3 str. 76/, a więc zbiór Z jest mierzalny liniowo.

2. Załóżmy, że każdy zbiór, który jest sumą $\mu$ zbiorów zamkniętych i spójnych jest mierzalny liniowo. Wykażemy, że każdy zbiór, który jest sumą $\mu + 1$ zbiorów zamkniętych i spójnych, jest mierzalny liniowo.

Niech $Z = \sum_{v=1}^{\mu+1} Z_v$, gdzie zbiory $Z_1, Z_2, \ldots, Z_\mu, Z_{\mu+1}$ są domknięte i spójne.

Rozróżniam przypadki:

a/ $/Z_1+Z_2+\ldots+Z_\mu/\cdot Z_{\mu+1} \neq 0$, wtedy wśród liczb $1\ldots\mu$ istnieje taka liczba $v_o$, dla której $Z_{v_o}\cdot Z_{\mu+1} \neq 0$.
Ale wtedy zbiór $Z_{v_o} + Z_{\mu+1}$ jest zamknięty oraz spójny /zob. [6] tw. 6.1 str.87/ i zbiór Z można przedstawić jako sumę $\mu$ zbiorów spójnych i domkniętych, jest więc w myśl założenia indukcyjnego mierzalny liniowo,

b/ $/Z_1+Z_2+\ldots+Z_\mu/\cdot Z_{\mu+1} = 0$. Wtedy zbiór Z jest sumą zbiorów $A = Z_1+Z_2+\ldots+Z_\mu$ i $Z_{\mu+1}$, które są zamknięte i rozłączne, nadto pierwszy z nich A jest mierzalny liniowo w myśl założenia indukcyjnego, a drugi $Z_{\mu+1}$ w myśl pierwszego kroku indukcyjnego. Stąd w myśl twierdzeń 2 i 7 pracy Estermanna /zob. [11] str. 76 i 78/ zbiór Z jest mierzalny liniowo 1/.

W ten sposób dowód twierdzenia II został zakończony.

Warunek prawie spójności zbioru Z nie jest konieczny dla mierzalności liniowej zbioru Z, słuszne jest bowiem twierdzenie następujące:

Twierdzenie III

Jeżeli zbiór Z jest sumą skończonej ilości zbiorów $Z_v$ /$v = 1,2 \dots \mu$/ mierzalnych liniowo według /M/, z których każde dwa mają odległość dodatnią, to jest on mierzalny liniowo według /M/ i zachodzi:

$$m/Z/ = m/Z_1/ + \dots + m/Z_\mu/$$

Dla dowodu wystarczy skorzystać z twierdzeń 2 i 7 pracy Estermanna /zob. [11] str. 76 i 78/ i założeń mierzalności liniowej zbiorów $Z_v$.

Uwagi:

1. W twierdzeniu III nie wystarczy założyć, że zbiory $Z_v$ dla $v = 1,2 \dots \mu$ są rozłączne. Niech bowiem $Z_1$ i $Z_2$ będą zbiorami rozłącznymi, o spójnych domknięciach i takimi, że $\overline{Z}_1 = \overline{Z}_2$ oraz $m/Z_1/ \neq 0$ i $m/Z_2/ \neq +\infty$. Wtedy zbiór $Z = Z_1 + Z_2$ jest wprawdzie w myśl twierdzenia II mierzalny liniowo, ale $m/Z/ = m/Z_2/ \neq m/Z_1/ + m/Z_2/$.

2. Twierdzenie III nie przenosi się na przeliczalną ilość zbiorów, co wynika z podanego przez W.H.Young /zob. [8] lub [4] str. 198-199/ przykładu zbioru ograniczonego,

---

1/ Dwa zbiory zamknięte rozłączne i ograniczone mają odległość od siebie dodatnią, gdyby natomiast któryś ze zbiorów A lub $Z_{\mu+1}$ był nieograniczony, to nieograniczony, a więc mierzalny liniowo, byłby zbiór Z.

będącego sumą przeliczalnej ilości rozłącznych i domkniętych łuków okręgów, którego miara liniowa według /M/ jest większa od sumy miar liniowych /czyli długości. - zob. niżej/ tworzących go łuków. Zobacz też przykład na str. 105-109.

3. Może jednak się zdarzyć, że zbiór będący sumą przeliczalnej ilości zbiorów mierzalnych liniowo jest zbiorem mierzalnym liniowo /i to w sensie węższym/ oraz jego miara równa się sumie miar zbiorów składowych.

Weźmy bowiem pod uwagę przykład następujący: Niech zbiór Z będzie sumą okręgów $K_o$, $K_1$, $K_2$, ... koncentrycznych, o środkach w punkcie $p_o$ i o promieniach 1, 1/2, $1/2^2$... z dołączonym punktem $p_o$.

Do dowolnego $\rho$ z przedziału $(0,1)$ dobierzmy tak liczbę naturalną v, by:

$$\frac{1}{2^v} \leq \rho < \frac{1}{2^{v-1}} \quad . \qquad /1/$$

Oznaczmy przez $Z_v^1$ sumę mnogościową okręgów $K_o$, $K_1$, ..., $K_{v-1}$ i połóżmy:

$$Z_v^2 = Z - Z_v^1 .$$

Pokażemy niewprost, że przy założeniu /1/ zbiory $Z_v^1/\rho/$ oraz $Z_v^2/\rho/$, dające w sumie zbiór $Z/\rho/$, nie mają punktów wspólnych. Gdyby bowiem zbiór $Z_v^1/\rho/.Z_v^2/\rho/$ nie był pusty, istniałby punkt p, którego odległość od okręgów $K_{v-3}$ oraz $K_{v-2}$ byłaby nie większa od $\rho$. Wtedy odległość tych okręgów od siebie musiałaby być nie większa od $2\rho$, czyli:

$$\frac{1}{2^{v-3}} - \frac{1}{2^{v-2}} \leq 2\rho ,$$

a więc $\frac{1}{2^{v-3}} \leq 2\rho$ , a stąd $\frac{1}{2^{v-1}} \leq \rho$ , co jest sprzeczne z /1/.

Mamy więc: $Z/\rho/ = Z_v^1/\rho/ + Z_v^2/\rho/$ oraz $Z_v^1/\rho/ . Z_v^2/\rho/ = 0$.

Stąd:

$$|Z/\rho/| = |Z_v^1/\rho/| + |Z_v^2/\rho/| . \qquad /2/$$

Ale zbiór $Z_v^1/\rho/$ składa się /z uwagi na/1// z niezachodzących na siebie pierścieni kołowych, więc:

$$|Z_v^1/\rho/| = \left[\pi/1+\rho/^2 - \pi/1-\rho/^2\right] + \left[\pi/\tfrac{1}{2}+\rho/^2 - \pi/\tfrac{1}{2}-\rho/^2\right] + \ldots + \left[\pi/\tfrac{1}{2^{v-3}}+\rho/^2 - \pi/\tfrac{1}{2^{v-3}}-\rho/^2\right] =$$

$$= 8\pi\rho/1 - \frac{1}{2^{v-2}}/ . \qquad /3/$$

Zbiór $Z_v^2/\rho/$ zawiera się w kole o środku $p_o$ i promieniu $\frac{1}{2^{v-2}} + \rho$ , a więc z uwagi na /1/ mamy:

$$|Z_v^2/\rho/| \leq \pi\left(\frac{1}{2^{v-2}} + \rho\right)^2 \leq \pi\left(\frac{1}{2^{v-2}} + \frac{1}{2^{v-1}}\right)^2 = \pi\left(\frac{3}{2^{v-1}}\right)^2 .$$

Stąd z uwagi na /1/:

$$0 \leq \frac{|Z_v^2/\rho/|}{2\rho} \leq \frac{\pi \cdot \frac{9}{2^{2v-2}}}{2\rho} \leq \frac{\pi \cdot \frac{9}{2^{2v-2}}}{2 \cdot \frac{1}{2^v}} = \frac{9\pi}{2^{v-1}} .$$

Gdy $\rho \to 0$, to $v \to +\infty$ , z powyższego otrzymujemy więc:

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{|Z_v^2/\rho/|}{2\rho} = 0.$$

Z uwagi na /2/ mamy:

$$\frac{|Z/\rho/|}{2\rho} = \frac{|Z_v^1/\rho/|}{2\rho} + \frac{|Z_v^2/\rho/|}{2\rho},$$

czyli

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{|Z/\rho/|}{2\rho} = \lim_{\rho \to 0} \frac{|Z_v^1/\rho/|}{2\rho}.$$

Ostatnia granica z uwagi na /3/ równa się $4\pi$.
Zbiór Z jest więc mierzalny liniowo według /M/ i jego miara liniowa równa się:

$$m/Z/ = 4\pi = \sum_{v=0}^{+\infty} 2\pi \cdot \frac{1}{2^v} = \sum_{v=0}^{+\infty} m/K_v/.$$

Znane jest twierdzenie następujące:

$|T_1|$ Jeżeli przez C oznaczymy łuk prosty w przestrzeni $R_n$, to zbiór C jest mierzalny liniowo według /M/ oraz $m/C/ = \lambda/C/$, gdy łuk C jest prostowalny, a $\lambda/C/$ oznacza jego długość i $m/C/ = +\infty$, gdy łuk C nie jest prostowalny.

Dowód tego twierdzenia przeprowadzony jest w pracy Estermanna /zob. [11] str. 93-94/ oraz w pracy Favarda /zob. [12] str. 69-74/. W dalszym ciągu podam pewne uogólnienie tego twierdzenia.

Z rozumowania przedstawionego przez Favarda /zob. [12] str. 69/ wynika twierdzenie następujące:

$|T_2|$ Jeżeli: 1/ $F_1$ i $F_2$ są zbiorami zamkniętymi i mierzalnymi liniowo,

2/ $\lim_{\varepsilon \to 0} \overline{m} \left[F_1 \cdot /F_1 \cdot F_2/_\varepsilon\right] = 0$,

to zbiór $F_1+F_2$ jest mierzalny liniowo oraz jego miara liniowa równa się sumie miar liniowych zbiorów $F_1$ i $F_2$.

Stąd wynika następujący wniosek:

Jeżeli F jest dowolnym zbiorem zamkniętym mierzalnym liniowo, a C łukiem prostym, prostowalnym, mającym ze zbiorem F co najwyżej dwa punkty wspólne, to zbiór F+C jest mierzalny liniowo, oraz jego miara liniowa równa się sumie miary liniowej zbioru F i długości łuku C.

Dowód

I. Gdy $F \cdot C = 0$, to twierdzenie wynika z twierdzeń III oraz $|T_1|$.

II. Niech $F \cdot C$ składa się z jednego tylko punktu $p_0$. Oznaczmy przez $r = r/\tau/$, dla $\tau \in [\alpha, \beta]$, równanie parametryczno-wektorowe łuku C. W myśl twierdzenia $|T_1|$ zbiór C jest mierzalny liniowo i $m/C/ = \lambda /C/$, gdzie $\lambda /C/$ oznacza długość łuku C. Ponieważ pole $r/\tau/$ jest ciągłe, zbiór C jest zamknięty.

Niech punktowi $p_0 \in C$ odpowiada parametr $\tau_0 \in [\alpha, \beta]$. Oznaczmy przez $\phi(\tau) = |r/\tau/ - r/\tau_0/|$. Funkcja ta jest ciągła w przedziale $[\alpha, \beta]$.

Niech $\varepsilon$ będzie dowolną liczbą dodatnią. Utwórzmy zbiór $C \cdot /F \cdot C/_\varepsilon$, jest to zbiór tych punktów łuku C, których odległość od punktu $p_0$ jest nie większa od $\varepsilon$, tzn. zbiór takich punktów $p/\tau/$ krzywej C, dla których $\phi/\tau/ \leq \varepsilon$. Niech $Z = /\hat{\tau}/\,(\phi/\tau/ \leq \varepsilon)$. Zbiór ten posiada kresy dolny i górny, które oznaczmy przez $\tau_1(\varepsilon)$ oraz $\tau_2(\varepsilon)$.

Z uwagi na ciągłość $\phi/\tau/$ kresy te należą do zbioru Z. Pokażemy, że gdy $\varepsilon \longrightarrow 0$, to $\tau_1(\varepsilon) \to \tau_0$ oraz $\tau_2(\varepsilon) \to \tau_0$. Przypuśćmy bowiem, że dla pewnego ciągu $\varepsilon_\nu \longrightarrow 0$ ciąg np. $\tau_1(\varepsilon_\nu) \not\longrightarrow \tau_0$. Z ciągu tego dałby się wtedy wybrać ciąg $\tau_1(\varepsilon_{\mu_\nu}) \longrightarrow \tau_0' \neq \tau_0$. Mamy $\phi[\tau_1(\varepsilon_{\mu_\nu})] \leq \varepsilon_{\mu_\nu}$, a stąd, wobec ciągłości funkcji $\phi/\tau/$ , otrzymujemy: $\phi/\tau_0'/ = 0$. Ale wobec wzajemnie jednoznacznego odwzorowania liczb przedziału $[\alpha,\beta]$ na punkty łuku prostego C mamy stąd $\tau_0' = \tau_0$ , co daje sprzeczność.

Niech $C_\varepsilon$ oznacza łuk o równaniu $r = r/\tau/$ dla $\tau \in [\tau_1(\varepsilon), \tau_2(\varepsilon)]$ Mamy $C \cdot /F \cdot C/_\varepsilon \subset C_\varepsilon$ , a stąd $\bar{m}[C \cdot /F \cdot C/_\varepsilon] \leqslant \bar{m}/C_\varepsilon/$ /zob. [11] tw. 1 str. 76/. Ale w myśl twierdzenia $|T_1|$: $\bar{m}/C_\varepsilon/$ równa się długości łuku $C_\varepsilon$ , którą oznaczamy $\lambda_\varepsilon$ . Z uwagi na ciągłość długości łuku krzywej ciągłej i prostowalnej /zob. [5] tw. 2 str. 62/ $\lambda_\varepsilon \longrightarrow 0$ przy $\varepsilon \longrightarrow 0$, bowiem wtedy $\tau_1(\varepsilon) \longrightarrow \tau_0$ oraz $\tau_2(\varepsilon) \longrightarrow \tau_0$ . Stąd wobec nierówności: $0 \leqslant \bar{m}[C \cdot /F \cdot C/_\varepsilon] \leqslant \lambda_\varepsilon$ , wnioskujemy, że $\lim_{\varepsilon \to 0} \bar{m}[C \cdot /F \cdot C/_\varepsilon] = 0$, co wobec twierdzenia $|T_2|$ dowodzi prawdziwości naszego wniosku.

III. Analogicznie można uzasadnić prawdziwość wniosku, gdy zbiór F·C składa się z dwu punktów.

Uwaga

Widoczne jest, że wniosek pozostanie w mocy przy założeniu, że zbiór F·C składa się ze skończonej ilości punktów.

Na podstawie powyższego wniosku udowodnimy następujące twierdzenie:

Twierdzenie IV

Jeżeli krzywą C /tzn. ciągły obraz odcinka/ można rozłożyć na sumę skończonej ilości łuków prostych $C_1, C_2 \ldots C_\mu$, takich, że zbiór $/C_1+C_2+\ldots+C_v/ \cdot C_{v+1}$ dla $v=1,2\ldots \mu-1$ jest złożony z co najwyżej dwu punktów, to miara liniowa m/C/ krzywej C równa się $\lambda$ /C/, gdzie $\lambda$ /C/ jest długością krzywej C, gdy ta jest prostowalna lub $\lambda/C/=+\infty$ w przeciwnym przypadku.

Dowód

I. Załóżmy, że krzywa C nie jest prostowalna. Wtedy przynajmniej jeden z łuków $C_1, C_2 \ldots C_\mu$, przypuśćmy $C_{v_o}$, nie jest prostowalny. Jest $C_{v_o} \subset C$, a stąd $m/C_{v_o}/ \leqslant m/C/$, ale $m/C_{v_o}/ = +\infty$ /zob. tw. /$T_1$//, a więc i $m/C/ = +\infty$.

II. Niech krzywa C będzie prostowalna. Wtedy wszystkie łuki $C_1 \ldots C_\mu$ są prostowalne i jeżeli przez $\lambda/C_v/$ oznaczymy długość łuku $C_v$, mamy $\lambda/C/ = \lambda/C_1/ + \ldots + \lambda/C_\mu/$ /zob. [5] tw. 1 str. 62/. Przypuśćmy dla dowodu nie wprost, że $m/C/ \neq \lambda/C/$. Niech $v_o$ oznacza najmniejszą z liczb $1 \ldots \mu$, dla której:

$$m/C_1 + \ldots + C_{v_o}/ \neq \lambda/C_1/ + \ldots + \lambda/C_{v_o}/. \qquad /1/$$

Ponieważ $m/C_1/ = \lambda/C_1/$ /na podstawie twierdzenia /$T_1$/, $C_1$ jest łukiem prostym/, mamy $v_o > 1$. Nadto z określenia $v_o$ mamy:

$$m/C_1 + \ldots + C_{v_o - 1}/ = \lambda/C_1/ + \ldots + \lambda/C_{v_o - 1}/.$$

Oznaczmy przez $F = C_1 + \ldots + C_{v_o - 1}$. Zbiory F i $C_{v_o}$ są oba zamknięte, mierzalne liniowo i mają co najwyżej dwa punkty wspólne. Z wniosku ze str. 92 otrzymujemy stąd:

$$m/C_1 + \ldots + C_{v_o - 1} + C_{v_o}/ = m/F + C_{v_o}/ = m/F/ + m/C_{v_o}/ =$$

$$= \lambda/C_1/ + \ldots + \lambda/C_{v_o - 1}/ + \lambda/C_{v_o}/,$$

bo $C_{v_o}$ jest łukiem prostym, co jest sprzeczne z /1/.

Twierdzenie V

Jeżeli 1/ równanie parametryczno-wektorowe krzywej C ma postać $r = r/\tau/$, gdzie $\tau \in [\alpha, \beta]$, przy czym w przedziale $[\alpha, \beta]$ istnieje $\frac{dr/\tau/}{d\tau}$, oraz $\frac{dr/\tau/}{d\tau} \neq \vec{0}$,

2/ krzywa C posiada tylko skończoną ilość punktów wielokrotnych, tzn. takich, którym odpowiada więcej niż jedna wartość parametru $\tau$ z przedziału $[\alpha, \beta]$,

to: $m/C/ = \lambda /C/$, gdzie $\lambda /C/$ ma znaczenie takie jak w twierdzeniu IV.

Dowód tego twierdzenia poprzedzimy następującym lematem:

a/ Przy założeniu, że pole $r = r/\tau/$ dla $\tau \in [\alpha, \beta]$ jest ciągłe, zbiór $Z_{\tau_0} = /\hat{\tau}/ (\tau \in [\alpha, \beta] |r/\tau/ - r/\tau_0/| = 0)$ określony dla $\tau_0 \in [\alpha, \beta]$ jest zamknięty.

b/ Jeżeli istnieje $\frac{dr/\tau/}{d\tau}$ dla $\tau \in [\alpha, \beta]$ oraz $\left|\frac{dr/\tau/}{d\tau}\right| \neq 0$, zbiór $Z_{\tau_0}$ dla każdego $\tau_0 \in [\alpha, \beta]$ jest skończony.

Dowód

a/ Niech $\tau_v \in Z_{\tau_0}$ i $\tau_v \to \tau$. Wtedy $\tau \in [\alpha, \beta]$, oraz $r/\tau_v/ \longrightarrow r/\tau/$, czyli, ponieważ $|r/\tau_v/ - r/\tau_0/| = 0$, mamy $|r/\tau/ - r/\tau_0/| = 0$, a więc $\tau \in Z_{\tau_0}$, co należało okazać.

b/ Przypuśćmy, że zbiór $Z_{\tau_0}$ jest nieskończony. Jako ograniczony, musi posiadać choć jeden punkt skupienia $\tau^*$, w myśl a/ należący do $Z_{\tau_0}$. Istnieje więc taki ciąg $\tau_v \in Z_{\tau_0}$, który jest zbieżny do $\tau^*$ i dla którego $\tau_v \neq \tau^*$ dla $v = 1,2,3...$

Ponieważ $\tau^* \in Z_{\tau_0}$, oraz oczywiście $\tau_0 \in Z_{\tau_0}$, mamy $|r/\tau^*/ - r/\tau_0/| = 0$, czyli $r/\tau_0/ = r/\tau^*/$. Nadto stąd, że $\tau_n \in Z_{\tau_0}$ mamy $|r/\tau_n/ - r/\tau_0/| = 0$, czyli $r/\tau_n/=r/\tau_0/$.

Stąd $\dfrac{r/\tau_n/-r/\tau^*/}{\tau_n - \tau^*} = 0$ i gdy $\tau_n \to \tau^*$ otrzymujemy $\dfrac{dr/\tau^*/}{d\tau}=\bar{0}$, co jest sprzeczne z założeniem.

Dowód twierdzenia V

W myśl twierdzenia IV wystarczy pokazać, że krzywą C można rozłożyć na taką skończoną ilość łuków prostych $C_1 \dots C_\mu$, że zbiór $/C_1+ \dots + C_v/.C_{v+1}$ dla $v=1,2,\dots,\mu-1$ składa się co najwyżej z dwu punktów.

Niech $p_1 \dots p_\sigma$ będą punktami wielokrotnymi krzywej C, a $\tau_1 \dots \tau_\sigma$ jakimikolwiek odpowiadającymi im parametrami. W myśl lematu zbiory $Z_{\tau_1}, \dots Z_{\tau_\sigma}$ są skończone, a więc i zbiór $Z = Z_{\tau_1} + \dots + Z_{\tau_\sigma}$ jest skończony. Oznaczmy jego elementy, uporządkowane rosnąco, przez $\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2 \dots \bar{\tau}_m$. Węzły sieci:

$$\alpha \leq \bar{\tau}_1 < \frac{\bar{\tau}_1+\bar{\tau}_2}{2} < \bar{\tau}_2 < \frac{\bar{\tau}_2+\bar{\tau}_3}{2} < \bar{\tau}_3 < \dots < \frac{\bar{\tau}_{m-1}+\bar{\tau}_m}{2} < \bar{\tau}_m \leq \beta$$

oznaczmy przez $\tau'_0, \tau'_1 \dots \tau'_\mu$.

Niech $C_v$ dla $v = 1,2 \dots \mu$ będzie zbiorem o równaniu parametryczno-wektorowym $r=r/\tau/$ dla $\tau \in \left[\tau'_{v-1}, \tau'_v\right]$.

Oczywiście $C = \sum_{v=1}^{\mu} C_v$. Rozkład przedziału $[\alpha,\beta]$ na przedziały $[\tau'_{v-1}, \tau'_v]$ jest taki, że z każdego z tych przedziałów tylko jeden punkt /kraniec/ należy do zbioru Z. Stąd:

1/ zbiory $C_v$ są łukami prostymi.

Udowodnimy nie wprost, że:

2/ zbiór $/C_1+\dots+C_v/.C_{v+1}$ dla $v = 1,2\dots \mu-1$ składa się co najwyżej z dwu punktów.

Przypuśćmy, że dla pewnego $v_0$ zbiór $/C_1+\dots+C_{v_0}/.C_{v_0+1}$

składa się z trzech punktów, którym w przedziale $[\tau'_{v_0},\tau_{v_0+1}]$ odpowiadają parametry $\rho_1<\rho_2<\rho_3$. Mamy stąd $\rho_2 \neq \tau'_{v_0}$ oraz $\rho_3 \neq \tau'_{v_0}$. Wtedy do $\rho_2$ istnieje w przedziale $[\alpha,\tau'_{v_0}]$ taki parametr $\bar{\rho}_2 \neq \rho_2$, że $r/\rho_2/=r/\bar{\rho}_2/$, a więc $\rho_2 \in Z$. Podobnie $\rho_3 \neq \rho_2$ należy do Z, co sprzeczne jest z tym, że w przedziale $[\tau'_{v_0},\tau'_{v_0+1}]$ jest tylko jeden punkt zbioru Z.

Dowód twierdzenia V można więc uważać za zakończony.

§ 3.

Przejdziemy teraz do ustalenia pewnych zależności między mierzalnością liniową zbiorów według /M/, a ich mierzalnością liniową według /K-H/.

Definicja

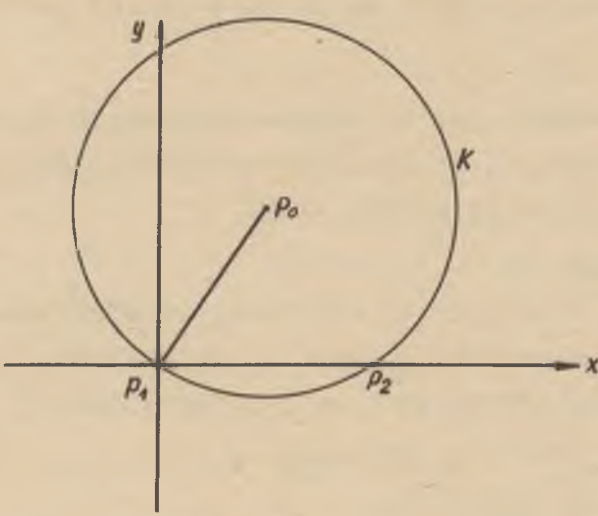
Mówimy, że odległość punktu $p_o$ od zbioru Z realizuje się w pewnym punkcie $p_1$, należącym do domknięcia $\bar{Z}$ zbioru Z, jeżeli odległość punktu $p_o$ od zbioru Z równa się odległości punktu $p_o$ od punktu $p_1$.

Udowodnimy lemat /L/:

Jeżeli odległość punktu $p_o$ od zbioru Z realizuje się w pewnym punkcie $p_1 \neq p_o$, przy czym kontingens Bouliganda zbioru Z w punkcie $p_1$ zawiera pewną prostą P, to prosta P jest prostopadła do prostej $p_op_1$.

Dowód nie wprost.

Oznaczmy przez K kulę o środku w punkcie $p_o$ i promieniu $\rho = \overline{p_op_1}$. Jeżeli prosta P nie jest prostopadła do prostej $p_op_1$, to przecina powłokę kuli K w jakimś punkcie $p_2 \neq p_1$. Weźmy pod uwagę półprostą $\overrightarrow{p_1p_2}$. Należy ona do kontingensu Bouliganda zbioru Z w punkcie $p_1$. Istnieje więc w zbiorze Z taki ciąg punktów $p_v \neq p_1$, dla których $p_\nu \longrightarrow p_1$, oraz półproste $\overrightarrow{p_1p_v}$ zdążają do półprostej $\overrightarrow{p_1p_2}$. Niech $\Theta_v$ oznacza miarę kąta między półprostymi $\overrightarrow{p_1p_v}$ oraz $\overrightarrow{p_1p_2}$. Mamy $\Theta_v \longrightarrow 0$. Wybierzmy układ odniesienia tak, by punkt $p_1$ miał współrzędne /0,0...0/, punkt $p_2$ współrzędne /1,0,...,0/, a punkt $p_o$ współrzędne $/\frac{1}{2}, \sqrt{\rho^2 - \frac{1}{4}}, 0 \ldots 0/$ /zob. rys.3/ i oznaczmy współrzędne punktu $p_v$ w tak dobranym układzie przez $(\alpha_1^v, \alpha_2^v, \ldots \alpha_n^v)$.




Rys. 3

Ponieważ

$$\cos \Theta_v = \frac{\alpha_1^v}{\sqrt{\sum_{\mu=1}^{n} (\alpha_\mu^v)^2}} ,$$

mamy przy $v \longrightarrow +\infty$ :

$$\frac{\alpha_1^v}{\sqrt{\sum_{\mu=1}^{n} (\alpha_\mu^v)^2}} \longrightarrow 1.$$

Ponieważ

$$\sin \Theta_v = \sqrt{1 - \cos^2 \Theta_v} = \frac{\sqrt{(\alpha_2^v)^2 + \ldots + (\alpha_n^v)^2}}{\sqrt{\sum_{\mu=1}^{n} (\alpha_\mu^v)^2}}$$

mamy stąd przy $v \longrightarrow +\infty$ :

$$\frac{\sqrt{(\alpha_2^v)^2+\ldots+(\alpha_n^v)^2}}{\sqrt{\sum_{\mu=1}^{n}(\alpha_\mu^v)^2}} \longrightarrow 0, \text{ a więc i } \frac{\alpha_2^v}{\sqrt{\sum_{\mu=1}^{n}(\alpha_\mu^v)^2}} \longrightarrow 0.$$

Ponieważ w punkcie $p_1$ realizuje się odległość punktu $p_o$ od zbioru Z, mamy dla każdego punktu p należącego do zbioru Z: $\overline{pp_o} \geqslant \overline{p_1p_o} = \rho$, a stąd z uwagi na to, że $p_v \in Z$, mamy: $\overline{p_vp_o} \geqslant \rho$, czyli:

$$(\alpha_1^v-\tfrac{1}{2})^2+(\alpha_2^v-\sqrt{\rho^2-\tfrac{1}{4}})^2+(\alpha_3^v)^2+\ldots+(\alpha_n^v)^2 \geqslant \rho^2 \text{ dla } v=1,2,3\ldots,$$

czyli: $\sum_{\mu=1}^{n}(\alpha_\mu^v)^2-\alpha_1^v-2\sqrt{\rho^2-\tfrac{1}{4}}\cdot\alpha_2^v \geqslant 0,$

skąd po wydzieleniu przez $\sqrt{\sum_{\mu=1}^{n}(\alpha_\mu^v)^2}>0$ , bo $p_v \neq p_o$,

otrzymamy:

$$\sqrt{\sum_{\mu=1}^{n}(\alpha_\mu^v)^2}-\frac{\alpha_1^v}{\sqrt{\sum_{\mu=1}^{n}(\alpha_\mu^v)^2}}-2\sqrt{\rho^2-\tfrac{1}{4}}\cdot\frac{\alpha_2^v}{\sqrt{\sum_{\mu=1}^{n}(\alpha_\mu^v)^2}} \geqslant 0.$$

Przechodząc tu do granicy, gdy $v \longrightarrow +\infty$, otrzymujemy $-1 \geqslant 0$, skąd sprzeczność. Lemat został więc udowodniony.

Wniosek

Jeżeli Z jest zbiorem zamkniętym i do kontingensu Bouliganda tego zbioru w każdym jego punkcie należy przynajmniej jedna prosta, to dla każdego $\rho > 0$ mamy $Z_\rho = N/\rho/$ /zbiory $Z_\rho$ i $N/\rho/$ zostały określone we wstępie/.

Stąd wynika równoważność jego mierzalności liniowej według /M/ i według /K-H/.

Zbiorem Z może być w szczególności krzywa zamknięta, mająca w każdym punkcie styczną.

Twierdzenie VI

Jeżeli zbiór Z spełnia warunki następujące:

a/ jest zamknięty,

b/ jest mierzalny liniowo według /M/,

c/ zbiór U tych punktów zbioru Z, w których kontingens Bouliganda zbioru Z nie zawiera prostej, jest miary liniowej /M/ zero,

d/ zbiór $N/\rho/$ dla dostatecznie małych $\rho > 0$ jest mierzalny objętościowo np. w sensie Lebesgue´a,

to:

e/ zbiór Z jest mierzalny liniowo według /K-H/ i

f/ obie miary liniowe według /M/ i /K-H/ zbioru Z są sobie równe.

Dowód tego twierdzenia poprzedzimy dowodem lematu:
Dla każdego $\rho > 0$ mamy: $Z_\rho - U_\rho \subset N/\rho/ \subset Z_\rho$.
Uwaga: przez $U_\rho$ oznaczamy zbiór tych punktów przestrzeni $R_n$, których odległość od zbioru U jest nie większa od $\rho$ /zob. Wstęp/.

Dowód

Drugie zawieranie jest widoczne.
Niech $p \in Z_\rho - U_\rho$. Odległość punktu p od zbioru Z jest nie większa od $\rho$ i realizuje się w pewnym punkcie $q \in Z$. Punkt q nie należy do zbioru U, w przeciwnym bowiem wypadku p należałby do zbioru $U_\rho$, co jest niemożliwe. Kontingens Bouliganda zbioru Z w punkcie q zawiera więc na podstawie określenia zbioru U pewną prostą P. W myśl lematu /L/ na str. 97 prosta pq jest prostopadła do prostej P, oraz $\overline{pq} \leq \rho$, a więc $p \in N/\rho/$, co należało okazać.

Dowód twierdzenia VI

Mamy $U_\rho \subset Z_\rho$, więc $Z_\rho = /Z_\rho - U_\rho/ + U_\rho$, a stąd $|Z_\rho| = |Z_\rho - U_\rho| + |U_\rho|$, czyli $|Z_\rho - U_\rho| = |Z_\rho| - |U_\rho|$. Na podstawie lematu: $|Z_\rho - U_\rho| \leq |N/\rho/| \leq |Z_\rho|$, a stąd i z powyższego:

$$\frac{|Z_\rho|}{\lambda_{n-1}\rho^{n-1}} - \frac{|U_\rho|}{\lambda_{n-1}\rho^{n-1}} \leq \frac{|N/\rho/|}{\lambda_{n-1}\rho^{n-1}} \leq \frac{|Z_\rho|}{\lambda_{n-1}\rho^{n-1}} \quad /*/$$

Ponieważ z założenia miara liniowa według /M/ zbioru U równa się zeru, więc $\frac{|U_\rho|}{\lambda_{n-1}\rho^{n-1}} \longrightarrow 0$, gdy $\rho \longrightarrow 0$, przechodząc więc w nierównościach /*/ do granicy, gdy $\rho \longrightarrow 0$ otrzymujemy tezę twierdzenia.

Uwaga

W przypadku, gdy $\lim\limits_{\rho \to 0} \frac{|Z_\rho|}{\lambda_{n-1}\rho^{n-1}} = +\infty$, tezę twierdzenia otrzymujemy na podstawie twierdzenia o dwu funkcjach dla granic niewłaściwych, z lewej nierówności /*/. W przypadku tym wystarczyłoby zamiast założenia c/ założyć, że $\overline{m}/U/ < +\infty$.

W związku z założeniem c/ twierdzenia VI udowodnimy twierdzenie:

Twierdzenie VII

Niech C oznacza krzywą Jordana /zamkniętą lub nie/, prostowalną. Jeżeli zbiór U tych punktów krzywej C, w których kontingens Bouliganda nie zawiera prostej, jest zamknięty, to zbiór U jest miary liniowej /M/ zero.

Dowód

W dowodzie skorzystamy z następującego twierdzenia Grossa /zob. [9] tw.IX str. 180 oraz [10] str.11-12/:

/I/ Niech zbiór zamknięty A leży na prostowalnej krzywej Jordana C. Wprowadźmy na tej krzywej jako parametr długość łuku $\sigma$ liczoną od pewnego punktu $p_o \in C$ i przez B oznaczmy zbiór tych wartości parametru $\sigma$, które odpowiadają punktom zbioru A. Wtedy miara liniowa według /M/ zbioru A równa jest mierze Lebesgue'a zbioru B /zbiór B musi być zamknięty,co wynika z zamkniętości zbioru A i ciągłości krzywej C/.

Niech krzywa C ma równanie $r=r/\tau/$, gdzie $\tau \in [\alpha,\beta]$. Ponieważ krzywa ta jest prostowalna można jako parametr na niej przyjąć długość łuku /zob. [5] tw.3 str.62/ liczoną od punktu $p_o$, który jest końcem wektora $r/\alpha/$. Niech wtedy jej równanie będzie postaci $v=v/\sigma/$, gdzie $\sigma \in [0,\lambda]$ przy czym $\lambda$ oznacza długość krzywej C. Współrzędne wektora $v/\sigma/$ są funkcjami $\sigma$ o ograniczonym wahaniu w przedziale $[0, \lambda]$, a stąd w myśl znanego twierdzenia Lebesgue'a /zob. [3] tw.2 str.70/ w prawie każdym punkcie przedziału $[0,\lambda]$ istnieje $\frac{dv/\sigma/}{d\sigma}$ oraz w prawie każdym punkcie tego przedziału $\left|\frac{dv/\sigma/}{d\sigma}\right| = 1 > 0$ /zob. [3] tw.8 str.83/.Oznaczmy przez

1/ Z zbiór tych wartości parametru $\sigma$, które odpowiadają punktom zbioru $U \subset C$,

2/ $Z_1$ zbiór tych wartości parametru $\sigma$, dla których nie istnieje $\frac{dv/\sigma/}{d\sigma}$ lub $\left|\frac{dv/\sigma/}{d\sigma}\right| \neq 1$,

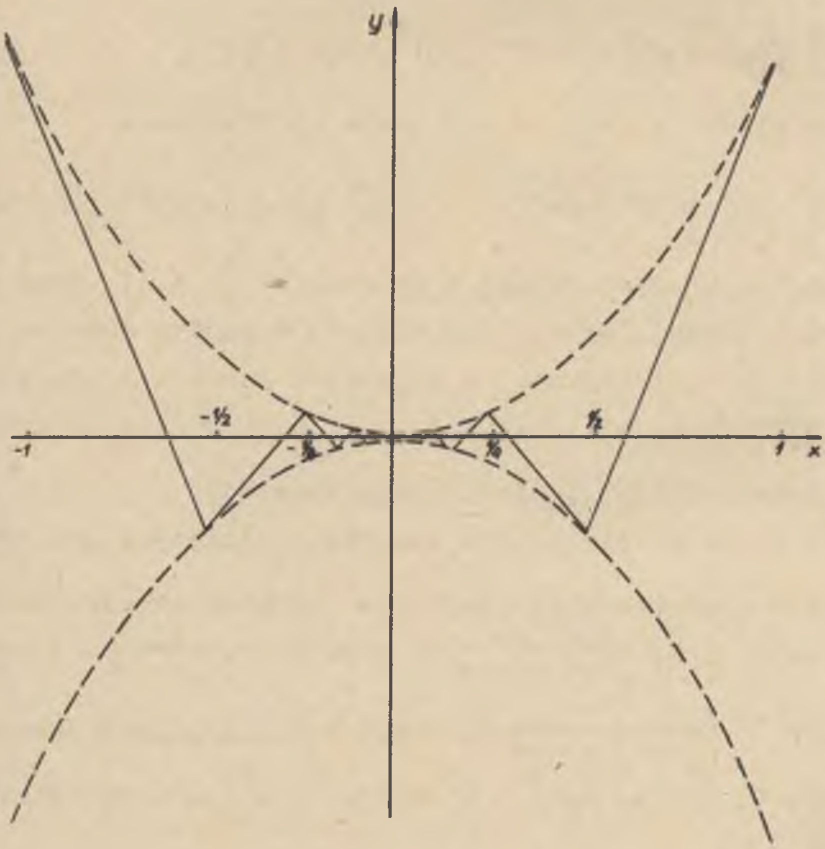
3/ $U_1$ zbiór punktów krzywej C odpowiadających wartościom parametru $\sigma$ ze zbioru $Z_1$.

Z uwag poprzednich wynika, że miara Lebesgue'a zbioru $Z_1$ równa jest zeru. Dla parametru $\sigma_o \in [0,\lambda] - Z_1$, istnieje $\frac{dv/\sigma/}{d\sigma} \neq \vec{0}$, a więc w punkcie p na krzywej C, któremu odpowiada parametr $\sigma_o$, kontingens Bouliganda składa się z dwu opozycyjnych promieni, zawiera więc prostą.

Stąd $U \subset U_1$, a więc $Z \subset Z_1$, a wobec tego miara Lebesgue'a zbioru Z równa się też zeru. Ale miara liniowa /M/ zbioru U równa się mierze Lebesgue'a zbioru Z /zob./I//, skąd otrzymujemy tezę twierdzenia.

<u>Uwaga</u>

Określony poprzednio /zob. tw.VI/ zbiór U nie musi być zamknięty jak na to wskazuje przykład następujący:




Rys. 4

Niech C będzie wykresem funkcji określonej w następujący sposób /zob. rys.4/:

1/ $f/0/ = 0$,

2/ $f\left(\frac{1}{2^{v-1}}\right) = /-1/^{v-1} \left(\frac{1}{2^{v-1}}\right)^2$ dla $v = 1,2,3,\ldots$;

3/ w przedziałach $\left[\frac{1}{2^v}, \frac{1}{2^{v-1}}\right]$ dla $v = 1,2,3,\ldots$,

funkcja $f/x/$ jest liniowa,

4/ $f/x/ = f/-x/$ dla $x \in [-1,0]$.

Krzywa C jest prostowalna w przedziale $[-1, 1]$, co wynika ze zbieżności szeregu:

$$\sum_{v=1}^{\infty} \sqrt{\left(\frac{1}{2^{v-1}} - \frac{1}{2^v}\right)^2 + \left[(-1)^{v-1}\left(\frac{1}{2^{v-1}}\right)^2 - (-1)^v \cdot \left(\frac{1}{2^v}\right)^2\right]^2},$$

która widoczna jest na podstawie nierówności:

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2^{v-1}} - \frac{1}{2^v}\right)^2 + \left[(-1)^{v-1}\left(\frac{1}{2^{v-1}}\right)^2 - (-1)^v \cdot \left(\frac{1}{2^v}\right)^2\right]^2} - \sqrt{\left(\frac{1}{2^{v-1}}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2^{v-1}}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{v-1}} + \frac{5}{4}\frac{1}{4^{v-1}}$$

Funkcja $f/x/$ jest ciągła w przedziale $[-1,1]$ oraz jak łatwo zauważyć, wykres jej posiada w każdym punkcie przedziału $[-1,1]$ styczną, z wyjątkiem punktów o odciętych $\varepsilon \cdot \frac{1}{2^{v-1}}$ $/\varepsilon = \pm 1$, $v=1,2,3,\ldots/$, w których kontingens Bouliganda zbioru C nie zawiera prostej.

Zbiór U składa się więc z punktów o odciętych $\varepsilon \cdot \frac{1}{2^{v-1}}$.

Punkt o współrzędnych $/0,0/$ jest punktem skupienia zbioru U, bowiem $\varepsilon \cdot \frac{1}{2^{v-1}} \xrightarrow[v \to +\infty]{} 0$, oraz $f\left(\varepsilon \cdot \frac{1}{2^{v-1}}\right) = f\left(\frac{1}{2^{v-1}}\right) = /-1/^{v-1}\left(\frac{1}{2^{v-1}}\right) \xrightarrow[v \to +\infty]{} 0$. Punkt ten nie należy jednak do zbioru U, bowiem mamy $-x^2 \leq f/x/ \leq x^2$, a więc istnieje $f'/0/ = 0$.

Zbiór U nie jest zamknięty. Zbiór U jest jednak miary liniowej /M/ zero. Domknięcie $\bar{U}$ tego zbioru jest zbiorem przeliczalnym, oczywiście zamkniętym, leżącym na krzywej

Jordana C prostowalnej, więc jego miara liniowa /M/ równa jest zeru /zob. /I/ w dowodzie twierdzenia VII/, a stąd i miara liniowa zbioru $U \subset \overline{U}$ jest równa zeru. Z przykładu tego wynika więc, że zamkniętość zbioru U nie jest konieczna do tego, by był on miary liniowej /M/ zero.

Twierdzenie VI można częściowo odwrócić:

<u>Twierdzenie VIII</u>

Przy założeniach a/, c/ i e/ mamy tezę b/ i f/ /zob. tw. VI/.

<u>Dowód</u>

Na podstawie lematu do twierdzenia VI mamy:

$$N/\rho/ \subset Z_\rho \subset N/\rho/ + U_\varrho .$$

Stąd:

$$\frac{|N/\rho/|}{\lambda_{n-1}\rho^{n-1}} \leqslant \frac{|Z\rho|}{\lambda_{n-1}\rho^{n-1}} \leqslant \frac{|N/\rho/|}{\lambda_{n-1}\rho^{n-1}} + \frac{|U\rho|}{\lambda_{n-1}\rho^{n-1}},$$

a więc gdy $\rho \longrightarrow 0$ otrzymujemy tezę twierdzenia.

<u>Uwaga</u>

Założenie c/ jest w tym twierdzeniu istotne, jak na to wskazuje przykład następujący:

Niech zbiór Z będzie sumą zbiorów:

$Z_1$: złożonego z punktów $P_v^\mu$ o współrzędnych

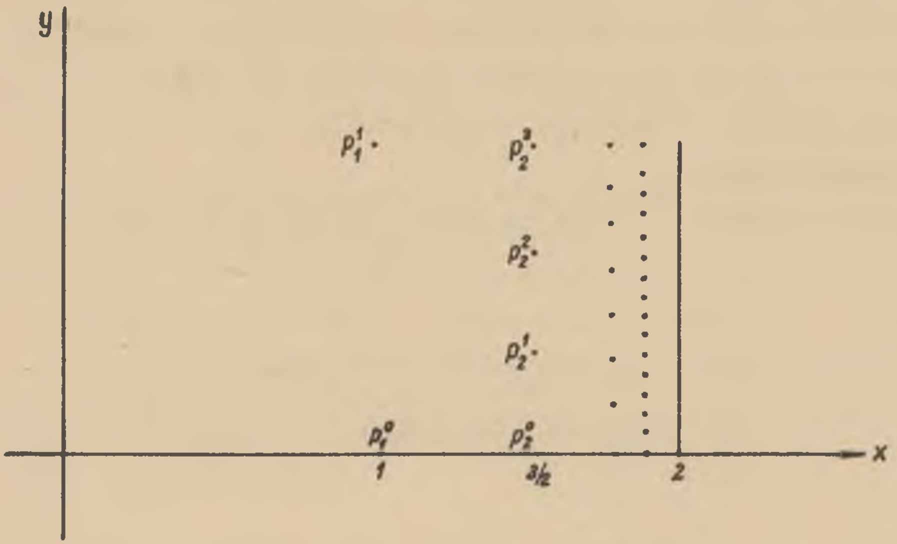
$\left[2\cdot\left(1-\frac{1}{2^v}\right), \frac{\mu}{2^{v-1}}\right]$, gdzie $\mu = 0,1,2\ldots/2^v-1/$ oraz

$v = 1,2,3\ldots$

$Z_2$: odcinka $x = 2$ i $y \in [0,1]$ /zob. rys.5/.

Widoczne jest, że zbiór Z jest zamknięty.

Ponieważ każdy punkt zbioru $Z_1$ jest punktem izolowanym zbioru Z, kontingens Bouliganda zbioru Z jedynie w punktach zbioru $Z_2$ nie jest pusty, przy czym w punktach wewnętrznych odcinka $Z_2$ zawiera na pewno prostą $x = 2$.




Rys. 5

Stąd dla dowolnego $\rho > 0$:

$$2\rho \leq |N/\rho/| \leq 2\rho + \pi\rho^2,$$

a więc $1 \leq \frac{|N/\rho/|}{2\rho} \leq 1 + \pi \rho/2$, czyli

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{|N/\rho/|}{2\rho} = 1,$$

zbiór Z ma więc miarę liniową według /K-H/ równą 1.

Niech $\rho_\lambda = \frac{1}{2^{\lambda+1}}$, gdzie $\lambda$ jest dowolną liczbą naturalną.

Oznaczmy przez $Z_3$ zbiór tych punktów zbioru $Z_1$, dla których $v \leq \lambda$.

/1/ Każdy punkt zbioru $Z_3$ jest od zbioru $Z_2$ oddalony o więcej niż $2\rho_\lambda = \frac{1}{2^\lambda}$.

Mamy bowiem dla $v \leq \lambda$ : $v - 1 < \lambda$, czyli

$$\frac{1}{2^{v-1}} > \frac{1}{2^{\lambda}},$$

a stąd

$$2 - 2\,/1 - \frac{1}{2^{v}}/ > \frac{1}{2^{\lambda}}.$$

/2/ Dwa różne punkty zbioru $Z_3$ są od siebie oddalone o więcej niż $2\rho_\lambda = \frac{1}{2^{\lambda}}$.

Niech bowiem $P_{v_1}^{\mu_1} \in Z_3$ i $P_{v_2}^{\mu_2} \in Z_3$, gdzie $/\mu_1 - \mu_2/^2 + /v_1 - v_2/^2 > 0$.

Odległość tych punktów wyraża się wzorem:

$$\delta = \sqrt{\left[2/1 - \frac{1}{2^{v_1}}/ - 2/1 - \frac{1}{2^{v_2}}/\right]^2 + \left[\frac{\mu_1}{2^{v_1}-1} - \frac{\mu_2}{2^{v_2}-1}\right]^2}$$

a/ Przypuśćmy, że $v_1 \neq v_2$ i np. $v_1 < v_2$.

Wtedy:

$$\delta \geq \sqrt{\left[2/1 - \frac{1}{2^{v_1}}/ - 2/1 - \frac{1}{2^{v_2}}/\right]^2} = \frac{1}{2^{v_1}-1} - \frac{1}{2^{v_2}-1} =$$

$$= \frac{1}{2^{v_2}-1}\,/2^{v_2 - v_1} - 1/.$$

Ale $v_2 \leq \lambda$, czyli $v_2 - 1 < \lambda$, a stąd

$$\frac{1}{2^{v_2-1}} > \frac{1}{2^{\lambda}},$$

a ponieważ $v_2 - v_1 > 0$, więc $v_2 - v_1 \geq 1$, czyli $2^{v_2 - v_1} \geq 2$, czyli $2^{v_2 - v_1} - 1 \geq 1$. Z powyższych nierówności otrzymujemy $\delta > \frac{1}{2^{\lambda}}$.

b/ Przypuśćmy, że $v_1 = v_2$, wtedy $\mu_1 \neq \mu_2$, a więc $|\mu_2 - \mu_1| \geq 1$.

Wtedy

$$\delta = \frac{1}{2^{v_1}-1} \cdot |\mu_1 - \mu_2|,$$ ale $v_1 \leq \lambda$, czyli

$2^{v_1} \leq 2^{\lambda}$, a więc $2^{v_1}-1 < 2^{\lambda}$, a stąd

$$\frac{1}{2^{v_1}-1} > \frac{1}{2^{\lambda}} .$$

Z nierówności tych i w tym przypadku otrzymujemy wniosek $\delta > \frac{1}{2^{\lambda}}$.

/3/ W zbiorze $Z_3$ mamy $2 + 2^2 + \ldots + 2^{\lambda} = 2/2^{\lambda+1} - 1/$ punktów.

Z uwagi na to, że zbiór $Z_2$ jest odcinkiem o długości 1 mamy:

$$|/Z_2/_{\rho_\lambda}| = 2\rho_\lambda + \pi(\rho_\lambda)^2$$

Z uwagi na /2/ i /3/: $|/Z_3/_{\rho_\lambda}| = 2/2^{\lambda+1}-1/\pi(\rho_\lambda)^2$.

Z uwagi na /1/ zbiory $/Z_3/_{\rho_\lambda}$ oraz $/Z_2/_{\rho_\lambda}$ są rozłączne, a nadto

$$Z_{\rho_\lambda} \supset /Z_3/_{\rho_\lambda} + /Z_2/_{\rho_\lambda},$$

stąd

$$|Z_{\rho_\lambda}| \geq |/Z_3/_{\rho_\lambda}| + |/Z_2/_{\rho_\lambda}| = 2/2^{\lambda+1}-1/\pi/\rho_\lambda/^2 + 2\rho_\lambda + \pi/\rho_\lambda/^2,$$

czyli

$$\frac{|Z_{\rho_\lambda}|}{2\rho_\lambda} \geq 2/2^{\lambda+1}-1/\,\frac{\pi}{2}\cdot\rho_\lambda + 1 + \frac{\pi}{2}\rho_\lambda =$$

$$= \frac{\pi/2^{\lambda+1}-1/}{2^{\lambda}+1} + 1 + \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2^{\lambda+1}} .$$

Ponieważ przy $\lambda \longrightarrow +\infty$, $\rho_\lambda = \frac{1}{2^{\lambda+1}} \longrightarrow 0$, oraz

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\left[\frac{\pi/2^{\lambda+1}-1/}{2^{\lambda+1}}+1+\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2^{\lambda+1}}\right]=\pi+1,$$

zbiór Z nie może mieć miary liniowej /M/ równej 1.

W związku z założeniem d/ twierdzenia VI udowodnimy następujące:

Twierdzenie IX

Niech C oznacza krzywą o równaniu parametryczno-wektorowym $r = r/\tau/$, gdzie $\tau \in [\alpha, \beta]$. Załóżmy, że w każdym punkcie przedziału $[\alpha,\beta]$ istnieje $\frac{dr/\tau/}{d\tau}$ oraz $\left|\frac{dr/\tau/}{d\tau}\right| \neq 0$. Niech nadto $r/\alpha/ \neq r/\beta/$.
Wtedy dla dostatecznie małych $\rho > 0$ zbiór $N/\rho/$ jest mierzalny objętościowo w sensie Jordana.

Uzasadnimy najpierw dwa następujące lematy:

Lemat I

Jeżeli przy założeniach twierdzenia IX o krzywej C, odległość punktu p od krzywej C, odległego od niej o niewięcej niż $\rho$, realizuje się w pewnym jej punkcie wewnętrznym q /tzn. takim, któremu odpowiada parametr $\tau \in (\alpha,\beta)$ /, to $p \in N/\rho/$.

Dowód

Z uwagi na to, że punkt q jest punktem wewnętrznym krzywej C, w myśl założeń o niej uczynionych, kontingens Bouliganda zbioru C w punkcie q zawiera choć jedną styczną do krzywej C w punkcie q. Zgodnie więc z lematem /L/ str. 97 odcinek pq jest:

1/ prostopadły do stycznej do krzywej C w punkcie q,

2/ nadto jest on o długości nie większej od $\rho$.

Z 1/ i 2/ wynika, że $p \in N/\rho/$, co należało wykazać.

Lemat II

Jeżeli:

1/ prosta P jest prostopadła do n-1 wymiarowej hiperpłaszczyzny N, ich punkt przecięcia oznaczam przez $p_o$;

2/ punkt $p_o$ jest punktem wewnętrznym krzywej C /odpowiadający mu parametr $\tau_o \in (\alpha, \beta)$/, o której czynię założenia takie jak w twierdzeniu IX,

3/ istnieją punkty $q_1$ i $q_2$ takie, że:

a.- leżą po różnych stronach hiperpłaszczyzny N,

b.- żaden z punktów krzywej C o parametrze $\tau < \tau_o$ nie leży wewnątrz kul: $K_i$ o środku w punkcie $q_i$ i promieniu $\overline{p_o q_i}$ dla i = 1,2,

to prosta P nie może być styczną do krzywej C w punkcie $p_o$.

Dowód

Przyjmijmy układ odniesienia $\{x_1, x_2 \ldots x_n\}$ tak, by:

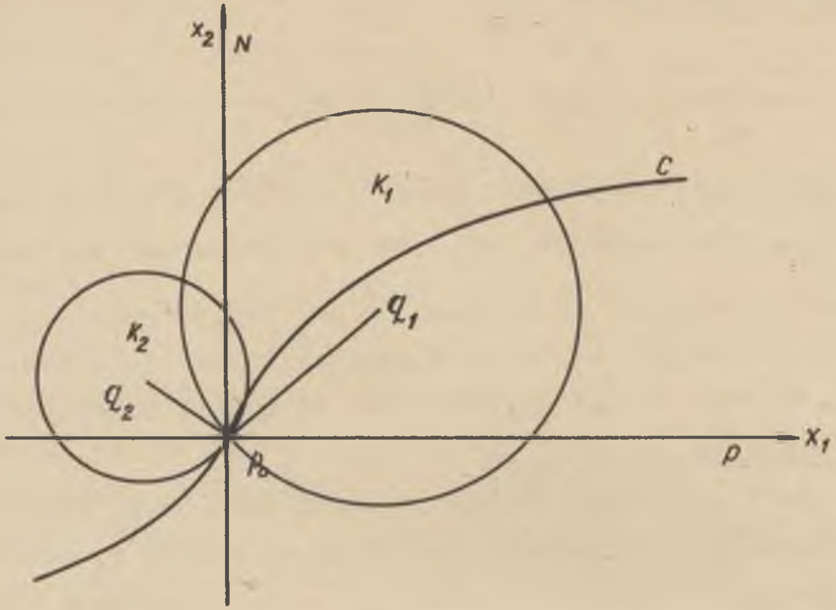
a/ hiperpłaszczyzna N miała równanie $x_1 = 0$,

b/ prosta P miała równanie $/x_2/^2 + \ldots + /x_n/^2 = 0$ /zob. rys.6/.

Punkt $p_o$ ma wtedy współrzędne /0,0,...,0/. Oznaczmy przez $r_i$ wektor wodzący punktu $q_i$ dla i = 1,2, a przez $/\alpha_1^i, \ldots, \alpha_n^i/$ współrzędne punktu $q_i$ /i = 1,2/.

Niech równanie krzywej C w tym układzie będzie postaci $v = v/\tau/$, gdzie $\tau \in [\alpha, \beta]$. Punktowi $p_o \in C$ niech nadal odpowiada parametr $\tau_o \in (\alpha, \beta)$. Weźmy pod uwagę funkcje:

$$\phi_i/\tau/ = (v/\tau/ - r_i)^2 .$$




Rys. 6

W myśl założenia 3/ b. mamy dla $\tau<\tau_o$:

$$\phi_i/\tau/ \geqslant /r_i/^2 = \phi_i/\tau_o/.$$

Stąd dla $\tau<\tau_o$:

$$\frac{\phi_i/\tau/ - \phi_i/\tau_o/}{\tau-\tau_o} \leqslant 0,$$

a więc:

$$\left(\frac{d\,\phi_i/\tau/}{d\tau}\right)_{\tau=\tau_o} \leqslant 0 \qquad /1/$$

Ale

$$\frac{d\,\phi_i/\tau/}{d\tau} = 2\left(v/\tau/ - r_i\right) \cdot \frac{d\,v\,/\tau/}{d\tau}\,. \qquad /2/$$

Przypuśćmy, że prosta P jest styczna do krzywej C w punkcie $p_o$, wtedy wektor $\left(\frac{dv/\tau/}{d\tau}\right)_{\tau=\tau_o} \neq \vec{0}$ ma współrzędne $/\lambda, 0, \ldots, 0/$, gdzie $\lambda \neq 0$.

Stąd w myśl /2/:

$$\left(\frac{d\phi_1/\tau/}{d\tau}\right)_{\tau=\tau_0} = 2 \cdot /-\alpha_1^1/ \cdot \lambda ,$$

a więc w myśl /1/: $2./-\alpha_1^1/\ \lambda \leq 0$, czyli $\alpha_1^1\ \lambda \geq 0$, oraz $\alpha_1^2 \cdot \lambda \geq 0$, czyli $\alpha_1^1 \cdot \alpha_1^2 \cdot \lambda^2 \geq 0$, skąd $\alpha_1^1 \cdot \alpha_1^2 \geq 0$, co jest sprzeczne z założeniem 3/ a., bowiem punkty $q_1$ i $q_2$ leżą po różnych stronach hiperpłaszczyzny N, a więc $\alpha_1^1 . \alpha_1^2 < 0$. W ten sposób lemat II został udowodniony.

<u>Dowód twierdzenia IX</u>

Niech $p_1$ oznacza koniec wektora $r/\alpha/$, a $p_2$ koniec wektora $r/\beta/$. Odległość punktu $p_1$ od punktu $p_2$ oznaczmy przez $4\rho_0$. W myśl założenia $\rho_0 > 0$. Ograniczmy wartości $\rho$ do mniejszych od $\rho_0$. Niech $\tau_0$ będzie dowolną liczbą z przedziału $(\alpha,\beta)$, a $p_0$ odpowiadającym jej punktem na krzywej C. Oznaczmy przez $K_0$ kulę o promieniu $\rho$ i środku w punkcie $p_0$. Hiperpłaszczyzna $N_{\tau_0}$ normalna do krzywej C w punkcie $p_0$ dzieli tę kulę na dwie /domknięte/ połówki.

Twierdzę, że przynajmniej jedna z nich, i tę oznaczam przez $P_{\tau_0}$, zawiera się w zbiorze $N/\rho/$. /*/

Przypuśćmy, że tak nie jest. Wtedy w każdej z tych połówek istnieją odpowiednio punkty $q_1$ i $q_2$, nie należące do $N/\rho/$, a więc i nie leżące na $N_{\tau_0}$. Weźmy pod uwagę kule $K_1$ i $K_2$ o środkach w tych punktach i promieniach $\overline{p_0q_1}$ oraz $\overline{p_0q_2}$. Ponieważ $\overline{p_0q_1} \leq \rho$ oraz $\overline{p_0q_2} \leq \rho$, a kule te mają wspólny punkt $p_0$, średnica zbioru $K_1 + K_2$ jest niewiększa od $4\rho$, a więc mniejsza od $4\rho_0$. Stąd oba punkty $p_1$ i $p_2$ nie mogą jednocześnie należeć do $K_1 + K_2$. Przypuśćmy, że do zbioru $K_1 + K_2$ nie należy punkt $p_1$ /gdyby punkt $p_2$ nie należał do zbioru $K_1 + K_2$ dowód przebiegałby analogicznie/ i oznaczmy przez $C_\alpha^{\tau_0}$ część krzywej C odpowiadającą parametrom $\tau \in [\alpha, \tau_0]$. **Mamy** $\tau_0 \neq \alpha$, bowiem $\tau_0 \in (\alpha, \beta)$.

We wnętrzach kul $K_1$ i $K_2$ nie ma punktów zbioru $C_\alpha^{\tau_0}$.(*)(*) Gdyby bowiem do wnętrza np. kuli $K_1$ należał punkt $q_3 \in C_\alpha^{\tau_0}$, to odległość punktu $q_1$ od krzywej $C_\alpha^{\tau_0}$ byłaby nie większa od $\overline{q_1 q_3}$, co jest mniejsze od $\overline{p_0 q_1}$, a to nie przekracza $\rho$, i byłaby realizowana w pewnym punkcie wewnętrznym krzywej $C_\alpha^{\tau_0}$, a więc punkt $q_1$ w myśl lematu I należałby do zbioru N/$\rho$/, co daje sprzeczność.

Zachodzi więc (*) (*), ale wtedy krzywa C zgodnie z lematem II /układ odniesienia można dobrać tak, jak w dowodzie lematu II/ nie może mieć w punkcie $p_0$ stycznej prostopadłej do hiperpłaszczyzny $N_{\tau_0}$, co sprzeczne jest z określeniem $N_{\tau_0}$. Uzasadniliśmy więc (*).

Pokażemy teraz, że: $N/\rho/ = \sum_{\alpha<\tau_0<\beta} P_{\tau_0}$ (*) (*) (*)

Z uwagi na (*) mamy $P_{\tau_0} \subset N/\rho/$, a więc

$$\sum_{\alpha<\tau_0<\beta} P_{\tau_0} \subset N/\rho/.$$

Niech $p \in N/\rho/$. Z uwagi na określenie zbioru N/$\rho$/ istnieje taki parametr $\tau_0 \in (\alpha, \beta)$, dla którego $p \in N_{\tau_0}$, a więc $p \in P_{\tau_0}$. Stąd:

$$N/\rho/ \subset \sum_{\alpha<\tau_0<\beta} P_{\tau_0}$$

Zbiory $P_{\tau_0}$ są wypukłe i w każdym z nich zawiera się kula o promieniu $\rho/2$, stąd zbiór N/$\rho$/, jako ich suma, jest mierzalny w sensie Jordana /zob. [14] tw.II strona 442/, co należało wykazać.

Z twierdzeń IX, VI oraz V otrzymujemy wniosek następujący:

Jeżeli:

1/ krzywa C ma równanie parametryczno-wektorowe $r = r/\tau/$ dla $\tau \in [\alpha,\beta]$, oraz $r/\alpha/ \neq r/\beta/$,

2/ dla każdego $\tau \in [\alpha,\beta]$ istnieje $\frac{dr/\tau/}{d\tau} \neq \overline{0}$,

3/ krzywa C posiada tylko skończoną ilość punktów wielokrotnych,

to zbiór C jest mierzalny liniowo według /K-H/ oraz jego miara liniowa w tym sensie równa się $\lambda$ /c/, gdzie

a/ $\lambda$ /C/ jest długością w zwykłym sensie krzywej C, gdy jest ona prostowalna,

b/ $\lambda$ /C/ = + $\infty$ , gdy krzywa C nie jest prostowalna.

§ 4.

W paragrafie tym zajmuję się zależnością między mierzalnością powierzchniową według /M/ zbiorów w przestrzeni trójwymiarowej $R_3$, a ich mierzalnością powierzchniową według /K-H/.

Twierdzenie X

Niech F oznacza powierzchnię o równaniu parametryczno-wektorowym $r = r/u,v/$, gdzie u i v zmieniają się w pewnym obszarze płaskim domkniętym $\overline{G}$.

Załóżmy, że:

1/ przedstawienie parametryczne pola $r/u,v/$ jest ciągłe w obszarze domkniętym $\overline{G}$,

2/ przedstawienie parametryczne pola $r/u,v/$ ma w każdym punkcie obszaru G różniczkę zupełną w sensie Stoltza, oraz $\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \neq \overline{0}$ w każdym punkcie obszaru G,

3/ obrazem brzegu obszaru G przez odwzorowanie $r=r/u,v/$ jest pewna krzywa Jordana C prostowalna,

4/ określony we wstępie zbiór $N^*/\rho/$ jest, dla ostatecznie małych $\rho$ , mierzalny objętościowo np. w sensie Lebesgue'a [1/].

Wtedy mierzalność powierzchniowa zbioru F według /M/ jest równoważna mierzalności powierzchniowej tego zbioru według /K-H/ i te miary powierzchniowe są równe.

Dowód

Udowodnimy najpierw, że:

$$F_\rho - C_\rho \subset N^*/\rho/ \subset F_\rho \subset N^*/\rho/ + C_\rho \qquad /1/$$

1. Niech punkt $p_o \in F_\rho - C_\rho$ . Ponieważ zbiór F jest domknięty, istnieje w nim taki punkt $q_o$, w którym realizuje się odległość punktu $p_o$ od zbioru F. Ponieważ $p_o \in F_\rho$ mamy: $\overline{p_o q_o} \leq \rho$ .

   Punkt $q_o$ nie należy do zbioru C, gdyby bowiem $q_o \in C$, to ponieważ punkt $p_o$ nie należy do zbioru $C_\rho$ , mielibyśmy $\overline{p_o q_o} > \rho$ , co jest sprzeczne z poprzednim.

   Oznaczmy przez $r_o$ wektor wodzący punkt $p_o$, a przez $u_o$, $v_o$ parametry punktu $q_o$ na powierzchni F. Ponieważ $q_o \sim\in C$, punkt o współrzędnych $/u_o, v_o/$ należy do wnętrza obszaru G.

   W myśl określenia odległości punktu od zbioru, funkcja $\phi/u,v/=\left(r/u,v/-r_o\right)^2$ posiada w punkcie $/u_o, v_o/$ minimum lokalne.

   Stąd

$$\left(\frac{\partial \phi /u,v/}{\partial u}\right)_{(u_o,v_o)} = 0,$$

   oraz

$$\left(\frac{\partial \phi /u,v/}{\partial v}\right)_{(u_o,v_o)} = 0,$$

---

1/ Pewne twierdzenie dotyczące mierzalności zbioru $N^*/\rho/$ podaję w dalszym ciągu.

a więc:

$$\left(r/u_o,v_o/-r_o\right)\cdot\left(\frac{\partial r/u,v/}{\partial u}\right)_{(\mu_o,v_o)} = 0,$$

oraz

$$\left(r/u_o,v_o/-r_o\right)\cdot\left(\frac{\partial r/u,v/}{\partial v}\right)_{(\mu_o,v_o)} = 0.$$

Ze związków tych wynika, że odcinek $p_oq_o$ jest prostopadły do płaszczyzny stycznej do powierzchni F w punkcie $q_o$, co z uwagi na to, że $\overline{p_oq_o} \leq \varrho$, daje $p_o \in N^*/\varrho/$.

2. Niech $p_o \in N^*/\varrho/$, wtedy istnieje na powierzchni F punkt $q_o$, dla którego $\overline{p_oq_o} \leq \varrho$, skąd w myśl określenia odległości punktu od zbioru otrzymujemy, że odległość punktu $p_o$ od zbioru F jest nie większa od $\varrho$, a więc $p_o \in F\varrho$.

3. Zawieranie $F\varrho \subset N^*/\varrho/ + C\varrho$ wynika z zawierania $F\varrho - C\varrho \subset N^*/\varrho/$, udowodnionego powyżej.

W myśl założenia 3/ oraz twierdzenia IV miara liniowa zbioru C równa się długości $\lambda/C/$ krzywej C, a stąd:

$$\lim_{\varrho\to 0}\frac{|C\varrho|}{2\varrho} = \lim_{\varrho\to 0}\frac{|C\varrho|}{\pi\varrho^2}\cdot\frac{\pi\varrho}{2} = \lambda/C/.0=0, \qquad /2/$$

czyli miara powierzchniowa według /M/ krzywej C równa się zeru.

I. Załóżmy teraz, że zbiór F jest mierzalny powierzchniowo według /M/.

W myśl związku /1/ i założenia 4/ mamy:

$$|F\varrho| - |C\varrho| \leq |N^*/\varrho/| \leq |F\varrho|,$$

a więc

$$\frac{|F\varrho|}{2\varrho} - \frac{|C\varrho|}{2\varrho} \leq \frac{|N^*/\varrho/|}{2\varrho} \leq \frac{|F\varrho|}{2\varrho},$$

a stąd, gdy $\rho \longrightarrow 0$, wnosimy, z uwagi na /2/, że zbiór F jest mierzalny powierzchniowo według /K-H/ i ma miarę powierzchniową równą mierze powierzchniowej zbioru F według /M/.

II. Załóżmy, że zbiór F jest mierzalny powierzchniowo według /K-H/. W myśl związku /1/ mamy:

$$|N^*/\rho/| \leq |F_\rho| \leq |N^*/\rho/| + |C_\rho|,$$

skąd po wydzieleniu przez $2\rho$ i przejściu granicznym $/\rho \longrightarrow 0/$, otrzymujemy wniosek o mierzalności powierzchniowej zbioru F według /M/ i równości obu tych miar.

Uwaga

Założenie 3/ twierdzenia X będzie spełnione jeżeli np.

a/ brzeg $C^*$ obszaru G będzie krzywą Jordana zamkniętą, prostowalną,

b/ odwzorowanie r=r/u,v/ będzie wzajemnie jednoznaczne na $C^*$ oraz współrzędne $\varphi_i$/u,v/ dla i = 1,2,3 wektora r/u,v/ będą spełniać na $C^*$ warunek Lipschitza względem u i v.

Niech bowiem równania krzywej $C^*$ mają postać $u = u/\tau/$, $v = v/\tau/$, gdzie $\tau \in [\alpha, \beta]$. Ponieważ krzywa ta jest prostowalna, funkcje $u/\tau/$ i $v/\tau/$ są o ograniczonym wahaniu w przedziale $[\alpha, \beta]$.

Obraz C krzywej $C^*$ ma równania:

$$x_i = \phi_i/\tau/ = \varphi_i/u/\tau/,\ v/\tau/ \qquad \text{dla } i=1,2,3,$$

jest więc krzywą Jordana.

Krzywa C jest prostowalna, bowiem funkcje $\phi_i/\tau/$ są też o ograniczonym wahaniu. Mamy bowiem dla skończonego ciągu liczb $\tau_1 \ldots \tau_\mu$ takich, że:

$$\alpha = \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_\mu = \beta :$$

$$\sum_{v=1}^{\mu-1} \left| \phi_i/\tau_{v+1}/ - \phi_i/\tau_v/ \right| = \sum_{v=1}^{\mu-1} \left| \varphi_i \left(u/\tau_{v+1}/, v/\tau_{v+1}/\right) - \right.$$

$$\left. - \varphi_i \; u/\tau_v/, v/\tau_v/) \right| \le \sum_{v=1}^{\mu-1} M\left\{ \left| u/\tau_{v+1}/ - u/\tau_v/ \right| + \right.$$

$$\left. + \left| v/\tau_{v+1}/ - v/\tau_v/ \right| \right\},$$

z warunku Lipschitza, co dowodzi, że funkcja $\phi_i/\tau/$ dla $i = 1,2,3$ jest, wraz z funkcjami $u/\tau/$ i $v/\tau/$, o ograniczonym wahaniu w przedziale $[\alpha,\beta]$.

W związku z założeniem 4/ twierdzenia X udowodnimy następujące:

<u>Twierdzenie XI</u>

Jeżeli pole $r/u,v/$ jest klasy $C^1$ oraz

$$\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \neq \bar{0}$$

w obszarze domkniętym i ograniczonym $\bar{G}$, to zbiór $N^*/\rho/$ jest zamknięty, a więc mierzalny objętościowo w sensie Lebesgue´a.

<u>Dowód</u>

Niech punkt $p_o \in \{N^*/\rho/\}'$. Istnieje więc ciąg punktów $p_v \in N^*/\rho/$ zbieżny do punktu $p_o$. Ponieważ punkty $p_v$ należą do zbioru $N^*/\rho/$, do każdego z nich istnieje taki punkt $q_v \in F$, że:

/1/ $\overline{p_v q_v} \le \rho$,

/2/ wektor $\overrightarrow{p_v q_v}$ jest prostopadły do powierzchni F w punkcie $q_v$.

Niech punktowi $q_v$ odpowiadają na powierzchni F parametry $u_v$ i $v_v$. Ciąg punktów o współrzędnych $/u_v, v_v/$ należy oczywiście do $\bar{G}$, można więc z niego wybrać ciąg zbieżny /który, dla uproszczenia oznaczam też $/u_v, v_v//$

do pewnego punktu $/u_0, v_0/ \in \overline{G}$. Oznaczmy przez $q_0$ punkt powierzchni F, odpowiadający parametrom $u_0$ i $v_0$. Wobec tego, że $u_v \longrightarrow u_0$ i $v_v \longrightarrow v_0$ i wobec ciągłości pola $r/u,v/$ ciąg $q_v \longrightarrow q_0$. Stąd $\overline{p_v q_v} \longrightarrow \overline{p_0 q_0}$, a więc wobec /1/ mamy: $\overline{p_0 q_0} \leqslant \rho$ /3/. Wobec /2/ mamy:

$$/\overrightarrow{p_v q_v}/ \cdot \left(\frac{\partial r/u,v/}{\partial u}\right)_{(u_v, v_v)} = 0,$$

oraz

$$/\overrightarrow{p_v q_v}/ \cdot \left(\frac{\partial r/u,v/}{\partial v}\right)_{(u_v, v_v)} = 0,$$

co przy klasie $C^1$ pola $r/u,v/$ daje:

$$/\overrightarrow{p_0 q_0}/ \cdot \left(\frac{\partial r/u,v/}{\partial u}\right)_{(u_0, v_0)} = 0 \quad \text{i} \quad /\overrightarrow{p_0 q_0}/ \cdot \left(\frac{\partial r/u,v/}{\partial v}\right)_{(u_0, v_0)} = 0,$$

czyli wektor $\overrightarrow{p_0 q_0}$ jest prostopadły do powierzchni F w punkcie $q_0$.

Stąd i z /3/ wynika, że $p_0 \in N^*/\rho/$, co należało okazać.

## Literatura cytowana


Podręczniki:

[1] . W.Killing i H.Hovestadt - "Handbuch des Mathematischen Unterrichts". Część druga, 1913 r. str. 250-256.

[2] . Constantin Carathéodory - "Vorlesungen über reelle Funktionen". 1918 r.

[3] . Stanisław Saks - "Zarys teorii całki", 1930 r.

[4] . Georges Bouligand - "Introduction a la géométrie infinitesimale directe". 1932 r.

[5] . A.D.Aleksandrow - "Wnutriennaja gieometria wypukłych powierchnostiej". 1948 r.

[6]. Stefan Banach - "Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych". 1951 r.

<u>Prace</u>:

[7]. Hermann Minkowski - "Ueber die Begriffe Länge, Oberfläche und Volumen". Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Band 9. 1901 r., str. 115-121.

[8]. W.H.Young - "The Theory of sets of points". 1906 r.

[9]. W.Gross - "Über die Singularitäten analytischer Funktionen". Monatsh.f.Math.und Ph. 29, 1918 r., str. 3-47.

[10]. W.Gross - "Über das lineare Maβ von Punktmengen". Monatsh.f.Math. und Ph. 29, 1918 r. str. 145-193.

[11]. Theodor Estermann - "Über Carathéodorys und Minkowskis Verallgemeinerungen des Längenbegriffs". Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität /IV Band, I Heft/, 1925 r.,str.76-116.

[12]. J.Favard - "La longueur et l'aire d'après Minkowski" Bulletin de la Société Mathematique de France. Tom LXI, 1933 r., str. 63-84.

[13]. H.Hadwiger - "Zur Minkowskischen Dimensions und Massbestimmung beschränkter Punktmengen des euklid. Raumes". Math.Nachr.4,1950 r., str. 202-212.

[14]. Z.Moszner - "Przyczynek do teorii mierzalności zbiorów w sensie Jordana". Dziesięciolecie Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Krakowie, 1957 r., str. 439-447.

## Résumé

### Sur quelques problèmes de la mesure linéaire et superficielle des ensembles

Minkowski /voir [7] dans la bibliographie/ a donné une définition de la mesure linéaire et superficielle de l'ensemble quelconque. Estermann /voir [11]/ dans son travail confrontant la définition de la mesure linéaire au sens de Minkowski avec la définition de cette notion, donnée par Carathéodory, présente la définition suivante:

Soit Z un ensemble de l'espace n-dimensionnel $E_n$. Désignons par $Z_\rho$ l'ensemble de tous les points de cet espace pour lesquels la distance à Z est $<\rho$. L'ensemble $Z_\rho$ est fermé, donc il est mesurable au sens de Lebesgue. Désignons sa mesure par $|Z_\rho|$. Soit $\lambda_n\rho^n$, où $\lambda_n$ est une constante, qui dépend seulement de n, le volume de la sphère n-dimensionnelle de rayon $\rho$.

Prenons les désignations suivantes:

$$\overline{m}/Z/ = \overline{\lim_{\rho\to 0}} \frac{|Z_\rho|}{\lambda_{n-1}\rho^{n-1}} \quad \text{et} \quad \underline{m}/Z/ = \underline{\lim}_{\rho\to 0} \frac{|Z_\rho|}{\lambda_{n-1}\rho^{n-1}} .$$

Si $\overline{m}/Z/ = \underline{m}/Z/$, alors nous appellerons Z l'ensemble mesurable linéairement au sens de Minkowski /en abrégé : /M//, et la valeur commune $\underline{m}/Z/ = \overline{m}/Z/ = m/Z/$ /qui peut être égale à $+\infty$/ la mesure linéaire /M/ de l'ensemble Z. Si $\underline{m}/Z/ = \overline{m}/Z/ < +\infty$, nous appellerons Z l'ensemble mesurable linéairement /M/ au sens **étroit**.

Favard /voir [12]/ admet la définition analogue de la mesure linéaire de l'ensemble dans l'espace 3-dimensionnel, en ne prenant qu'au lieu de l'ensemble $Z_\rho$ l'ensemble $Z^*/\rho/$, qu'il définit comme la somme des sphères

ouvertes de rayon $\rho$ et de centre dans les points de l'ensemble Z. De plus il considère la mesure superficielle des ensembles dans l'espace 3-dimensionnel, en la définissant analogiquement à la mesure linéaire par les fonctions:

$$\underline{\sigma}/Z/ = \lim_{\rho \to 0} \frac{|Z^*/\rho/|}{2\rho} \quad \text{et} \quad \overline{\sigma}/Z/ = \overline{\lim_{\rho \to 0}} \frac{|Z^*/\rho/|}{2\rho} .$$

Les ensembles $Z\rho$ et $Z^*/\rho/$ sont différents; il se pose alors la question de l'équivalence des définitions présentées ici.

Considérons outre les ensembles $Z\rho$ et $Z^*/\rho/$ encore les ensembles:

$Z^*_\rho$ - ensemble des points de l'espace $E_n$ pour lesquels la distance à Z est $<\rho$,

$Z/\rho/$ - la somme des sphères formées de rayon $\rho$ et de centre dans les points de l'ensemble Z.

Il se pose la question suivante:

Est-ce que les définitions de la mesure linéaire et superficielle par les ensembles $Z\rho$, $Z^*/\rho/$, $Z^*\rho$ et $Z/\rho/$ sont équivalentes?

Dans le §1 de ce travail on donne la réponse à cette question par la démonstration du théorème suivant:

<u>Théorème I</u>

Les ensembles $Z\rho$, $Z^*/\rho/$, $Z^*\rho$ et $Z/\rho/$ sont mesurables au sens de Jordan et leurs mesures sont égales.

Dans le §2 on donne quelques conditions suffisantes de l'existence de la mesure linéaire /M/, qui forment la généralisation des conditions, publiées par Estermann /voir [11] p.93-94 et 110/ et par Favard /voir [12] p. 69-74/.

Appelons presque convexe un ensemble Z dont la fermeture $\overline{Z}$ est un ensemble convexe.

Nous avons les théorèmes suivants:

Théorème II

La somme d'un nombre fini d'ensembles presque convexes est un ensemble mesurable linéairement /M/.

Théorème IV 1/

Si on peut décomposer une courbe C /c.à d. l'image continue d'un segment/ en un nombre fini d'arcs simples $C_1, C_2, \ldots, C_\mu$, tels que le produit $/C_1+\ldots+C_v/.C_{v+1}$ pour $v = 1,2,\ldots\mu-1$ contient tout au plus deux points, alors la mesure linéaire /M/ m/C/ de la courbe C est égale a $\lambda$/C/, où $\lambda$/C/ est la longueur de la courbe C, si elle est rectifiable, et $\lambda/C/ = +\infty$ dans le cas contraire.

Killing et Hovestadt /voir [1]/ en discutant les définitions de Dehn de la mesure linéaire et superficielle des ensembles, qui s'accordent avec les définitions de Minkowski, donnent aussi la modification suivante de ces notions:

I. Soit Z un ensemble de l'espace $E_n$. En chaque point p de l'espace $E_n$, où le contingent de Bouligand /voir[4]/ de l'ensemble Z contient au moins une droite P, nous formons un hyperplan n-1 - dimensionnel N/p,P,Z/, perpendiculaire à la droite P au point p. Prenons l'ensemble A/p,P,Z/ de ces point de l'espace $E_n$, qui sont situés sur l'hyperplan N/p,P,Z/ et dont la distance au point p est $\leq \rho$ et désignons par N/$\rho$/ la somme de ces ensembles

---

1/ Le numérotage des théorèmes est d'accord avec le numérotage dans le texte polonais. On a omis quelques théorèmes dans ce résumé.

$A/p,P,Z/$ quand le point p varie dans l'espace $E_n$ et la droite P appartient au contingent de Bouligand de l'ensemble Z au point p. Si l'ensemble $N/\varrho/$ est mesurable p. ex. au sens de Lebesgue et s'il existe $\lim\limits_{\varrho\to 0} \frac{|N/\varrho/|}{\lambda_{n-1}\varrho^{n-1}}$, nous appelons Z l'ensemble mesurable linéairement au sens de /K-H/, et cette limite sa mesure linéaire au sens de /K-H/.

II. Soit F une surface, qui possède dans chaque point le plan tangent. Conduisons par chaque point p de cette surface un segment de longueur $2\varrho$, de centre dans le point p, perpendiculaire à la surface F au point p. Désignons par $N^*/\varrho/$ la somme de ces segments, quand le point p varie sur la surface. Si l'ensemble $N^*/\varrho/$ est mesurable p.ex. au sens de Lebesgue et s'il existe la limite $\lim\limits_{\varrho\to 0} \frac{|N^*/\varrho/|}{2\varrho}$, nous appelons F la surface mesurable superficiellement au sens de /K-H/, et cette limite sa mesure superficielle en ce sens.

Dans le §3 on donne quelques dépendances entre la mesure linéaire et superficielle au sens de /M/ et au sens de /K-H/.

A savoir nous avons les théorèmes suivants:

Théorème VI

Si l'ensemble Z remplit les conditions suivantes:

a/ il est fermé,

b/ il est mesurable linéairement au sens de /M/,

c/ l'ensemble U de ces points de l'ensemble Z, où le contingent de Bouligand de l'ensemble Z ne contient pas de droite, est de la mesure linéaire /M/ égale à zero,

d/ l'ensemble $N/\varrho/$, pour $\varrho > 0$ suffisamment petit, est mesurable p.ex.au sens de Lebesgue,

alors:

e/ l'ensemble Z est mesurable linéairement au sens de /K-H/, et

f/ les mesures linéaires /M/ et /K-H/ de l'ensemble Z sont égales.

A la supposition c/ du théorème dit ci-dessus est lié le théorème suivant:

Théorème VII

Soit C une courbe de Jordan, rectifiable. Si l'ensemble U de ces points de la courbe C, où le contingent de Bouligand ne contient pas de droite, est fermé, alors l'ensemble U a la mesure linéaire /M/ égale à zéro.

Inverse dans un certain sens par rapport au théorème VI est le théorème suivant:

Théorème VIII

Les suppositions a/, c/ et e/ impliquent b/ et f/. /Voir théorème VI/.

A la supposition d/ du théorème VI est lié le théorème suivant:

Théorème IX

Soit C une courbe d'équation paramétrique-vectorielle $r=r/t/$ où $t \in [a,b]$ et $r/a/ \neq r/b/$. Supposons qu'en chaque point de l'intervalle $[a,b]$ il existe la dérivée $\frac{dr/t/}{dt}$ et $\frac{dr/t/}{dt} \neq \vec{0}$. Dans ce cas l'ensemble $N/\rho/$ est, pour $\rho > 0$ suffisamment petit, mesurable au sens de Jordan.

Le §4 donne une relation entre la mesure superficielle au sens de /M/ et au sens de /K-H/.

## Краткое изложение

### Некоторые вопросы, связанные с линейной и поверхностной измеримостью множеств

Минковский (см. [7] в списке литературы) дал одно из определений линейной меры и поверхностной меры произвольного множества.

Эстерманн (см. [11] в списке литературы) в своём труде, сопоставляющем дефиницию линейной меры множества в смысле Минковского с дефиницией этого понятия данной Каратеодорым, принимает следующее условие:

Пусть $Z$ произвольное множество $n$-мерного пространства $E_n$. Обозначим $Z_\rho$ множество всех этих точек этого пространства, расстояние которых от множества $Z$ не больше $\rho$. Множество $Z_\rho$ как замкнутое - измеримо в смысле Лебега. Обозначим его лебеговскую меру через $|Z_\rho|$. Пусть $\lambda_n \cdot \rho^n$, где $\lambda_n$ является постоянной зависящей лишь от $n$, будет объёмом $n$-мерного шара с радиусом $\rho$. Принимаем следующие обозначения:

$$\overline{m}(Z) = \overline{\lim_{\rho \to 0}} \frac{|Z_\rho|}{\lambda_{n-1}\rho^{n-1}} \quad \text{и} \quad \underline{m}(Z) = \underline{\lim_{\rho \to 0}} \frac{|Z_\rho|}{\lambda_{n-1}\rho^{n-1}}$$

Если $\overline{m}(Z) = \underline{m}(Z)$ [1], то множество $Z$ будем называть линейно-измеримым в смысле Минковского (в сокра-

---

1) Существуют множества, для которых $\underline{m}(Z) < \overline{m}(Z)$ это значит множества линейно-неизмеримые в смысле (М). См. [10] стр.184 и [13] стр. 202-212.

щении: в смысле (M)), а общее значение $\overline{m}(Z) = \underline{m}(Z) = m(Z)$, (которое может быть равно $+\infty$) его линейной мерой в смысле (M).

Если $\overline{m}(Z) = \underline{m}(Z) < +\infty$, то множество $Z$ будем называть линейно-измеримым в смысле более узком по (M).

Фавард (см. [I2]) принимает сходную дефиницию линейной измеримости множества в пространстве 3-мерном, принимая лишь во внимание вместо множества $Z_\rho$ множество $Z^*(\rho)$, которое определяет как сумму открытых шаров с радиусами $\rho$ и центрами в точках множества $Z$. Множество $Z^*(\rho)$, как открытое, измеримо в смысле Лебега.

Кроме того рассматривает он поверхностную измеримость множеств в 3-мерном пространстве, определяемую аналогично с линейной измеримостью на основе функции:

$$\underline{\sigma}(Z) = \underline{\lim}_{\rho \to 0} \frac{|Z^*(\rho)|}{2\rho} \text{ [1)] } \quad \text{и} \quad \overline{\sigma}(Z) = \overline{\lim}_{\rho \to 0} \frac{|Z^*(\rho)|}{2\rho}$$

Так как множества $Z_\rho$ и $Z^x(\rho)$ различны, возникает вопрос эквивалентности приведенных определений. Введём кроме множеств $Z_\rho$ и $Z^*(\rho)$ ещё множества:

$Z^*_\rho$ - множество всех точек пространства $E_n$, расстояние которых от множества $Z$ меньше $\rho$,

$Z(\rho)$ - множество точек равно сумме замкнутых шаров с радиусом $\rho$ и центрами в точках множества $Z$.

Вышеприведенный вопрос эквивалентности (для множеств $Z_\rho$ и $Z^*(\rho)$) можно выразить в общем следующим образом:

---

1) В дальнейшем через $|A|$ будем обозначать меру Лебега множества A.

- безразлично ли из которого из множеств $Z_\rho$, $Z^*(\rho)$, $Z_\rho^*$, $Z(\rho)$ будем исходить, определяя линейную или поверхностную меру множества в смысле (М).

В § I настоящего труда решен вышеприведенный вопрос путем доказательства следующей теоремы.

Теорема I

Множества $Z_\rho$, $Z^*(\rho)$, $Z_\rho^*$ и $Z(\rho)$ измеримы в смысле Жордана и меры их равны.

В § 2 даны некоторые достаточные условия линейной измеримости множеств в смысле (М), являющиеся обобщением условий, данных Эстерманном (см. [11] стр. 93-94 и IIO), а также Фавардом (см. [I2] стр.69-70).

Назовём почти связным всякое такое множество $Z$, замыкание которого $\bar{Z}$ есть связное множество.

Правдивы следующие теоремы:

Теорема II

Сумма конечного числа почти связных множеств есть множество линейно-измеримое в смысле (М).

Теорема IV [1)]

Если кривую C (это значит непрерывный образ отрезка) можно разложить на сумму конечного числа простых дуг $C_1$, $C_2$, ... $C_\mu$, таких, что множество $(C_1 + C_2 + \ldots + C_\nu) \cdot C_{\nu+1}$ для $\nu = 1, 2, \ldots, \mu - 1$ состоит, самое большее, из двух точек, то линейная мера $m(C)$ кривой C равна $\lambda(C)$, где $\lambda(C)$ есть длина кривой C, если она спрямляема, или $\lambda(C) = +\infty$ в противном случае.

---

1) Нумерация теорем соответствует нумерации в польском тексте. В изложении приводятся не все теоремы.

Теорема V

Если:

I) параметрическо-векторное уравнение кривой C имеет вид $r = r(t)$, где $t \in [\alpha, \beta]$, при чём в промежутке $[\alpha, \beta]$ существует $\frac{dr(t)}{dt}$ и $\frac{dr(t)}{dt} \neq \vec{0}$,

2) кривая C имеет только конечное число кратных точек, то: $m(C) = \lambda(C)$ где $\lambda(C)$ имеет такое значение, как в теореме IV.

Киллинг и Говештад (см. [I]), обсуждая дефиниции Дена линейной и поверхностной измеримости множеств, совпадающие с дефинициями Минковского этих понятий, дают тоже следующую их модификацию:

I. Пусть $Z$ некоторое множество в $n$ - мерном пространстве $E_n$. В каждой точке $p$ пространства $E_n$, в которой контингенция Булиганда (см. [4], стр. 66) множества $Z$ содержит хотя бы одну прямую P, образуем $n-1$-мерную гиперплоскость $N(p,P,Z)$ перпендикулярную к прямой P в точке p. Принимаем во внимание множество $A(p,P,Z)$ этих точек пространства $E_n$, которые лежат на гиперплоскости $N(p,P,Z)$ и расстояние которых от точки p не больше $\rho$ ($\rho$ положительное число) и обозначаем через $N(\rho)$ сумму так образованных множеств $A(p,P,Z)$, когда точка p изменяется в пространстве $E_n$ и прямая P принадлежит к контингенции Булиганда множества $Z$ в точке p. Если множество $N(\rho)$ объёмо-измеримо нпр. в смысле Лебега и если существует $\lim\limits_{\rho \to 0} \frac{|N(\rho)|}{\lambda_{n-1}\rho^{n-1}}$, то множество $Z$ называем линейно-измеримым в смысле (К-Г), а этот предел его линейной мерой в смысле (К-Г) [1]

II. Пусть $F$ поверхность, имеющая в каждой точке касательную плоскость. Так же, как и прежде, через каждую точку р поверхности проведём отрезок длиной $2\rho$, с серединой в точке р, перпендикулярный к поверхности в точке р. Обозначим через $N^*(\rho)$ сумму этих отрезков, когда точка р движется по поверхности $F$. Если множество $N^*(\rho)$ измеримо (объёмо-измеримо нпр. в смысле Лебега) и существует предел (конечный или бесконечный)

$\lim_{\rho \to 0} \frac{|N^*(\rho)|}{2\rho}$, то поверхность $F$ называем поверхностно-измеримой в смысле (К-Г), а этот предел называем её поверхностной мерой в смысле (К-Г).

§ 3 настоящего труда посвящён некоторым зависимостям между линейной измеримостью множеств в смысле (М) и их линейной измеримостью в смысле (К-Г).

Правдивы следующие теоремы:

<u>Теорема VI</u>

Если множество $Z$ исполняет следующие условия:

a) замкнуто,

b) линейно-измеримо в смысле (М),

c) множество $U$ этих точек множества $Z$, в которых контингенция Булиганда множества $Z$ не содержит прямой, имеет линейную меру в смысле (М) равную нулю,

---

1) Вышеприведенное понятие линейной измеримости в смысле (К-Г) является обобщением оригинальной (касающейся только кривой) дефиниции данной Киллингом и Говештадом.

d) множество $N(\rho)$ для достаточно малых $\rho$ объё-
мо-измеримо нпр. в смысле Лебега, то:

e) множество $Z$ линейно-измеримо в смысле (К-Г) и

f) обе линейные меры в смысле (М) и (К-Г) множества $Z$ равны.

С предположением с) вышеприведенной теоремы связана настоящая:

Теорема VII.

Пусть С кривая Жордана (замкнутая или нет), спрямляемая. Если множество $U$ этих точек кривой С, в которых контингенция Булиганда не содержит прямой, замкнуто, то множество $U$ имеет линейную меру (М), равную нулю.

В некотором смысле обратной к теореме VI является -

Теорема VIII.

Из предположений а), с) и е) вытекает $b)$ и $f$). (См. Теорема VI). С предположением $d)$ теоремы VI связана:

Теорема IX.

Пусть С кривая с параметрически-векторным уравнением $r = r(t)$ где $t \in [\alpha, \beta]$. Примем, что в каждой точке промежутка $[\alpha, \beta]$ существует $\frac{dr(t)}{dt}$ и $\frac{dr(t)}{dt} = \vec{0}$. Пусть кроме того $r(\alpha) \neq r(\beta)$. Тогда для достаточно малых $\rho > 0$ множество $N(\rho)$ объёмо-измеримо в смысле Жордана.

Некоторую связь между поверхностной измеримостью в смысле (М) и (К-Г) дают теоремы § 4.