Witold Kleiner

UŁATWIENIE W CAŁKOWANIU FUNKCJI WYMIERNYCH

Prawie każde efektywne całkowanie polega na sprowadzeniu do całkowania funkcji wymiernej. Warto więc uprościć, choćby nieznacznie, tę kluczową fazę rachunku. Uproszczenie, które przedstawię poniżej w postaci szkicu wykładu, polega na zastąpieniu ułamków prostych przez ułamki podstawowe, dzięki czemu eliminuje się proste,ale zabierające czas przekształcanie całek typu $\int /Mx+N/T/x/^{-r}dx$. W ujęciu tym widać wyraźniej, że źródłem całkowalności ułamków algebraicznych jest fakt, iż stanowią one przestrzeń liniową o bazie, której elementy są łatwo całkowalne.

Definicja. Ułamkami podstawowymi nazywamy ułamki postaci

$$\frac{1}{/x-\alpha/^n}, \quad \frac{1}{T/x/^n}, \quad \frac{T'/x/}{T/x/^n},$$

gdzie α jest dowolną liczbą rzeczywistą, n - naturalną, a T - trójmianem kwadratowym nierozkładalnym.

Niech będzie zadany ułamek właściwy, np.

$$/1/ \qquad U/x/ = \frac{W/x/}{/x-\alpha/^n/x-\beta/^m T/x/^p S/x/^q},$$

gdzie T i S są trójmianami nierozkładalnymi, α i β liczbami rzeczywistymi, zaś licznik W - wielomianem stopnia niższego niż mianownik.

Układem ułamków podstawowych, odpowiadających ułamkowi U - krótko: układem podstawowym dla U - nazywamy układ ułamków wskazanych w poniższej tabelce. Powstaje ona przez kolejne wypisanie ułamków, odpowiadających poszczególnym czynnikom mianownika, a określonych jak następuje:

/2/

Czynnikowi w mianowniku	odpowiada układ ułamków podstawowych
$/x-\alpha/^n$	$\frac{1}{/x-\alpha/^n}, \frac{1}{/x-\alpha/^{n-1}}, \ldots, \frac{1}{/x-\alpha/^2}, \frac{1}{/x-\alpha/}$;
$/x-\beta/^m$	$\frac{1}{/x-\beta/^m}, \frac{1}{/x-\beta/^{m-1}}, \ldots, \frac{1}{/x-\beta/^2}, \frac{1}{/x-\beta/}$;
$T/x/^p$	$\frac{1}{T/x/^p}, \frac{1}{T/x/^{p-1}}, \ldots, \frac{1}{T/x/^2}, \frac{1}{T/x/}$;
	$\frac{T'/x/}{T/x/^p}, \frac{T'/x/}{T/x/^{p-1}}, \ldots, \frac{T'/x/}{T/x/^2}, \frac{T'/x/}{T/x/}$;
$S/x/^q$	$\frac{1}{S/x/^q}, \frac{1}{S/x/^{q-1}}, \ldots, \frac{1}{S/x/^2}, \frac{1}{S/x/}$;
	$\frac{S'/x/}{S/x/^q}, \frac{S'/x/}{S/x/^{q-1}}, \ldots, \frac{S'/x/}{S/x/^2}, \frac{S'/x/}{S/x/}$.

Gdyby w mianowniku U/x/ występowało więcej różnych czynników, tabelka liczyłaby odpowiednio więcej wierszy. Zauważmy, że ilość ułamków w tabelce - tj. w układzie podstawowym dla U - jest równa stopniowi mianownika ułamka U. Ułatwi to przy rachunkach praktycznych kontrolę, czy nie zapomnieliśmy któregoś ułamka.

Twierdzenie

Każdy ułamek właściwy da się przedstawić jako kombinacja liniowa układu odpowiadających mu ułamków podstawowych; kombinacja taka jest jedyna.

Dowód: Wiadomo z algebry, że każdy ułamek właściwy jest sumą ułamków prostych; wystarczy w sumie tej zastąpić każdy ułamek typu $/Mx+N/T/x/^{-n}$, gdzie T jest trójmianem kwadratowym nierozkładalnym, przez sumę $AT^{-n}T' + BT^{-n}$ $/A = M/T''$, $B = N-MT'(0)/T''/$. Jednoznaczość rozkładu wynika z niezależności liniowej ułamków podstawowych. /Twierdzenie ma charakter czysto techniczny i nie stanowi ogniwa w konstrukcji Analizy; można więc nie poruszać w ogóle sprawy jednoznaczności, a nawet - jak się często robi w przypadku ułamków prostych - pominąć dowód twierdzenia/.

Na przykład, przy $n=3$, $m=1$, $p=1$, $q=2$

$$U/x/ = A\frac{1}{/x-\alpha/^3} + B\frac{1}{/x-\alpha/^2} + C\frac{1}{x-\alpha} + D\frac{1}{x-\beta} +$$

$$+ E\frac{1}{T} + F\frac{T'}{T} + G\frac{1}{S^2} + H\frac{1}{S} + K\frac{S'}{S^2} + L\frac{S'}{S}.$$

Stałe $A, B, \ldots, L$ wyznaczamy mnożąc przez wspólny mianownik i albo porównując współczynniki, albo podstawiając za x odpowiednio dobrane wartości. Najbardziej opłaca się podstawić kolejno za x liczby α, β oraz - o ile wyrażają się prosto - po jednym pierwiastku zespolonym wielomianów T i S. Zwykle opłaca się kombinować obie metody.

Całkowanie otrzymanej kombinacji ułamków podstawowych jest już automatyczne. W całkach typu $\int T^{-n}T'dx$ mamy "podstawienie przygotowane" $T/x/=t$. W całkach $\int T^{-n}dx$ przekształcamy $T/x/ = a\left[/x-r/^2 + s^2\right]$ i podstawieniem $t = (x-r)s$ dochodzimy do $\int /1+t^2/^{-n}dt$.

Résumé

Une simplification dans l'intégration des fonctions rationelles

On gagne un peu de temps et en certidude en se servant de N fractions /2/, dont /1/ /dénominateur du degré N/ est une combinaison lineaire. Il y a des avantages didactiques.

Краткое изложение

Упрошение в интегрировании рациональных дробей

Мы несколько сократим работу и шансы на ошибки, представляя (I) (знаменатель степени N) как агрегат N дробей (2). Этот метод кажется и дидактически предпочтительным.