Jan Leśniak

O DEFINICJACH CAŁKI NIEOZNACZONEJ

1. Za czasów Newtona i Leibniza całka nieoznaczona funkcji f/x/ oznacza taką funkcję F/x/, której pochodna jest równa f/x/ [1/]. Odtąd wielu autorów podręczników rachunku różniczkowego i całkowego powtarza prawie bez zmian powyżej podane określenie całki nieoznaczonej. Np.:

1. G. H. Hardy: "jeżeli ψ /x/ jest pochodną funkcji φ /x/, wówczas φ /x/ nazywamy całką funkcji ψ /x/" [2/].
2. A. Hoborski: "Każdą funkcję F/x/ ciągłą w całym przedziale /a,b/ spełniającą równanie /1/ $\frac{dF/x/}{dx} = \varphi/x/$ wewnątrz przedziału /a,b/, a więc posiadającą tę własność, iż jej pochodna wewnątrz przedziału równa się danej funkcji φ /x/, określonej wewnątrz przedziału /a,b/, nazywamy całką nieokreśloną /nieoznaczoną/ funkcji φ /x/ w przedziale /a,b/ i oznaczamy ją symbolem, wprowadzonym przez Leibniza $\int\varphi/x/dx$" [3/].
3. G. Kowalewski: "Jeżeli funkcja F/x/ posiada w przedziale $\langle a,b \rangle$ pochodną f/x/ czyli różniczkę f/x/ dx, to funkcję F/x/ nazywamy funkcją pierwotną lub całką funkcji f/x/ w $\langle a,b \rangle$, co na piśmie wyrażamy za po-

---

1/ Zob. Poradnik dla samouków. T. I. Warszawa 1915, str. 242.
W. Sierpiński, Rachunek różniczkowy i całkowy.

2/ Wykłady elementarne z dziedziny analizy. Warszawa 1916, str. 257.

3/ Wyższa matematyka. Część pierwsza, 1923, str. 248.

mocą symbolu: $F/x/ = \int f/x/dx$, który jest równoważny wzorowi następującemu: $d\,F/x/ = f/x/\,dx$". [1]

4. F.Leja: "Mając daną funkcję $f/x/$ określoną w pewnym przedziale J nazywamy funkcją pierwotną funkcji $f/x/$ każdą funkcję $F/x/$ różniczkowalną w przedziale J i spełniającą w całym przedziale związek $F'/x/=f/x/$.... Funkcję pierwotną nazywamy również całką nieoznaczoną lub krótko całką funkcji danej i oznaczamy $\int f/x/dx$, co czytamy: całka $f/x/dx$" [2].
5. W.Pogorzelski: "Funkcję pierwotną nazywamy również całką nieokreśloną, zaś wyznaczanie funkcji pierwotnej - całkowaniem" [3].
6. Słownik polskich wyrazów technicznych. Dział II. Matematyka: "Funkcja pierwotna /względem funkcji danej/. /Całka nieokreślona/. Funkcja $F/x/$, której pochodna $F'/x/$, jest równa funkcji danej $f/x/$. Znak: $F/x/ = \int f/x/dx$" [4].

Gdy przyjmiemy którąkolwiek z powyżej podanych definicji całki nieoznaczonej /nieokreślonej/, to stwierdzamy, że z równości:

$\int f/x/dx = F/x/$, $\quad \int f/x/dx = \mathfrak{F}/x/$ nie wynika:

$F/x/ = \mathfrak{F}/x/$.

Mamy bowiem np. $\int 2xdx = x^2$ i $\int 2xdx = x^2 + 1$, a $x^2 \neq x^2+1$.

1/ Zasady rachunku różniczkowego i całkowego. Warszawa 1923. Str. 159.

2/ Rachunek różniczkowy i całkowy. Wyd.II. PZWS,1949, str. 198.

3/ Analiza matematyczna T.II,1949, str. 145.

4/ Wyd. Akademia Nauk Technicznych, 1936, str.279.

Znak równości został użyty w znaczeniu innym niż podaje Leibniz:

$$x = y \equiv \Pi_X \left[x \varepsilon X \equiv y \varepsilon X \right]$$ [1].

Ponieważ obecnie używamy równości w znaczeniu Leibniza, więc nie powinniśmy posługiwać się żadną z podanych definicji całki nieoznaczonej.

2. Wielu autorów podręczników rachunku różniczkowego i całkowego stara się podać takie określenie całki nieoznaczonej, by równość była użyta w sensie Leibniza, ale wprowadza w definicji całki nieoznaczonej takie pojęcia, których nie określa, a które trudno przyjąć za pojęcia prymitywne. Np.:

1. K.Kuratowski: "Jeżeli dwie funkcje F i G są funkcjami pierwotnymi funkcji f w przedziale ab /otwartym lub zamkniętym/, to te dwie funkcje różnią się między sobą o stałą.... Odwrotnie funkcja, która powstaje przez dodanie stałej do funkcji pierwotnej funkcji f, jest funkcją pierwotną funkcji f. A zatem wyrażenie F/x/ + C jest ogólną postacią funkcji pierwotnej funkcji f. Wyrażenie to oznaczamy symbolem $\int$f/x/dx /całka f/x/ po dx/ i nazywamy ją całką nieoznaczoną funkcji f" [2].
2. A.Łomnicki: "Gromadę funkcji pierwotnych do danej funkcji f/x/ nazywamy całką nieoznaczoną funkcji f/x/ i oznaczamy ją symbolem $\int$f/x/dx" [3].

1/ A.Mostowski. Logika matematyczna 1948, str.109.

2/ Wykłady rachunku różniczkowego i całkowego. Część I. Warszawa 1948, str.145.

3/ Rachunek różniczkowy i całkowy. T.II.Wyd. 3.Katowice 1949, str.2.

3. W.I.Smirnow: "Najbardziej ogólne wyrażenie dla funkcji pierwotnej nazywamy także całką nieoznaczoną danej funkcji f/x/ lub danej różniczki f/x/dx i oznaczamy symbolem $\int$ f/x/dx, przy czym funkcję f/x/ nazywamy funkcją podcałkową, a f/x/dx wyrażeniem podcałkowym"[1].

Pojęcia "ogólna postać funkcji pierwotnej", "gromada funkcji pierwotnych", "najbardziej ogólne wyrażenie dla funkcji pierwotnej" są niezdefiniowane. Wydawałoby się, że powinny oznaczać funkcje różniczkowalne, skoro pochodna całki nieoznaczonej równa się funkcji podcałkowej.

3. Trudności, które występują przy określaniu całki nieoznaczonej, można przezwyciężyć definiując całkę nieoznaczoną przy pomocy opisu jednostkowego /deskryptu/ powstałego na tle odpowiednio dobranej funkcji zdaniowej[2].

1/ Matematyka wyższa. PWN 1958. T.I., str.176.

2/ A.Mostowski. Logika matematyczna, str.250.
"Jeśli Φ /x/ jest funkcją zdaniową o jednej zmiennej wolnej x /dowolnego typu c/ taką, że

/1/ $\vdash \sum_x \Phi/x/$

/2/ $\vdash \pi_{x,y} \left[\Phi/x/ . \Phi/y/ \longrightarrow /x=y/\right]$,

to wolno przyjąć za nową stałą specyficzną typu c symbol λ, różny od wszystkich dotychczas używanych w teorii, przy czym jednocześnie przyjmujemy zdanie

/3/ $\Phi/\lambda/$

za nowy aksjomat.
To, że stosujemy regułę definiowania, zapisujemy krótko wzorem

/4/ $\lambda \underset{df}{=} /\imath x/ \Phi/x/$,

który czytamy: λ jest na mocy definicji tym x, dla którego zachodzi Φ /x/".

Podamy dwie definicje całki nieoznaczonej, z których pierwsza jest znana [1].

Definicja I. Całką nieoznaczoną funkcji f/x/ nazywamy jedyną funkcję φ/x/, której pochodna równa się f/x/ i która dla ustalonej liczby a z obszaru określoności f/x/ ma wartość zero.

$$\int_a f/x/ \underset{df}{=} [\iota\varphi/x/] \left\{ \varphi'/x/ = f/x/ \,.\, \varphi/a/ = 0 \right|.$$

Można z łatwością udowodnić, że w niepustym zbiorze wszystkich funkcji pierwotnych funkcji f/x/ znajduje się tylko jedna funkcja, która zeruje się dla liczby a wziętej z obszaru określoności f/x/.

Uwaga 1. Obszary określoności funkcji f/x/ i φ/x/ są równe. Należałoby w symbolu $\int_a$ f/x/dx uwidocznić zbiór /przedział/ J, w którym rozważamy funkcję f/x/ np. $\int_{J,a}$ f/x/dx. Okazuje się, że definicja I całki nieoznaczonej nie jest wygodna w zastosowaniach np. przy wyznaczeniu rozwiązań ogólnych równań różniczkowych.

4. Przystępujemy do podania drugiej definicji całki nieoznaczonej, w której występować będą znane nam pojęcia. Przytoczymy jednak określenia niektórych pojęć pomocniczych celem uniknięcia ewentualnych nieporozumień.

Df. A/ Funkcją liczbową zmiennej x nazywamy każdą dwuczłonową relację R taką, że do każdej liczby y istnieje co najwyżej jedna liczba x, dla której jest x R y [2].

1/ Zob. np. K.Menger, Calculus, a modern approach. Boston 1955.

2/ Zob. Logika matematyczna A.Mostowskiego, strony 146, 147.

Dziedzinę funkcji R nazywamy obszarem określoności lub zbiorem argumentów, przeciwdziedzinę zbiorem wartości funkcji R.

Dla funkcji liczbowych zmiennej x przyjmujemy powszechnie stosowane znakowanie: $f/x/$, $g/x/$, $\varphi/x/$, $F/x/$,....

Zbiór wszystkich funkcji liczbowych zmiennej x o obszarze określoności J oznaczamy symbolem $\mathfrak{A}_J/x/$.

Uwaga 2. W praktyce funkcję liczbową jednej zmiennej podajemy formułując "prawo" przyporządkowujące każdej wartości zmiennej z danego zbioru Z określoną jednoznacznie liczbę. Zbiór Z jest wtedy obszarem określoności. Gdy zbiór Z nie jest z góry dany przyjmujemy, że zbiorem Z jest zbiór tych wszystkich liczb, do których "prawo da się zastosować", tzn., że po zastosowaniu go do każdej liczby ze zbioru Z otrzymamy jedną jedyną liczbę. Np. dla funkcji $f/x/ = \frac{1}{x}$ obszarem określoności jest, w myśl tej umowy, zbiór wszystkich liczb rzeczywistych z wyjątkiem zera.

Uwaga 3. Funkcje np.: $f/x/ = 2x$ i $g/x/ = x + x$ są identyczne, mimo że "prawa" są różne. Funkcja $\varphi/x/ = \frac{1}{x}$ o obszarze określoności równym zbiorowi wszystkich liczb dodatnich jest różna od funkcji $\psi/x/ = \frac{1}{x}$, której obszarem określoności jest zbiór wszystkich liczb ujemnych.

Df. B/ Sumą funkcji liczbowych: $f/x/$ o obszarze określoności Z_f i $g/x/$ o obszarze określoności Z_g nazywamy taką funkcję $h/x/$, której obszarem określoności Z_h jest wspólna część zbiorów Z_f i Z_g i dla której jest $h/x/ = f/x/ + g/x/$ dla każdej liczby x należącej do Z_h.

Df. C/ Funkcją liczbową zmiennych x i y nazywamy każdą trójczłonową relację R taką, że dla każdej pary liczb x, y istnieje co najwyżej jedna liczba z dla której jest R/x, y, z/.

Dla funkcji liczbowych zmiennych x i y przyjmujemy powszechnie stosowane znakowanie:

$$f/x,y/, \quad g/x,y/, \ldots, \quad \varphi/x,y/, \quad F/x,y/ \ \ldots$$

Uwaga 4. W praktyce funkcję liczbową zmiennych x i y podajemy formułując "prawo" przyporządkowania każdej parze liczb x, y z danego zbioru Z określonej liczby. Zbiór Z jest wtedy obszarem określoności.

Uwaga 5. Jeżeli w f/x,y/ wstawimy liczbę /drugi element pary liczbowej należącej do obszaru określoności naszej funkcji/ w miejsce y, to otrzymamy funkcję liczbową zmiennej x.

Podobnie jak dla funkcji liczbowych jednej zmiennej można określić sumę dwu funkcji liczbowych dwóch zmiennych.

Uwaga 6. Z funkcji liczbowych: f/x/ o obszarze określoności Z_f i g/y/ o obszarze określoności Z_g możemy tworzyć nowe funkcje liczbowe zmiennych x i y. Np. niech zbiorem Z_h będzie zbiór par, których pierwszy element należy do Z_f, drugi do Z_g. W zbiorze Z_h określamy funkcję liczbową h/x,y/ przyjmując, że dla każdej pary liczb /x,y/ należącej do Z_h jest h/x,y/ = f/x/ + g/y/.

Weźmy pod uwagę funkcję liczbową dwóch zmiennych x,p F/x,p/ i niech obszarem określoności F/x,p/ będzie taki zbiór par liczbowych Z, którego drugie elementy par tworzą zbiór wszystkich liczb rzeczywistych q. Utwórzmy zbiór funkcji jednej zmiennej x:

$$\left[\widehat{\psi/x/}\right] \quad \left\{\sum_{p\in q} \psi/x/ = F/x,p/\right\} \overline{\overline{_{df}}} \ F/x;p/. \qquad /1/$$

Df. D/ Zbiór /1/ nazywamy funkcją liczbową zmiennej x z parametrem p zmiennym w zbiorze q [1/].

Zbiór wszystkich funkcji liczbowych zmiennej x z parametrem p zmiennym w q oznaczamy symbolem $\mathfrak{A}$/x,p/.

Symbolem $\mathfrak{A}_{\mathfrak{J}}$/x,p/ oznaczamy zbiór wszystkich funkcji F/x;p/ takich, że każdy element należący do którejkolwiek z tych funkcji F/x;p/ jest funkcją liczbową, której obszarem określoności jest zbiór $\mathfrak{J}$.

Celem uzyskania skrótu w zapisie zamiast:

$[\widehat{\psi/x/}] \{\sum_{p \varepsilon q} \quad \psi/x/ = \varphi/x/ + p\}$ będziemy pisali φ /x/ + p wtedy, gdy skrót nie powoduje wątpliwości, czy mamy na myśli F/x,p/ czy też F/x;p/.

Uwaga 7. F/x;p/ = F/x;r/.

Uwaga 8. Jeżeli φ /x/ jest funkcją liczbową zmiennej x i F/x,p/ = φ /x/ + p, to w szczególności mamy F/x;p/= = F/x; $\frac{p}{2}$/.

Df. E/ Jeżeli F/x;p/ i G/x;r/ są funkcjami liczbowymi zmiennej x z parametrem zmiennym w q, to sumą F/x;p/ i G/x;r/ nazywamy zbiór funkcji:

$$[\widehat{\psi/x/}] \quad \left\{\sum_{\bar{p},\bar{r} \varepsilon q} \psi/x/ = F/x,\bar{p}/ + G/x,\bar{r}/\right\}.$$

Uwaga 9. Jeżeli F/x,p/ = φ_1/x/ + p, G/x,r/ = φ_2/x/+r, to F/x;p/ + G/x;r/ = H/x;s/, gdzie

$$H/x,s/ = \varphi_1/x/ + \varphi_2/x/ + s.$$

1/ Oczywiście "funkcja z parametrem" nie jest funkcją liczbową w sensie Df. A/.

Df. F/ Pochodną $\frac{d\,F/x;p/}{dx}$ względem x funkcji F/x;p/ nazywamy pochodną funkcji zmiennej x, którą otrzymujemy z F/x,p/ przyjmując, że p jest liczbą stałą.

5. Przystępujemy obecnie do określenia całki nieoznaczonej.

Df. G/ Całką nieoznaczoną funkcji f/x/ należącej do $\mathfrak{A}_J$/x/ nazywamy jedyną funkcję F/x;p/ zmiennej x z parametrem zmiennym w q taką, że istnieje funkcja φ/x/ zmiennej x należąca do $\mathfrak{A}_J$/x/ o własnościach: F/x,p/ = = φ/x/ + p i $\frac{d\,F/x;\,p/}{dx}$ = f/x/ w zbiorze J.

Za symbol całki nieoznaczonej funkcji f/x/ należącej do $\mathfrak{A}_J$/x/ przyjmujemy symbol $\int_J$ f/x/dx.

$$\int_J f/x/dx \underset{df}{=} \left[?F/x;\ p/\right]\left\{\sum_{\varphi(x)} \varphi/x/ \;\varepsilon\; \mathfrak{A}_J/x/ . F/x,p/ = \right.$$

$$\left. = \varphi/x/ + p \,.\prod_{x\varepsilon J} \frac{d\,F/x;\,p/}{dx} = f/x/\right\}.$$

Uwaga 10. $\frac{d\,F/x;\,p/}{dx} = \varphi'/x/.$

Zajmiemy się twierdzeniem następującym: jeżeli istnieje funkcja F/x; p/ spełniająca warunek definicyjny całki nieoznaczonej, to jest tylko jedna. Załóżmy, że

$$f/x/,\quad \varphi/x/,\quad \psi/x/\ \varepsilon\ \mathfrak{A}_J/x/ \qquad /1/$$

$$F/x,p/ \underset{df}{=} \varphi/x/ + p \qquad /2/$$

$$G/x,r/ \underset{df}{=} \psi/x/ + r \qquad /3/$$

$$\frac{d\,F/x;\,p/}{dx} = f/x/ \quad w\ J \qquad /4/$$

$$\frac{d\,G/x;\,r/}{dx} = f/x/ \quad w\ J \qquad /5/$$

Twierdzimy, że $F/x; p/ = G/x; r/$.

Dowód. Niech p_o będzie dowolnie obraną liczbą rzeczywistą. Weźmy pod uwagę $F/x,p_o/$

$$/2/ \vdash F/x,p_o/ = \varphi/x/ + p_o \qquad /6/$$

$$/2/\ /4/ \vdash \varphi'/x/ = f/x/ \quad w\ J \qquad /7/$$

$$/3/\ /5/ \vdash \psi'/x/ = f/x/ \quad w\ J \qquad /8/$$

$$/7/\ /8/ \vdash \varphi'/x/ - \psi'/x/ = 0 \quad w\ J \qquad /9/$$

$$/9/ \vdash \varphi/x/ - \psi/x/ = k\ /\text{stała}/ \quad w\ J \qquad /10/$$

$$/10/ \vdash \varphi/x/ = \psi/x/ + k \qquad /11/$$

$$/6/\ /11/ \vdash F/x,p_o/ = \psi/x/ + /k+p_o/ \qquad /12/$$

$$\text{niech } k + p_o \underset{df}{=} r_o \qquad /13/$$

$$/2/\ /13/ \vdash F/x\ ,p_o/ = \psi/x/ + r_o \qquad /14/$$

$$/13/\ /3/ \vdash F/x\ ,p_o/ = G/x,r_o/. \qquad /15/$$

Zatem każda funkcja liczbowa zmiennej x należąca do $F/x; p/$ należy do $G/x; r/$.

Podobnie uzasadniamy, że każda funkcja liczbowa zmiennej x należąca do $G/x;r/$ należy do $F/x; p/$.

A wtedy mamy $F/x; p/ = G/x; r/$.

Uwaga 11. Gdybyśmy przyjęli definicję następującą:

$$\int_J f/x/dx \underset{df}{=} \left[?F/x;\ p/\right]\left\{F/x;\ p/ \varepsilon\, \mathfrak{A}_J\ /x;p/\ .\ \frac{d\ F/x;p/}{dx} = \right.$$
$$\left. = f/x/\right\},$$

to nie moglibyśmy udowodnić, że - o ile tylko $F/x; p/$ istnieje - to jest jedyną funkcją zmiennej x z parametrem p zmiennym w q spełniającą warunek definicyjny całki nieoznaczonej. Np. funkcje z parametrem $x^2 + p^2$ oraz $x^2 + p$ spełniałyby warunek definicyjny dla $\int_q 2x\,dx$, ale nie są identyczne.

6. Posługiwanie się podaną przez nas definicją całki nieoznaczonej nie nastręcza żadnych poważniejszych trudności [1/]. Dla przykładu udowodnimy znane twierdzenie rachunku całkowego, które w skrócie wypowiadamy: "całka z sumy równa się sumie całek".

Załóżmy, że f/x/ i g/x/ są całkowalne w J. /1/

Twierdzimy, że

$$\int_J \left[f/x/ + g/x/\right] dx = \int_J f/x/dx + \int_J g/x/dx$$

Dowód.

$$\int_J f/x/\,dx = \left[\urcorner F/x;\, p/\right] \left\{ \sum_{\varphi(x)} \varphi/x/ \varepsilon\, \mathfrak{A}_J \quad /x/. \right.$$

$$\left. F/x,p/ = \varphi/x/ + p \,.\, \prod_{x \varepsilon J} \quad \frac{d\, F/x;p/}{dx} = f/x/ \right\}.$$

Niech $\bar{\varphi}$ /x/ spełnia warunki:

$$\bar{\varphi}/x/ \quad \varepsilon\, \mathfrak{A}_J/x/, \qquad \bar{\varphi}'/x/ = f/x/ \text{ w } J$$

Wtedy $F/x;\, p/ = \bar{\varphi}/x/ + p$, czyli $\int_J f/x/dx = \bar{\varphi}/x/ + p$.

$$\int_J g/x/dx = \left[\urcorner G/x;r/\right] \left\{ \sum_{\psi(x)} \psi/x/ \quad \varepsilon\, \mathfrak{A}_J/x/ . G/x,r/ = \right.$$

$$\left. = \psi/x/ + r \,.\, \frac{d\, G/x;\, r/}{dx} = g/x/ \right\}.$$

Niech $\bar{\psi}$ /x/ spełnia warunki:

$$\bar{\psi}/x/ \quad \varepsilon\, \mathfrak{A}_J/x/, \qquad \bar{\psi}'/x/ = g/x/ \text{ w } J.$$

1/ Oczywiście konieczne jest rozbudowanie teorii funkcji zmiennej x z parametrem p.

Wtedy $G/x;\ r/ = \bar{\psi}/x/ + r,$ czyli

$$\int_J g/x/\ dx = \bar{\psi}/x/ + r.$$

Suma

$$f/x/+g/x/ = \bar{\varphi}'/x/+\bar{\psi}'/x/ = \left[\varphi/x/ + \psi/x/\right]' \quad \text{w } J$$

Ckreślmy

$$H/x,s/ \underset{df}{=} \left[\bar{\varphi}/x/ + \bar{\psi}/x/\right] + s.$$

Stwierdzamy, że

1/ $H/x;\ s/ \quad \varepsilon\ \mathfrak{A}_J\ /x;\ s/$

2/ $\Sigma_\chi /x/ \left[\chi /x/ \ \varepsilon\ \mathfrak{A}_J/x/ \ .\ H/x,s/ = \chi/x/ + s.\right.$

$$\left.\Pi_{x\varepsilon J} \frac{d\ H/x;s/}{dx} = f/x/ + g/x/\right].$$

Zatem

$$\int_J \left[f/x/ + g/x/\right] dx = H/x;\ s/.$$

Okażemy dalej, że jest

$$H/x;\ s/ = F/x;\ p/ + G/x;\ r/.$$

Istotnie. Skoro

$$H/x;\ s/ = \left[\bar{\varphi}/x/ + \psi/x/\right] + s =$$

$$= \left[\bar{\varphi}/x/ + \frac{s}{2}\right] + \left[\bar{\psi}/x/ + \frac{s}{2}\right] \text{ i } \bar{\varphi}/x/ + \frac{s}{2} = F/x;\ \frac{p}{2}/ =$$

$$= F/x;\ p/,\quad \bar{\psi}/x/ + \frac{s}{2} = G/x;\ \frac{r}{2}/ = G/x;\ r/,$$

więc

$$H/x;\ s/ = F/x;\ p/ + G/x;\ r/, \text{ c.b.d.w.}$$

Na zakończenie zauważmy, że

1/ $\left[\int_J f/x/\ dx\right]' = f/x/$ /o ile $f/x/$ jest całkowalna/;

2/ definicje całki nieoznaczonej Df G/ i Df I nie są równoważne;

3/ w interesujący sposób interpretuje A.Hoborski równości, w których po jednej i po drugiej stronie występują po jednej lub po więcej całek określonych wieloznacznie wskutek możliwości dowolnego doboru stałych[1/].

"... jeżeli A i B nie są symbolami jednoznacznymi, ale wieloznacznymi /liczb, funkcji .../, co znaczyć może również A = B? Przecież można z łatwością nadać symbolom A, B takie znaczenia A_o, B_o, iż będzie $A_o \neq B_o$. Widoczną jest tu pewna trudność, której pominąć nam nie wolno.

Otóż taką równość będziemy pojmowali jedynie w sposób następujący: do każdego znaczenia A_o symbolu A można dobrać takie znaczenia B_o symbolu B, iż będzie $A_o = B_o$ i na odwrót, do każdego znaczenia B_1 symbolu B można dobrać znaczenie A_1 symbolu A tak, iż jest $A_1 = B_1$. Tę własność symboli wieloznacznych A, B wyrażać będziemy krótko równością A = B".

"Załóżmy, że symbole A, B_1, B_2, ..., B_n są wieloznaczne i że mamy równość $A = B_1 + B_2 + \ldots + B_n$ lub $A = \sum_{i=1}^{n} B_i$.

Jakie znaczenie można nadać takiej równości? Dla nas ostatnia równość będzie wyrażała następujące dwie własności wieloznacznych symboli A, B_1, B_2, ..., B_n:

a/ do każdego układu znaczeń $B_1^{(0)}$, $B_2^{(0)}$, ..., $B_n^{(0)}$ symboli B_1, B_2, ..., B_n można dobrać takie znaczenie $A^{(0)}$ sym-

---

1/ Antoni Hoborski. Wyższa matematyka. Część pierwsza. Kraków, 1923, str. 253-254.

bolu A, iż zachodzi równość $A^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} B_i^{(0)}$ i zarazem

b/ do każdego znaczenia $A^{(0)}$ symbolu A można dobrać tak układ znaczeń $B_1^{(0)}, B_2^{(0)}, \ldots, B_n^{(0)}$ symboli $B_1, B_2, \ldots, B_n$, iż jest $A^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} B_i^{(0)}$ ".

Résumé

Sur les définitions de l´intégrale indéfinie

Après avoir analysé les diverses définitions de l´intégrale indéfinie l´auteur donne la définition suivante: Nous appelons intégrale indéfinie d´une fonction f/x/ définie dans l´ensemble J , l´unique fonction F/x; p/ de la variable x et du paramètre p variable dans l´ensemble de tous les nombres, telle qu´il existe une fonction φ /x/ définie dans J ayant les propriétés suivantes.

1/ $F/x,p/ = \varphi/x/+p$,

2/ $\dfrac{d\, F/x;\, p/}{dx} = f/x/$ dans J .

En désignant par $\mathfrak{A}_J/x/$ l´ensemble de toutes les fonctions d´une variable x définies dans J , et par $\int_J f/x/dx$ l´intégrale indéfinie de la fonction $f/x/ \in \mathfrak{A}_J/x/$, nous avons

$$\int_J f/x/dx \overset{\mathrm{df}}{=} \left[\imath F/x;p/\right]\left\{\sum_{\varphi}\left[\varphi/x/ \in \mathfrak{A}_J/x/ . F/x,p/ = \varphi/x/+p . \prod_{x \in J}\left(\frac{d\, F/x;p/}{dx} = f/x/\right)\right]\right\}$$

En s'appuyant sur la définition précédente l'auteur démontre les deux théorèmes suivants:

I/ Si la fonction $F/x;p/$ remplissant la condition de la définition existe, elle est définie d'une façon univoque.

II/ Si les fonctions $f/x/$ et $g/x/$ appartenant à $\mathfrak{A}_J/x/$ sont intégrables, on a

$$\int_J \left[f/x/ + g/x/\right] dx = \int_J f/x/dx + \int_J g/x/dx.$$

Краткое изложение

Об определениях неопределенного интеграла

После критического обсуждения различных определений неопределенного интеграла в статье дается следующее определение:

Неопределенным интегралом функции $f(x)$, определенной в множетве J, называется единственная функция $F(x;p)$ переменной x с параметром p, изменяющимся в множестве всех действительных чисел, такая, что существует функция $\varphi(x)$ определенная в множестве J, обладающая следующими свойствами: функция двух переменных x, p

$$F/x,p/ = \varphi/x/ + p \quad \text{и} \quad \frac{dF/x;p/}{dx} = f/x/$$

в множестве J.

Обозначая символом $\mathfrak{A}_J/x/$ множество всех функций переменной x имеющих областью определения множество J, а символом $\int_J f/x/dx$ неопределенный интеграл функции $f(x)$ принадлежащей к $\mathfrak{A}_J(x)$ имеем:

$$\int_J f(x)dx \stackrel{df}{=} \left[\,\imath F(x;p)\right]\left\{\sum_{\varphi(x)}\left[\varphi(x)\in \mathfrak{A}_J(x).\, F(x),p)=\varphi(x)+p.\prod_{x\in J}\left(\frac{dF(x;p)}{dx}=f(x)\right)\right]\right\}$$

Базируя на данном выше определении неопределенного интеграла доказываются следующие теоремы:

I Если существует $F(x;p)$, выполняющая условие определения неопределенного интеграла, то только одна.

II Если $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат к $\mathfrak{A}_J(x)$ и интегрируемы, то

$$\int_J \left[f(x)+g(x)\right]dx = \int_J f(x)\,dx + \int_J g(x)dx.$$