Zenon Moszner

O OKREŚLENIU STOŻKOWEJ PRZEZ WIERZCHOŁEK, DWA PUNKTY I STYCZNĄ DO NIEJ W WIERZCHOŁKU

Niech na płaszczyźnie będzie dana prosta p i trzy różne punkty A_1, A_2, A_3. Załóżmy, że punkt A_1 leży na prostej p.

Oznaczmy przez S rzeczywistą stożkową niezdegenerowaną /parabolę, hiperbolę, elipsę [1/] o następującej własności /W/:

1/ punkty A_2, A_3 leżą na stożkowej S,

2/ punkt A_1 jest jej wierzchołkiem,

3/ prosta p jest styczna od stożkowej S.

Stawiamy pytania następujące[2/]:

1/ przy jakich konfiguracjach elementów A_1, A_2, A_3 i p istnieje stożkowa S o własności /W/,

2/ ile jest takich stożkowych przy danej konfiguracji tych elementów,

3/ jakie są stożkowe?

Rozważmy trzy przypadki:

I. Rzuty punktów A_2 i A_3 na prostą p pokrywają się z punktem A_1. Wtedy punkty A_1, A_2, A_3 leżą na jednej prostej, a więc stożkowa o własności /W/ nie istnieje.

1/ Koło uważam za szczególny przypadek elipsy.

2/ Częściową odpowiedź na powyższe pytanie daje artykuł prof.St.Gołąba pt. "Przyczynek do określenia stożkowych przez danych 5 elementów" Rocznik Naukowo-Dydaktyczny WSP w Krakowie. Z.1, 1954 r.,s.11-15.

II. Punkt A_2 lub A_3 leży na prostej p. Ponieważ prosta p ma być styczna do stożkowej S w punkcie A_1, stożkowej o własności /W/ w tym przypadku nie ma.

III. Punkty A_2 i A_3 nie leżą na prostej p oraz rzut przynajmniej jednego z nich np. A_2 na prostą p nie pokrywa się z punktem A_1.

Oznaczmy przez:

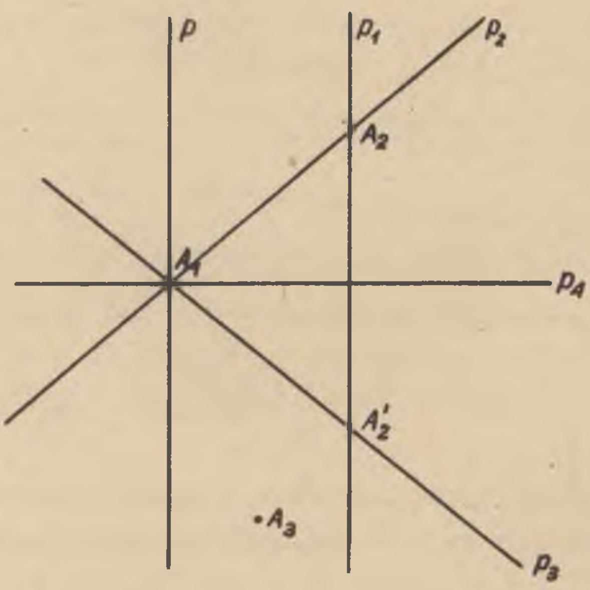
a/ p_1 prostą równoległą do prostej p, przechodzącą przez punkt A_2,

b/ p_2 prostą przechodzącą przez punkty A_1 i A_2,

c/ p_3 prostą powstałą z prostej p_2 przez zwierciadlane odbicie w prostej p,

d/ p_4 prostą prostopadłą do prostej p w punkcie A_1,

e/ A_2' punkt przecięcia prostych p_1 i p_3 /jest on zarazem odbiciem zwierciadlanym punktu A_2 w prostej p_4, zob. rys. 1/.



Rys. 1

Twierdzenie 1

Jeżeli zachodzi przypadek III i

/a/: punkt A_3 jest różny od punktu A_2' i leży na prostej p_1 lub p_2 lub p_3,

to nie istnieje stożkowa o własności /W/.

Dowód

Wiadomo, że dowolna prosta może mieć ze stożkową niezdegenerowaną co najwyżej dwa punkty wspólne.

Przypuśćmy, że istnieje stożkowa S o własności /W/.

Ponieważ prosta p_4 jest osią symetrii tej stożkowej, więc punkt A_2' leży na stożkowej S.

1/ Gdyby punkt A_3 leżał na prostej p_1, to prosta p_1 miałaby ze stożkową S trzy punkty A_2, A_2', A_3 wspólne, co jest niemożliwe.

2/ Gdyby punkt A_3 leżał na prostej p_2, to ta prosta miałaby ze stożkową S trzy punkty A_1, A_2, A_3 wspólne, co jest niemożliwe.

3/ Gdyby punkt A_3 leżał na prostej p_3, to ta prosta miałaby ze stożkową S trzy punkty A_1, A_2', A_3 wspólne, co jest niemożliwe.

Twierdzenie 1 zostało więc udowodnione.

Oznaczmy przez:

f/ P jedyną parabolę o własnościach następujących:

1/ punkt A_1 jest wierzchołkiem paraboli P,

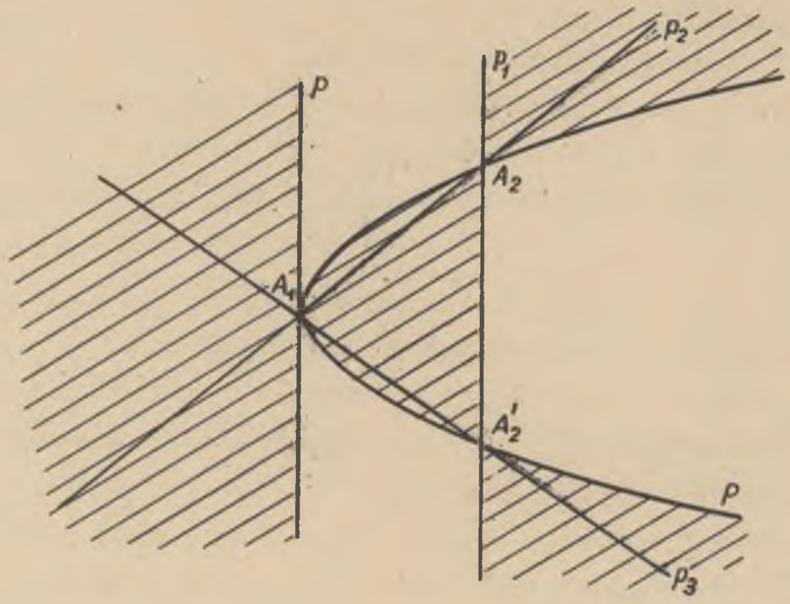
2/ prosta p jest styczna do paraboli P,

3/ punkt A_2 leży na paraboli P [1/],

g/ D_1 sumę mnogościową obszarów zakreślonych na rys.2 [2/].

1/ Istnienie i jednoznaczność paraboli P można udowodnić elementarnym rachunkiem.

2/ Punkty prostych p, p_1, p_2, p_3 oraz paraboli P nie należą ani do D_1 ani do D_2.



Rys. 2

h/ D_2 sumę obszarów nie zakreślonych na rys.2.

Twierdzenie 2

/1/ Jeżeli zachodzi przypadek III i:

/b/: punkt A_3 nie leży na żadnej z prostych p_1, p_2, p_3, to istnieje jedna jedyna stożkowa S o własności /W/, przy czym:

/2/ a/ gdy A_3 leży na paraboli P, stożkowa S jest parabolą,

b/ gdy $A_3 \in D_1$, stożkowa S jest hiperbolą,

c/ gdy $A_3 \in D_2$, stożkowa S jest elipsą.

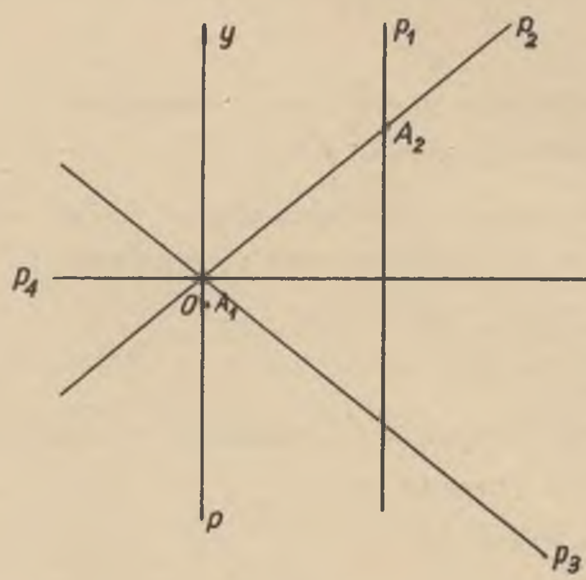
Dowód

Dobierzmy prostokątny kartezjański układ odniesienia tak, by:

1/ oś y pokrywała się z prostą p,

2/ początek układu O pokrywał się z punktem A_1,

3/ punkt A_2 znajdował się w pierwszej ćwiartce układu odniesienia /zob. rys. 3/.



Rys. 3

Każda stożkowa w tym układzie ma równanie:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

gdzie

$$A^2 + B^2 + C^2 > 0.$$

Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by ta stożkowa przechodziła przez punkt $A_1/0,0/$ jest, by $F = 0$.

Oznaczmy przez $/x_1,y_1/$ współrzędne punktu A_2 w tak dobranym układzie odniesienia, a przez $/x_2,y_2/$ współrzędne punktu A_3.

Mamy: $x_1 > 0$ i $y_1 > 0$ /1/

W tym układzie:

- prosta p ma równanie $x = 0$, a więc w myśl założeń twierdzenia $x_2 \neq 0$ /2/
- prosta p_1 ma równanie $x = x_1$, a więc w myśl założeń twierdzenia $x_2 \neq x_1$ /3/
- prosta p_2 ma równanie $y = \frac{y_1}{x_1} \cdot x$, stąd $x_1y_2 - y_1x_2 \neq 0$ /4/
- prosta p_3 ma równanie $y = -\frac{y_1}{x_1} \cdot x$, stąd na podstawie założeń $x_1y_2 + y_1x_2 \neq 0$ /5/

Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by prosta p o równaniu $x = 0$ była styczna do stożkowej:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey = 0$$

jest, by proste:

$D\,x + E\,y = 0$ /styczna do stożkowej w punkcie /0,0//

$1\,x + 0\,y = 0$ /prosta p/

były identyczne, czyli by:

$$\begin{vmatrix} D, E \\ 1, 0 \end{vmatrix} = -E = 0 \qquad \text{oraz} \qquad D \neq 0 .$$

Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by oś x była osią symetrii stożkowej:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx = 0 \qquad /*/$$

jest, by związek /*/ był równoważny związkowi:

$$Ax^2 - 2Bxy + Cy^2 + 2Dx = 0$$

czyli, by $B = 0$.

Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by punkty A_2 i A_3 leżały na stożkowej

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx = 0$$

jest, by

$$\left.\begin{aligned} x_1^2 A + y_1^2 C + 2 x_1 D = 0 \\ x_2^2 A + y_2^2 C + 2 x_2 D = 0 \end{aligned}\right| \quad /6/$$

Ponieważ: $\begin{vmatrix} x_1^2 , & 2 x_1 \\ x_2^2 , & 2 x_2 \end{vmatrix} = 2 x_1 x_2 /x_1 - x_2/ \neq 0$

na podstawie /1/, /2/ i /3/, więc

$$rz \begin{pmatrix} x_1^2 , & y_1^2 , & 2x_1 \\ x_2^2 , & y_2^2 , & 2 x_2 \end{pmatrix} = 2,$$

a stąd układ /6/ ma tylko jedno liniowo niezależne rozwiązanie, można więc przyjąć:

$$A = \begin{vmatrix} y_1^2 , & 2 x_1 \\ y_2^2 , & 2 x_2 \end{vmatrix} = 2/y_1^2 x_2 - y_2^2 x_1/,$$

$$C = \begin{vmatrix} 2 x_1 , & x_1^2 \\ 2 x_2 , & x_2^2 \end{vmatrix} = - 2x_1 x_2 /x_1 - x_2/ \neq 0,$$

$$D = \begin{vmatrix} x_1^2 , & y_1^2 \\ x_2^2 , & y_2^2 \end{vmatrix} = x_1^2 y_2^2 - x_2^2 y_1^2 = /x_1 y_2 + x_2 y_1/ . /x_1 y_2 - x_2 y_1/ \neq 0$$

na podstawie /4/ i /5/.

Równanie: $Ax^2 + Cy^2 + 2Dx = 0$, gdzie A, C, D są wyznaczone powyżej, przedstawia stożkową, bo $C \neq 0$, niezdegenerowaną, bowiem:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A, & 0, & D \\ 0, & C, & 0 \\ D, & 0, & 0 \end{vmatrix} = -D^2 \cdot C \neq 0,$$

przy czym z poprzednich rozważań wynika, że stożkowa ta posiada własność /W/.

Ponieważ układ /6/ posiada tylko jedno rozwiązanie liniowe niezależne, więc stożkowa taka istnieje tylko jedna.

W ten sposób udowodniliśmy pierwszą część twierdzenia 2.

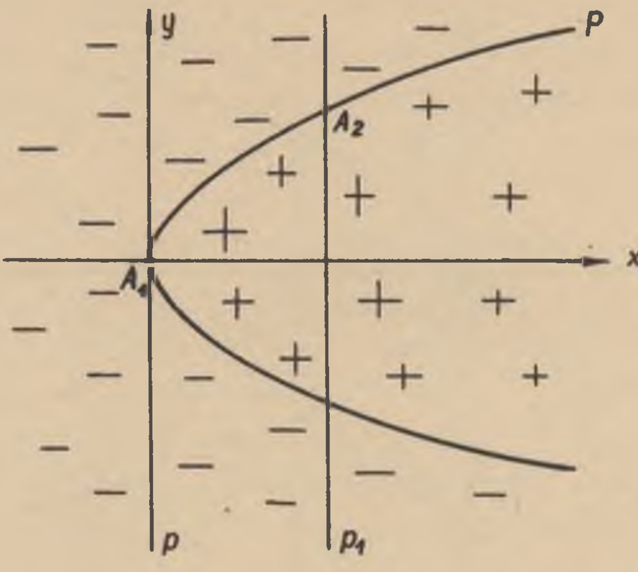
Dla dowodu części drugiej wystarczy zauważyć, że:

a/ jeżeli $A_3 \in P$, to $\delta = \begin{vmatrix} A, & 0 \\ 0, & C \end{vmatrix} = AC = 0$, a więc stożkowa S jest parabolą,

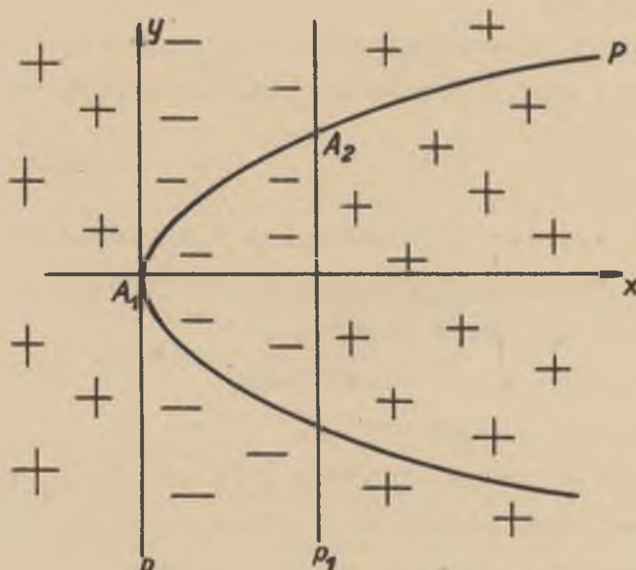
b/ jeżeli $A_3 \in D_1$, to $\delta < 0$, a więc stożkowa S jest hiperbolą,

c/ jeżeli $A_3 \in D_2$, to $\delta > 0$, a więc stożkowa S jest elipsą.

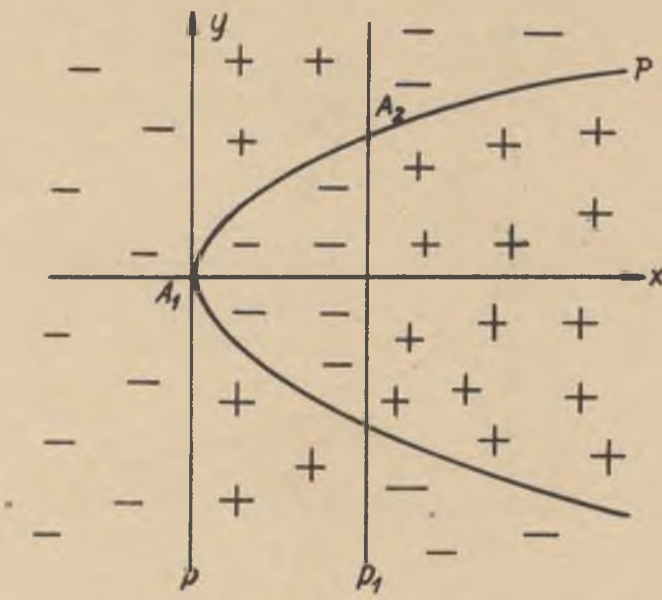
Wynika to z przedyskutowania znaków A i C oraz ich iloczynu δ w zależności od położenia punktu A_3. Na rysunkach 4, 5 i 6 przedstawiam graficznie wynik dyskusji znaków A, C oraz δ, dowód analityczny pozostawiając Czytelnikowi.



Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6

Twierdzenie 3

Jeżeli zachodzi przypadek III i:

/c/: $A_3 = A_2'$,

to istnieje nieskończenie wiele stożkowych o własności /W/, w tym jedna parabola i nieskończenie wiele elips i hiperbol.

Dowód

Z twierdzenia 2 łatwo można wywnioskować, że istnieje wiele stożkowych niezdegenerowanych, które:

1/ przechodzą przez punkt A_2,

2/ mają punkt A_1 za wierzchołek,

3/ są styczne do prostej p.

Wszystkie takie stożkowe mają prostą p_4 za oś symetrii muszą więc przechodzić przez punkt A_2', będący zwierciadlanym odbiciem punktu A_2 w prostej p_4.

Przypadki I, II, III /a/, /b/ i /c/, /zob. twierdze-

nia 1, 2, 3/ obejmują wszystkie możliwe konfiguracje elementów A_1, A_2, A_3 i p; zagadnienie sformułowane we wstępie zostało więc w pełni rozwiązane jak następuje:
Jeżeli położenie elementów A_1, A_2, A_3 i p jest takie jak w przypadku:

1/: I,II lub III /a/, to nie istnieje stożkowa S o własności /W/,

2/: III /b/, to istnieje dokładnie jedna stożkowa S o własności /W/, przy czym twierdzenie 2 określa charakter tej stożkowej w tym przypadku,

3/: III /c/, to istnieje nieskończenie wiele stożkowych o własności /W/, przy czym ich charakter określa twierdzenie 3.

Ponieważ wypowiedziane powyżej twierdzenia 1/, 2/ i 3/ tworzą układ zamknięty, więc twierdzenia do nich odwrotne też są prawdziwe.

Résumé

Sur une courbe conique, définie par un sommet, deux points et une tangente à elle dans le sommet

Soient donnés sur un plan: une droite p et trois points différents A_1, A_2, A_3. Admettons que le point A_1 est situé sur la droite p.

Désignons par S une courbe conique non dégénérée /c. à d. une parabole, une hyperbole, une ellipse ou une circonférence/ qui possède la propriété /W/ suivante:

1/ les points A_1, A_2, A_3 sont situés sur la conique S,

2/ le point A_1 représente son sommet,

3/ la droite p est tangente à la conique S.

Nous posons les questions suivantes:

1/ pour quelles configurations des éléments A_1, A_2, A_3 et p existe une conique S, qui possède la propriété /W/,

2/ combien de telles coniques existent pour une configuration donnée de ces éléments,

3/ quelles sont ces coniques?

Dans la note on donne la réponse complète aux questions formulées ci-dessus.

Elle est une généralisation du résultat de M.Gołąb, donné dans la note "Przyczynek do określenia stożkowych przez danych 5 elementów". Rocznik Nauk.-Dydak. WSP w Krakowie, Zeszyt 1,1954, p.11-15.

Краткое изложение

Об определении кривой второго порядка вершиной,двумя точками и касательной к ней в её вершине

Пусть на плоскости будет дана прямая p и три различные точки A_1, A_2, A_3. Примем, что точка A_1 лежит на прямой p,

Обозначим символом S не вырождённую кривую второго порядка /параболю, гиперболю, элипс или окружность/ со следующим свойством /W/:

I/ точки A_2, A_3 лежат на кривой S , 2/ точка A_1 является её вершиной,

3/ прямая p является касательной к кривой S .

Ставим следующие вопросы:

I/ При какой конфигурации элементов A_1, A_2, A_3 и p существует кривая S со свойством /W/,

2/ сколько имеется таких кривых второго порядка при данной конфигурации этих элементов,

3/ какие это кривые второго порядка?

Эта нота посвящена полному ответу на приведенные вопросы и является обобщением результата, опубликованного С.Голомбом в статье: "Przyczynek do określenia stożkowych przez danych 5 elementów". Rocznik naukowo-dydaktyczny WSP w Krakowie, Zeszyt 1, 1954, стр. 11-15.