Zenon Moszner

UWAGA O AKSJOMATYCZNEJ DEFINICJI WYZNACZNIKA

Niech α będzie macierzą kwadratową zbudowaną z liczb zespolonych, a β macierzą jednokolumnową zbudowaną też z liczb zespolonych.

$$\alpha = \begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn} \end{bmatrix} ; \quad \beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}$$

Oznaczając przez $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ kolumny macierzy α rozważmy funkcję $f/\alpha_1,\ldots,\alpha_n/$ o wartościach zespolonych i następującej własności /W/

$$|W| \begin{cases} \text{dla każdej macierzy } \alpha \text{, jeżeli } f/\alpha_1,\ldots,\alpha_n/ \neq 0, \\ \text{to dla każdej macierzy } \beta \text{ układ równań liniowych} \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i \quad /i = 1,2,\ldots,n/ \text{ posiada dokładnie} \\ \text{jedno rozwiązanie wyrażone wzorami:} \\ x_j = \dfrac{f/\alpha_1,\ldots,\alpha_{j-1},\beta,\alpha_{j+1},\ldots,\alpha_n/}{f/\alpha_1,\ldots,\alpha_n/} \quad \text{dla } j=1,2\ldots n. \end{cases}$$

Z teorii równań liniowych na podstawie twierdzenia Cramera wiadomo, że wyznacznik $|a_{ik}|_n$ macierzy α traktowany jako funkcja jej kolumn posiada własność /W/.

Udowodnimy, że własność /W/ w pewnym stopniu charakteryzuje wyznacznik, tzn., że zachodzi:

Twierdzenie

Jeżeli funkcja $f/\alpha_1,\dots,\alpha_n/$ posiada własność /W/, to $f/\alpha_1,\dots,\alpha_n/ = C.|a_{ik}|_n$, gdzie przez $|a_{ik}|_n$ oznaczam wyznacznik macierzy α, a C jest pewną stałą.

Twierdzenie powyższe można krótko wysłowić następująco:

- twierdzenie Cramera charakteryzuje wyznacznik z dokładnością do stałej multyplikatywnej.

Dowód

Pokażę, że jeżeli funkcja $f/\alpha_1,\dots,\alpha_n/$ posiada własność /W/, to

/1/ $\begin{cases} \text{jest funkcją liniową każdej kolumny z osobna, tzn.} \\ f/\alpha_1,\dots,\alpha_{k-1},s'\alpha'_k+s''\alpha''_k,\alpha_{k+1},\dots,\alpha_n/ = \\ = s'.f/\alpha_1,\dots\alpha_{k-1},\alpha'_k,\alpha_{k+1},\dots,\alpha_n/ + \\ + s''\ f/\alpha_1,\dots,\alpha_{k-1},\alpha''_k,\alpha_{k+1},\dots,\alpha_n/ \end{cases}$

oraz, że:

/2/ $\begin{cases} \text{jeżeli dla pewnego k zachodzi } \alpha_k = \alpha_{k+1}, \text{ to} \\ f/\alpha_1,\dots\alpha_{k-1},\alpha_k,\alpha_{k+1},\dots,\alpha_n/ = 0 \end{cases}$

Ustalmy w sposób dowolny $\alpha_1, \alpha_2,\dots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1},\dots$ α_n i rozważmy następujące dwa przypadki:

I. Dla każdej macierzy jednokolumnowej α_k mamy:

$$f/\alpha_1, \alpha_2,\dots, \alpha_k,\dots, \alpha_n/ = 0.$$

Wtedy własność /1/ jest oczywista.

II. Istnieje takie α_k, że $f/\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k,\dots,\alpha_n/ \neq 0$.

Weźmy pod uwagę trzy układy równań liniowych

1/ układ /x/ o macierzy współczynników $\|\alpha_1, \ldots, \alpha_n\|$ i kolumnie wyrazów wolnych $s'\alpha'_k + s''\alpha''_k$;

2/ układ /xx/ o macierzy współczynników $\|\alpha_1, \ldots, \alpha_n\|$ i kolumnie wyrazów wolnych α'_k;

3/ układ /xxx/ o macierzy współczynników $\|\alpha_1, \ldots, \alpha_n\|$ i kolumnie wyrazów wolnych α'_k.

Ponieważ $f/\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots, \alpha_n/ \neq 0$ i funkcja f posiada własność /W/, każdy z tych trzech układów ma dokładnie jedno rozwiązanie i jeżeli oznaczymy je odpowiednio $/x^*_1, \ldots, x^*_n/$, $/x^{**}_1, \ldots, x^{**}_n/$, $/x^{***}_1, \ldots, x^{***}_n/$, to:

$$/3/ \begin{cases} x^*_j = \dfrac{f/\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, s'\alpha'_k + s''\alpha''_k, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n/}{f/\alpha_1, \ldots, \alpha_n/} & \text{dla } j = 1,2\ldots n; \\ x^{**}_j = \dfrac{f/\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha'_k, \alpha_{j+1} \ldots \alpha_n}{f/\alpha_1, \ldots, \alpha_n/} & \text{dla } j = 1,2\ldots n; \\ x^{***}_j = \dfrac{f/\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha'_k, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n/}{f/\alpha_1, \ldots, \alpha_n/} & \text{dla } j = 1,2\ldots n. \end{cases}$$

Ale z postaci tych układów widoczne jest, że $x^*_j = s'x^{**}_j + s''x^{***}_j$ dla $j = 1,2\ldots n$.

Uwzględniając w ostatnim związku wzory /3/ i mnożąc obie strony otrzymanej równości przez $f/\alpha_1, \ldots, \alpha_n/$ wnioskujemy, że i w tym wypadku prawdziwa jest własność /1/.

Przejdę do dowodu twierdzenia /2/. Przypuśćmy dla dowodu nie wprost, że

$$f/\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_k, \alpha_k, \alpha_{k+2}, \ldots, \alpha_n/ \neq 0.$$

Rozważmy układ równań liniowych jednorodnych o macierzy współczynników $\|\alpha_1 \alpha_2 \ldots, \alpha_{k-1} \alpha_k, \alpha_k, \alpha_{k+2}, \ldots \alpha_n\|$.

Układ taki miałby nieskończenie wiele rozwiązań, np. $x_j = 0$ dla $j = 1,2,\ldots, k-1$, $x_k = \lambda$, gdzie λ oznacza dowolną liczbę zespoloną, $x_{k+1} = -\lambda$, $x_j = 0$ dla $j = k+2, \ldots, n$, wbrew temu, że funkcja f posiada własność /W/ oraz $f/\alpha_1,\ldots,\alpha_n/ \neq 0$. Stąd twierdzenie /2/ jest też prawdziwe.

Ale z własności /1/ i /2/ wynika, jak wiadomo [1/], że $f/\alpha_1,\ldots,\alpha_n/ = C \cdot |a_{ik}|_n$, co jest tezą naszego twierdzenia.

Z udowodnionego twierdzenia i znanych własności wyznaczników wnioskujemy, że jeżeli funkcja $f/\alpha_1,\ldots,\alpha_n/$ poza własnością /W/ spełnia warunek /W'/: $f/\gamma_1,\ldots,\gamma_n/=1$, gdzie:

$$\gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots \gamma_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

to $f/\alpha_1,\ldots,\alpha_n/ = |a_{ik}|_n$.

Pozwala to na zredukowanie trzech warunków, występujących w aksjomatycznej definicji wyznacznika [1/], do dwu /W/ i /W'/.

Taki sposób ujęcia teorii wyznaczników nie jest, moim zdaniem, pozbawiony walorów metodycznych i był przeze

---

1/ Zob.np. A.Mostowski i M.Stark. "Algebra wyższa". Część I, Warszawa 1953, str.127-129.

mnie z powodzeniem, oczywiście w uproszczonej wersji, stosowany przy przerabianiu tego działu algebry wyższej ze studentami zaocznych studiów technicznych na AGH w Krakowie. Jest on ekonomiczny w czasie, a ponadto pozwala, przez wprowadzenie własności /W/ na przykładzie układu dwu równań liniowych o dwu niewiadomych i uogólnienie jej na układy bogatsze, na pełne powiązanie teorii wyznaczników od samego początku z zagadnieniem rozwiązywania układów równań liniowych. Celowość poszukiwania postaci funkcji f o własności /W/ przez wyciąganie konsekwencji z tej własności nie budzi zastrzeżeń, a sprawdzenie, że otrzymana w efekcie funkcja tę własność posiada jest przyjmowane, zwłaszcza przez studentów studiów technicznych, z zainteresowaniem.

Résumé

Remarque sur la définition axiomatique du déterminant

Soient α une matrice carrée, formée de nombres complexes et β une matrice constituée d'une seule colonne des nombres complexes.

$$\alpha = \begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots, & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots, & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

En désignant par $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ les colonnes de la matrice α, considérons une fonction $f/\alpha_1,\dots,\alpha_n/$ à valeurs complexes et de propriété /W/ suivante:
pour chaque matrice α, si $f/\alpha_1,\dots,\alpha_n/ \neq 0$, alors pour chaque matrice β le système d'équations linéaires

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad /i = 1,2,\dots,n/$$

possède exactement une seule solution de la forme:

$$x_j = \frac{f/\alpha_1,\dots,\alpha_{j-1}, \beta, \alpha_{j+1},\dots,\alpha_n/}{f/\alpha_1,\dots,\alpha_n/} \qquad \text{pour } j=1,2,..n.$$

On sait d'après la théorie des équations linéaires selon le théorème de Cramer, que le déterminant $|a_{ik}|_n$ de la matrice α, considéré comme une fonction de ses colonnes, possède la propriété /W/.

La propriété /W/ caractérise dans un certain sens le déterminant ce qui est exprimé par le théorème suivant:

<u>Théorème</u>

Si la fonction $f/\alpha_1,\dots,\alpha_n/$ possède la propriété /W/, alors $f/\alpha_1,\dots,\alpha_n/ = C \cdot |a_{ik}|_n$, où $|a_{ik}|_n$ est le déterminant de la matrice α et C est une constante.

Selon ce théorème et d'après des propriétés connues des déterminants nous obtenons comme conclusion que si la fonction $f/\alpha_1,\dots,\alpha_n/$ possède la propriété /W/ et une propriété /W'/ suivante: $f/\gamma_1,\dots,\gamma_n/ = 1$, où

$$\gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \gamma_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

alors: $f/\alpha_1,\dots,\alpha_n/ = |a_{ik}|_n$.

Краткое изложение

Замечание касающееся аксиоматического определения детерминанта

Пусть α квадратная матрица, построенная из комплексных чисел, а β одностолбцовая матрица, построенная тоже из комплексных чисел.

$$\alpha = \begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn} \end{bmatrix}; \beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Определяя через $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ столбцы матрицы α рассмотрим функцию $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ с комплексными значениями и следующим свойством $/W/$:

$/W/$ – для каждой матрицы α, если $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq 0$ то для каждой матрицы β система линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad | i = 1, 2, \ldots, n |$$

имеет точно одно решение выраженное формулами:

$$x_j = \frac{f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, \beta, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n)}{f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} \quad | j = 1, 2, \ldots, n |$$

Из теории линейных уравнений, опираясь на теорему Крамера, известно, что детерминант $|a_{ik}|_n$ матрицы α, считаемый функцией её столбцов, имеет свойство $|W|$

Свойство $|W|$ характеризует в некоторой степени детерминант, это значит имеет место следующая:

Теорема

Если функция $f(\alpha_1,\ldots\alpha_n)$ имеет свойство /W/ , то $f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = C \cdot |a_{ik}|_n$ где через $|a_{ik}|_n$ определяем детерминант матрицы α , а C является некоторой постоянной.

Приведенную теорему можно в сокращении выразить следующим образом:

- теорему Крамера характеризует детерминант с точностью до мультипликативной постоянной.

Из приведенной теоремы и известных свойств детерминантов получаем, что:

если функция $f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ кроме свойства /W/ исполняет условие /W'/ :

$$
/W'/ \left\{ \begin{array}{l} f(\gamma_1,\ldots,\gamma_n) = 1, \text{ где:} \\[1em] \gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad \gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} ; \cdots \gamma_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} , \end{array} \right.
$$

то $f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = |a_{ik}|_n$

Это нам позволяет сокращать три условия, которые выступают в аксиоматическом определении детерминанта [1/], до двух: /W/ и /W'/,

---

1/ См.нпр: A.Mostowski, M.Stark. "Algebra wyższa". Część I, Warszawa 1953, стр.127-129.