Zofia Krygowska,
Stefan Turnau

PRZYCZYNEK DO BADAŃ NAD ROZUMIENIEM PRZEZ UCZNIÓW PODSTAWOWYCH POJĘĆ GEOMETRYCZNYCH

1. Uwagi wstępne

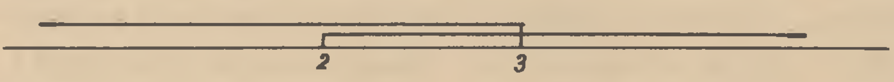
Artykuł ten poświęcamy omówieniu wyników pewnego próbnego i orientacyjnego fragmentu badania nad rozumieniem przez uczniów klas VI, VII i VIII elementarnych pojęć geometrycznych, przeprowadzonego w kilkunastu szkołach krakowskich. Według pierwotnego planu, po ewentualnym skorygowaniu - w wyniku tego wstępnego badania - tekstu pytań, na które odpowiadali uczniowie, chcieliśmy je rozszerzyć na inne szkoły. Jednakże rezultaty przeprowadzonej próby były tak jednoznaczne, że kontynuowanie jej w postaci pisemnego testu nie wydawało się nam na razie celowe. Sądzimy natomiast, że nawet te częściowe wyniki, nie dające jeszcze podstaw do szerszego uogólnienia, warte są rozważenia.

2. Zagadnienie

W pracach na temat metodyki nauczania algebry w szkole podkreśla się wielokrotnie potrzebę posługiwania się geometryczną reprezentacją stosunków liczbowych w celu ułatwienia uczniowi właściwego rozumienia tych stosunków oraz wykorzystania ich w zastosowaniach. Uważa się, że taka reprezentacja jest bardzo dobrym środkiem poglądowym, ponieważ stosunki przestrzenne są bardziej bezpo -

średnio niż stosunki ilościowe /w dużym stopniu wizualnie/ i bardziej intuicyjnie ujmowane przez ucznia. Nie trudno jednak stwierdzić, że i z tym środkiem poglądowym wiążą się pewnę trudności. Np. rozwiązując nierówności uczniowie bardzo często posługują się przedstawianiem zbiorów pierwiastków nierówności elementarnych typu $x > a$, $x < a$ za pomocą półprostych tej samej prostej; wyznaczają oni sumę lub wspólną część takich półprostych, a następnie interpretują obraz geometryczny arytmetycznie. Wiadomo, że wielu uczniów popełnia właśnie w toku tych operacji błędy i niepoprawnie odczytuje odpowiedź z takiej reprezentacji graficznej.

Jedna z osób po maturze na pytanie, co sprawiało jej najwięcej trudności w nauce matematyki w szkole, odpowiedziała krótko: "te konie". Okazało się po wyjaśnieniu, że chodziło tu właśnie o odczytywanie zbioru pierwiastków nierówności z reprezentacji graficznej, np. $x > 2$ i $x<3$.



Uczennice tej klasy "koniami" nazywały załamane strzałki wskazujące półproste, które trzeba było wziąć pod uwagę. Gdzie tkwi trudność? Dlaczego te proste czynności sprawiają tyle kłopotu?

Nasuwa się przypuszczenie, że już w początkach nauczania geometrii elementarnej podstawy tej reprezentacji graficznej, tj. pojęcie półprostej jako zbioru punktów, konwencjonalne przedstawienie tego zbioru na rysunku oraz operacje mnogościowe na półprostych /dodawanie, wyznaczenie wspólnej części/ nie są dostatecznie jasno i operatywnie przez ucznia ujęte.

Z pojęciem półprostej spotyka się uczeń już od klasy piątej i interweniuje ono w toku całego kursu geometrii. Natomiast o działaniach mnogościowych na figurach, jako zbiorach punktów nie wspomina się wyraźnie ani w podręczniku, ani w programie. Gdy zachodzi potrzeba wykonania jednej z tych operacji, to uczeń kieruje się tu tylko praktycznie rozumianym sensem terminów "wspólna część dwóch figur", "figura złożona z dwóch figur" itp. Czy to praktyczne, spontanicznie wykształcone rozumienie wystarcza w przypadkach wymagających bardziej subtelnej analizy - bo związanych z nieograniczonymi figurami i continuum zbioru punktów prostej? Na to pytanie próbujemy odpowiedzieć.

W przeprowadzonym fragmencie badań chcieliśmy sprawdzić w szczególności

1/ czy uczniowie klas VI, VII, VIII, którzy poznali już pojęcie półprostej, potrafią bez żadnych dodatkowych objaśnień wyznaczyć i nazwać wspólną część dwóch danych półprostych, przedstawionych na rysunku i oznaczonych zgodnie z użytą w ich podręczniku geometrii konwencją;

2/ o ile lepiej poradzą sobie z tym samym zadaniem uczniowie kl. VIII, którzy od początku kursu geometrii w tej klasie zapoznają się z figurami geometrycznymi, jako zbiorami punktów, oraz którym wyjaśniono dokładnie na początkowych lekcjach geometrii termin "wspólna część dwóch zbiorów punktów", ilustrując to pojęcie na rysunkach. Aby bezpośrednio przed rozwiązywaniem zadania uprzytomnić uczniom sens wyrażenia "wspólna część", poprzedziliśmy je innym, podobnym pytaniem, na które, jak przypuszczaliśmy, powinni byli odpowiedzieć od razu,kierując się właśnie praktycznym rozumieniem tego słowa.

3. Przebieg i wyniki badania

Badania przeprowadzono w marcu w roku 1959 oraz w styczniu, lutym i marcu 1961 r. w kilkunastoosobowych grupach uczniów klas szóstych /cztery szkoły i cztery klasy/, klas siódmych /cztery szkoły i siedem klas/ i w klasach ósmych /siedem szkół, siedmiu różnych nauczycieli w siedmiu klasach/.

Cztery klasy ósme, które dalej oznaczymy $VIII_1$,$VIII_2$, $VIII_3$, $VIII_4$,przechodziły kurs geometrii ściśle według tradycyjnego programu i obowiązującego podręcznika; w trzech pozostałych klasach ósmych /$VIII_5$, $VIII_6$, $VIII_7$/ prowadzono kurs eksperymentalny, w którym figury były traktowane wyraźnie jako zbiory punktów, oraz stosowano pewne elementarne operacje mnogościowe na figurach /suma, wspólna część/.

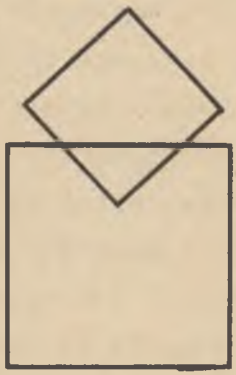
Uczniowie wymienionych grup klas VI, VII, VIII otrzymali kolejno dwie kartki z rysunkami i pytaniami. Na pierwszej znajdował się rysunek 1 oraz pytanie A/: "Rysunek przedstawia dwa kwadraty. Jaką figurą jest wspólna część tych kwadratów?" Na drugiej kartce znajdował się rysunek 2 oraz pytania B/: "Dane są cztery punkty,leżące na jednej prostej: A, B, C, D. Jaką figura jest wspólna część półprostych 1/ AC i BD, 2/ AC i DB, 3/ BC i AD, 4/ BC i DA?

Badani uczniowie mieli w ciągu 20 minut dać odpowiedź pisemnie, bezpośrednio na otrzymanych kartkach.

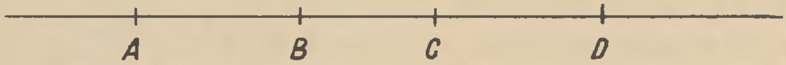
Na pytanie należało odpowiedzieć:

A/ Trójkąt /ewentualnie z dodatkowymi własnościami/,

B/ 1. Półprosta BC /lub półprosta BD/,
2. Odcinek AD,
3. Półprosta BD /lub półprosta BC/,
4. Odcinek BD.



Rys. 1



Rys. 2

W przypadku 1. i 3. chodziło o stwierdzenie, czy uczniowie zauważą, że mimo zmiany oznaczeń, w obu przypadkach odpowiadają na to samo pytanie.

Wskutek przeoczenia prowadzącego badanie w jednej grupie, tj. kl. $VIII_5$, gdzie pytania były wyjątkowo dyktowane, ostatnie z pytań B uczniowie zapisali błędnie /półproste BC i BD/. Mimo to uwzględniliśmy i tę klasę w ogólnym zestawieniu.

Zestawienie wyników badania przedstawia tabela. Ponieważ procent odpowiedzi poprawnych jest we wszystkich przypadkach bardzo mały, przy ocenie większości odpowiedzi wątpliwych zastosowano "taryfę ulgową". Do poprawnych zaliczono więc wszystkie odpowiedzi typu "półprosta" zamiast "półprosta BC". Większość takich odpowiedzi - to na pewno odpowiedzi poprawne tylko z przypadku. Jeżeli bowiem uczeń na wszystkie pytania B/ odpowiedział jednakowo "półprosta" lub "odcinek", to automatycznie w dwóch przypadkach otrzymywał wynik pozytywny. Wywołane tym podwyższenie procentu odpowiedzi poprawnych nie zmienia jednak w istocie rzeczy i tak negatywnego obrazu całości, dlatego poprzestajemy tu na tak uproszczonym i nieco wypaczonym w kierunku dodatnim zestawieniu.

Z przedstawionego zestawienia wynika, że wszyscy uczniowie klas $VIII_1$, $VIII_2$, $VIII_3$, $VIII_4$ i $VIII_5$ odpowiedzieli poprawnie na pytanie A. Jedna odpowiedź błędna w klasie $VIII_6$ jest zupełnie niezrozumiała /"okrąg"/. Natomiast 12 odpowiedzi niepoprawnych w klasie $VIII_7$ łatwo wytłumaczyć. Są one rezultatem tego, że uczniowie tej klasy /i tylko tej klasy/ rozróżniali dwa przypadki, tj. kwadraty "puste" /łamane bez wnętrza/ od kwadratów "pełnych". Większość dała odpowiedzi poprawne /"dwa punkty" oraz "trójkąt - figura wypukła"/, niektórzy jednak właśnie z powodu tej komplikacji popełniali błędy; np."trójkąt pusty i trójkąt pełny ", lub "odcinek i trójkąt pełny ", lub dodawali jeszcze jakieś niepoprawne uwagi uzupełniające /"trójkąt - figura niewypukła", "trójkąt - figura jednokreślna" itp./.

Niektórzy z uczniów tej klasy odpowiedzieli tylko na pytanie A: "wspólną częścią tych kwadratów jest figura

	I. Klasy VI i VII			II. Klasy VIII "tradycyjne"					III. Klasy VIII eksperymentalne			
Klasa	VI	VII	Razem	$VIII_1$	$VIII_2$	$VIII_3$	$VIII_4$	Razem	$VIII_5$	$VIII_6$	$VIII_7$	Razem
Liczba badanych	60	76	136	37	48	38	36	159	41	38	39	118
Pytanie A												
Liczba odpow.:												
poprawnych	54 90,0%	65 85,5%	119 87,5%	37 100%	48 100%	38 100%	36 100%	159 100%	41 100%	37 97,4%	27 69,0%	105 89,0%
niepoprawnych	5 8,4%	10 13,2%	15 11,0%	0 0%	0 0%	0 0%	0 0%	0 0%	0 0%	1 2,6%	12 31,0%	13 11,0%
brak lub "nie wiem"	1 1,6%	1 1,3%	2 1,5%	0 0%	0 0%	0 0%	0 0%	0 0%	0 0%	0 0%	0 0%	0 0%

Klasa	VI	VII	Razem	$VIII_1$	$VIII_2$	$VIII_3$	$VIII_4$	Razem	$VIII_5$	$VIII_6$	$VIII_7$	Razem
Pytanie B												
Liczba odp.popr. na wszystkie 4 pytania	0 0%	0 0%	0 0%	0 0%	3 6,2%	1 2,6%	0 0%	4 2,5%	6 14,6%	4 10,5%	9 23,1%	19 16,1%
tylko na 3 pyt.	0 0%	1 1,3%	1 0,7%	0 0%	0 0%	2 5,3%	0 0%	2 1,2%	9 22,[illegible]%	0 0%	3 7,7%	12 10,2%
tylko na 2 pyt.	2 3,3%	7 9,2%	9 6,6%	4 10,8%	9 18,7%	6 15,8%	2 5,5%	21 13,2%	7 17,1%	11 29,0%	4 10,2%	22 18,6%
tylko na 1 pyt.	2 3,3%	2 2,6%	4 2,9%	0 0%	8 16,7%	1 2,6%	4 11,1%	13 8,1%	6 14,6%	4 10,5%	6 15,4%	16 13,6%
Liczba odpow. błędnych na wszystkie pyt.	40 66,7%	41 54,0%	81 59,6%	33 89,2%	28 58,[illegible]%	28 73,7%	30 83,3%	119 75,0%	13 31,7%	19 50,0%	17 43,6%	49 41,5%
Brak odpow. lub "nie wiem"	16 26,7%	25 32,9%	41 30,2%	0 0%	0 0%	0 0%	0 0%	0 0%	0 0%	0 0%	0 0%	0 0%
Liczba odpow.na każde pytanie "odcinek BC"	5 8,4%	10 13,2%	15 11,1%	1 2,7%	22 45,8%	16 42,1%	13 36,1%	52 32,[illegible]%	8 19,5%	5 13,2%	7 17,9%	20 16,9%
Nie próbowało rozróżniać przypadków	7 11,6%	16 21,1%	23 16,9%	24 64,9%	7 14,6%	13 34,2%	19 52,8%	63 39,6%	3 7,3%	0 0%	2 5,1%	5 4,2%

wypukła". Te odpowiedzi zaliczyliśmy do poprawnych, choć nie określono w nich kształtu figury. Jak się więc okazało, pytania były tak sformułowane, że odpowiedź na nie nie musiała być jednoznaczna.

Niepoprawne odpowiedzi na pytanie A w klasie VI i VII /zestawienie I/ świadczą natomiast nie tylko o zupełnym niezrozumieniu przez tych piętnastu uczniów terminu "wspólna część", ale o ogólnym zamieszaniu w ich geometrycznych pojęciach i skrajnym werbalizmie. Oto przykłady odpowiedzi tego rodzaju: "Wspólna część tych kwadratów jest: mają jednakowe kąty jeden kwadrat jest mniejszy od drugiego nie leżą na jednej prostej" /kl. VII/.

"Wspólną częścią tych kwadratów jest figura podobna. Dlatego, gdyż kąty tych kwadratów są równe. I odpowiednie punkty tych kwadratów leżą na tej samej prostej" /kl. VII/.

"Wspólną częścią tych kwadratów jest figura ośmiokąt". /kl. VII/.

"Wspólna część tych kwadratów jest taka, że te kwadraty są narysowane przez jednokładność. Kwadrat mniejszy jest powiększony o 2/1 albo kwadrat większy jest pomniejszony przez jednokładność o 1/2" /kl. VII/.

"Wspólną częścią tych kwadratów jest figura jednokładności" /kl. VII/.

"Wspólną częścią tych kwadratów jest kwadrat" /kl. VI/.

"Wspólna część tych kwadratów są kąty" /kl. VI/.

"Kwadraty tworzą siedem kątów" /kl. VI/.

Oprócz tych piętnastu przypadków w szkole podstawowej i jednego w klasie $VIII_6$ oraz dwunastu o innym charakterze w klasie $VIII_7$, pozostali uczniowie wykazali odpowiedzią na pytanie A/, że interpretują praktycznie termin "wspólna część dwóch figur" poprawnie i bez trudności wtedy, gdy wyznaczenie takiej wspólnej części nie wymaga ani rozumowania, ani stosowania szczególnych operacji, gdy tę wspólną część dostrzega się po prostu wizualnie lub można łatwo otrzymać przez "zakreskowanie" obszaru.

W odpowiedziach uczniów klasy $VIII_7$ zauważymy nawet coś więcej, ponieważ wypowiedzi w rodzaju: "jeżeli kwadraty są puste, to wspólna ich część składa się z dwóch punktów, jeżeli pełne, to jest trójkątem - figurą wypukłą" wymagała już pewnej "mnogościowej" analizy danych zadania.

W klasach VI i VII wymieniło trójkąt jako wspólną część dwóch kwadratów 87,5% uczniów, ale aż 90% uczniów nie umiało zdać sobie sprawy z wspólnej części dwóch półprostych, choćby tylko w jednym z przypadków, ale wskazywało niewłaściwe odcinki i półproste, albo nawet wymieniło inne figury. Oto przykłady odpowiedzi tego rodzaju na pytanie B/u niektórych uczniów, którzy na pytanie A/ dali odpowiedź rozsądną:

Wspólna część danych półprostych:

"jest kątem półpełnym" /kl. VII/.

"tworzy łamaną niezamkniętą, której boki leżą na jednej prostej" /kl. VI/.

"jest trójkątem prostokątnym" /kl. VI/.

"tworzy kąty przyległe" /kl. VI/.

"po zakrzywieniu stanowi trójkąt" /kl. VI/.

"są to dwusieczne kąta" /kl. VI/.

"z tej prostej podzielonej na odcinki możemy utworzyć łamaną zamkniętą" /kl. VI/.

"jest kątem półpełnym jego wspólnym ramieniem i przedłużeniem. I że jest odcinkiem, który ma 4 punkty"/kl.VI/.

"jest kwadrat" /kl. VII/.

Jedna z uczennic /kl. VI/ zamiast odpowiedzi formułuje pytanie: "Czy półprosta jest figurą"?;druga /kl. VII/ stwierdza: "Figura nie może być wspólną częścią na prostej".

Po przeprowadzeniu badania w kl. VI i VII zauważyliśmy, że w wielu przypadkach uczniowie zamiast szukać wspólnej części półprostych szukali wspólnej części odcinków oznaczonych tymi samymi literami, którymi oznaczono półproste, i na tak zmienione pytania dawali odpowiedzi poprawne. Aby usunąć jeszcze i te możliwe nieporozumienia, przypomniano na wstępie badania w klasach ósmych "tradycyjnych" sens zwrotu "półprosta AB" - /półprosta o początku A przechodząca przez punkt B/. Wyjaśnienie to jednakże, jak stwierdzamy na podstawie zestawienia, niewiele pomogło. W klasach eksperymentalnych było ono niepotrzebne. Uczniowie posługiwali się tu bowiem sprawniej symbolami.

W klasach ósmych uczniowie podają, jako wspólne części dwóch półprostych, półproste, odcinki lub punkty, z jednym wyjątkiem: "AC i BC to trójkąt, AC i DB to czworokąt, BC i AD to trapez, BC i DA to trapez". Jak wynika z zestawienia II wszyscy uczniowie klas "tradycyjnych" rozpoznają trójkąt jako wspólną część kwadratów, ale aż 75% uczniów tych klas nie odpowiada poprawnie choćby na jedno pytanie B/, /mimo zastosowania przez nas "ulgowej" oceny odpowiedzi/. 39,6% uczniów w ogóle nie uważa, że trzeba dać na każde z pytań osobną odpowiedź, ale formułuje jedną ogólnikową odpowiedź na wszystkie przypadki; 32,8% uczniów wymienia błędnie w każdym przypadku jako wspólną część półprostych odcinek BC. Tłumaczyć to można bądź tym, że odcinek BC stanowi środkową część rysunku, a więc jest najłatwiej dostrzegany wizualnie /ten przypadek zachodził u uczniów, którzy w ogóle nie rozróżniali przypadków i dawali od razu krótką i jedną odpowiedź "odcinek BC"/, bądź tym, że uczniowie rozważali odcinki zamiast półprostych. To ostatnie stwierdzono u uczniów badanych indywidualnie. Na cztery odpowiedzi zupełnie poprawne w klasach "tradycyjnych" trzy przypadają na jedną klasę, uznaną ogólnie przez szkołę, jak również przez obserwatora uczestniczącego w normalnych lekcjach, za zespół uczniów wyjątkowo zdolnych. Niemniej i w tej klasie tylko 6,2% uczniów dało odpowiedzi poprawne na co najmniej trzy z postawionych im pytań. Wśród pozostałych /9 odpowiedzi poprawnych na dwa pytania i osiem odpowiedzi poprawnych na jedno pytanie/, pięć - to prawdopodobnie odpowiedzi poprawne z przypadku. Aż 22 uczniów /45,8%/ tej zdolnej klasy odpowiedziało na wszystkie pytania "odcinek BC".

Pięciu uczniów w dwóch różnych klasach odpowiada:

"Nie jest żadną figurą, gdyż są to odcinki"; "żadną - jest odcinkiem"; "o ile odcinek jest figurą, to wspólna część półprostych jest odcinek"; "jest odcinek /jeżeli odcinek jest figurą/"; "wspólna część tych półprostych jest prosta a ponieważ jest ograniczona jest odcinkiem".

W klasach eksperymentalnych procent odpowiedzi poprawnych na pytanie B/ jest wyższy /26,3% odpowiedzi poprawnych na co najmniej trzy pytania wobec 3,7% w klasach "tradycyjnych"/.

Jeżeli weźmiemy jednak pod uwagę, że pojęcie wspólnej części dwóch figur było w klasach eksperymentalnych wyjaśnione i ilustrowane na przykładach oraz że w szczególności w związku z porządkowaniem punktów prostej i pojęciem półprostych zgodnych i niezgodnych rozważono zawieranie się jednej półprostej w drugiej, procent odpowiedzi poprawnych musimy tu uznać także za bardzo niski. Aż 41,5% uczniów nie umiało odpowiedzieć poprawnie ani na jedno pytanie B/. Natomiast z rysunków i prób wykonywanych przez uczniów oraz z obserwacji ich w toku pracy wynika, że inaczej, rozsądniej, z większym zrozumieniem zabierali się oni do poszukiwania odpowiedzi na postawione im pytania niż ich koledzy z innych klas. Tylko 4,2% uczniów nie próbowało tu analizować osobno poszczególnych przypadków /wobec 39,6% w klasach tradycyjnych/. Rozumieli oni na ogół pojęcie "wspólnej części dwóch zbiorów", ale gubili się przy wyznaczeniu jej w przypadku nieograniczonych zbiorów punktów zawartych w jednej prostej.

O ile większe trudności napotkali ci uczniowie w przypadku B niż w przypadku A, ilustruje następująca wypowiedź ucznia kl. $VIII_5$:

A/ "Wspólną częścią tych kwadratów jest trójkąt /P/. Figura P jest figurą ograniczoną. Jeżeli tym górnym kwadratem będziemy obracać, to wspólną częścią może być inna figura np. prostokąt".

Odpowiedź poprawna, dowodząca pełnego zrozumienia.

B/ "Odcinek BC" /odpowiedź błędna i tylko na pierwsze pytanie, z reszty uczeń rezygnuje/.

W przeprowadzonych dodatkowo sporadycznie badaniach w formie indywidualnej rozmowy z czterema uczniami kl.VII i sześcioma kl. VIII ujawniły się te same trudności. Na pytanie A odpowiadano na ogół bez wahania i poprawnie. W przypadku B niezależnie od poziomu ucznia i jego oceny z matematyki potrzebne było naprowadzanie go na właściwą drogę, przyjmowane z pewnym oporem i zdziwieniem.

Dla zobrazowania tych ogromnych trudności, na jakie napotykali uczniowie przy rozwiązywaniu zadania B, streścimy jeden z protokołów badań indywidualnych.

Badany /kl. VIII; uczeń średni/ rozwiązuje bez wahania poprawnie zadanie A. Następnie, odpowiadając na pytanie B mówi: "AC, to jest odcinek, BC jest odcinkiem. AC, DB, BC, AD, BC, DA - odcinki z tym, że AC = AB + BC i DB = DC + CB, AD = AB + BC + CB, DA = DC + CB + BA".

Eksperymentator zadaje pytanie: "Co rozumiesz przez półprostą AC?"

Odpowiedź: "że jest to linia, która jest ograniczona z jednej strony punktem, a w drugą stronę może się przedłużać w nieskończoność".

Na polecenie badany prawidłowo pokazuje półprostą AC.

Pytanie: "Co rozumiesz przez półprostą BC?"

Odpowiedź: "Na tej linii jest odcinkiem".

Pytanie: "Pytam o półprostą BC".

Odpowiedź poprawna.

Eksperymentator poleca powrócić do zadania 1.

Badany stwierdza: "Linia prosta, ponieważ nie jest ograniczona żadnym punktem".

Na polecenie ponownego zastanowienia się nad zadaniem 4 badany z wyraźnym wysiłkiem myślowym próbuje oddzielnie rysować półproste BC i DA. Gdy już wydaje się, że doprowadzi go to do poprawnego wyniku, zarzuca próby i z ulgą powraca do tego, co mówił na początku: AC = AB+ + BC itd.

Charakterystyczna jest tu niechęć i brak zaufania do zupełnie nowego dla ucznia rozumowania, które zastępuje on dowolnym powiązaniem otrzymanej na rysunku figury z niedawno przerabianym w szkole materiałem /suma odcinków/

Badania indywidualne potwierdziły też przypuszczenie, że niektórzy uczniowie rozumują poprawnie, biorąc dane w temacie zadania półproste za odcinki o tych samych nazwach. Świadczą o tym następujące dwie wypowiedzi:

Badany /kl. VIII, uczeń bardzo dobry/ początkowo podaje jako odpowiedź odcinek BC we wszystkich przypadkach. Sprawdza ponownie temat zadania i wykrzykuje:"Ach, to mają być półproste; to będzie półprosta".

Badana /kl. VIII, uczennica dostateczna/ przesuwa ołówkiem po odcinkach AC i BC i znajduje jako wspólną część odcinek BC. Podobnie postępuje we wszystkich pozostałych przypadkach.

W przypadkach, w których badany wykazywał zrozumienie pojęcia półprostej, próbowaliśmy jeszcze, czy trudność dotyczy rozumienia części wspólnej dwu figur, czy też polega na nieumiejętności lub niechęci do wykonania operacji prowadzących do wyniku. Eksperymentator na oczach badanego rysował więc dwie półproste jak na rys. 3a, a następnie dwie półproste jak na rys. 3b i za każdym razem polecał wskazać część wspólną tych półprostych.

Rys. 3a

Rys. 3b

Na pięć takich prób tylko jeden z badanych dał błędną odpowiedź na pytanie dotyczące rysunku 3a. Wszystkie pozostałe odpowiedzi były poprawne.

A więc wskazanie półprostych nie symbolem lecz ruchem w tych nielicznych badanych przypadkach usuwa trudności. U żadnego jednak z badanych indywidualnie nie zauważyliśmy prób samorzutnego "tłumaczenia" symboli w taki sposób. Celem badania było właśnie sprawdzenie, jak uczniowie samodzielnie, bez żadnych sugestii nauczyciela poradzą sobie z zadaniem. Na tak postawione pytanie otrzymaliśmy odpowiedź zupełnie jednoznaczną.

Na podstawie przedstawionych tabel II i III łatwo jest się zorientować - w przypadku klas ósmych - co do rozpiętości uzyskanych rezultatów w poszczególnych klasach, którą można ocenić porównując np. liczbę odpowiedzi całkowicie błędnych. Ta rozpiętość jest duża, ale dokładniejsze jej analizowanie nie wydaje się celowe wobec i tak znikomej liczby odpowiedzi pozytywnych w każdej klasie. Również porównanie procentowe odpowiedzi na poszczególne pytania B nie prowadzi - jak stwierdziliśmy - do ciekawszych wyników.

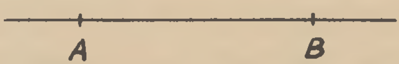
Zanim przejdziemy do sformułowania pewnych wniosków nasuwających się na podstawie omówionego tu badania, uzupełnimy otrzymane dane ubocznymi rezultatami innego fragmentu naszych próbnych badań. Problem, będący ich przedmiotem, nasunęło doświadczenie szkolne i obserwacja trudności uczniów związanych z konwencjonalnym przedstawieniem na rysunku nieograniczonych lub otwartych zbiorów punktów [1/]. Uczniowie klas VI, VII, VIII otrzymali

---

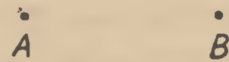
1/ Z.Krygowska: "O pojęciach pierwotnych w kursie systematyczno-dedukcyjnym geometrii w szkole", Rocznik Naukowo-Dydaktyczny WSP, Kraków, Zeszyt 7, 1958 r.

kolejno dwie kartki z rysunkami i pytaniami. Na pierwszej kartce zaznaczono tylko jeden punkt oznaczony literą O i sformułowano pytanie A_1: "Jaką figurę tworzą wszystkie punkty płaszczyzny oddalone od punktu O o 2 cm"? Druga kartka zawierała jeden z rysunków 4a, b, c oraz pytanie B_1: "Jaką figurę tworzą wszystkie punkty prostej AB położone bliżej A niż B"? 1/.

Rys. 4a



Rys. 4b



Rys. 4c

Jak widzimy konstrukcja pytań jest taka sama, jak w omawianym poprzednio badaniu.

Pierwsze pytanie miało na celu skoncentrowanie uwagi ucznia na sensie terminu "figura utworzona z wszystkich punktów mających pewną własność" w przypadku łatwym, bo mu już znanym. Chcieliśmy stwierdzić, czy uczniowie, którzy odpowiadają na to pytanie, będą też rozumieć poprawnie pytanie drugie. W przypadkach pozytywnych chcieliśmy stwierdzić, czy rysunek a/ wpłynie na ograniczenie rozważanych przez ucznia punktów tylko do odcinka AB, czy rysunek b/ pomoże uczniowi do dostrzeżenia, że do szukanej figury należą też punkty leżące poza odcinkiem AB oraz jaki wpływ na odpowiedź ucznia będzie miał nie-

1/ Zrezygnowano tu ze zwrotu: "jaką figurą jest zbiór wszystkich punktów..." po konsultacjach z uczącymi, którzy twierdzili, że będzie on dla uczniów niezrozumiały, ponieważ w szkole na lekcjach geometrii używa się terminu "zbiór" dopiero w rozdziale "miejsca geometryczne".

sugerujący ani odcinka ani półprostej rysunek c/. Poza tym interesowało nas, jak sobie wszyscy uczniowie poradzą z koniecznością wyłączenia punktu środkowego odcinka AB z półprostej,w której powinni byli dostrzec figurę spełniającą warunki zadania, i jak to w słowach opiszą.

Nie będziemy tu bliżej charakteryzować odpowiedzi w klasach VI i VII. Wynik badania był tu bowiem całkowicie ujemny. Podamy tylko następujące dane: Na 209 badanych uczniów na pierwsze pytanie odpowiedziało poprawnie 148 osób /70,8%/. Z tych 148 uczniów jednakże tylko 28 /18,9%/ wskazało półprostą jako szukaną figurę, 26 ogólnikowo /"półproste"/, a dwie rozumiały, że trzeba wyłączyć początek półprostej. Te dwie interesujące odpowiedzi dały: jedna uczennica kl. VI: "Punkty położone bliżej A niż B, a więc za symetralną tworzą półprostą" i jedna kl. VII: "Tworzą półprostą, której początkiem będzie punkt leżący bliżej niż środek odcinka AB w kierunku A". W ogromnej większości ci, którzy odpowiedzieli na pytanie pierwsze poprawnie, ilustrując niejednokrotnie swą odpowiedź rozsądnie rysunkiem, wykazali, że nie rozumieją zupełnie pytania drugiego mimo analogicznego sformułowania i podobnego problemu. W tej sytuacji żadnej zależności między rodzajem rysunku i odpowiedzią nie można było stwierdzić. Jako figury spełniające warunek zadania poza odcinkami prostymi i półprostymi wymieniano kąty, trójkąty, łamane, płaszczyznę, prostokąt itp.

W badanych klasach ósmych /grupy uczniów z trzech klas, dwóch szkół/ na 79 uczniów 68 /86,1%/ odpowiedziało poprawnie na pierwsze pytanie, ale z tych 68 tylko 14 /20,5%/ wskazało ogólnikowo na półprostą, jako na figurę czyniącą zadość warunkom zadania, nie wyłączając jej początku. Znalazła się tylko jedna wypowiedź, wprawdzie błędna: "nie tworzą żadnej figury, bo gdyby tworzyły odcinek, to nie miałby on jednego końca", ale świadcząca o tym, że odpowiadający właśnie na tę szczególną rolę środka odcinka zwrócił uwagę. 23 osoby spośród tych 68 /33,6%/ wskazało ogólnikowo na odcinek, jako na figurę spełniającą warunki zadania; na rysunkach uczniowie ci zaznaczali punkty położone bliżej A niż B na prostej AB tylko wewnątrz odcinka AB. Spośród wszystkich 18 uczniów, którzy otrzymali rysunek a/, ani jeden nie zwrócił uwagi na punkty leżące zewnątrz odcinka AB i ani jeden nie odpowiedział "półprosta". Uczniowie, którzy otrzymali rysunki b/ i c/, wskazywali zarówno na półproste, jak i na odcinki. Można by więc wysunąć bardzo ostrożnie hipotezę, że rzeczywiście na odpowiedzi uczniów, którzy rozumieli sens pytania drugiego, miał pewien wpływ rysunek, którym się posługiwali. Poza tym ogromna większość tych, którzy odpowiedzieli poprawnie na pytanie pierwsze, wykazała, podobnie jak uczniowie szkoły podstawowej, że nie rozumie zupełnie pytania drugiego.

Zacytujemy tu jeszcze protokół rozmowy z badanym indywidualnie /bardzo zdolnym do matematyki/ uczniem kl. VIII. Uczeń ten szukając odpowiedzi na pytanie drugie /rys. 3a/ wodzi ręką po symetralnej odcinka AB, kreśli następnie linię prostą przez punkty A,B i mówi: "Musi być jakieś rozgraniczenie. Te punkty będą tworzyć półprostą", zaznacza kilka punktów położonych bliżej A niż B tak na odcinku AB jak i zewnątrz odcinka AB i pisze:

"Tworzą półprostą, ponieważ musi być jakiś punkt /za połową odcinka AB/, który jest punktem leżącym bliżej A niż B i od tego punktu /łącznie z tym punktem/ zaczyna się półprosta w kierunku punktu A".

Pytanie badającego: "Gdzie ta półprosta się zaczyna"?

Odpowiedź: "Od tego punktu, który ..." /wahanie/

Pytanie: "Potrafisz wskazać"?

Odpowiedź: "Nie, bo punkt jest pojęciem pierwotnym. Jeżeli wezmę punkt poza połową, to on już będzie za daleko".

Pytanie: "Co myślisz mówiąc - pojęcie pierwotne"?

Odpowiedź: "To jest takie pojęcie, które nie istnieje w rzeczywistości, ale bez niego nie można obejść się w geometrii" /!/

Pytanie: "Jaki to ma związek z zadaniem"?

Odpowiedź: "Rzeczywiście nie, źle się wyraziłem".

Dwóch uczniów klasy VII i sześciu uczniów klas VIII zaprotestowało przeciwko zaliczeniu do figur geometrycznych figur zawartych w prostej np.

"Nie tworzą figury lecz proste" /VII/.

"Nie tworzą żadnej figury, tworzą punkty na prostej" /VII/.

"AB jest odcinkiem. Punkty na nim nie tworzą żadnej figury. Przez dwa punkty można poprowadzić tylko jedną prostą. Zadanie absurdalne" /VIII/.

Warto zauważyć w związku z tymi protestami, że według terminologii używanej w obowiązującym podręczniku 1/, punkt, prosta, odcinek i półprosta są figurami geometrycznymi. Czytamy tam: "Najprostszą figurą geometryczną

1/ Bolesław Iwaszkiewicz: "Geometria Elementarna", Warszawa 1960, PZWS.

jest punkt". "Linia prosta, zwana niekiedy krótko: prostą, jest figurą geometryczną, która ma jeden tylko wymiar..." [1]. Rysunek 12 w tym podręczniku zatytułowano "Przenoszenie figur" [2], rysunek przedstawia "przenoszenie"odcinka . Tę terminologię też stosuje się dalej konsekwentnie. Sformułowanie naszych pytań było więc zgodne z tą terminologią, z którą spotyka się lub powinien się spotykać uczeń w szkole.

4. Wnioski

Przeprowadzając wstępne badanie, chcieliśmy otrzymać pierwszą orientacyjną odpowiedź na dwa pytania podane w punkcie 2 tego artykułu.

Sądzimy, że mimo fragmentaryczności przeprowadzonego badania, jego wyniki pozwalają na sformułowanie takiej orientacyjnej odpowiedzi i sygnalizują pewien problem, który należałoby bliżej rozważyć i dokładniej zbadać.

1. Uczniowie 12-14 letni z klas "tradycyjnych", którzy poznali już pojęcie półprostej i posługiwali się nim wielokrotnie /ramię kąta, dwusieczna kąta/ i którzy wykazali, że praktycznie rozumieją termin "wspólna część figur", nie potrafili - poza nielicznymi wyjątkami - skojarzyć tych dwóch pojęć dla rozwiązania, zdawałoby się, prostego zadania w przypadku, gdy rozważane figury są nieograniczone i zawierają się w jednej prostej, a więc są trudniejsze do przedstawienia bezpośrednio na rysunku, oraz gdy jest trudniejsze wykonywanie w tej repre-

---

1/ Bolesław Iwaszkiewicz: "Geometria Elementarna", Warszawa 1960, PZWS, str. 6.

2/ J.w., str. 12.

zentacji pewnych operacji rysunkowych, którymi posługują się w innych przypadkach /np. zakreskowanie wspólnego obszaru dwóch kwadratów/. Bardzo wielu z nich "zapomniało" - w toku poszukiwania figury spełniającej warunki zadania - o nieograniczoności półprostej i wyznaczało /poprawnie/ wspólną część odcinków oznaczonych tymi samymi literami co półproste wymienione w temacie, zamiast wspólną część półprostych. Ten fakt "zapominania" o nieograniczoności niektórych podstawowych figur geometrycznych można zaobserwować i w innych sytuacjach 1/. Stwierdziliśmy analogiczne "zapominanie" w związku z zadaniem wyznaczenia zbioru punktów prostej AB położonych bliżej A niż B, gdy większość badanych uczniów nie umiała wyjść poza odcinek AB.

Że nie są to łatwe do przezwyciężenia trudności, dowodzą wyniki uzyskane w klasach eksperymentalnych, w których można się było spodziewać o wiele wyższego procentu odpowiedzi poprawnych ze względu na mnogościowe, od początku klasy VIII, traktowanie geometrii przez uczących w tych klasach.

Wielu uczniów nie umie oderwać pojęć geometrycznych, jako abstrakcyjnych schematów, od rzeczywistej "graficznej" przestrzeni rysunku, w której wykonują oni konkretne operacje na konkretnych przedmiotach złożonych z cząstek kredy, czy grafitu. Dla wielu uczniów geometria nie jest <u>teorią</u>, ale opisem.

Wydaje się również, że nie zdajemy sobie ciągle jesz-

1/ Z. Krygowska: "O pojęciach pierwotnych w kursie systematyczno-dedukcyjnym geometrii w szkole". Rocznik Naukowo-Dydaktyczny WSP, Zeszyt 7, Kraków 1958 r.

cze dostatecznie sprawy z tego, ile różnych trudności wiąże się dla ucznia z konwencjonalnym przedstawieniem na rysunku tak bardzo abstrakcyjnych tworów pojęciowych jak punkt, prosta, półprosta. Nie dość ostre rozgraniczenie od początku nauczania geometrii graficznego obrazu od tego, co ten obraz przedstawia, musi prowadzić do zasadniczych nieporozumień. A przecież, jeżeli uczeń ma prawidłowo rozumieć treść pojęć i twierdzeń geometrii, to powinien wyraźnie od początku zdawać sobie sprawę z umowności tej reprezentacji tak, jak zdaje sobie sprawę z umowności znaków na mapie od pierwszej lekcji geografii.

2. Tak zwane podstawowe utwory geometryczne, wprowadzane w początkowych rozdziałach tak propedeutycznego, jak i systematyczno-dedukcyjnego kursu geometrii są dla uczniów trudniejsze do ujęcia niż wiele pojęć geometrycznych definiowanych za pomocą tych właśnie podstawowych pojęć. To, co jest w przyjętym układzie naukowym pierwotniejsze i prostsze w porządku logicznym, nie musi być wcale pierwotniejsze i prostsze psychologicznie. Podstawowym utworom geometrycznym poświęca się zwykle w nauczaniu mało uwagi, uważając punkt, prostą, płaszczyznę, odcinek, półprostą za przedmioty wprawdzie abstrakcyjne, ale tak proste dla ucznia, że nie warto się przy nich dłużej zatrzymywać. Przeprowadzone przez nas badania, oraz obserwacje w czasie lekcji świadczą o tym, że tak nie jest w rzeczywistości. Wprawdzie rozumienie tych pojęć pogłębia i rozwija się w toku całego kursu geometrii, algebry i trygonometrii, bowiem kształtowanie się każdego pojęcia w świadomości ucznia nie jest jednorazowym aktem, ale niekończącym się procesem, niemniej wy-

daje się, że w początkowych rozdziałach geometrii za mało jest prostych ćwiczeń o charakterze mnogościowym i topologicznym, które od samego początku uświadomiłyby uczniowi pewne niedostrzegane zwykle przez niego stosunki geometryczne.

3. Rezultaty przedstawionego orientacyjnego badania są dla nas pouczające jeszcze z innego punktu widzenia. J.Piaget, charakteryzując okres rozwoju logicznej myśli dziecka, zwany przez niego okresem myślenia konkretnego, stwierdza: "ze względu na treść myśl konkretna podlega temu szczególnemu ograniczeniu, że nie jest ona zdolna do bezpośredniego uogólnienia na każdą treść" 1/. Chodzi tu o to, że dziecko w tym okresie może zupełnie poprawnie rozumować w obrębie pewnej dziedziny przedmiotów, ale nie umie przenosić tych samych operacji myślowych do analogicznych sytuacji w innej dziedzinie przedmiotów. Wśród uczniów odpowiadających na pytania było wielu takich /szczególniej w klasach VI i VII/, którzy rozumnie, z pełną świadomością odpowiadali na pytania A i A_1. Natomiast w przypadkach B i B_1 nie tylko nie umieli dać poprawnej odpowiedzi, co byłoby zrozumiałe wobec trudniejszej sytuacji, ale wykazali zupełne niezrozumienie tego, o co chodzi w samym pytaniu. Jest to uderzające, bo przecież obydwa pytania brzmiały zupełnie jednakowo, tylko odnosiły się do innych przedmiotów. Np. w przypadku A_1 uczeń reprezentuje na rysunku pewną liczbę punktów oddalonych od punktu O o 2 cm i stwierdza, że wszystkie ta-

---

1/ J.Piaget, B.Inhelder: "De la logique de l´enfant à la logique de l´adolescent", Presses Universitaires de France 1955, Chapitre XVI.

kie punkty tworzą figurę - okrąg. Ale, gdy przejdzie do pytania B_1, już nie rozumie sensu pytania: "Jaką figurę tworzą wszystkie punkty...". Podobnie w przypadku A uczeń rozumnie szuka figury zawartej w obu kwadratach,w wypadku B ten sam uczeń wcale takiej figury nie szuka i sens pytania rozumie widocznie inaczej, jeżeli odpowiada, że "wspólną częścią półprostych jest trójkąt prostokątny".

To spostrzeżenie rzuca światło na wiele różnych trudności, obserwowanych w nauczaniu matematyki i jest jeszcze jedną ilustracją tezy Piageta o "ograniczoności myśli konkretnej".

Wnioski natury dydaktycznej są tu oczywiste. Uwalnianie "myśli konkretnej" od tych ograniczeń odbywa się przede wszystkim przez ciągłą jej konfrontację z różnorodnymi, nie typowymi problemami, w ciągle zmieniających się, zaskakujących ucznia sytuacjach.

4. Ostatnia uwaga wiąże się również z zagadnieniem bardzo ważnym w nauczaniu. Ażeby dobrze zdawać sobie sprawę ze sposobu myślenia ucznia, z tego, jak on rzeczywiście rozumie to, co jest przedmiotem nauczania, nie wystarczy normalnie w szkole stosowane sprawdzanie wiadomości i umiejętności w typowych pytaniach i zadaniach.Potrzebne są właśnie ćwiczenia nietypowe i obserwacja ucznia znajdującego się w sytuacji trochę niezwykłej. Wiele naszych niepowodzeń w nauczaniu wynika z tego, że nie znamy naszych uczniów, że nie zdajemy sobie sprawę z tego, co myślą naprawdę, gdy wypowiadają gładko wyuczone formuły, lub gdy nawet rozwiązują biegle zadania. Zmieńmy trochę od czasu do czasu ten uregulowany tok rzeczy,

a dostrzeżemy, że gmach ich abstrakcyjnych, już w pewnej mierze przyswojonych - zdawałoby się - pojęć, jest bardzo niepewnie skonstruowany, że bardzo łatwo wszystko to traci równowagę, przekształcając się w świat niezrozumiałych dla nas nonsensów. Z tych patologicznych aspektów i niebezpieczeństw nauczania matematyki trzeba sobie bowiem zdawać sprawę.

Résumé

Contribution aux recherches sur la compréhension des notions géométriques fondamentales chez les élèves

L'article donne le compte-rendu d'un fragment de la recherche préliminaire sur la compréhension opératoire des notions de la demidroite et de l'intersection de deux demidroites chez 136 élèves de différentes classes de la VI^e et VII^e, 159 éléves de quatre classes de la VIII^e, où a été donné un cours traditionnel de la géométrie, et 105 élèves de trois classes de la VIII^e, qui ont suivi un cours expérimental de la géométrie. Les élèves devaient répondre par écrit à deux questions suivantes: A/ Quelle figure constitue l'intersection de deux carrés représentés par le dessin 1? B/ Quelle figure constitue l'intersection de deux demidroites 1/ AB et CD, 2/ AC et DB, 3/ BC et DA, 4/ BC et DA, les points A,B,C,D étant pris sur la même droite dans l'ordre représenté par le dessin 2?

On a constaté que 11% d'élèves de classes de la VI^{e} et de la VII^{e} n'ont pas compris la question A. Parmi les autres qui ont répondu à cette question immédiatement et correctement, 90% ne pouvaient se tirer d'affaire concernant la question B/ manque de réponse, réponse "je ne sais pas", réponses fausses/, quoique ces élèves aient déjà acquis une certaine habilité dans la résolution des problèmes arithmétiques et géométriques plus compliqués. 100% d'élèves des classes traditionnelles de la VIII^{e} ont répondu immédiatement et correctement à la question A, mais jusque 75% de réponses à toutes questions B etaient erronées. Dans les classes expérimentales 11% d'élèves ont discuté les cas des carrés "pleins" ou "vides" /sans intérieur/ et ont commis à cause de cette complication quelques fautes. Les autres ont donné une réponse immédiate et correcte à la question A. 41% d'élèves de classes expérimentales ont donné les réponses fausses concernant toutes les questions B. Après le contrôle complémentaire individuel on a constaté que: 1/ beaucoup d'élèves "oublient" que la demidroite est une figure "illimitée"; leurs réponses seraient souvent justes si on remplaçait les demidroites par les segments; les élèves connaissent la définition de la demidroite et ont conscience de ce qu'elle est "illimitée", mais cette conscience n'est pas active et opératoire; 2/ la pensée et l'imagination géométrique de l'élève sont souvent limitées par "l'espace graphique" où l'élève agit concrètement; les conventions du dessin et son caractère de l'objet-symbole entrainent certaines difficultés; 3/ les élèves ne sont pas familiarisés avec les figures "illimitées" d'une seule dimension dans le même degré qu'avec les autres figures /le carré, le triangle etc/; malgré les définitions formulées dans leurs manuels pour certains élèves, p.ex. la droite et la demidroite ne sont point des "figures"; 4/ la pensée de certains élèves reste encore à l'âge de 13-14 ans demi-concrète et se présente - selon J.Piaget - par "cette particularité limitative de n'êstre pas immédiatement généralisable à tout le contenu"; les élèves qui "comprenaient" très bien la notion d'intersection de deux ensembles dans un cas, ne comprenaient pas même la question concernant cette notion dans un autre cas.

La confrontation des élèves avec des problèmes même banaux et très simples apparemment, mais qui ne sont pas ordinaires et consacrés par la tradition scolaire, nous révèle les aspects pathologiques de l'enseignement des mathématiques; on doit prendre ces aspects en considération.

Краткое изложение

Примечание к изучению понимания учениками основных геометрических понятий

Статья дает фрагмент вступительного изучения оперативного понимания понятий полупрямой и интерсекции двух полупрямых I36 учениками разных VI и VII классов, I59 учениками из четырех VIII классов /эти классы прошли традиционный курс геометрии/, I05 учениками из трех VIII классов,прошедших экспериментальный курс по геометрии.

Ученики должны были дать письменный ответ по двум вопросам: А/ Какая фигура получается при интерсекции двух квадратов, изображенных на рисунке I? В/ Какая фигура получается при интерсекции двух полупрямых I/ АВ, CD, 2/ AC, DB, 3/ BC, AD, 4/ BC, DA? /Точки A, B, C, D размещены на прямой по порядку, изображенному на рисунке 2/.

Констатировано, что II% учеников VI и VII классов не поняло вопроса А. Среди других учеников, тех, которые ответили на вопрос А, немедленно и правильно, 90% не могли преодолеть вопроса В /совсем не отвечали, или говорили "не знаю", или давали ложные ответы/, хотя эти ученики приобрели уже некоторую ловкость в решении сложных арифметических и геометрических задач. I00% учеников традиционных классов ответило правильно и немедленно на вопрос А, но почти 75% ответов на все вопросы Б было ложных. В экспериментальных VIIIх классах II% учеников дискутировали случаи квадратов "полных" или "пустых": получились несколько ошибочных ответов. Другие давали не медля точные ответы по вопросу А, но почти 4I% ответов по вопросам Б было ложных.

После дополнительного индивидуального контроля сконстантировано, что:

I/ Многие ученики забывают, что прямая и полупрямая безграничны: ответы их часто могли бы быть точными, если бы полупрямые заменить отрезками. Ученики знали определение полупрямой и знали, что она неограниченная, но это понимание не было оперативным.

2/ Мысль и воображение учеников часто ограничены были "пространством рисунка", в котором ученик действует конкретно; конвенции рисунка и его характер объекта-символа влечет за собой некоторые трудности.

3/ Ученикам чуждо понятие неограниченных фигур одного измерения в такой ступени как другие фигуры /квадрат, треугольник/. Помимо определений, формулированных в учебниках, для некоторых учеников прямая и полупрямая - не фигуры.

4/ Мышление некоторых учеников в возрасте I3--I4 лет остается еще полуконкретным и представляет по Ж. Пяжету "эту ограничивающую способность, что не может обобщать беспосредственно всякого содержания". Ученики, которые имели очень хорошее понятие интерсекции двух множеств в одном случае - в другом этого понятия уже не сознавали.

Проблемы простые и даже банальные повидимому, обычно не приняты школьной традицией, обнаруживают патологические виды обучения математике. Эти виды должны непременно быть приняты во внимание.