Stanisław Serafin

O PEWNYM SPOSOBIE UJĘCIA REPETYTORIUM MATEMATYKI ELEMENTARNEJ NA I ROKU STUDIÓW WSP

Mamy już za sobą czas, w którym znaczna ilość kandydatów na studia /np. w WSP/ nie mogła sobie w żaden sposób poradzić z nierównościami kwadratowymi, czy przekształcaniem prostych wyrażeń algebraicznych. Obecnie słuchacze pierwszego roku w zasadzie potrafią rozwiązywać zadania rachunkowe w zakresie szkolnego minimum. Jednakże ich przygotowanie z matematyki do studiów /nie tylko zresztą matematycznych/ pozostawia nadal wiele do życzenia. Stwierdza się np. powszechnie, że słuchacze ci nie mają wyrobionych umiejętności dowodzenia /prostych nawet/ ogólniejszych twierdzeń. Nie bardzo zresztą zdają sobie sprawę, co to znaczy udowodnić twierdzenie. Stają zupełnie bezradni wobec zagadnienia sformułowanego środkami szkolnymi, którego rozwiązanie nie wymaga również wykraczania poza materiał szkolny, a które w szkole nie było specjalnie omawiane. Wystarczy np. zapytać, czy potęgowanie jest rozdzielne względem mnożenia, aby się przekonać, że słuchacze, którzy znają te wszystkie terminy nie mają pojęcia, jak się do odpowiedzi zabrać. Ale zapytani jak się potęguje iloczyn, w większości odpowiedzą, że podnosi się każdy czynnik do potęgi. Słuchacz, który bądź co bądź wie, że funkcje trygonometryczne są okresowe i zna inne własności tych funkcji potrafi odpowiedzieć, że $\sin x > \frac{1}{2}$, gdy $x > 30^{o}$. Pomijając ewentualną bezmyślność, która niewątpliwie często jest przyczyną błędnej odpowiedzi, stwierdzić trzeba i stwierdzają to sami słuchacze w przeprowadzanych ankietach,że nie wynoszą ze szkoły takiego spojrzenia na problemy szkolnej matematyki, które pozwoliłoby im swobodniej obracać się w kwestiach wprost w szkole nie omawianych. Ogólne pojęcia, których nazwy poznali, stały się raczej balastem obciążającym pamięć, niż narzędziem, przy pomocy którego można by sobie czasem poradzić. Gdyby np. rozwiązywanie nierówności powiązane było w szkole istotnie z własnościami funkcyj, to słuchacz nie stawałby bezradny przed nierównością $\log_{0,5}/x^2-1/ > 2$. Wobec malenia funkcji $\log_{0,5} u$ sprowadziłby daną nierówność do układu nierówności kwadratowych, a te na podstawie monotoniczności funkcji kwadratowej w odpowiednich przedziałach, rozwiązałby bez stosowania szablonu z rozkładem na czynniki. Tymczasem w większości wypadków otrzymujemy odpowiedź "takich nierówności u nas nie było". Poważną przyczyną takiego zjawiska jest niewątpliwie obecny układ programu szkolnego, w którym zagadnienia takie same ze względu na istotną strukturę rozumowania są fragmentarycznie porozrzucane po różnych klasach /np. równania od klasy VIII, nierówności dopiero w klasie XI w algebrze, podczas gdy nierówności i twierdzenia o nich dla odcinków muszą być stosowane już w klasie VIII/. W programie za mało kładzie się nacisku na to, by w powtórkach robionych na końcu każdej klasy dokonać przeglądu całości materiału /od klasy VIII poczynając/ i wyłowić wszystkie szczególne zastosowania /modele/ ogólnych pojęć, jak zbiór, porządek, funkcja, warunek zdaniowy, własność, których nazwy były używane. Za mało również zwraca się uwagę na ujawnienie wspólnej struktury rozumowań w kilku zagadnieniach /np. równość zbiorów przy miejscach geometrycznych, zapasie funkcji, wykresie funkcji itp. lub takie samo rozumowanie przy rozwiązywaniu równań metodą analizy starożytnych i rozwiązywaniu zadań konstrukcyjnych/. Prowadząc od kilku lat ćwiczenia z Repetytorium Matematyki Elementarnej na I roku studiów próbowałem ukazać słuchaczom w powtarzanym materiale idee, które ułatwią im przejście do matematyki wyższej /ogólne pojęcia i rozumowania, dostrzeganie analogii problemów, schematyzowanie/. Ponieważ ostatnio miałem również wykład tego przedmiotu, zastosowałem kilka pomysłów syntetycznych ujęć w powtórce matematyki szkolnej, które tu właśnie chcę przedstawić. Powtórka objęła znacznie szerszy materiał niż tu będzie wymieniony. Pomijam bowiem to, co służyło tylko przypomnieniu poznanych w szkole wiadomości rzeczowych czy zwykłemu ich poszerzeniu. Powtórka dotyczyła zasadniczo materiału algebry, ale z uwagi na jej założenie, ogólne pojęcia uwidaczniano w całym materiale szkolnym - często ku dużemu zdziwieniu słuchaczy.

Program ułożony został w szczególny sposób - mianowicie zagadnienia omawiane były poprzez cały materiał szkolny bez uwzględniania kolejności,w jakiej opracowano je w szkole średniej. Utrudniało to czasem ścisłą wypowiedź jakiejś definicji względnie czyniło niemożliwym ścisły - z punktu widzenia konstrukcji powtórki - dowód jakiegoś twierdzenia.

Oto szkic tego programu:

1. Działania w zbiorze liczb rzeczywistych, ich własności.

2. Równości i nierówności liczbowe. Twierdzenia o równościach i nierównościach w związku z działaniami.

3. Funkcje, podstawowe ich własności; przegląd funkcji szkolnych i ich własności.

4. Równania i nierówności warunkowe, metody rozwiązywania.

Przedstawię obecnie przebieg realizacji powtórki podając na końcu kilka ogólnych uwag.

1. <u>Działania w zbiorze liczb rzeczywistych</u>

Informacyjne przypomnienie wiadomości o rozwoju pojęcia i klasyfikacji zbioru liczb rzeczywistych było treścią wykładu wstępnego. Po przypomnieniu definicji czterech działań w zbiorze liczb względnych /działania w zbiorze liczb rzeczywistych bezwzględnych przyjęto za dobrze znane/ sformułowano ogólną definicję działania /dwuargumentowego/ w zbiorze liczb rzeczywistych. Nazwano mianowicie działaniem przyporządkowanie parom liczbowym /z danego zbioru par/ dokładnie po jednej liczbie. Zilustrowano tę definicję działaniami nie rozważanymi w szkole, a interesującymi z punktu widzenia teorii działań;

a/ NWD, czy NWW pary liczb naturalnych,

b/ dodawanie i mnożenie zredukowane /np. mod 9/,

c/ średnia arytmetyczna pary liczb rzeczywistych,

d/ maksimum, czy minimum pary liczb rzeczywistych [1/].

1/ Używano oznaczenia NWW /a,b/, max /a,b/ itd.

Wychodząc od przykładów dodawania i mnożenia sformułowano ogólnie własności działań: przemienność, łączność, prawo- czy lewostronną rozdzielność danego działania względem innego.

Wymienione wyżej i inne jeszcze działania posłużyły do interesujących ćwiczeń w rozumieniu istoty tych własności, które choć znane ze szkoły dla podstawowych działań, nie były głębiej przyswojone. Zauważono ogólnie, że działanie przemienne i rozdzielne względem drugiego z którejś strony, jest też rozdzielne względem niego i z pozostałej strony. Niespotykaną w szkolnych przykładach własność mają działania NWW i NWD, gdyż każde z nich względem pozostałego jest rozdzielne, a ponadto są przemienne i łączne. Przypomniane zostały definicje kolejnych działań znanych ze szkoły: dodawania, odejmowania, mnożenia, dzielenia, pierwiastkowania, potęgowania dowolnym wykładnikiem, logarytmowania. Traktowano je wyraźnie jako działania dwuargumentowe z tym, że ograniczenia na pierwszą i drugą liczbę pary na ogół nie są jednakowe. Ustalono, zresztą w sposób umowny [1], rolę pierwszej i drugiej liczby pary, na której wykonywano działanie, wobec nazw znanych ze szkoły. Gdy działanie wykonywane było na parze /a,b/, to

w wypadku odejmowania a oznaczało odjemną, b odjemnik,
" " potęgowania a " podstawę, b wykładnik,
" " dzielenia a " dzielną, b dzielnik,

1/ Ponieważ nie wprowadzono ogólnego pojęcia działania odwrotnego.

w wypadku pierwiastkowania a oznaczało wykładnik,
b liczbę pierwiastkowaną.

" " logarytmowania a oznaczało podstawę, b liczbę logarytmowaną.

Wydaje się, że uczeń szkoły średniej widzi w pojęciu pierwiastka, czy logarytmu coś niezwykłego i nie bardzo zdaje sobie sprawę z tego, że są to /jak i cztery arytmetyczne/ działania dwuargumentowe, dla których po ich zdefiniowaniu trzeba ustalić regułę kolejności/ ułożyć te działania względem poprzednio znanych/ i których własności trzeba przebadać. W omawianym tu kursie Repetytorium sprawę znanych ze szkoły twierdzeń o działaniach potraktowano w sposób następujący:

a/ przy kolejnych działaniach odnawiano /przypominano ku zdziwieniu słuchaczy, że to potrzebne/ regułę kolejności działań,

b/ badano, czy działanie jest przemienne,

c/ obrawszy uporządkowaną trójkę liczb /a,b,c/ oraz działanie ○ budowano wyrażenie a ○/b○c/ [1], a następnie wybierając dwa działania ○ i □ budowano wyrażenia /a ○ b/ □ c, a □ /b ○ c/, /a □ b/ ○ c, a ○ /b □ c/. Stawiano sobie za zadanie przebadać, czy w wymienionych wyrażeniach można zmienić kolejność działań bez zmiany ich wartości, względnie zastąpić równymi im wyrażeniami zbudowanymi z tych samych liczb, ale być może innych działań, przy czym równość ma zachodzić dla tych trójek, dla których wszystkie wyrażenia /w tej równości/ mają sens. Z budowy wyrażeń widać oczywiście, że istniejące prawa

---

1/ O trójce /a, b, c/ zakłada się, że wyrażenia zbudowane mają sens.

łączności i rozdzielności działań zostaną na tej drodze uchwycone. Tak więc otrzymuje się wniosek, że dzielenie jest prawostronnie rozdzielne względem dodawania,ale nie jest względem niego rozdzielne lewostronnie; pierwiastkowanie jest lewostronnie rozdzielne względem mnożenia czy dzielenia, ale nie jest względem nich rozdzielne prawostronnie itp. Znane ze szkoły wzory słuchacz odczytywał jako wyrażające rozdzielność, lub nierozdzielność działania względem innych. Własności działań zostały tu ujęte w jeden ogólny schemat. Ich odkrywcą i twórcą może stać się słuchacz /uczeń w szkole/. W ćwiczeniach budowano też wyrażenia, dla których ze szkoły nie znano specjalnych wzorów i stwierdzano, że można czasem zastąpić je innymi, ale przy tak silnych założeniach o liczbach a, b, c, że formułowanie takich twierdzeń byłoby nieekonomiczne. Wspomnieć trzeba, że twierdzenia o działaniach słuchacze wypowiadali w krótkich szkolnych sformułowaniach, w postaci pełnych okresów warunkowych, a także w postaci reguł roboczych. Dowody twierdzeń o działaniach prowadzone były bez żadnych sztuczek oznaczeniowych, a wszystkie miały tę samą myśl przewodnią, mianowicie bezpośrednie wykorzystanie definicji rozważanego działania.

Ten sposób dowodzenia stosowano konsekwentnie w ciągu całej powtórki. Wydaje się bowiem, że dowód oparty bezpośrednio o definicję ułatwia słuchaczowi operowanie pojęciem. Tymczasem, jeśli w dowodzie używa się zbędnych nowych liter /oznaczeń/, to ginie jego myśl przewodnia i pojawiają się sztuczki.

Odnośnie logarytmowania omówiona została ogólna teoria cechy i mantysy liczby rzeczywistej i w związku z tym cechy i mantysy logarytmu z dowolną podstawą. Ogólnie omówiono sposób wyznaczania cechy i mantysy logarytmu o dowolnej podstawie i sprawę tablic logarytmów.

2. Równości i nierówności liczbowe

Powtórkę o równościach i nierównościach liczbowych rozpoczęto od ogólniejszych rozważań w związku z relacjami i ich własnościami. Posługując się przykładami z praktycznego życia oraz relacjami występującymi w szkolnym kursie matematyki, rozważano relacje jako takie zbiory par elementów, w których pierwszy element względem drugiego w parze ma pewną własność /pozostaje do niego w określonym stosunku/. Uwzględniając znane własności przykładowo wymienianych relacji sformułowano określenia zwrotności, przechodniości, symetrii i antysymetrii oraz spójności relacji i przebadano, które ze znanych ze szkoły relacji mają wymienione własności.

Równość rozumiano, od początku zresztą, w sensie identyczności. Przyjąwszy definicję mniejszości taką, jak w klasie XI, udowodniono, że relacja ta jest antysymetryczna, spójna i przechodnia. Wyjaśniono, że te własności mniejszości sprawiają, iż porządkuje ona zbiór liczb rzeczywistych. Przypomniano tu od razu zagadnienie uporządkowania zbioru punktów prostej, o którym w szkole średniej - jakkolwiek bardzo mało i niezbyt precyzyjnie - mówiono. Jednolicie potraktowano "własności równości i nierówności" związane z działaniami. Dla równości jest to problem niezmienniczości wyniku działania, jeśli wartości argumentów zastąpione zostaną równymi im liczbami. Mianowicie dla każdego działania o i dwóch par liczbowych /a,b/ i /c,d/, jeśli a $\circ$ b ma sens, to układ równości a = c i b = d pociąga równość a $\circ$ b = c $\circ$ d. Dla nierówności sprawa się nieco komplikuje; trzeba tam bowiem zająć się trzema zagadnieniami:

1. Dane są pary liczb /a,b/, /a,c/ obie z obszaru wykonalności działania $\circ$, przy czym liczby b i c są nierówne /np. b > c/. Należy zbadać, czy wyniki a $\circ$ b oraz a $\circ$ c są też nierówne zawsze tak samo /czy zawsze przeciwnie/ jak liczby b i c. Jeśli ze szczegółowych przykładów widać, że tak ogólnego wniosku wysnuć nie można, to należy zbadać jakie możliwie najsłabsze założenia dołączone do podanych pozwalają już na sformułowanie tezy /i udowodnienie twierdzenia/.
2. Zagadnienie analogiczne dla par /a,b/ i /c,b/.
3. Dane są pary liczbowe /a,b/ i /c,d/, obie z obszaru wykonalności działania $\circ$. Zakładamy, że pierwsze liczby tych par są nierówne /np. a > c/ i drugie liczby są też nierówne /np. b < d/. Podobnie jak w 1/ chodzi o to, czy te założenia pozwalają już stwierdzić określoną nierówność między wynikami a $\circ$ b i c $\circ$ d.

Jest widoczne, że na tej drodze uzyska się wszystkie twierdzenia o nierównościach liczbowych znane ze szkoły. Otrzymuje się też ciekawe twierdzenia użyteczne w dalszych studiach, na które niejednokrotnie bez wyraźnego ich sformułowania powoływano się w szkole. Takie postawienie zagadnienia "podstawowych własności nierówności" wydaje się być kontynuacją badania, jak zmienia się wynik dodawania, czy mnożenia ze zmianą poszczególnych argumentów, przeprowadzanego w pierwszych klasach szkoły podstawowej. Zastosowanie takiego postępowania w szkole z tym, że wymienione zagadnienia omawianoby dla każdego działania zaraz po jego wprowadzeniu, dałoby materiał do interesujących ćwiczeń na dowodzenie i ułatwiłoby dokładniejsze przyswojenie uczniom własności działań; uczniowie sami odkrywaliby twierdzenia. Umożliwiłoby to również omawianie i rozwiązywanie nierówności warunkowych równolegle z równaniami. Nieco więcej czasu poświęcono badaniu nierówności przy potęgowaniu wykładnikiem wymiernym. Chodziło bowiem o to, by stworzyć możliwie rzetelną podstawę dla definicji potęgi o wykładniku niewymiernym i jej najprostszych zastosowań w dowodzeniu twierdzeń. Definicja potęgi o wykładniku niewymiernym była uściśloną wersją definicji podawanej w szkole. Dla potęg z wykładnikiem rzeczywistym udowodniono twierdzenia wynikające z 1/, gdyż decydują one o monotoniczności funkcji wykładniczej.

Omówiono również zagadnienia związane z nierównościami, w których występuje wartość bezwzględna.

3. Funkcje, ich podstawowe własności

Wychodząc od różnych życiowych sytuacji tworzono zbiory par elementów, których rozważenie w życiu samo się nasuwa. Wśród tych zbiorów par wyróżniono takie, w których nie występują dwie pary o tym samym pierwszym elemencie, a różnych drugich. /Np. zbiór par, w których pierwszym elementem jest wóz tramwajowy, a drugim numer linii, po której o określonej porze ten wóz jeździ/. Takie zbiory par elementów nazwano funkcjami.

Definicja funkcji brzmiała więc tak: funkcją określoną w zbiorze A o wartościach w zbiorze B jest taki zbiór par elementów, że każdy element zbioru A występuje i tylko raz jako pierwszy w parze, zaś każdy drugi element jest elementem zbioru B. Dla dowolnej funkcji wprowadzono określenia: pola /zbioru określoności/, wartości funkcji i zapasu /zbioru wartości/ oraz funkcji różnowartościowej. Dokonano następnie przeglądu tych fragmentów materiału szkolnego, gdzie spotykano się z funkcją /choć nie zawsze świadomie/, a więc funkcje w algebrze, rzutowanie w geometrii, przekształcenia geometryczne, mierzenie wielkości geometrycznych, układ współrzędnych na prostej i płaszczyźnie. W szczególności wyjaśniono, że układem współrzędnych np. na płaszczyźnie jest funkcja różnowartościowa, której polem jest zbiór punktów płaszczyzny, a której zapas jest zbiorem par liczb rzeczywistych. /Kartezjański układ współrzędnych na płaszczyźnie nie jest więc parą osi liczbowych, lecz funkcją, dla wyznaczenia której tą parą osi się posłużono/.

Omówiono następnie sposoby podawania funkcji.

1. Funkcję można podać efektywnie jako zbiór par, /zwłaszcza gdy ilość par jest skończona/.

2. Ponieważ zbiór jest podany przez wymienienie własności, według której elementy są do zbioru zaliczane, zatem wystarczy i tu podać taką własność. Ale gdy zbiór par jest funkcją, to do danego elementu jako pierwszego istnieje dokładnie jeden drugi o tej własności, że para z nich utworzona należy do funkcji. Zatem każdy drugi element /w danej funkcji/ jest jednoznacznie wyznaczony przez pierwszy element pary. Własność, o której mowa wyżej, intuicyjnie ma więc charakter "przepisu", według

którego od elementu pierwszego dochodzi się do drugiego. Taki jednoznaczny przepis określony dla elementów pewnego zbioru, nazywamy funkcyjnym. /Symbol f/x/, gdzie x oznacza miejsce puste - zmienną niezależną/. Jeżeli więc podamy zbiór A i przepis funkcyjny f/x/ określony dla elementów tego zbioru, to oczywiście funkcja o polu A zostanie określona.

3. Jeżeli podamy sam przepis funkcyjny i przez pole rozumieć będziemy zbiór tych elementów, dla których ten przepis można zastosować, to również wyznaczymy funkcję.

Tymi rozważaniami zbudowano pomost między ujęciem szkolnym, gdzie funkcją jest zespół złożony z pola i przepisu funkcyjnego, a ogólną /teoriomnogościową/ definicją funkcji.

Funkcja liczbo-liczbowa jednej, czy wielu zmiennych jest teraz szczególnym przykładem funkcji. Zbiór par liczbowych jeśli jest funkcją, nazywa się funkcją liczbo-liczbową jednej zmiennej. Jeśli pierwszymi elementami par należących do funkcji są uporządkowane układy po n liczb rzeczywistych a drugimi liczby, to funkcja jest liczbo-liczbową n zmiennych. Zauważono, że omówione poprzednio działania są funkcjami dwóch zmiennych. Posługując się ogólną definicją funkcji, rozważono dla funkcji liczbo-liczbowej jednej zmiennej omawiane w szkole pojęcia jak monotoniczność, parzystość, nieparzystość, okresowość i wykres.

Funkcja jest rosnąca /malejąca/, gdy dla każdych dwóch par do niej należących drugie liczby w parach są tak samo /przeciwnie/ nierówne, jak /niż/ pierwsze liczby w tych parach.

Funkcja jest parzysta, gdy z każdą należącą do niej parą /x,y/ należy też do niej para /-x,y/. Analogicznie określa się funkcję nieparzystą.

Funkcja nazywa się okresową, gdy istnieje taka liczba $\omega \neq 0$, że wraz z każdą parą /x,y/ należącą do tej funkcji należy też do niej para /x+ ω ,y/.

Wykresem funkcji F na płaszczyźnie Ω w danym na tej płaszczyźnie kartezjańskim układzie współrzędnych U jest zbiór tych punktów płaszczyzny Ω , których współrzędne w układzie U nalełą do F.

$$W_{F,\Omega,U} \underset{=}{df} /\hat{X}/ \left[X \text{ inc } \Omega . \left\{(X,/x,y/) \in U \equiv /x,y/ \in F\right\}\right].$$

Wszystkie te pojęcia ilustrowane były przykładami zazwyczaj "nieszkolnymi".

Dokonano następnie przeglądu znanych ze szkoły funkcji elementarnych. Odczytywano je jako zbiory par liczb rzeczywistych, w których druga liczba pary powstaje z pierwszej w sposób podany określonym przepisem funkcyjnym. Wyjaśniono, że w wypadku funkcji liczbo-liczbowej jednej zmiennej, danej za pomocą przepisu, zwrot "para /x,y/ należy do funkcji" można rozumieć, że "liczba y powstaje z x za pomocą przepisu".

Dużo czasu poświęcono na badanie zapasu każdej funkcji i ich monotoniczności. Znalazły tu zastosowanie omówione poprzednio twierdzenia o nierównościach w związku z działaniami.

Wprost ze znajomości zapasu i monotoniczności omawianych funkcji przedyskutowano równanie f/x/ = a i nierówności f/x/ $>$ a, f/x/ $<$ a /gdzie a jest daną liczbą, zaś f/x/ jest przepisem omawianej funkcji/. Chodziło o to, by z wiedzy o funkcjach uczynić narzędzie do rozwiązywania zadań /tym bardziej, że słuchacze bardzo chętnie stosowali recepty dla rozwiązywania nierówności tam, gdzie można było prostym rozumowaniem ominąć rachunek/.

Zwrócono uwagę na to, że w szkole, choć nie kładziono na ten fakt nacisku, omawiano najpierw funkcje dwóch zmiennych /działania/. Regułę przyporządkowania podawano przy nich słownie.

Działanie o jest zbiorem par postaci $[/x,y/,z]$, gdzie /x,y/ jest parą liczbową, zaś z jest liczbą. Można oczywiście rozważyć taki podzbiór tego zbioru par, że w każdej parze podzbioru będzie x = a /a dana liczba dopuszczalna w działaniu o /. Z każdej pary $[/a,y/,z]$ tego podzbioru możemy utworzyć parę liczb rzeczywistych /y,z/, zaś zbiór tak utworzonych par jest funkcją liczbową jednej zmiennej. Można analogicznie utworzyć drugą funkcję ustalając y = b. Jest rzeczą widoczną, że w ten sposób tworzone są z działań funkcje elementarne, rozważane w szkole. Nie wszystkie rodziny funkcyj, jakie na tej drodze można uzyskać, były w szkole przedmiotem zainteresowania. /Np. nie była w szkole rozważana funkcja utworzona z logarytmowania przez ustalenie liczby logarytmowanej/. W szkole wyglądało to w ten sposób, że wprowadziwszy zapis x o y przepisu funkcyjnego jakiegoś działania, gdzie /x,y/ jest parą miejsc pustych, przepisy funkcji elementarnych jednej zmiennej / $a \circ x$, x^n, $\sqrt[n]{x}$, a^x, $\log_p x$; tylko x oznacza miejsce puste/ otrzymano z przepisu działania ustalając wartość jednej ze zmiennych.

Omówiono również działania na funkcjach, dzięki którym z elementarnych funkcyj otrzymuje się bardziej skomplikowane. Dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie funkcyj liczbo-liczbowych określano, posługując się ogólną definicją funkcji /zbiór par/, a następnie stosowano określenia do przypadku, gdy funkcje podane są za pomocą przepisów. Rozważono również składanie funkcyj jednej i wielu zmiennych, gdyż funkcje złożone odgrywają istotną rolę w teorii rozwiązywania równań.

Pojęcie funkcji i zagadnienia z nim związane, podobnie jak własności relacji, ilustrowane były za pomocą grafów.

Na zakończenie powtórki wiadomości o funkcjach omówiono pojęcie funkcji odwrotnej. Punktem wyjścia było pytanie: czy gdy zbiór par elementów jest funkcją, to i zbiór par do nich odwrotnych jest też funkcją? Słuchacze sami stwierdzili, że odpowiedź jest pozytywna wtedy i tylko wtedy, gdy dana funkcja jest różnowartościowa. Zbiór par odwrotnych do par należących do danej funkcji różnowartościowej nazwano funkcją do niej odwrotną. Sprawdzenie, że funkcje wykładnicza i logarytmiczna o tej samej podstawie są wzajemnie odwrotne, sprowadziło się do wykazania równości dwóch zbiorów. Mianowicie, skoro funkcja odwrotna do wykładniczej jest zbiorem par postaci $/a^x,x/$, gdzie x jest dowolną liczbą, zaś funkcja logarytmiczna o tej samej podstawie zbiorem par postaci $/u, \log_a u/$, gdzie u jest dowolną liczbą dodatnią, to pozostało udowodnić, że te zbiory par liczbowych są identyczne. Dla oswojenia studentów z pojęciem funkcji odwrotnej dowodzono np., że funkcja odwrotna do monotonicznej jest tak samo monotoniczna. Zauważywszy, że punkty o współrzędnych /x,y/, /y,x/ są symetryczne względem "dwusiecznej pierwszej i trzeciej ćwiartki układu" otrzymano sposób tworzenia wykresu funkcji odwrotnej z wykresu funkcji danej. Wyjaśniono też, jak tworzy się przepis funkcji odwrotnej, gdy dana jest różnowartościowa funkcja liczbo-liczbowa jednej zmiennej za pomocą przepisu.

4. <u>Równania i nierówności warunkowe</u>

Zagadnienie równań i nierówności warunkowych potraktowano możliwie jednolicie, wypowiadając /o ile można było/ definicje i twierdzenia dla równań i nierówności jednej i wielu zmiennych równocześnie. Wykładający podawał np. jakąś definicję dla równania, a słuchacze formułowali analogiczną dla nierówności.

Równanie określono jako warunek zdaniowy postaci:

$$f/X/ = g/X/ \ ^{1/},$$

gdzie f/X/ i g/X/ są przepisami funkcyj liczbo-liczbowych tych samych zmiennych. Analogicznie określono nierówności warunkowe.

Omówione zostały trzy metody rozwiązywania równań i nierówności, a to: metoda analizy starożytnych równań i nierówności równoważnych i metoda graficzna. Metoda graficzna była zresztą już uprzednio rozważana przy odczytywaniu własności funkcji z jej wykresu. Zwrócono uwagę, że w szkole odnośnie równań rozumowano zazwyczaj metodą

1/ Litera x oznacza pojedynczą zmienną, zaś X oznacza pojedynczą zmienną, lub układ n zmiennych, zależnie od tego, ilu zmiennych funkcję rozważamy.

analizy starożytnych i że tzw. "metody rozwiązywania układów równań" były tylko sposobami stosowanymi dla specjalnych układów w ramach metody analizy starożytnych.

Wśród twierdzeń o równaniach równoważnych szczególny nacisk położono na następujące [1]:

Zał. $F/X/ = 0$ jest równaniem

$F/X/ = f\left[g/X/\right]$ /czyt. $F/X/$ jest przepisem funkcji złożonej z funkcyj o przepisach $f/x/$ i $g/X/$

Równanie $f/x/ = 0$ ma pierwiastki $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Teza: $F/X/ = 0 \equiv g/X/ = a_1 \vee g/X/ = a_2 \vee \ldots \vee g/X/ = a_k$.

Twierdzenie to i analogiczne dla układów równań stanowią podstawę tzw. "metody niewiadomej pomocniczej".

Rozważono również twierdzenia o równoważnych układach równań stanowiące podstawę do "ulegalnienia" w ramach metody równań równoważnych - szkolnych metod rozwiązywania układów równań. Dowodzenie równoważności równań, czy nierówności sprowadzało się do wykazania równości zbiorów złożonych odpowiednio z elementów spełniających dane dwa warunki zdaniowe.

Dokonując przeglądu rozwiązywanych w szkole równań stwierdzono, że przy każdej omawianej tam funkcji $f/x/$ rozwiązywano następujące równania.

1/ $f/x/ = a$. /a dana liczba/.

2/ $f\left[g/x/\right] = f\left[h/x/\right]$, gdzie $g/x/$ i $h/x/$ są przepisami funkcyj poprzednio znanych.

3/ $g\left[f/x/\right] = 0$, gdzie $g/x/$ jest przepisem funkcji poprzednio znanej.

1/ Analogiczne twierdzenie sformułowano dla nierówności równoważnych.

Rozwiązanie równania postaci 2/ wobec wiadomości o równaniu postaci 1/ sprowadza się do rozwiązania równania, w którym występują tylko przepisy funkcyj wcześniej znanych. Na podstawie cytowanego wyżej twierdzenia, dla rozwiązania równania postaci 3/ wystarczy rozwiązać równanie postaci 1/ z funkcją g/x/ i alternatywę kilku takich równań z funkcją f/x/.

Czytelnik zauważy, że większość rozwiązywanych w szkole równań wykładniczych, logarytmicznych i trygonometrycznych należy albo wprost do tych typów, albo sprowadza się do nich po zastosowaniu najprostszych twierdzeń o równoważności. Podstawowe zaś znaczenie dla rozwiązywania takich równań, czy nierówności ma znajomość zapasu i monotoniczności omawianych funkcyj.

Poświęcono też nieco uwagi równaniom /nierównościom/ postaci 1/, gdy rozważana funkcja jest okresowa. W dyskusji ze słuchaczami wyjaśniono, że sposób ich rozwiązania wygląda następująco:

a/ dowodzi się, że każdy pierwiastek można otrzymać z pierwiastków zawartych w dowolnie obranym przedziale $[\alpha,\beta]$ o długości równej okresowi funkcji,

b/ znajduje się wszystkie pierwiastki równania /nierówności/ w przedziale $[\alpha,\beta]$,

c/ z każdego otrzymanego w b/ pierwiastka tworzy się zbiór pierwiastków dodając do niego całkowite wielokrotności okresu.

Przedział $[\alpha,\beta]$ można wybrać dowolnie, zatem w praktyce /np. dla funkcyj trygonometrycznych/ wybieramy go możliwie najwygodniej.

Uwagi

1. W toku całego kursu prowadzono rozważania możliwie ogólne i stosunkowo mało czasu poświęcano zadaniom rachunkowym.
2. Każde ogólne pojęcie, o którym mówiono, ukazywano równocześnie we wszystkich partiach materiału szkolnego, gdzie było ono używane.
3. W szkolnych rozumowaniach doszukiwano się wspólnych idei np. dowodzenie równości zbiorów przy miejscach geometrycznych, przy badaniu zapasu funkcji, wykresu funkcji, przy badaniu równoważności równań.
4. Wydaje się, że niektóre z opisanych tu sposobów ujęcia można by z powodzeniem zastosować w szkole średniej.

Summary

On one conception of elementary mathematics repetition for the first year of WSP studies

This paper contains one conception of elementary mathematics repetition for the first year of WSP studies. The author takes modern ideas and synthetic approach in school mathematics into account.

Краткое изложение

О некотором способе повторения элементарной математики на первом году обучения в В.П.Ш.

В этой статье представлена некоторая концепция повторения элементарной математики для студентов первого года обучения в В.П.Ш. Автор принимает во внимание современные понятия даже синтетическое мышление в школьной математике.